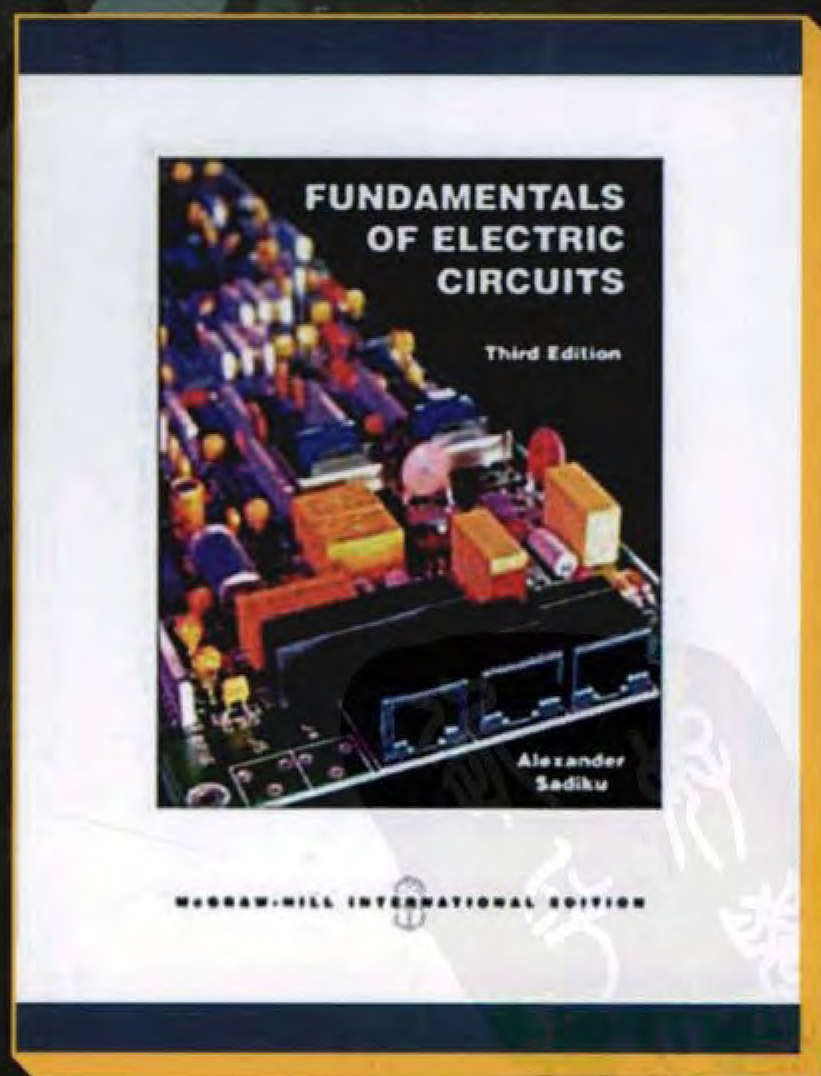
TURING 图灵电子与电气工程丛书

Mc Graw Hill Education

电路基础（第3版）

Fundamentals of Electric Circuits (Third Edition)

[美] Charles K. Alexander
Matthew N.O. Sadiku 著
关 欣 宋晓炜
杨 蕾 杨爱萍 等译
李 锵 审校





人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

Fundamentals of Electric Circuits
(Third Edition)

电路基础（第3版）

"Alexander和Sadiku是真正的教育家……除了用最简洁易懂的方式全面介绍电路基础知识之外，他们还寓知识于趣味中，从一开始就培养学生对工程学的兴趣，充分调动了学生学习的主动性、积极性。"

——Amazon.com

"这是我工作多年后还经常查阅的电路基础知识参考书，它全面、脉络清晰，更难能可贵的是，书中列举了大量PSpice和MATLAB软件设计例题，将理论与实际完美结合，不但为在校学生打下了坚实的实战基础，也为像我这样的工程人员指明了工作思路。"

——Amazon.com

本书是一本经典的电路基础教材，自第1版出版以来，好评不断，被国际知名高校广泛采用，也被工程师奉为必备电路基础知识参考指南。

本书以电路基础知识、电路分析方法为主体，辅以适量的典型例题和实际应用问题，并穿插介绍电子工程相关历史人物与知识，旨在改变以往枯燥的电路分析课程教学，引领新时代教材改革。全书分为直流电路篇、交流电路篇与高级电路分析篇，层次分明，章节安排合理，囊括了学生需要掌握的所有常用数学公式和物理基本原理，不但是高等院校电类专业学生的理想教材，也是相关技术人员的参考大全。



Charles K. Alexander 博士，世界知名教育家，IEEE会士，美国俄亥俄州克利夫兰州立大学Fenn工学院电气与计算机工程系系主任，同时兼任两个技术研究中心的主任。他曾任IEEE主席和CEO，于1984年获得IEEE百年纪念奖章，还先后荣获英国工程委员会颁发的杰出工程教育成就奖和杰出工程教育领导奖。除了教学和科研工作，Alexander博士还是多家公司和政府机构的技术顾问，发表过500余篇论文和技术报告，出版过40余部著作。



Matthew N.O. Sadiku 博士，美国Prairie View A&M大学教授，兼任IEEE *Transactions on Education*杂志副主编。发表过百余篇学术论文，出版过20余部著作。之前曾在朗讯、波音等公司从事研发工作。

Mc Graw Hill Education
www.mheducation.com

本书相关信息请访问：图灵网站 http://www.turingbook.com
读者/作者热线：(010) 51095186
反馈/投稿/推荐信箱：contact@turingbook.com

分类建议：电子电气/电路
人民邮电出版社网址 www.ptpress.com.cn





ISBN 978-7-115-20121-8/TN
定价：129.00 元

前　言

本书的特点

前一版的保留特色

本书的主要目标与第1版和第2版相同——以较其他教科书更为清晰、更为有趣、更易于理解的方式讲授电路分析，同时帮助学生从一开始就培养对工程学的"兴趣"。这一目标的实现有赖于如下若干途径。

章节开场白与本章小结

每一章开始都会讨论如何增强解决问题技能，并探讨电子工程子学科的成功职业或职业取向。之后的引言部分将本章内容与前面章节的内容衔接起来，同时提出本章学习的主要目的。各章结尾总结了本章要点和相关的公式。

解决问题的方法论

第1章介绍了贯穿本书的电路分析六步法，以及促进问题求解的补充资料。

面向学生的友好写作风格

书中所有的基本原理均以清晰、条理、渐进的方式予以说明，尽可能避免赘述，避免讲述过多可能掩盖概念、妨碍整体内容理解的细节。

公式框与关键术语

教材中的重要公式均加以方框，以帮助学生分清主次，同时，可以确保学生清楚地理解关键问题。关键术语均给以明确的定义，并用突出的字体表示出来。

典型例题

每一节的后面都给出了若干典型例题，它们是本教科书的重要组成部分，并对每道例题作出了清楚的讲解。这些典型例题可以帮助学生更好地理解解题过程，有助于培养学生独立解决问题的自信心。部分例题给出了二三种解法，以便学生比较不同的解题方法，加深对所学内容的理解。

练习题

为了给学生提供实践的机会，紧接典型例题安排了一道提供答案的练习题，学生可以按照例题中的步骤来求解练习题，无需到别处查阅或者翻看书末的答案。这样安排的练习题还可以检查学生对前述例题的理解程度，从而在学习下一节内容之前进一步加强对本节内容的掌握。学生可以通过ARIS获得练习题的完整求解过程。

应用

各章的最后一节专门介绍与本章概念相关的实际应用，每一章至少提供一两个实际应用问题或实际器件，帮助学生了解如何将所学概念应用于实际系统中。

复习题

每一章的结尾还给出了带有答案的多项选择题作为复习题。这些复习题的目的是提供典型例题或章末习题中未涉及的一些解题的小"窍门"，可以将其作为自测练习，同时也可以帮助学生了解自己对本章内容的掌握程度。

计算机工具

按照ABET®对集成计算机工具的要求，鼓励学生使用PSpice、MATLAB以及电路KCIDE等计算机辅助分析软件。本教材较早地介绍了PSpice软件，帮助学生熟练掌握这一软件，本教材通篇使用

该软件。本教材也介绍了MATLAB软件。电路的KCIDE平台对本书而言是全新的，该软件是一款先进的软件系统，用于帮助学生提高其成功解题的可能性。

史料精选

全书的历史评注描述了电子工程相关的重要先驱人物和历史事件。

运算放大器的较早讨论

本教材较早介绍了构成电路的基本元件——运算放大器（op amp）。

傅里叶变换与拉普拉斯变换

为了方便读者从电路课程向信号与系统课程的过渡，本书简明而全面地介绍了傅里叶变换与拉普拉斯变换。感兴趣的教师可以从讲述一阶电路求解的内容过渡到第15章，这样也就非常自然地从拉普拉斯变换过渡到交流傅里叶分析。

第 3 版的新特色

电路分析课程可能是电子工程专业学生的第一门专业基础课，这一版包括了若干新的特征，以帮助学生掌握本课程的主要内容。

扩展的例题

按照六步解题法介绍的典型例题为学生提供了解题的统一途径，每章至少有一道例题以这种方式讲解。

EC 2000章节开场白

根据ABET最新技能标准3，各章的开场白专门讨论学生应该如何掌握今后能够有效拓展工程师职业生涯所需的技能。因为这些技能对于学生在学校和今后的工作中都是非常重要的，因此这部分内容采用标题“增强技能，拓展职业生涯”。

课后习题

第3版新增了300余道课后习题，帮助学生更好地掌握关键概念，同时为学生提供了更多的练习。

课后习题图标

与工程设计有关的习题以及能够利用PSpice或MATLAB求解的习题均采用图标予以标识。

教材的组织结构

本书可以作为两或三学期的线性电路分析课程的教材。教师也可以选择适当的章节，将其用作一学期课程的教材。全书可以分为三个部分。

- 第一部分包括第1～8章，主要介绍直流电路，包括电路的基本定律与定理，电路分析方法以及有源元件与无源元件等内容。
- 第二部分包括第9～14章，主要介绍交流电路，包括相量、电路的正弦稳态分析、交流功率、交流电的有效值、三相系统以及频率响应等内容。
- 第三部分包括第15～19章，主要介绍高级网络分析方法，对拉普拉斯变换、傅里叶级数、傅里叶变换以及双口网络分析等内容。

这三部分所包含的内容已超出了两学期课程的需要，因此教师应根据需要选择必要的章节。书中带剑号（†）的各节内容可以略去不讲或者简要讲解，也可以作为学生的作业。省略这些并不会影响内容的连贯性。各章都安排有按节编排的大量习题，教师可以选择其中一些作为课堂例题，另外一些作为课后作业。

如前所述，这一版教材采用了三种图标。PSpice图标标识需要利用PSpice求解的习题，这类习题的电路比较复杂，利用PSpice后可以使求解过程变得更容易。另外，需要利用Pspice验证结果正确性的习题也标有PSpice图标。MATLAB图标标识需要利用MATLAB求解的习题、使用MATLAB求解更

有效的复杂习题，以及需利用MATLAB验证结果正确性的习题。最后，设计图标标识有助于培养学生工程设计技能的习题。难度较大的习题前都标有星号（*）。综合性习题安排在每章最后，它们绝大多数是应用性问题，需要利用本章学到的各种解题技能。

对先修课程的要求

作为电路分析的基础课程，在学本书之前需要先修物理学与微积分学。虽然熟悉有关复数的知识对学习本书后半部分内容有所帮助，但它并不是必须掌握的内容。本书最重要的优势在于，学生需要掌握的所有数学公式以及物理基本原理都包括在其中。

补充资源

麦格劳-希尔 ARIS（Assessment，Review，and Instruction System）——评价、复习与教学系统。这是一套完整的具有在线辅导、电子作业以及课程管理功能的系统，使用起来较现有的其他系统更方便。教师可以免费使用该系统，并与其他教师共享课程资料与作业，也可以编辑问题与算法，输出各自的内容，发表公告以及提交作业的日期。ARIS 系统具有作业、测试与试验的自动评分与报告功能。学生注册课程后，在麦格劳-希尔 ARIS 系统内的所有活动都将被自动记录下来，而且教师可以通过可下载为 Excel 的全集成评价手册获取这些记录。另外，ARIS 系统中还包括习题解答手册、教材图片文件、教学指导、网络分析辅导、软件下载、练习题的完整解答、FE 考试问题、抽认卡以及网站链接。可访问网站 www.mhhe.com/alexander。

电路的知识捕获集成设计环境（KCIDE，Knowledge Capturing Integrated Design Environment）。这款由 NASA 资助、克利夫兰州立大学（Cleveland State University）开发的软件，利用教材中的六步问题求解方法帮助学生学习电路问题。电路 KCIDE 软件允许学生利用 PSpice 和 MATLAB 解决电路问题，跟踪解题过程，并存储解题过程供以后参考。另外，该软件可以自动生成 Word 文件以及 PowerPoint 演示文件。更多例题参见 ARIS 提供的链接网站 http://kcide.fennresearch.org/。该软件包也可以免费下载。

解题变得更容易。希望练习求解问题方法的学生可以通过 ARIS 获得与本书配套的练习册，该练习册包括问题求解方法的讨论，以及 150 道含完整解答过程的习题。

虽然本教材编写的目的不言而喻是作为学生学习的指导，但并没有遗忘教学过程中的个别辅导。希望本书及补充资料能够为教师提供有效组织教学所需的全部教辅工具。

致谢

在本书出版之际，我们首先要感谢来自妻子（Hannah与Kikelomo）、女儿（Christina、Tamara、Jennifer、Motunrayo、Ann和Joyce）、儿子（Baixi）以及其他家庭成员的鼎力支持。

接下来要感谢为本书的编辑、出版付出辛勤工作的麦格劳-希尔出版集团的朋友，他们是出版人Suzanne Jeans，高级责任编辑Michael Hackett，高级策划编辑Michelle Flomenhoft与Katie White，项目经理Peggy Lucas与Joyce Watters，排版人员Carrie Burger，设计师Rick Noel，以及GTS公司的自由撰稿人Pamela Carley、George Watson和Vijay Kataria。同时，要感谢阿克伦大学（University of Akron）的Tom Hartley为本书各部分的细致评价所付出的努力。

我们要对Yongjian Fu和由他的学生Bramarambha Elka、Saravaran Chinniah组成的杰出团队为开发电路KCIDE软件所付出的努力致以诚挚的谢意，正是他们的辛勤劳动才使该软件能够不断改进。再次表示衷心的感谢。

本书第3版的顺利出版在很大程度上还得益于以下审校专家（按字母顺序排列）的详细审核。

Jean Andrian，弗罗里达国际大学（Florida International University）

Jorge L.Aravena，路易斯安那州立大学（Louisiana State University）
Les Axelrod，伊利诺伊理工学院（Illinois Institute of Technology）
Alok Berry，乔治梅森大学（George Mason University）
Tom Brewer，佐治亚理工学院（Georgia Institute of Technology）
Susan Burkett，阿肯色大学（University of Arkansas）
Rich Christie，华盛顿大学（University of Washington）
Arunsi Chuku，塔斯基吉大学（Tuskegee University）
Thomas G. Cleaver，路易斯维尔大学（University of Louisville）
Randy Collins，克莱姆森大学（Clemson University）
David Dietz，新墨西哥大学（University of New Mexico）
Bill Diong，得克萨斯大学埃尔帕索分校（The University of Texas at El Paso）
Shervin Erfani，温莎大学（University of Windsor）
Alan Felzer，加利福尼亚州立理工大学波莫纳分校（California State Polytechnic University, Pomona）
Bob Grondin，亚利桑那州立大学（Arizona State University）
Bob Hendricks，弗吉尼亚理工大学（Virginia Polytechnic Institute and State University）
Sheila Horan，新墨西哥州立大学（New Mexico State University）
Hans Kuehl，南加利福尼亚大学（University of Southern California）
Jack Lee，得克萨斯大学奥斯汀分校（University of Texas，Austin）
Long Lee，圣地亚哥州立大学（San Diego State University）
Sam Lee，俄克拉荷马大学（University of Oklahoma）
Jia Grace Lu，加利福尼亚大学欧文分校（University of California，Irvine）
Hamid Majlesein，南方大学农工学院（Southern University & A&M College）
Frank Merat，西储大学（Case Western Reserve University）
Shayan Mookherjea，加利福尼亚大学圣地亚哥分校（University of California，San Diego）
Mahmoud Nahvi，加利福尼亚州立理工大学圣路易斯-奥比斯波分校（California Polytechnic State University，San Luis Obispo）
Scott Norr，明尼苏达大学德卢斯分校（University of Minnesota，Duluth）
Barbara Oakley，奥克兰大学（Oakland University）
Tamara Papalias，圣何塞州立大学（San Jose State University）
Owe Petersen，密尔沃基工程学校（Milwaukee School of Engineering）
Craig Petrie，杨百翰大学（Brigham Young University）
Michael Polis，奥克兰大学（Oakland University）
Aleksandar Prodic，多伦多大学（University of Toronto）
Ceon Ramon，华盛顿大学（University of Washington）
Prentiss Robinson，加利福尼亚州立理工大学波莫纳分校（California State Polytechnic University, Pomona）
Raghu Settaluri，俄勒冈州立大学（Oregon State University）
Marwan Simaan，匹兹堡大学（University of Pittsburgh）
Robin Strickland，亚利桑那大学（University of Arizona）
Kalpathy Sundaram，中佛罗里达大学（University of Central Florida）
Russell Tatro，加利福尼亚州立大学（California State University）
Xiao Bang Xu，克莱姆森大学（Clemson University）

与此同时，我们还要向本书前几版的审校专家致以诚挚的谢意，他们为本书的成功出版作出了重要的贡献。

Bogdan Adamczyk，格兰谷州立大学（Grand Valley State University）
Keyvan Ahdut，哥伦比亚特区大学（University of the District of Columbia）
Hamid Allamehzadeh，东新墨西哥大学（Eastern New Mexico University）
Jorge L. Aravena，路易斯安那州立大学（Louisiana State University）
Idir Azouz，南犹他大学（Southern Utah University）
John A. Bloom，比奥拉大学（Biola University）
Kiron C. Bordoloi，路易斯维尔大学（University of Louisville）
James H. Burghart，克利夫兰州立大学（Cleveland State University）
Phil Burton，利默瑞克大学（University of Limerick）
Edward W. Chandler，密尔沃基工程学校（Milwaukee School of Engineering）
Amit Chatterjea，普度大学韦恩堡分校（Purdue University，Fort Wayne）
Erik Cheever，斯沃斯莫尔学院（Swarthmore College）
Fow-Sen Choa，马里兰大学巴尔的摩分校（University of Maryland，Baltimore County）
Chiu H. Choi，北佛罗里达大学（University of North Florida）
Thomas G. Cleaver，路易斯维尔大学（University of Louisville）
Michael J. Cloud，劳伦斯技术大学（Lawrence Technological University）
Mehmet Cultu，甘农大学（Gannon University）
Saswati Datta，马里兰大学巴尔的摩分校（University of Maryland，Baltimore County）
Mohamed K. Darwish，英国布鲁奈尔大学（Brunel University，United Kingdom）
Shirshak Dhali，南伊利诺伊大学（Southern Illinois University）
Kevin D. Donohue，肯塔基大学（University of Kentucky）
Fred Dreyfus，佩斯大学（Pace University）
Amelito G. Enriquez，加拿大学院（Cañada College）
Ali Eydgahi，马里兰大学东岸分校（University of Maryland，Eastern Shore）
Gary K. Fedder，卡内基梅隆大学（Carnegie Mellon University）
Cynthia J. Finelli，凯特灵大学（Kettering University）
Rob Frohne，沃拉沃拉学院（Walla Walla College）
Andreas Fuchs，宾夕法尼亚州立大学（Pennsylvania State University Erie）
Tayeb A. Giuma，北佛罗里达大学（University of North Florida）
Chandrakanth H. Gowda，塔斯基吉大学（Tuskegee University）
Duane Hanselman，缅因大学（University of Maine）
Reza Hashemian，北伊利诺伊大学（Northern Illinois University）
Hassan Hassan，劳伦斯技术大学（Lawrence Technological University）
Rod Heisler，沃拉沃拉学院（Walla Walla College）
Amelito G. Henriquez，新奥尔良大学（University of New Orleans）
H. Randolph Holt，北肯塔基大学（Northern Kentucky University）
Reza Iravani，多伦多大学（University of Toronto）
Richard Johnston，劳伦斯技术大学（Lawrence Technological University）
William K. Kennedy，新西兰坎特伯雷大学（University of Canterbury，New Zealand）
Albert M. Knebel，门罗社区学院（Monroe Community College）
William B. Kolasa，劳伦斯技术大学（Lawrence Technological University）

Roger A. Kuntz，宾夕法尼亚州伊利学院（Penn State Erie，The Behrend College）
Sharad R. Laxpati，伊利诺伊大学芝加哥分校（University of Illinois at Chicago）
Choon Sae Lee，南教会大学（Southern Methodist University）
Venus Limcharoen，泰国国立法政大学（Thammasat University）
Bin-Da Lio，中国台湾成功大学（National Cheng Kung University，Taiwan China）
Joseph L. LoCicero，伊利诺伊理工学院（Illinois Institute of Technology）
Emeka V. Maduike，纽约理工学院（New York Institute of Technology）
Claire L. McCullough，田纳西大学查塔努加分校（University of Tennessee at Chattanooga）
José Medina，纽约州立大学德里工学院（State University of New York，College of Technology at Delhi）
Damon Miller，西密歇根大学（Western Michigan University）
Martin Mintchev，卡尔加里大学（University of Calgary）
Philip C. Munro，扬斯敦州立大学（Youngstown State University）
Sarhan M. Musa，普雷里维农工大学（Prairie View A&M University）
Ahmad Nafisi，加利福尼亚州立理工大学圣路易斯-奥比斯波分校（California Polytechnic State University，San Luis Obispo）
Nader Namazi，美国天主教大学（The Catholic University of America）
Sudarshan Rao Nelatury，维拉诺瓦大学（Villanova University）
Habib Rahman，圣路易大学（Saint Louis University）
V. Rajaravivarma，中康涅狄格州立大学（Central Connecticut State University）
Hadi Saadat，密尔沃基工程学校（Milwaukee School of Engineering）
Robert W. Sherwood，盖尔曼纳社区学院（Germanna Community College）
Elisa H. Barney Smith，博伊西州立大学（Boise State University）
Terry L. Speicher，宾夕法尼亚州立大学（Pennsylvania State University）
James C. Squire，弗吉尼亚军事学院（Virginia Military Institute）
David W. Sukow，华盛顿和李大学（Washington and Lee University）
Fred Terry，基督兄弟大学（Christian Brother University）
Les Thede，北俄亥俄大学（Ohio Northern University）
Constantine Vassiliadis，俄亥俄大学（Ohio University）
Sam Villareal，得克萨斯大学达拉斯分校（The University of Texas at Dallas）
Promos Vohra，北伊利诺伊大学（Northern Illinois University）
Chia-Jiu Wang，科罗拉多大学科罗拉多泉分校（University of Colorado at Colorado Springs）
Xingwu Wang，阿尔弗雷德大学（Alfred University）
Sandra A. Yost，底特律大学（University of Detroit，Mercy）
Hewlon Zimmer，美国商船学院（U.S. Merchant Marine Academy）

最后，我们要感谢使用本书前两版的教师和学生给我们提供的反馈，希望本书也能得到这样的反馈，可随时给我们发送电子邮件，或者直接与出版商联系。Charles Alexander的联系方式是c.alexander@ieee.org，Matthew Sadiku的联系方式是sadiku@ieee.org。

C. K. Alexander 与 M. N. O. Sadiku

版 权 声 明

Charles K. Alexander and Matthew N. O. Sadiku: *Fundamentals of Electric Circuits*, 3*e*

(ISBN: 978-0-07-110582-8).

图书在版编目（CIP）数据

电路基础：第3版/（美）亚历山大（Alexander, C. K.），（美）萨迪库（Sadiku, M. N. O.）著；关欣等译. —北京：人民邮电出版社，2009. 9

（图灵电子与电气工程丛书）

书名原文：Fundamentals of Electric Circuits

ISBN 978-7-115-20121-8

I. 电… II. ①亚… ②萨… ③关… III. 电路理论 IV. TM13

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第124260号

内 容 提 要

本书讲述了电路分析的基本理论，共分为三篇：直流电路、交流电路以及高级电路分析。第一篇直流电路主要讲述电路分析的基本定律和定理、无源元件、有源元件以及一阶/二阶电路的分析方法；第二篇交流电路主要讲述相量、正弦稳态分析、交流功率分析、三相电路、磁耦合电路以及频率响应等；第三篇高级电路分析主要讲述拉普拉斯变换及其应用、傅里叶级数与傅里叶变换以及双口网络等。

本书意趣盎然，内容全面，例题习题丰富，可供高校电子电气类各专业师生使用，也可供科研人员和技术人员参考。

图灵电子与电气工程丛书

电路基础（第3版）

◆ 著　　[美] Charles K. Alexander　Matthew N. O. Sadiku
　译　　关 欣　宋晓炜　杨 蕾　杨爱萍　等
　审　校　李 锵
　责任编辑　舒 立

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街14号
　邮编　100061　　电子函件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本：787 × 1092　1/16
　印张：50.25
　字数：1487 千字　　2009 年 9 月第 1 版
　印数：1 - 3 000 册　　2009 年 9 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2007-3015号

ISBN 978-7-115-20121-8/TN

定价：129.00元

读者服务热线：（010）51095186　印装质量热线：（010）67129223

反盗版热线：（010）67171154

目　录

第一篇　直流电路

第二篇 交流电路

第一篇

直 流 电 路

第1章 基本概念

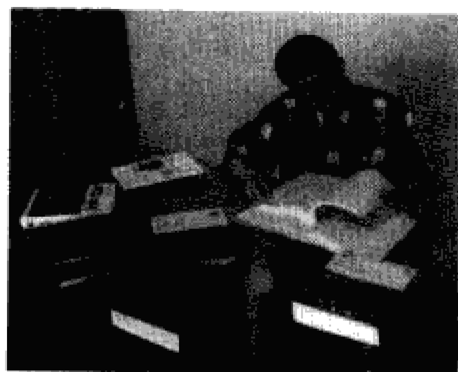
在漫长的人生历程中，我领悟到这样一个道理：所有依据事实得出的科学都是原始而又童真的，而这恰恰是我们所拥有的最珍贵的东西。

——阿尔伯特·爱因斯坦

增强技能，拓展职业生涯

ABET EC 2000标准（3.a），“应用数学、科学和工程知识的能力”

作为学生，需要学习数学、科学与工程知识，从而达到能够应用所学知识解决工程问题的目的。这里所说的技能就是利用相关领域的基础知识解决实际问题的能力。那么，如何发展并增强这样的技能呢?



查尔斯·亚历山大拍摄

最佳方法是在所学的全部课程中完成尽可能多的习题。然而，要想真正掌握这样的技能，就必须利用相当的时间分析难以轻易得到正确答案的情况以及原因。你会惊异地发现，你所求解的大部分问题都会用到数学知识，而不是对基本理论的理解，而且还会发现，开始求解问题很快。花时间考虑问题以及求解问题的方法最终会为你节省大量的时间，同时避免失败。

对于我而言，解决问题的最佳方法是六步解题法。之后我会仔细地确定解题过程中在哪儿遇到困难，但实际的问题通常在于自己对问题的理解不够以及正确运用数学原理的能力不足。这时我就会去翻阅数学教材，认真复习相关的章节，有些情况下还会演算数学教材中的某些例题。于是我的另一个重要的经验是：将所有基本的数学、科学以及工程教材放在手边。

不断查阅在先修课程中已经掌握的知识的过程，初看是非常乏味的，然而，随着技能的提高和知识的增加，这一过程会变得越来越容易。恰恰是通过这一过程，使我从一名中等以下的学生成长为一名博士，并成为一名成功的研究员。

1.1 引言

电路理论和电磁理论是电子工程的两大基础理论，电子工程的所有分支学科均是在此基础上发展起来的。电源、电机、控制、电子学、通信以及电子仪器等许多分支都是基于电路理论而发展形成的，因此，电路理论基础课程是电子工程专业最重要的课程，也是初学电子工程专业的学生的最佳起点。学习电路理论对于其他理工科专业学生也是很有意义的，因为电路通常是研究能量系统的一种很好的模型，而且其中包含了应用数学、物理学和拓扑学等诸多内容。

在电子工程中，通常要研究从一点到另一点的通信或能量传递，为此，就需要将若干电子器件相互连接起来实现这一功能。这种由电子器件相互连接构成的总体称为电路(electric circuit)，电路中的每个组成部分称为元件(element)。

电路是指由电子元件相互连接构成的总体。

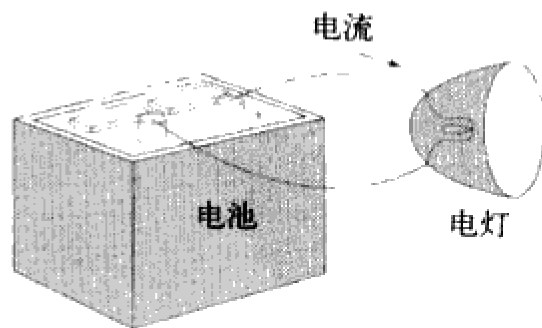


图 1-1 一个简单的电路

一个简单的电路如图1-1所示，由三个基本元件组成，电池、灯泡和连接导线。这样一个简单的电路可以单独存在，它有一

些应用，比如手电筒、探照灯等。

一个复杂的真实电路图1-2所示，该电路是无线电收音机的电路原理图。虽然它看起来很复杂，但利用本书介绍的方法就可以对该电路进行分析。本书的目标是学习用于描述诸如此类电路的各种分析方法和计算机软件应用方法。

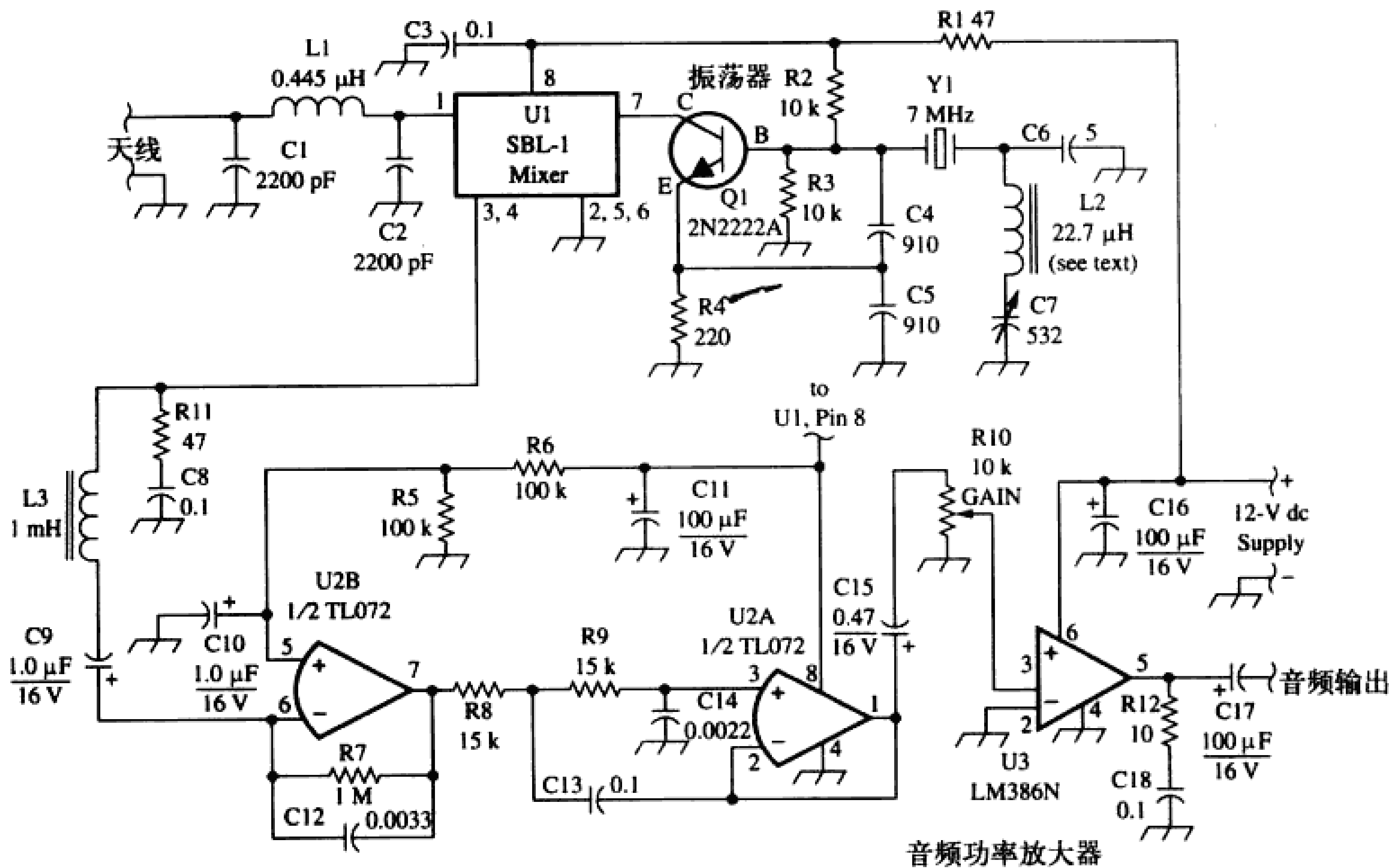


图 1-2 无线电收音机电路原理图（经 QST 许可后复制，1995 年 8 月，第 23 页）

在大量电子系统中利用各种电路可以完成不同的任务。本书的目的并不是研究各种电路的不同应用，而是专注于电路的分析。通过对电路的分析来研究电路的特性，例如，电路在给定输入信号作用下是如何响应的？电路中相互连接的元件和器件是如何相互作用的？

在开始学习之前，首先定义的一些电路的基本概念，包括电荷、电流、电压、电路元件、功率和能量等。而在定义这些概念之前，必须先建立本书所采用的计量单位制。

1.2 计量单位制

电气工程师需要处理很多可测量，但是无论测量是在哪个国家完成的，必须采用所有专业人士都能够明白的标准语言来表示测量结果。这种国际计量语言就是国际单位制（International System of Unit，SI)。国际单位制是在1960年国际度量会议上确定采用的。该计量单位制包括六个基本单位，由此可以推导出其他所有物理量的单位。表1-1给出了这六个基本单位、符号及其所表示的物理量。

表 1-1 六个基本的国际单位

量的名称	单位名称	单位符号
长度	米	m
质量	千克	kg
时间	秒	s
电流	安培	A
热力学温度	开尔文	K
发光强度	坎德拉	cd

国际单位制的一大优势在于，可以利用基于10的幂次方的词头将更大或更小的单位与基本单位联系起来，表1-2给出了国际单位制的词头及其符号。例如，以下几种形式都表示同一距离。

600 000 000 mm　　600 000 m　　600 km

表 1-2　国际单位制词头

数量级因子	词　头	符　号	数量级因子	词　头	符　号
10^{18}	艾	E	10^{-1}	分	d
10^{15}	拍（它）	P	10^{-2}	厘	c
10^{12}	太（拉）	T	10^{-3}	毫	m
10^{9}	吉	G	10^{-6}	微	μ
10^{6}	兆	M	10^{-9}	纳	n
10^{3}	千	k	10^{-12}	皮（可）	p
10^{2}	百	h	10^{-15}	飞（母托）	f
10	十	da	10^{-18}	阿（托）	a

1.3　电荷与电流

电荷的概念是解释各种电现象的基础，而且电路中最基本的物理量就是电荷（electric charge）。当人们脱掉与身体接触的羊毛衫或走在地毯上受到静电冲击时，都会体验到电荷的影响。

电荷是构成物质的原子的一种电气特性，单位是库仑（C）。

由基础物理学可知，所有物质都是由原子构成的，各个原子由电子、质子和中子组成。而且，电子所带的电荷e是负的，其电荷量为1.602×10^{-19}C，而质子所带电荷则是电荷量与电子相同的正电荷。原子中数量相等的质子和电子使得原子呈现为中性状态。

关于电荷，要注意以下三点：

（1）对于电荷而言，库仑是一个相当大的单位，1C的电荷量中包含$1/(1.602\times10^{-19})=6.24\times10^{18}$个电子。因此，实际的或实验中使用的电荷量通常是pC、nC或μC量级①；

（2）通过实验可以观察到，实际产生的电荷量仅是电子电荷量$e=-1.602\times10^{-19}$C的整数倍；

（3）电荷守恒定律（law of conservation of charge）表明，电荷既不能创造，也不能消失，只能迁移，因此一个系统中电荷量的代数和是不变的。

下面考虑电荷流。电荷的唯一特征即其可移动性，也就是说，电荷可以从一个位置迁移到另一个位置，从而转换为另一种能量形式。

当一根导线（由若干原子组成）连接到电池（电动势源）的两端时，就会迫使电荷运动，正电荷向一个方向运动而负电荷向相反方向运动，这种电荷的运动就产生了电流。习惯上，将正电荷的运动方向作为电流流动的方向，即与负电荷流动的方向相反，如图1-3所示。这种习惯上的约定是由美国的科学家和发明家富兰克林（Benjamin Franklin，1706—1790）提出的。虽然我们已经知道，金属导体中的电流是由带负电荷的电子运动而产生的，但仍然沿用大家普遍接受的约定，即认为电流是正电荷流。

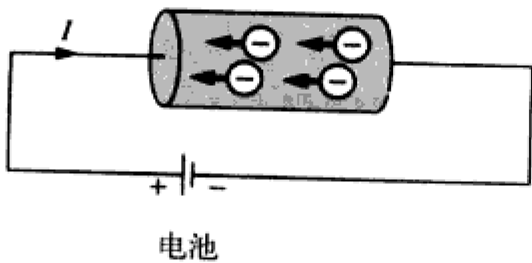


图 1-3　电荷在导体内流动所产生的电流

电流是指电荷的时间变化率，单位为安培（A）。

① 然而，一个大的供电电容器所储存的电荷量可高达 0.5C。

约定是描述某个事物的一种标准方法，这样，业内人士就能够明白我们所说的是什么意思，本书通篇采用IEEE的各种约定。

历史人物



安培（Andra-Marie Ampere，1775—1836），法国数学家和物理学家，电动力学的奠基人。19世纪20年代，他定义了电流并研究出测量电流的方法。

安培出生于法国里昂。他痴迷于数学，而许多著名的数学著作却是用拉丁文写的，所以他在12岁时，只用几个星期就掌握了拉丁文。安培是一位卓越的科学家，也是一位富有创造力的作家，他推导出许多电磁学定律，发明了电磁体和安培表，电流的单位——安培就是用他的名字命名的。

在数学上，电流i、电荷q和时间t之间的关系为：

$$\boxed{i \triangleq \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}} \tag{1-1}$$

其中，电流单位为安培，并且，

1安培=1库仑/秒

对式(1-1)两边取积分就得到由时刻t_0到t之间的电荷流量，即，

$$\boxed{Q \triangleq \int_{t_0}^{t} i\mathrm{d}t} \tag{1-2}$$

式(1-1)中定义的电流i的方式说明电流并不是个常函数，本章和后续章节中的大量例题和习题表明，电流的类型有若干种，也就是说，电荷以若干种不同的方式随时间变化。

如果电流不随时间而变化，保持恒定，则称之为直流电流（direct current，dc）。

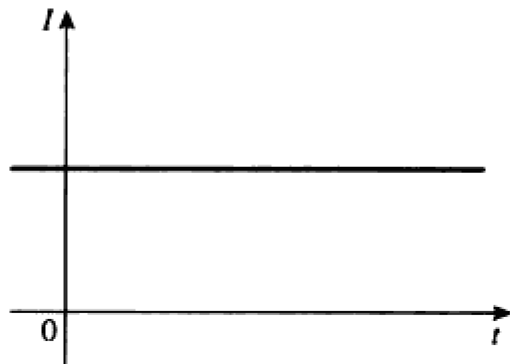
直流电流是指不随时间而变化的恒定电流。

按照约定，采用符号I来表示恒定电流。

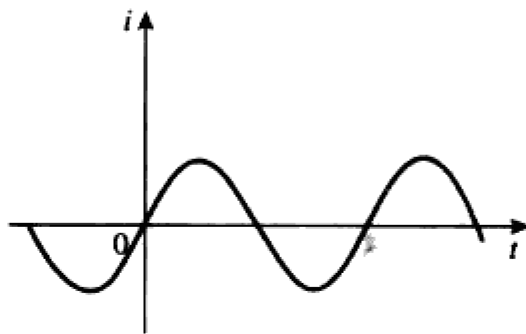
采用符号i表示随时间变化的电流，时变电流的常见形式是正弦电流或称为交流电流（alternating current，ac）。

交流电流是指随时间按正弦规律变化的电流。

诸如空调、冰箱、洗衣机以及其他家用电器等的运行均采用交流电。图1-4给出了两类最常见的电流：直流电和交流电。本书随后还将讨论其他形式的电流。



(a) 直流电流(dc)



(b) 交流电流(ac)

图 1-4 两类常见的电流

由于定义电流是电荷的运动，所以电流就要有相应的流动方向。如前所述，习惯上取正电荷运动的方向作为电流流动的方向。基于这一约定，一个5A的电流既可以表示为正的，也可以表示为负的，如图1-5所示。换句话说，图1-5b中沿某个方向流动的－5A的负电流与沿相反方向流动的＋5A的正电流是一样的。

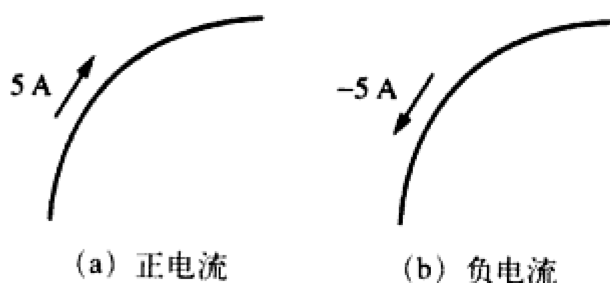


图 1-5 电流方向的约定

例题1-1 4 600个电子带多少电荷量？

解 一个电子的电荷量为 -1.602×10^{-19}C，因此4 600个电子的电荷量为 -1.602×10^{-19}C/电子 × 4 600电子 = -7.369×10^{-16}C。

练习题1-1 计算2 000 000个质子所带的电荷总量。

答 $+3.204\times1\,010^{-13}$C。

例题1-2 如果流入某个端点的总电荷由$q=5t\sin4\pi t$ mC确定，试计算$t=0.5$ s时的电流。

解 $i=\dfrac{dq}{dt}=\dfrac{d}{dt}(5t\sin4\pi t)$ mC/s $=(5\sin4\pi t+20\pi t\cos4\pi t)$ mA

当$t=0.5$ s时，

$i=5\sin2\pi+10\pi\cos2\pi=0+10\pi=31.42$ mA。

练习题1-2 在例题1-2中，如果$q=(10-10e^{-2t})$ mC，试求$t=0.5$ s时的电流。

答 7.36 mA。

例题1-3 如果流过某个端点的电流$i=(3t^2-t)$ A，试确定$t=1$ s与$t=2$ s之间流入该端点的电荷总量。

解

$$Q=\int_{t=1}^{2} i\,dt=\int_{1}^{2}(3t^2-t)dt$$

$$=\left(t^3-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=(8-2)-\left(1-\frac{1}{2}\right)=5.5\text{C}$$

练习题1-3 若流过某个元件的电流

$$i=\begin{cases}2\text{A}, & 0<t<1\\ 2t^2\text{A}, & t>1\end{cases}$$

试计算从$t=0$到$t=2$ s流入该元件的电荷量。

答 6.667 C。

1.4 电压

前一节曾简要说明，要使导体内的电子向某个方向运动，就需要功或能量的转换，即需要外接电动势（external electromotive force，emf）的推动，典型电动势如图1-3所示的电池。电动势又称为电压（voltage）或电位差（potential difference）。电路中a、b两点之间的电压v_{ab}是指将单位电荷从点a移动至点b所需要的能量（即所做的功）。在数学上可以表示为：

$$v_{ab}\triangleq\frac{dw}{dq} \tag{1-3}$$

其中，w为能量，单位是焦耳（J），q为电荷，单位是库仑，电压v_{ab}简写为v，单位是伏特（V），是为了纪念首先发明伏打电池的意大利物理学家伏特（Alessandro Antonio Volta，1745—1827）而以他的

名字命名的。由式(1-3)显然得到：

$$1\text{ 伏特}=1\text{ 焦耳/库仑}=1\text{ 牛顿·米/库仑}$$

因此，

电压（即电位差）是指使得单位电荷通过某个元件所需的能量，单位是伏特。

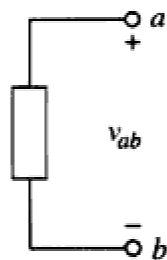


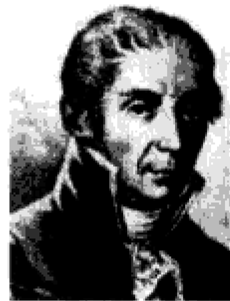
图 1-6 电压 v_{ab} 的极性

图1-6图示出跨接于a、b两点之间元件（用矩形方框表示）上的电压，正号（+）和负号（−）用于定义参数方向或电压的极性，v_{ab}可以用如下两种方式来解释：(1) 点a的电位比点b的电位高v_{ab}伏；(2) 相对于点b而言，点a的电位是v_{ab}。一般地，下述等式成立：

$$v_{ab}=-v_{ba} \tag{1-4}$$

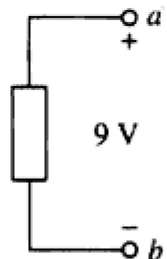
历史人物

伏特（Alessandro Antonio Volta，1745—1827），意大利物理学家，最先发明了能够提供连续电流的电池和电容器。

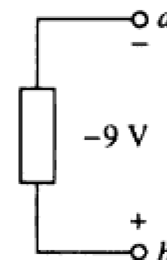


伏特出生于意大利科摩的一个贵族家庭。18岁时就开始做电路试验。他于1796年发明的电池是对电能利用的一次变革。他于1800年发表的著作开创了对电路理论的研究。伏特一生中赢得了众多荣誉。电压或电位差的单位——伏特就是以他的名字命名的。

例如，图1-7中给出了同一电压两种不同的表示方法。图1-7a中，点a高于点b +9V，图1-7b中，点b高于点a −9V。也可以说，在图1-7b中，从点a到点b有9V的电压降（voltage drop），或者等效地，从点b到点a有9V的电压升（voltage rise），换言之，从点a到点b的电压降等效于从点b到点a电压升。



(a) 点a高于点b 9 V



(b) 点b高于点a −9 V

图 1-7 同一电压 v_{ab} 的两种等效表示方法

应该记住的是，电流总是流经某个元件，而电压总是跨接在某个元件两端或两点之间。

电流和电压是电路中的两个基本变量。在传递信息的过程中，常用术语信号（signal）来表示电流、电压（乃至电磁波）等电量。由于这些电量在通信和其他学科中非常重要，所以工程技术人员习惯将这些变量称为信号，而不只是随时间变化的数学函数。与电流一样，将恒定的电压称为直流电压（dc voltage），用V表示，而将随时间按正弦规律变化的电压称为交流电压（ac-voltage），用v来表示。直流电压通常由电池产生，而交流电压通常由发电机产生。

1.5 功率与能量

虽然电流和电压是电路中的两个基本量，但仅利用这两个变量还远远不够。出于实用的目的，我们需要知道电子设备能够处理多大的功率（power）。人们都知道，100W的灯泡要比60W的灯泡亮得多，同样，我们也知道，使用和消耗了电能，就要向供电公司缴纳电费。因此，功率和能量的计算在电路分析中是非常重要的。

为了得到功率和能量与电压和电流之间的关系，需回顾如下物理学知识：

功率是消耗或吸收能量的时间变化率，单位为瓦特（W）。

这一关系的数学表达式为：

$$p \triangleq \frac{dw}{dt} \tag{1-5}$$

其中，p为功率，单位是瓦特(W)，w为能量，单位是焦耳 (J)，而t为时间，单位是秒(s)。由式(1-1)、式(1-3)和式(1-5)可得：

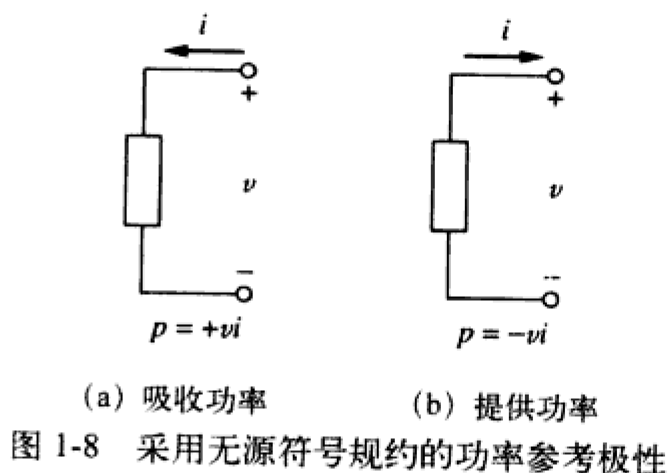
$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \times \frac{dq}{dt} = vi \tag{1-6}$$

即

$$p = vi \tag{1-7}$$

式(1-7)中的功率p是一个时变量，称为*瞬时功率*（instantaneous power）。因此，元件吸收或提供的功率是元件两端的电压与流过该元件的电流的乘积。如果功率为正号（+），则该元件传递或吸收功率。反之，如果功率为负号（−），则该元件提供功率。但怎样才能知道功率何时为负、何时为正呢？

确定功率正负号的主要关键是电流的方向和电压的极性。因此，图1-8a中电流i于电压v之间的关系非常重要，为使功率为正号，电压极性与电流方向之间的关系必须与图1-8a一致。这就是*无源符号规约*(passive sign convention)。按照无源符号规约，电流从电压的正极流入元件，在这种情况下，$p = +vi$或$vi > 0$，表示元件吸收功率。反之如图1-8b所示，$p = -vi$，或$vi < 0$，表示元件释放或提供功率。



（a）吸收功率　　（b）提供功率

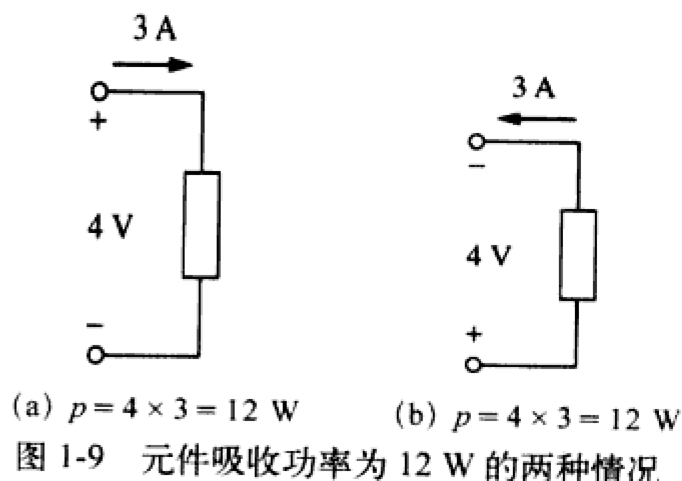
图 1-8　采用无源符号规约的功率参考极性

当电压和电流方向与图1-8b一致时，得到有源符号规约，且$p = +vi$。

当电流通过元件的正端流入时满足无源符号规约，且$p = +vi$；如果电流通过元件的负端流入，则$p = -vi$。

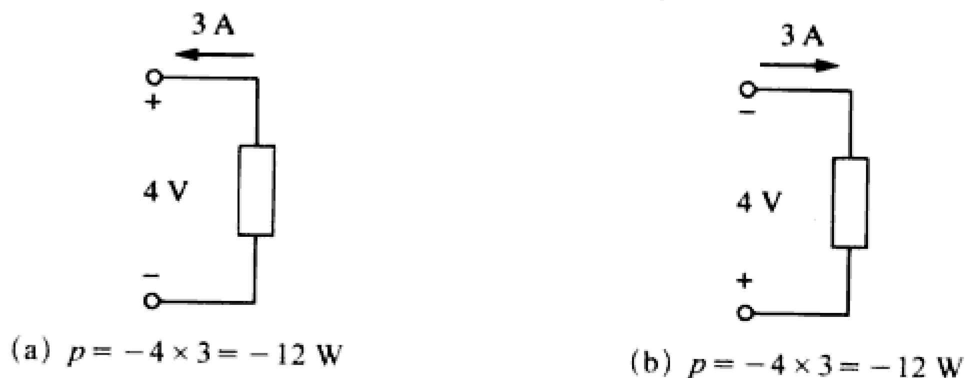
除特别说明外，本书遵循无源符号规约来确定功率的符号。例如，在图1-9所示的两个电路中，因为正电流均从元件的正端流入，所以元件都吸收+12 W的功率；但在图1-10所示的两种情况下，因为正电流均从元件的负端流入，所以元件都提供+12 W的功率。因此吸收−12W的功率等效于释放+12 W的功率。一般而言，

+吸收功率 = −释放功率



（a）$p = 4 \times 3 = 12$ W　　（b）$p = 4 \times 3 = 12$ W

图 1-9　元件吸收功率为 12 W 的两种情况



（a）$p = -4 \times 3 = -12$ W　　（b）$p = -4 \times 3 = -12$ W

图 1-10　元件提供功率为 12 W 的两种情况

事实上，任何电路都必须遵守能量守恒定律（law of conservation of energy），因此，任何时刻电路中功率的代数和必须为零：

$$\boxed{\sum p = 0} \tag{1-8}$$

这就再一次证实了，提供给电路的总功率必须与吸收的总功率平衡。

由式(1-6)可得，从时刻t_0到时刻t元件所吸收或释放的能量为：

$$w = \int_{t_0}^{t} p\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} vi\,\mathrm{d}t \tag{1-9}$$

能量是指做功的能力，单位为焦耳。

电力公司以瓦特—小时（Wh）为单位度量能量，其中

$$1\ \mathrm{Wh} = 3\ 600\ \mathrm{J}$$

例题1-4 某电源使得2A的恒定电流流过灯泡10s，如果灯泡以光能和热能的形式消耗的能量为2.3 kJ，试计算灯泡两端的压降。

解 总电荷量为：

$$\Delta q = i\Delta t = 2 \times 10 = 20\ \mathrm{C}$$

压降为：

$$v = \frac{\Delta w}{\Delta q} = \frac{2.3\times 10^3}{20} = 115\ \mathrm{V}$$

练习题1-4 将电荷q从a移动到b所需的能量为－30 J，如果（a）$q=2\mathrm{C}$，（b）$q=-6\mathrm{C}$，试求压降v_{ab}。

答 （a）－15 V，（b）5 V。

例题1-5 如果流入某元件正端的电流i为：

$$i = 5\cos 60\pi t\ \mathrm{A}$$

且该元件两端的电压为（a）$v=3i$，（b）$v=3\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$。试求在$t=3$ ms时传到该元件的功率。

解 （a）电压为：$v=3i=15\cos 60\pi t$；因此功率为：

$$p = vi = 75\cos^2 60\pi t\ \mathrm{W}$$

在$t=3$ ms时，所求的功率为：

$$p = 75\cos^2(60\pi\times 3\times 10^{-3}) = 75\cos^2 0.18\pi = 53.48\ \mathrm{W}$$

（b）电压和功率的数学表达式分别为：

$$v = 3\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 3(-60\pi)5\sin 60\pi t = -900\pi\sin 60\pi t\ \mathrm{V}$$

$$p = vi = -4\ 500\pi\sin 60\pi t\cos 60\pi t\ \mathrm{W}$$

在$t=3$ ms时，所求的功率为：

$$p = -4\ 500\pi\sin 0.18\pi\cos 0.18\pi\ \mathrm{W}$$
$$= -14\ 137.167\sin 32.4^\circ\cos 32.4^\circ = -6.396\ \mathrm{kW}$$

练习题1-5 在例题1-5中，如果电流保持不变，电压为（a）$v=2i$，（b）$v=(10+5\int_0^t i\,\mathrm{d}t)$ V，试求在$t=5$ ms时传送到该元件的功率。

答 （a）17.27 W，（b）29.7 W。

例题1-6 一个100 W的电灯泡2小时消耗的电能量是多少？

解

$$w = pt = 100(\text{W}) \times 2(\text{h}) \times 60(\text{min/h}) \times 60(\text{s/min})$$
$$= 720\,000\ \text{J} = 720\ \text{kJ}$$

亦即：

$$w = pt = 100\ \text{W} \times 2\text{h} = 200\ \text{Wh}$$

练习题1-6 某电炉连接至120 V电源时的工作电流为15 A，试求该电炉消耗了30 kJ的电能需要多长时间？

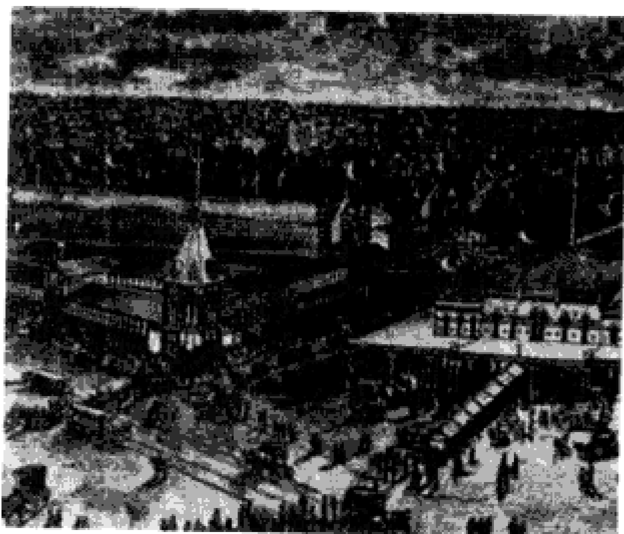
答 16.667 s。

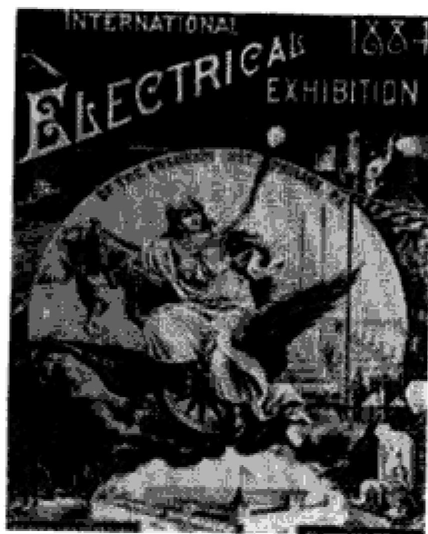
历史事件

1884年展览会 1884年在美国举办的国际电气展览（International Electrical Exhibition）对电气技术的推动作用无与伦比。试想一个没有电的世界，一个靠蜡烛和煤气灯点亮的世界，一个以步行、骑马和坐马车作为常见交通工具的世界。在这样一个世界里，1884年展览会横空出世，托马斯·爱迪生（Thomas Edison）成为展会的主角，他也表现出推广其发明和产品的超强能力。

爱德华·韦斯顿（Edward Weston）的发电机和电灯是美国电气照明公司参展的亮点，韦斯顿精心收藏的科学仪器也在本次展览会展出。

其他知名的参展者包括弗兰克·斯普雷格（Frank Sprague）、艾利荷·汤普森（Elihu Thompson）以及克利夫兰电器公司（Brush Electric Company of Cleveland）。在本次展览会期间，美国电气工程师学会（AIEE，American Institute of Electrical Engineers）于10月7日至8日开了其首届技术专门会议。1964年，AIEE与无线电工程师学会（the Institute of Radio Engineers）合并成立了电气与电子工程师学会（Institute of Electrical and Electronics Engineers）。





1.6 电路元件

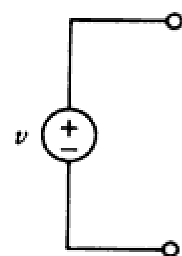
正如1.1节中所讨论的，元件是电路的基本组成部分，电路就是由若干元件相互连接构成的总体。电路分析就是确定电路中元件两端的电压（或流经元件的电流）的过程。

电路中有两种类型的元件：无源（passive）元件和有源（active）元件。有源元件能够产生能量而无源元件则不能，无源元件包括电阻、电容、电感等，典型的有源元件包括发电机、电池、运算放大器等。本节的目的是让读者熟悉几个重要的有源元件。

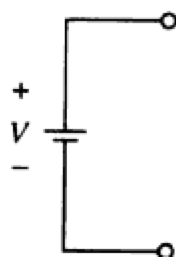
最重要的有源元件是电压源和电流源，一般用于为与其相连的电路输送功率。这些电源又分两种：独立源和非独立源（也称为受控源）。

理想独立源是指能够提供与其他电路元件完全无关的特定电压或电流的有源元件。

换句话说，理想的独立电压源无论提供给电路多大的电流，其两端电压始终保持不变。电池和发电机等实际电源元件可以近似地认为是理想电压源。图1-11给出了独立电压源的表示符号。注意，图1-11a和图1-11b中的两种符号均可以表示直流电压源，但只有图1-11a中的符号才能用于表示交流电压源。类似地，理想的独立电流源是指能够提供与其两端电压完全无关的特定电流的有源元件，也就是说，无论两端电压多大，电流源传递给电路的电流总是保持指定的电流值。独立电流源的符号表示如图1-12所示，图中箭头表示电流i的方向。



(a) 用于表示恒定电压或时变电压



(b) 用于表示恒定电压（dc）

图 1-11 独立电压源的表示符号

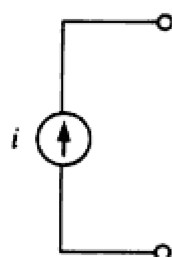
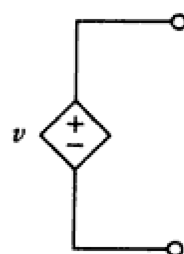


图 1-12 独立电流源的表示符号

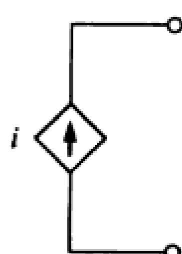
理想的非独立源（受控源）是指其所提供的电压或电流量受到其他电压或电流控制的有源元件。

受控电源元件通常用菱形符号表示，如图1-13所示。由于对受控源的控制可以通过电路中某个元件的电压或电流来实现，而且受控源既可以是电压源又可以是电流源，所以有四种可能形式的受控源，即：

(1) 电压控制电压源（VCVS）；
(2) 电流控制电压源（CCVS）；
(3) 电压控制电流源（VCCS）；
(4) 电流控制电流源（CCCS）。



(a) 受控电压源



(b) 受控电流源

图1-13 受控源的表示符号

受控源在建立晶体管、运算放大器以及集成电路等的元件模型时是很有用的。一个电流控制电压源的实例如图1-14右边所示，其中电压源的电压10 i取决于流经元件C的电流i。读者或许会感到意外，受控电压源的值是10 i V（而不是10 i A），这是因为它是一个电压源。应该记住的是，不管是什么量控制受控源，电压源的符号是用极性（+、−）表示的，而电流源是用箭头表示的。

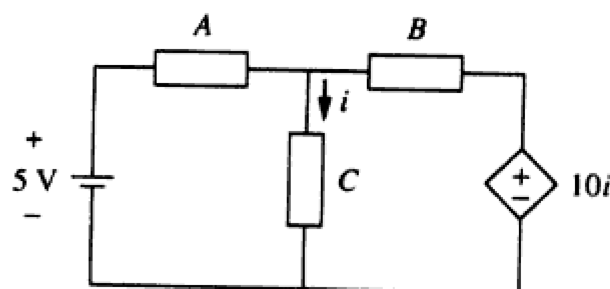


图 1-14 电路右边为一个电流控制电压源

注意，理想电压源（受控的或独立的）会产生确保其端电压所需的任意电流，而理想电流源会产生所需的电压来维持其标称电流，因此，从理论上讲，理想源能够提供无穷大的能量。同样应该注意到，有源元件不仅可以为电路提供功率，而且还可以从电路中吸收功率。对于电压源而言，我们知道其电压，但不知道它提供或吸收的电流是多少；同理，对于电流源而言，我们只知道它提供的电流，而不知道它两端的电压是多少。

例题1-7 试计算图1-15中各元件所提供或吸收的功率。

解 在计算时，要利用图1-8和图1-9所示的符号规约确定功率的符号：对于p_1而言，5A电流从元件的正端流出（或者说5 A电流流入元件的负端），因此，

$$p_1 = 20(-5) = -100\text{W} \quad \text{提供的功率}$$

对于p_2和p_3而言，电流都是流入各个元件的正端，于是：

$$p_2 = 12(5) = 60\text{W} \quad \text{吸收的功率}$$

$$p_3 = 8(6) = 48\text{W} \quad \text{吸收的功率}$$

对于p_4而言，由于该受控源的两端和无源元件p_3的两端相连，所以其电压与p_3的电压相同，为8V（正极在上面）（记住，电压总是相对于电路中元件的两端来说的），因为电流是从正端出来的，所以

$$p_4 = 8(-0.2I) = 8(-0.2\times 5) = -8\text{W} \quad \text{提供的功率}$$

可以观察到，电路中20 V的独立源电压和0.2 I的受控电流源均是为电路网络中的其他元件提供功率的，而两个无源元件则是吸收功率的，并且：

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = -100 + 60 + 48 - 8 = 0$$

上述结果与式(1-8)一致，即提供的总功率等于吸收的总功率。

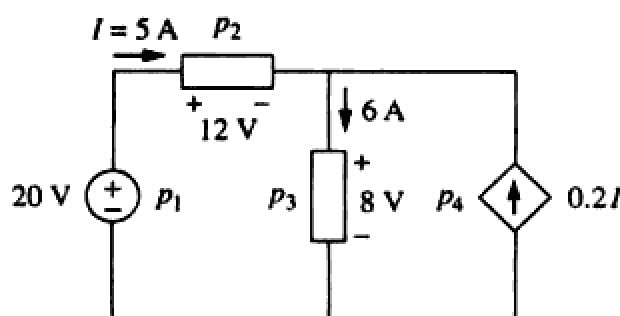


图 1-15　例题 1-7 的电路原理图

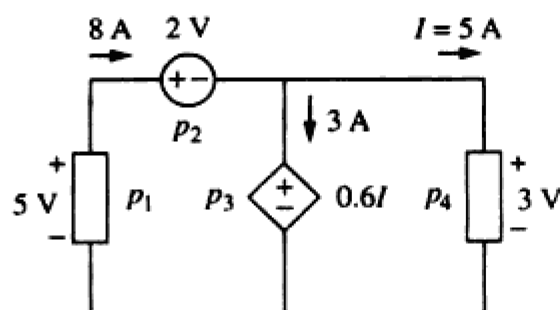


图 1-16　练习题 1-7 的电路原理图

练习题1-7　试计算图1-16所示电路中各个元件吸收的功率或提供的功率。

答　$p_1 = -40\text{W}$，$p_2 = 16\text{W}$，$p_3 = 9\text{W}$，$p_4 = 15\text{W}$。

1.7　†应用[①]

这一节研究与本章介绍的概念有关的两个实际应用例子。一个是电视显像管，另一个是如何确定电器设备的用电量账单。

1.7.1　电视显像管

电视信号的发射和接收体现了电子运动的一个重要应用。在电视发射端，摄像管将场景的光图像转化为电信号，光电摄像管中的电子束实现了对光图像的扫描。

在电视接收端，利用电视机内的阴极射线管（CRT）[②]重建场景的图像，CRT的结构如图1-17所示。与产生恒定强度电子束的光电摄像管不同，CRT电子束的强度随着输入信号的强弱而变化。图中始终保持高电压的电子枪发射电子束，经过垂直和水平两组偏转板，使射到荧光屏上的电子束能够上下左右移动。电子束击中荧光屏后，相应的点就会发亮。这样，就可以利用电子束在电视屏幕上“描绘”出图像。

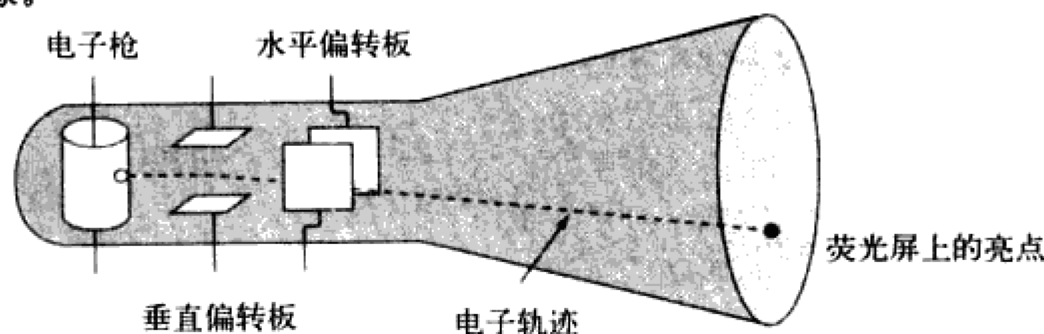


图 1-17　阴极射线管

来源：D.E.Tilley，*Contemporary College Physics* Menlo Park，CA：Benjamin/Cummings，1979，p.319

① 各节标题前的剑号（†）表示该节可以跳过，也可以做简要介绍，或者留作课后作业。

② 现代电视显像管采用不同于 CRT 的技术。

历史事件

兹沃尔金与光电摄像管 © Bettmann/Corbis



斯特拉斯堡大学（University of Strasbourg）的卡尔·费迪南·布劳恩（Karl Ferdinand Braun，1850—1918）于1879年发明了布劳恩阴极射线管，它在之后的许多年内成为电视显像管的基本组成部分，虽然平板显示系统发展迅速，但显像管至今仍然是最经济的部件。在布劳恩阴极射线管用于电视机之前，借助了弗拉基米尔·科斯马·兹沃尔金（Vladimir K. Zworykin，1889—1982）研究光电摄像管的创造性成果，这样才有了今天的电视机。光电摄像管不断发展为正析摄像管和超正析像管，从而实现捕获图像，并将其转换为可发送给电视接收机的信号，电视摄像机就这样诞生了。

例题1-8 如果电视显像管中的电子束每秒携带10^{15}个电子，试确定要加速该电子束使之达到4 W的功率所需的电压V_o？

解 一个电子的电荷量为：

$$e=-1.6\times10^{-19}\ \text{C}$$

则n个电子的电量为$q=ne$，并且，

$$i=\frac{dq}{dt}=e\frac{dn}{dt}=(-1.6\times10^{-19})(10^{15})=-1.6\times10^{-4}\ \text{A}$$

其中，负号表示电流方向与电子流动的方向相反，如图1-18所示，图中所示为垂直偏转板不带电荷情况时的CRT简图。于是，电子束的功率为：

$$p=V_oi \quad 或 \quad V_o=\frac{p}{i}=\frac{4}{1.6\times10^{-4}}=25\,000\ \text{V}$$

因此，所需加的电压为25 kV。

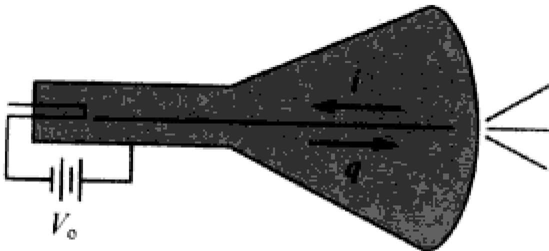


图 1-18 用于例题 1-18 的阴极射线管简图

练习题1-8 如果电视显像管中的电子束每秒携带10^{13}个电子，通过一个电位差为30 kV的平面场，试计算其功率。

答 48 mW。

1.7.2 电费账单

第二个应用是供电公司如何向用户收取电费。电费的多少取决于用户消耗的千瓦时能量（影响电费的其他因素包括需求和功率因子，这里忽略不计）。但是在美国，即使用户不消耗任何电能，仍然需要支付维护电力线正常工作的最低服务费。随着用电量的增加，每千瓦时所需支付的电费不断降低。表1-3给出了一个五口之家家用电器每月的平均耗电量。

表 1-3 家用电器每月的平均耗电量

电器名称	耗电（kWh）	电器名称	耗电（kWh）
热水器	500	洗衣机	120
电冰箱	100	电炉子	100
照明	100	烘干机	80
洗碗机	35	微波炉	25
电熨斗	15	个人计算机	12
电视机	10	收音机	8
烤面包机	4	电子钟	2

例题1-9 某家庭一月份耗电量为700 kWh，试按照如下电费费率确定该家庭当月的电费账单。

每月的基本供电服务费 $ 12.00

每月第一个100 kWh按16美分/kWh计费

之后的200 kWh按10美分/kWh计费

超过300 kWh按6美分/kWh计费

解 电费账单计算如下：

每月的基本供电服务费 = $12.00

第一个100 kWh × $0.16/kWh = $16.00

之后的200 kWh × $0.10/kWh = $20.00

剩余的400 kWh × $0.06/kWh = $24.00

一月份的总电费 = $72.00

平均价格 = $72/(100 + 200 + 400) = 10.2美分/kWh

练习题1-9 参考上述例题1-9中电费费率的计算方法，如果某家庭在七月份大部分时间外出休假，只用了400 kWh的电量，试计算该月每千瓦时的平均电费。

答 13.5美分/kWh。

1.8 †解题方法

虽然人们在工作中需要解决的问题复杂程度和重要程度各不相同，但解决问题所应遵循的基本原则是相同的。下面罗列了一些解决工业领域中工程问题和研究工作中学术问题的过程和方法，这是作者和他的学生们多年来解题经验的总结。

首先简要地列出所有的步骤，之后再做详细说明。

（1）**明确**所要解决的问题。

（2）**表述**你对该问题的全部理解。

（3）确定问题的**可选**解集，并且从中找出成功可能性最大的一种方案。

（4）**尝试**寻求问题的解。

（5）**评价**所得到的答案并检验其准确性。

（6）对结果是否**满意**？如果满意，则提交该结果；否则，再返回步骤(3)重新执行这一过程。

以下做详细说明。

（1）*明确所要解决的问题*。这一步可能是整个过程中最重要的一步，因为它是进行下面所有步骤的基础。一般而言，工程问题的提出多少会有点不够完整，所以你必须尽量确保：你对问题的理解与问题提出者对问题的理解尽可能完全一致。在弄清问题这一步上花一些时间将为后续各步节省大量的时间并避免失败。学生可以求助于教授，把教科书中所提出的问题理解得更清楚，工业应用中遇到的问题可能需要你与多位相关人员商讨。在这一步，非常重要的是在解决问题之前先提出问题，如果遇到这样的问题则可以咨询合适的相关人员，也可以借助有关资源得到问题的答案。利用这些结果，可以进一步精炼所要解决的问题，并可将精炼后的问题表述用于后面的求解过程中。

（2）*表述你对该问题的全部理解*。现在可以将你对问题的全部理解及其可能的解决方案写下来，这样，能够节约时间并避免失败。

（3）*确定问题的可选解集，并且从中找出成功可能性最大的一种方案*。几乎每一个问题都可能存在若干种途径去解决，人们非常希望得到尽可能多的解决途径。在进行这项工作时，还需要确定采用什么样的工具，例如能够大幅度降低计算量、提高准确度的PSpice、MATLAB以及其他一些软件包。需要再次强调的是，第一步明确问题和这一步研究解决问题的可选方法所花费的时间将对后续问题的解决有极大的帮助，虽然评估各种方法的优劣并确定一种最可行的方法是比较困难的，但

仍然值得付出这样的努力。同时需要很好地记录这一过程，因为如果首次选用的方法失败，还要再返回重新执行这一步骤。

(4) *尝试寻求问题的解*。现在就可以开始解题了。必须将解题的过程很好地记录下来，如果解题成功，就可以给出详细解；如果解题失败，则可以检查整个过程。通过细致的检查可以找出问题予以纠正，从而得到正确的解，也可以换一种方法求出正确的答案。一般来说，明智的做法是先得到结果的表达式之后再将数据代入方程，这样有助于检查你所得到的结果。

(5) *评价所得到的答案、并检验其准确性*。这一步是彻底评价你所完成的工作，决定是否得到可以让别人（你的团队、上司、教授等）接受的结果。

(6) *对结果是否满意？如果满意，则提交该结果；否则，再返回步骤(3)重新执行这一过程*。此时要么提交结果，要么试探另一种方法。如果提交了结果，解题过程一般就结束了。然而，提交答案后通常会发现更进一步的问题，仍然需要继续这一解题过程，从而最终得到满意的结论。

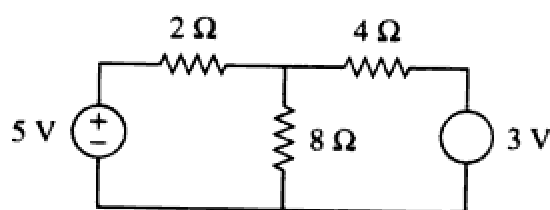


图 1-19 电路原理图举例

下面以电子与计算机工程专业学生的课程作业为例，说明上述过程（这一基本过程同样适用于几乎所有工程类课程）。虽然上述步骤用于学术型问题时略显简单，但有必要按照这几个基本过程求解。下面就通过一个简单的例题予以说明。

例题1-10 试求流经图1-19中8 Ω电阻的电流。

解 (1) 明确题意。这只是一个简单的例子，但是由电路图可见，3V电压源的极性并不知道。有几种解决途径可供选择。向教授询问该电压源的极性；如果无法询问，则需要确定接下来的处理方法。如果时间充裕，则可以在3V电压源的正极在上和正极在下两种情况下求解电流。这里假定教授告知该电压源的极性如图1-20所示，正极在下。

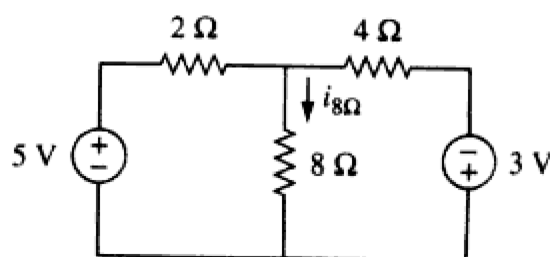


图 1-20 问题的定义

(2) 表述问题的全部已知条件。明确问题的所有已知条件，包括清楚地对电路进行标记，从而确定要求解的量。已知电路如图1-20所示，试求$i_{8\Omega}$。如果情况允许，可以和教授共同检查问题的定义是否合理。

(3) 确定一组可选解决方案并确定哪一个方案最有可能成功。解决这个问题可以采用三种基本方法，即本书中稍后会介绍的电路分析法（基尔霍夫定律、欧姆定律）、节点分析法和网孔分析法。

采用电路分析法求解$i_{8\Omega}$可以得到该题的解，但可能比节点分析法和网孔分析法更为繁杂。用网孔分析法求解$i_{8\Omega}$。要列写两个联立方程，并求出如图1-21所示的两个回路电流。采用节点分析法只需要求解一个未知量，是最为简单的方法。所以，选用节点分析法来求解$i_{8\Omega}$。

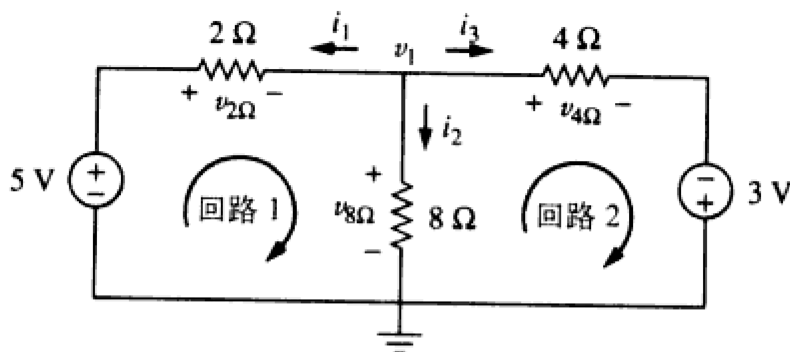


图 1-21 采用节点分析法求解的电路原理图

(4) 尝试寻求问题的解。首先写出求解$i_{8\Omega}$所需的所有公式：

$$i_{8\Omega} = i_2,\quad i_2 = \frac{v_1}{8},\quad i_{8\Omega} = \frac{v_1}{8}$$

$$\frac{v_1-5}{2}+\frac{v_1-0}{8}+\frac{v_1+3}{4}=0$$

于是可以求出 v_1。

$$8\left[\frac{v_1-5}{2}+\frac{v_1-0}{8}+\frac{v_1+3}{4}\right]=0$$

从而得到：

$$(4v_1-20)+(v_1)+(2v_1+6)=0$$

$$7v_1=+14,\ v_1=+2\text{ V},\ i_{8\Omega}=\frac{v_1}{8}=\frac{2}{8}=\mathbf{0.25\ A}$$

（5）评价所得到的答案并检验其准确性。下面采用基尔霍夫电压定律（KVL）检查所得到的结果：

$$i_1=\frac{v_1-5}{2}=\frac{2-5}{2}=-\frac{3}{2}=-1.5\text{ A}$$

$$i_2=i_{8\Omega}=0.25\text{ A}$$

$$i_3=\frac{v_1+3}{4}=\frac{2+3}{4}=\frac{5}{4}=1.25\text{ A}$$

$$i_1+i_2+i_3=-\mathbf{1.5}+\mathbf{0.25}+\mathbf{1.25}=\mathbf{0}\ \text{（验证）}$$

将KVL用于回路1，

$$\begin{aligned}-5+v_{2\Omega}+v_{8\Omega}&=-5+(-i_1\times 2)+(i_2\times 8)\\&=-5+(-(-1.5)\times 2)+(0.25\times 8)\\&=-\mathbf{5}+\mathbf{3}+\mathbf{2}=\mathbf{0}\ \text{（验证）}\end{aligned}$$

将KVL用于回路2，

$$\begin{aligned}-v_{8\Omega}+v_{4\Omega}-3&=-(i_2\times 8)+(i_3\times 4)-3\\&=-(0.25\times 8)+(1.25\times 4)-3\\&=-\mathbf{2}+\mathbf{5}-\mathbf{3}=\mathbf{0}\ \text{（验证）}\end{aligned}$$

于是，我们完全确信所得答案的正确性。

（6）答案是否满意。如果满意，则提交答案，否则返回步骤(3)重新计算。该题解答正确满意。

流经8 Ω电阻的电流是0.25 A，自上而下流过该电阻。

练习题1-10 试利用上述解题过程求解本章最后更为复杂的问题。

1.9 本章小结

（1）电路由若干相互连接在一起的电路元件构成。

（2）国际单位制（SI）是工程技术人员互相交流的国际度量语言。由国际单位制的六个基本单位可以推导出其他物理量的单位。

（3）电流是电荷流动的速率：

$$i=\frac{dq}{dt}$$

（4）电压是指1库仑电荷流过元件所需要的能量

$$v=\frac{dw}{dq}$$

（5）功率是指单位时间所提供或吸收的能量，也可以用电压与电流的乘积表示。

$$p=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=vi$$

(6) 按照无源符号规约，如果电流从元件电压的正极流入，则功率的符号为正。

(7) 一个理想的电压源，无论其两端连接什么元件，总是给出特定的电位差；一个理想的电流源，无论其两端连接什么元件，总会产生特定的电流。

(8) 电压源和电流源可以是受控源，也可以是独立源，受控源是指其输出值受电路中其他变量控制的电源。

(9) 电视显像管和电费账单的计算是本章所述概念的两个方面的应用实例。

复习题

1-1 毫伏等于百万分之一伏特。
(a) 对 (b) 错

1-2 词头“微”表示：
(a) 10^6 (b) 10^3 (c) 10^{-3} (d) 10^{-6}

1-3 2 000 000V的电压用10的幂次表示，可以写为：
(a) 2 mV (b) 2 kV (c) 2 MV (d) 2 GV

1-4 如果每秒流过某一点的电荷为2 C，则电流是2 A。
(a) 对 (b) 错

1-5 电流的单位是：
(a) 库仑 (b) 安培 (c) 伏特 (d) 焦耳

1-6 电压的度量单位是：
(a) 瓦特 (b) 安培
(c) 伏特 (d) 焦耳/秒

1-7 4 A的电流对一介质充电6 s后，所储存的电荷是24 C。
(a) 对 (b) 错

1-8 如果1.1 kW的烤面包机产生的电流为10 A，则其两端的电压为：
(a) 11 kV (b) 1100 V
(c) 110 V (d) 11 V

1-9 下述哪个量不是电量：
(a) 电荷 (b) 时间 (c) 电压
(d) 电流 (e) 功率

1-10 图1-22中的受控源是：
(a) 电压控制电流源 (b) 电压控制电压源
(c) 电流控制电压源 (d) 电流控制电流源

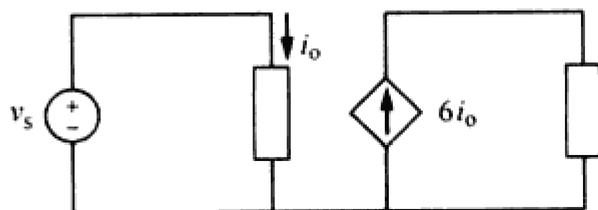


图 1-22 复习题 1-10 的图

答案 1-1 b；1-2 d；1-3 c；1-4 a；1-5 b；1-6 c；1-7 a；1-8 c；1-9 b；1-10d。

习题

1.3 节

1-1 下列各电子数量分别表示多少库仑的电荷？
(a) 6.482×10^{17} (b) 1.24×10^{18}
(c) 2.46×10^{19} (d) 1.628×10^{20}

1-2 如果电荷流由如下函数确定，试求流过元件的电流：
(a) $q(t)=(3t+8)$ mC
(b) $q(t)=(8t^2+4t-2)$ C
(c) $q(t)=(3\,\mathrm{e}^{-t}-5\,\mathrm{e}^{-2t})$ nC
(d) $q(t)=10\sin 120\pi t$ pC
(e) $q(t)=20\,\mathrm{e}^{-4t}\cos 50t$ μC

1-3 如果流过元件的电流由如下函数确定，试求流过元件的电荷量$q(t)$：
(a) $i(t)=3$A，$q(0)=1$ C
(b) $i(t)=(2t+5)$ mA，$q(0)=0$
(c) $i(t)=20\cos(10t+\pi/6)$ μA，$q(0)=2$ μC
(d) $i(t)=10\mathrm{e}^{-30t}\sin40t$ A，$q(0)=0$

1-4 如果流经某导体的电流为3.2 A，试计算20 s内通过该导体任一截面的电荷量为多少。

1-5 如果电流$i(t)=\frac{1}{2}t$ A，试求$0\leqslant t\leqslant 10$ s期间传递的总电荷量。

1-6 流入某元件的电荷量如图1-23所示，试求以下各时刻的电流：

(a) $t=1$ ms (b) $t=6$ ms (c) $t=10$ ms

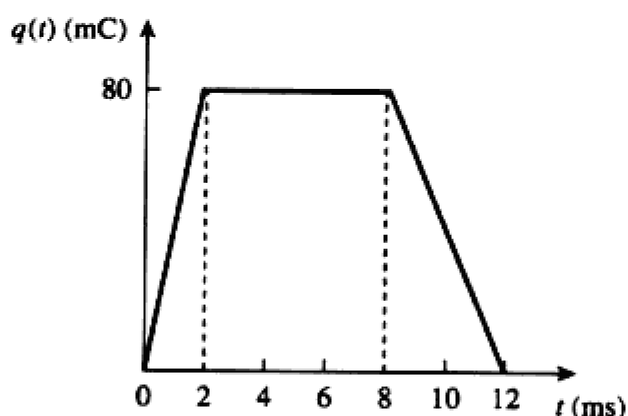


图 1-23 习题 1-6 的图

1-7 流过一根导线的电荷量随时间变化的曲线如图1-24所示，试画出相应的电流变化曲线。

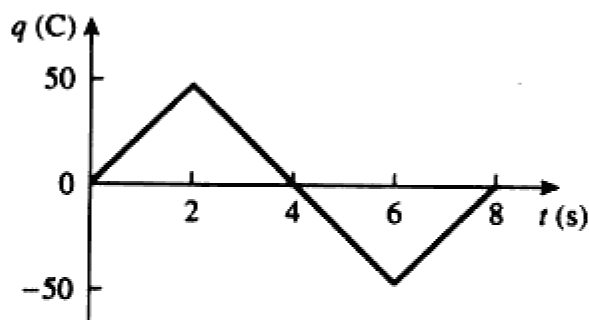


图 1-24 习题 1-7 的图

1-8 流过器件中某一点的电流如图1-25所示，试计算通过该点的总电荷量。



图 1-25 习题 1-8 的图

1-9 流过某元件的电流如图1-26所示，试计算下列各时刻通过该元件的总电荷量。

(a) $t=1$ s (b) $t=3$ s (c) $t=5$ s

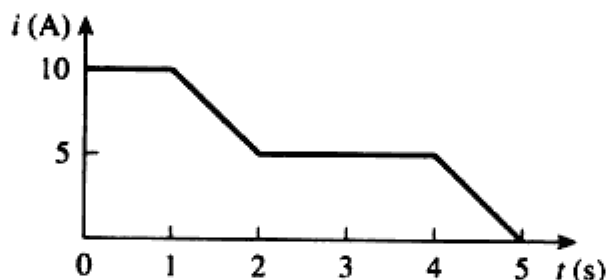


图 1-26 习题 1-9 的图

1.4 节和 1.5 节

1-10 8 kA闪电击中物体15 μs，试求物体表面的总电荷量为多少。

1-11 闪光灯充电电池能够连续大约12小时输出85 mA的电流，试求以这样的速率所释放的电荷量为多少？如果其端电压为1.2 V，试求该电池输出的能量为多少？

1-12 如果流过某元件的电流为：

$$i(t)=\begin{cases}3t\text{A}, & 0\leqslant t<6\text{ s}\\ 18\text{A}, & 6\leqslant t<10\text{ s}\\ -12\text{ A} & 10\leqslant t<15\text{ s}\\ 0, & t\geqslant 15\text{s}\end{cases}$$

试画出$0<t<20$ s期间该元件中存储电荷的变化曲线。

1-13 从某元件正极流入的电荷为$q=10\sin 4\pi t$ mC，而该元件两点的电压为$v=2\cos 4\pi t$ V。

(a) 试求在$t=0.3$ s时传递给该元件的功率；

(b) 试计算0～0.6 s期间传递给该元件的能量。

1-14 如果某器件两端的电压v与流过该元件的电流i分别为$v(t)=5\cos 2t$ V，$i(t)=10(1-e^{-0.5t})$A，试计算：

(a) $t=1$ s时，该器件中的总电荷量；

(b) $t=1$ s时，该器件耗费的功率。

1-15 流入某元件正端的电流为$i(t)=3\,e^{-2t}$ A，该器件两端的电压为$v(t)=5di/dt$ V，试求：

(a) 在和$t=2$ s 之间传递给该器件的电荷量；

(b) 该器件吸收的功率；

(c) 该器件在 3 s 内所吸收的能量。

1-16 图1-27给出了某器件的电流和电压波形。

(a) 试画出$t>0$时传递给该器件的功率曲线；

(b) 试求该器件在$0<t<4$ s期间吸收的总能量。

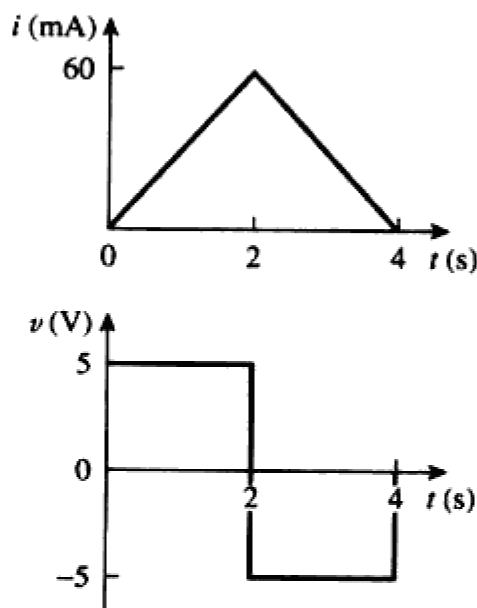


图 1-27 习题 1-16 的图

1.6 节

1-17　图1-28给出一个由五个元件组成的电路，如果$p_1 = -205$ W，$p_2 = 60$ W，$p_4 = 45$ W，$p_5 = 30$ W，试计算元件3吸收或释放的功率。

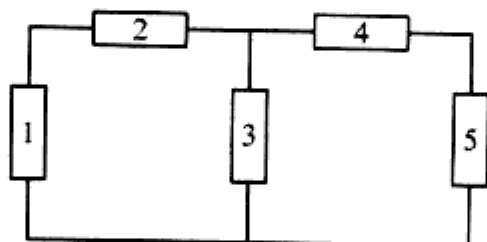


图 1-28　习题 1-17 的图

1-18　试求图1-29中各元件吸收的功率。

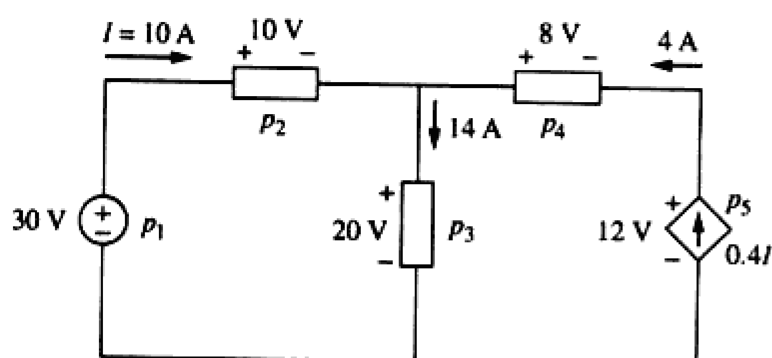


图 1-29　习题 1-18 的图

1-19　试求图1-30所示电路网络中的I。

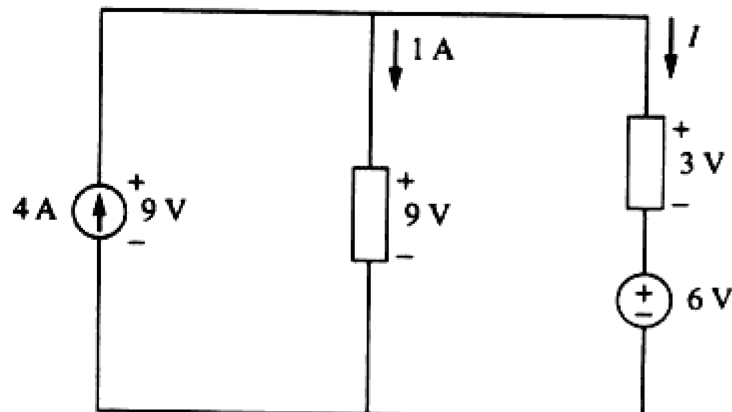


图 1-30　习题 1-19 的图

1-20　试求图1-31所示电路中的V_o。

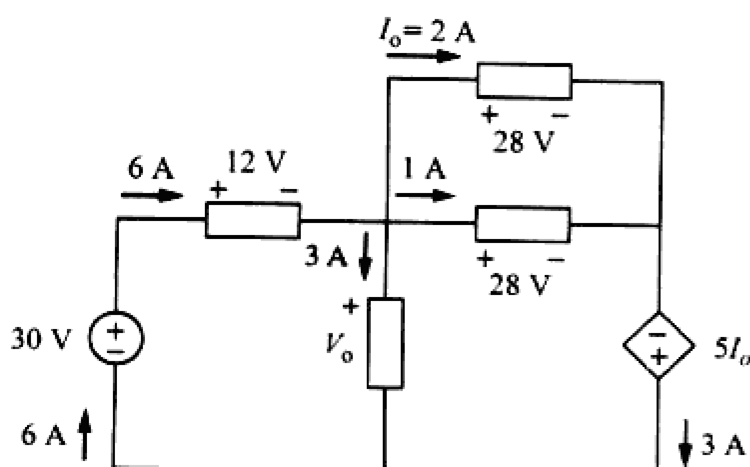


图 1-31　习题 1-20 的图

1.7 节

1-21　一只60 W的白炽灯工作在120 V电压下，试求一天内流过该白炽灯的电子量和电荷量分别为多少？

1-22　闪电以30 kA击中某飞行器2 ms，试求沉积在该飞行器上的电荷为多少库仑？

1-23　一台1.8 kW的热水器需要15 min烧开一定量的水，如果一天烧一次水，并且电费为10美分/kWh，试求30天需要多少电费？

1-24　某公共事业公司的电费收费标准为8.5美分/kWh，如果某消费者连续一天使用一只40 W的灯泡，试求需要交纳多少电费？

1-25　一台1.2 kW的烤面包机大约4 min烤好四片面包，如果每天使用一次烤面包机，试计算一个月（30天）所用的电费。假定用电费为9美分/kWh。

1-26　一个闪光灯电池的额定容量是0.8 Ah（安培 · 小时），其寿命为10h，试求：

(a) 该电池提供的电流为多大？

(b) 如果其端电压为6 V，则其提供的功率为多少？

(c) 该电池内存储了多少能量（单位为kWh）？

1-27　用3 A的恒定电流对汽车电池充电需要4 h完成，如果端电压为$10 + t/2$ V，t的单位为小时，试求：

(a) 充电结束后，充入电池的电荷量为多少？

(b) 充电消耗的电能量为多少？

(c) 如果电费为9美分/kWh，充电电费是多少？

1-28　一只30 W的白炽灯，接120V电源，始终在黑暗的楼梯间点亮，试确定：

(a) 流过该白炽灯的电流。

(b) 如果电费为12美分/kWh，该白炽灯连续工作一年（非闰年）所需的电费为多少？

1-29　一个电炉灶具有四个炉眼和一个烤箱。准备一顿饭时，各炉眼和烤箱的使用情况如下：

炉眼1：20 min

炉眼2：40 min

炉眼3：15 min

炉眼4：45 min

烤箱：30 min

如果各炉眼的额定功率为1.2kW，烤箱的额定功率为1.8kW，且每kWh的电费为12美分，试计算准备这顿饭所需的电费。

1-30 Reliant Energy（美国德州休斯顿电力公司）对客户的收费标准如下：

每月基本供电服务费$ 6

第一个250 kWh × $ 0.02/kWh

其余kWh × $ 0.07/kWh

如果某用户一个月用电1 218 kWh，试求Reliant Energy公司需收取多少电费？

1-31 某家庭120 W个人计算机（PC）每天工作4 h，60 W灯泡每天工作8 h。如果公共事业公司的用电收费标准为$ 0.12/kWh，试计算该家庭一年需为该计算机和灯泡共支付多少电费？

综合题

1-32 如果流过电话线的电流为20 μA，试求通过该电话线的电荷量为15 C需要多长时间？

1-33 一次强闪电携带2 kA的电流，并持续了3 ms。试求该闪电包含多少库仑的电荷。

1-34 某家用电器一天内所消耗的功率如图1-32所示，试计算：

(a) 所消耗的以kWh为单位的总能量；

(b) 每小时消耗的平均功率。

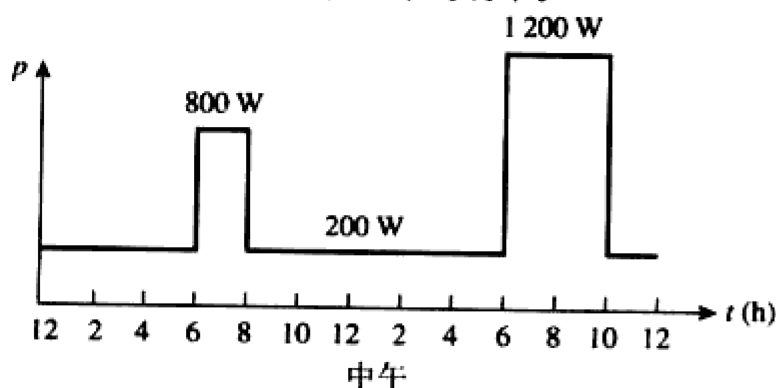


图 1-32 习题 1-34 的图

1-35 某工厂在上午8：00到8：30之间所消耗的功率如图1-33所示，试计算该厂这段时间所消耗的以MWh为单位的总能量。

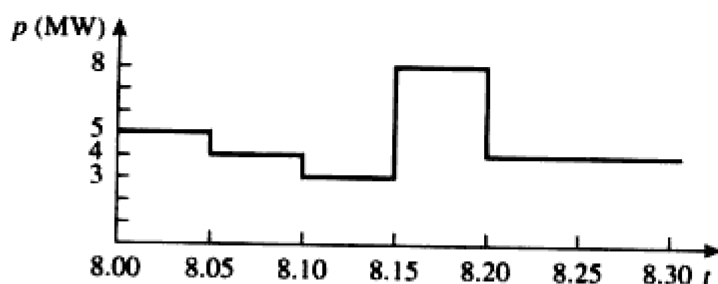


图 1-33 习题 1-35 的图

1-36 电池的额定功率可以用Ah表示。一个含铅酸性电池的额定功率为160 Ah，试求：

(a) 该电池40小时所能提供的最大电流为多少？

(b) 如果该电池以1 mA的电流放电，它能持续放电多少天？

1-37 某12 V电池充电时需要40 Ah的总电荷，试求提供给该电池的能量为多少焦耳？

1-38 试求一台10hp（马力）的发动机马达在30 min内输送了多少能量？1 hp = 746 W。

1-39 一台600W的电视机连续4 h开机无人观看，如果用电费率为10 cent/kWh，试问浪费了多少钱？

第2章　基 本 定 律

在人类潜意识深处，有着对具有逻辑性、让人能够理解的宇宙世界的无止境的追求。然而，宇宙却总是超出逻辑一步之遥。

——弗兰克·赫伯特

增强技能，拓展职业生涯

ABET EC 2000标准（3.b），“设计满足要求的系统、元件或过程的能力”

工程师既要能够设计实验、完成实验，又要能够分析数据、解释数据。绝大多数高中生和大学生都要花费相当的时间做实验，其间就会要求学生分析实验数据、解释实验数据。因此，学生对于此类工作已非常熟练。我的建议是，今后在做实验的过程中，要花费更多的时间分析、解释实验所得的数据，这是什么意思呢？



在观察电压－电阻、电流－电阻或者功率－电阻关系曲线时，你实际上会看到什么呢？这样的曲线意义何在？与所学的理论是否一致呢？与期望的结果是否存在差别？如果是，原因何在？显然，分析和解释实验数据必将提高你这方面的技能。

如果要求学生做的绝大多数（不是全部）实验很少或根本不涉及实验的设计，这种情况下，如何才能提高学生的技能呢？

实际上，在这种情况下培养学生的技能并没有想像中的那么困难。你所需要做的就是做实验并分析实验。将实验分解为最简单的组成部分，通过重新组合来尽量理解实验的设计思路，从而最终明白实验的设计者要教会你什么知识。虽然情况并非总是如此，但是在你所做的每个实验中，设计者都在试图教会你一些知识。

2.1　引言

第1章介绍了电路中的电流、电压和功率等基本概念，要确定这些量在给定电路中的具体数值，还需要掌握一些电路的基本定律，即欧姆定律和基尔霍夫定律，电路分析的方法和技术正是在这些基本定律的基础上建立起来的。

本章除介绍上述基本定律外，还将讨论电路分析与设计中常用的一些方法，包括电阻的串联并联、分压、分流以及Δ-Y和Y-Δ转换等。本章将上述定律和方法的应用局限于电阻电路中，最后再以照明电路和直流电表的设计为例说明基本定律和分析方法的具体应用。

2.2　欧姆定律

物理材料通常都具有阻止电荷流动的特性。这种物理性质，即阻碍电流的能力，称为电阻(resistance)，并用符号R表示。均匀截面积为A的任何材料的电阻决取于截面面积A及其长度l，如图2-1a所示。（实验室测量得到的）电阻值在数学上可以表示为：

$$R = \rho \frac{\ell}{A} \tag{2-1}$$

式中，ρ称为材料的电阻率（resistivity），单位为欧姆·米，良导体如铜、铝等，其电阻率小，而绝

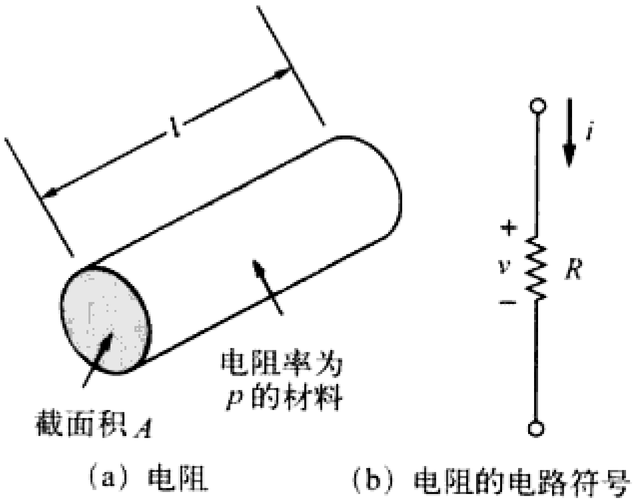
缘体，如云母、纸张等，其电阻率很高。表2-1给出了某些常见材料的电阻率ρ，并标明了哪些材料是导体，哪些是绝缘体或半导体。

表 2-1 常见材料的电阻率

材料名称	电阻率（Ω·m）	用途
银	1.64×10^{-8}	导体
铜	1.72×10^{-8}	导体
铝	2.8×10^{-8}	导体
金	2.45×10^{-8}	导体
炭	4×10^{-5}	半导体
锗	47×10^{-2}	半导体
硅	6.4×10^{2}	半导体
纸张	10^{10}	绝缘体
云母	5×10^{11}	绝缘体
玻璃	10^{12}	绝缘体
聚四氟乙烯	3×10^{12}	绝缘体

电路中表示材料对电流的抑制特性的元件称为电阻器（resistor）。为了构造电路，电阻通常由合金和碳化合物制成，电阻的电路符号如图2-1b所示，图中R表示该电阻的电阻值。电阻是电路中最简单的无源元件。

德国物理学家乔·西蒙·欧姆（Georg Simon Ohm，1787—1854），因发现流过电阻的电流与电阻两端的电压之间的关系而闻名于世，该关系正是众所周知的欧姆定律（Ohm's law）。



（a）电阻 （b）电阻的电路符号

图 2-1 电阻及其电路符号

欧姆定律：电阻两端的电压v与流过该电阻的电流i成正比。

也就是说：

$$v \propto i \tag{2-2}$$

欧姆将这个比例常数定义为电阻R（电阻是材料的一个属性，当元件的内部或外部条件改变时，例如温度的变化，电阻值也会改变）。于是，式(2-2)可以写为：

$$\boxed{v = iR} \tag{2-3}$$

式(2-3)为欧姆定律的数学表达式，式中R的单位是欧姆，记作Ω。因此，

元件的电阻值R表示其已知电流流过的能力，用欧姆为单位进行度量。

由式(2-3)可得：

$$R = \frac{v}{i} \tag{2-4}$$

从而，

$$1\ \Omega = 1\ \text{V/A}$$

应用式(2-3)所示的欧姆定律时，必须注意电流的方向和电压的极性。电流i的方向与电压v的极性必须符合无源符号规约，如图2-1b所示。这意味着当$v=iR$时，电流从高电位流向低电位，反之，

当电流从低电位流向高电位时，$v=-iR$。

历史人物



乔·西蒙·欧姆（Georg Simon Ohm，1787—1854），德国物理学家，于1826年通过实验确定了描述电阻的电压—电流关系的基本定律——欧姆定律。欧姆的这项工作最初曾被某些反对者所否定。

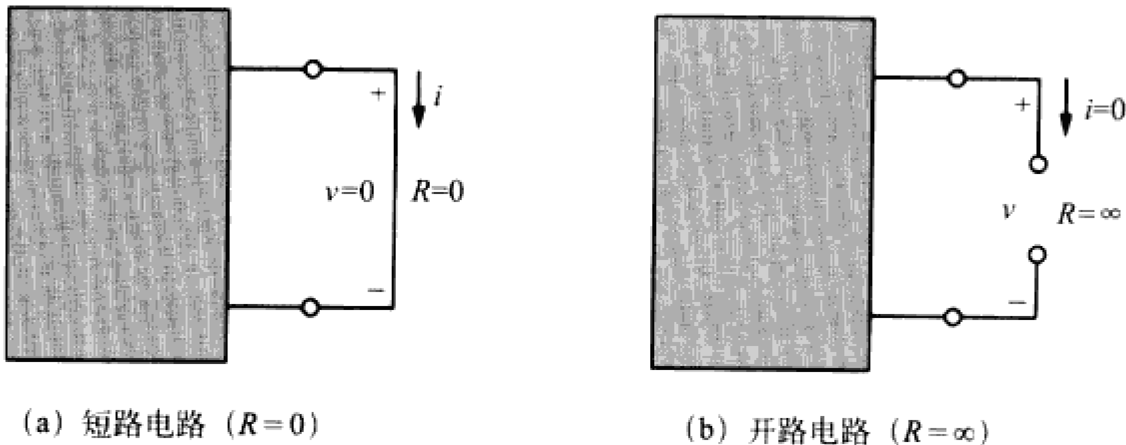
欧姆出生于巴伐利亚州埃尔兰根的一个贫苦家庭，他一生投入电学研究，建立了著名的欧姆定律。1841年，伦敦皇家学院授予他科普利勋章（Copley Medal）。1849年，慕尼黑大学授予他物理学首席教授职位。后人为了纪念他将电阻的单位命名为欧姆。

由于电阻值R可以从零变到无限大，所以考虑两种极端情况下的电阻值R就很重要。$R=0$的电路称为短路电路（short circuit），如图2-2a所示。在电路短路的情况下，

$$v=iR=0 \tag{2-5}$$

表明电压取值为零，但电流可以取任意值。在实际电路中，由良导体构成的导线通常为短路电路。因此，

短路电路是电阻值趋于零的一种电路。



（a）短路电路（$R=0$）　　（b）开路电路（$R=\infty$）

图 2-2　短路电路与开路电路

类似地，电阻值$R=\infty$的电路称为开路电路（open circuit），如图2-2b所示。对于开路电路而言，

$$i=\lim_{R\to\infty}\frac{v}{R}=0 \tag{2-6}$$

表明虽然两端的电压可以是任意值，但其电流为零。因此，

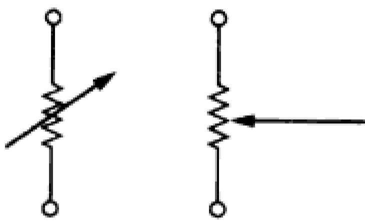
开路电路是电阻值趋于无穷大的一种电路。

电阻既可以是固定的，也可以是可变的。大多数电阻为固定的，即其阻值为常数。两种常见的固定电阻（线绕电阻与复合电阻）如图2-3所示。当需要较大阻值时，可以采用复合电阻。固定电阻的电路符号如图2-1b所示。可变电阻的电阻值是可以调整的，可变电阻的电路符号如图2-4a所示。常用的可变电阻称为电位器（potentiometer，pot），其电路符号如图2-4b所示。电位器是一种三端元件，其中一端为滑动抽头或滑片。移动滑动抽头时，滑动端与两个固定端之间的电阻值随之改变。与固定电阻器一样，可变电阻器既可以是线绕的，也可以是复合的，如图2-5所示。虽然在电路设计中可以采用如图2-3与图2-5所示的电阻，但是，包括电阻器在内的大多数现代电路元件通常是表贴的或集成的，如图2-6所示。



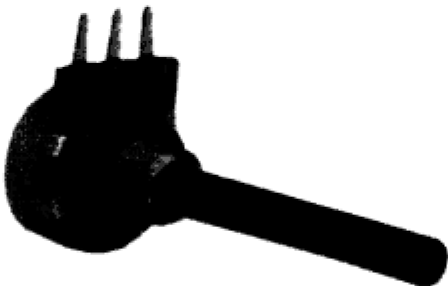
（a）线绕电阻　（b）碳膜电阻（经Tech America公司许可后使用）

图 2-3　固定电阻



（a）一般可变电阻　（b）电位器

图 2-4　可变电阻的电路符号



（a）合成可变电阻



（b）滑动电位器（经 Tech America 公司许可后使用）

图 2-5　可变电阻器

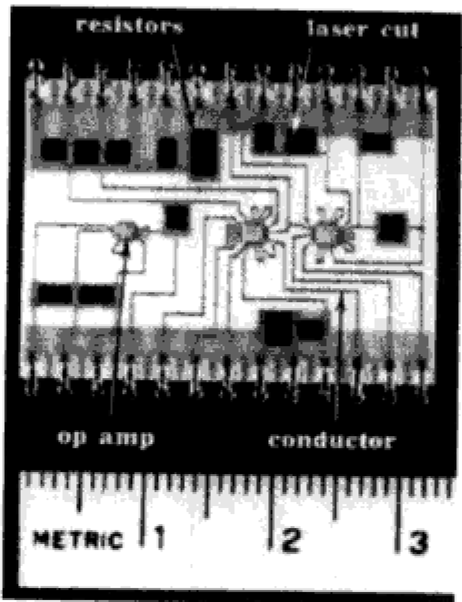
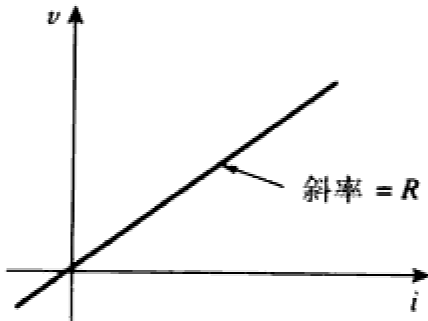


图 2-6　厚膜电路中的电阻器

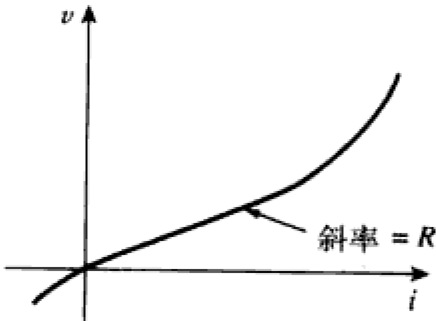
应该指出的是，并非所有的电阻器都遵守欧姆定律。遵守欧姆定律的电阻元件称为线性（linear）电阻，线性电阻具有恒定的阻值，因此，其电流–电压特性曲线即i–v曲线是一条通过原点的直线，如图2-7a所示。非线性（nonlinear）电阻不遵守欧姆定律，其阻值随着流过它的电流而变化，典型的i–v特性曲线如图2-7b所示。具有非线性电阻特性的电路元件如照明灯泡和二极管等。虽然所有的实际电阻在某些条件下都表现为非线性特征，但本书假设所涉及的电阻元件均为线性。

电路分析中另一个有用的量是电阻R的倒数，称之为电导（conductance），用符号G表示：

$$\boxed{G = \frac{1}{R} = \frac{i}{v}} \tag{2-7}$$



（a）线性电阻



（b）非线性电阻

图 2-7　电流–电压特性曲线

电导是某个元件传导电流好坏程度的一个度量，电导的单位是姆欧（mho，即将欧姆反过来）

或欧姆的倒数，用倒过来的欧姆符号（℧）表示。虽然工程师们常使用姆欧作为电导的单位，但本书采用国际单位制中电导的单位西门子（S）：

$$1\text{S} = 1\text{℧} = 1\text{A/V} \tag{2-8}$$

因此，

电导是元件传导电流的能力，度量单位是西门子或姆欧。

可以用欧姆或西门子来表示同一个电阻值，例如，10Ω就等于0.1 S。由式(2-7)可得：

$$i = Gv \tag{2-9}$$

电阻所消耗的功率可以用电阻R来表示，由式(1-7)与式(2-3)可得：

$$p = vi = i^2R = \frac{v^2}{R} \tag{2-10}$$

同样，电阻消耗的功率也可以用电导G来表示：

$$p = vi = v^2G = \frac{i^2}{G} \tag{2-11}$$

由式(2-10)与式(2-11)我们得到如下两个结论。

（1）电阻上消耗的功率既是电流的非线性函数，又是电压的非线性函数。

（2）因为R和G都是正值，所以电阻消耗的功率总是正的。因此，电阻总是吸收来自电路的功率，这一点证实了电阻是无源元件，不可能产生能量。

例题2-1 一个电熨斗接120V电源时获取的电流为2 A，求该熨斗的阻值。

解 由欧姆定律可得：

$$R = \frac{v}{i} = \frac{120}{2} = 60\Omega$$

练习题2-1 烤面包机的基本部件是一种将电能转换为热能的电气元件（即电阻），试求阻值为12 Ω的烤面包机从110 V电源获取的电流为多少？

答 9.167 A。

例题2-2 在如图2-8所示的电路中，试计算电流i、电导G和功率p。

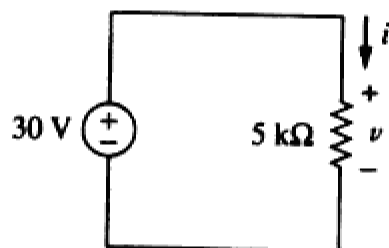


图 2-8 例题 2-2 的电路原理图

解 因为电阻两端接在电压源上，所以电阻两端的电压等于电压源的电压（30 V）。因此，电流为：

$$i = \frac{v}{R} = \frac{30}{5\times10^3} = 6\text{mA}$$

电导为：

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{5\times10^3} = 0.2\text{mS}$$

利用式(1-7)、式(2-10)或式(2-11)可以得到计算功率的几种不同方法：

$$p = v\,i = 30(6\times10^{-3}) = 180\text{ mW}$$

或者

$$p = i^2R = (6\times10^{-3})^2\,5\times10^3 = 180\text{ mW}$$

或者

$$p = v^2G = (30)^2\,0.2\times10^{-3} = 180\text{ mW}$$

练习题2-2 在如图2-9所示的电路中，试计算电压v、电导G和功率p。

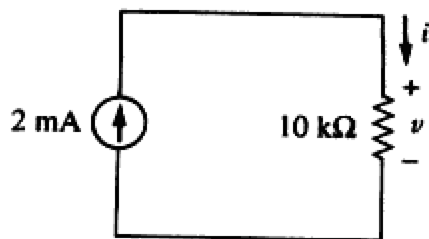


图 2-9 练习题 2-2 的电路原理图

答 20 V、100 μS、40 mW。

例题2-3 电压为$v=20\sin\pi t$ V的电压源连接到一个5kΩ电阻上，试求流经该电阻的电流及其消耗的功率。

解

$$i=\frac{v}{R}=\frac{20\sin\pi t}{5\times10^3}=4\sin\pi t\,\text{mA}$$

因此，

$$p=vi=80\sin^2\pi t\,\text{mW}$$

练习题2-3 连接在电压源$v=10\cos t$ V两端的某个电阻吸收的瞬时功率为$20\cos^2 t$ mW，试求i与R。

答 $2\cos t$ mA，5 kΩ。

2.3 †节点、支路与回路

由于电路中各元件可以用不同的方式相互连接，所以有必要理解关于网络拓扑结构的一些基本概念。为了区分电路与网络，可以将网络看成是若干元件或器件的相互连接，而电路则是指具有一条或者多条封闭路径的网络。习惯上，在讨论网络拓扑结构问题时，所采用的术语通常是网络，而不是电路。本书中即使网络和电路指的是同一事物，我们也采用同样的约定来叙述。在网络拓扑结构中，我们研究与网络中元件位置以及网络的几何结构有关的一些属性，包括支路、节点和回路等。

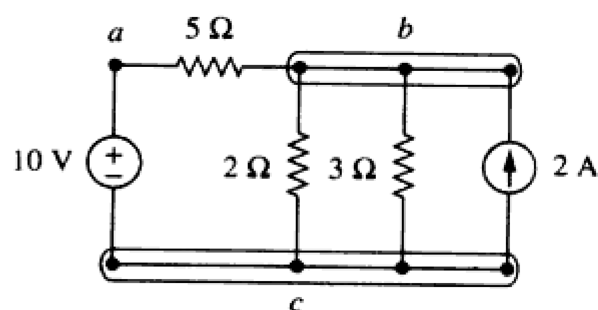


图 2-10 节点、支路与回路

支路表示网络中的单个元件，例如电压源、电阻等。

换言之，一条支路表示任意一个二端元件。图2-10所示的电路中包含5条支路，即10 V电压源、2 A电流源以及三个电阻。

节点是指两条或多条支路的连接点。

电路中的节点通常用圆点来表示。如果用短路电路（一根导线）来连接两个节点，则这两个节点合并为一个节点，如图2-10所示电路中包括a、b、c三个节点，图中构成节点b的三个点由理想导线连接在一起，从而成为一个点，同理，节点c是由四个点合并而成的。我们可以将图2-10所示仅包含三个节点的电路改画为图2-11所示的电路，显然图2-10与图2-11中的两个电路是等价的。然而，为了清楚起见，节点b和节点c在图2-10中通过理想导体分散连接起来。

回路是指电路中的任一封闭路径。

在电路中从一个节点出发，无重复地经过一组节点，之后再回到起始节点，所构成的一条封闭路径就称为回路。如果一个回路至少包含一条支路不属于其他任何独立回路，则称该回路为独立（independent）回路。由独立回路或路径可以得到独立的方程组。

对于一组回路而言，如果其中一个回路不包含不属于其他任何独立回路的支路，也可能构成一组独立回路。例如，在图2-11中，第一个独立回路是包括2 Ω电阻支路的封闭路径$abca$，第二个独立回路是包含3 Ω电阻和电流源的封闭路径，第三个独立回路是由2 Ω电阻和3 Ω电阻并联组成的封闭路径。这同样构成了一组独立回路。

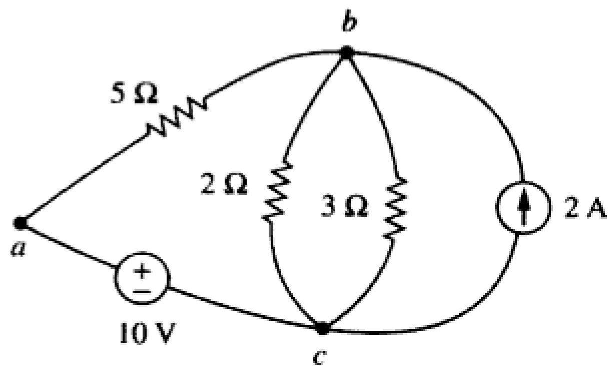


图 2-11 与图 2-10 等效的三节点电路

包括b条支路、n个节点和l个独立回路的网络满足如

下关于网络拓扑结构的基本定理：

$$b = l + n - 1 \tag{2-12}$$

接下来要介绍的两个定义表明，电路拓扑结构对于研究电路中的电压和电流至关重要。

如果两个或多个元件唯一地共享一个节点，从而传递相同的电流，则称这种连接方式为串联。

如果两个或多个元件连接到相同的两个节点上，从而使它们两端的电压相同，则称这种连接方式为并联。

当不同元件相互级联或者首尾顺序连接时，这些元件就是串联。例如，如果两个元件分享同一个公共节点，且没有其他元件连接到该公共节点上，则称这两个元件是串联的。并联元件均连接到同一对端点上。元件在电路中的连接方式也可以既非串联，又非并联。在图2-10所示的电路中，电压源和5 Ω的电阻是串联的，因为流过它们的电流相同；2 Ω电阻、3 Ω电阻和电流源是并联的，因为它们都连接到相同的两个节点 b和c上，从而具有相同的端电压；而5 Ω电阻和2 Ω电阻之间的连接关系既非串联也非并联。

例题2-4 试确定图2-12所示电路中的支路数和节点数，并指出哪些元件是串联的，哪些是并联的。

解 由于电路中包括四个元件，所以该电路有四条支路，即，10 V 电压源支路、5 Ω 电阻支路、6 Ω 电阻支路和 2 A 电流源支路。电路中包含三个节点，如图 2-13 所示。5 Ω 电阻与 10 V 电压源串联，因为流过它们的电流相同，而 6 Ω电阻与 2 A 电流源并联，因为它们均与节点 2 和节点 3 相连。

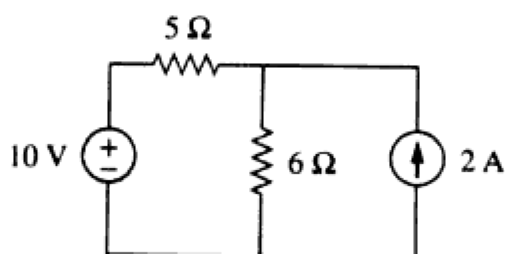


图 2-12 例题 2-4 的电路原理图

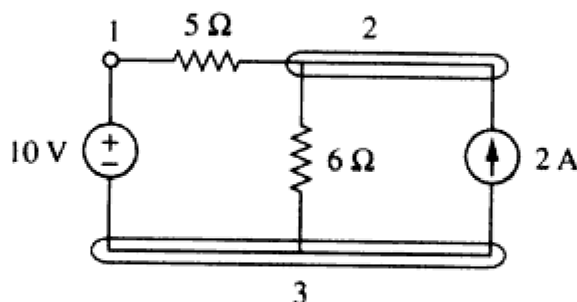


图 2-13 图 2-12 所示电路的三个节点

练习题2-4 图2-14所示电路中有多少条个支路，多少个节点？试确定串联和并联的元件。

答 如图2-15所示，包括5条支路和3个节点，1 Ω电阻与2 Ω电阻是并联的，4 Ω电阻与10 V电压源也是并联的。

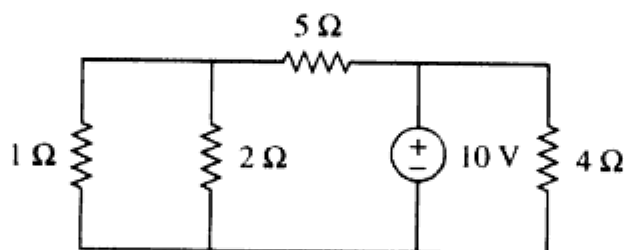


图 2-14 练习题 2-4 的电路原理图

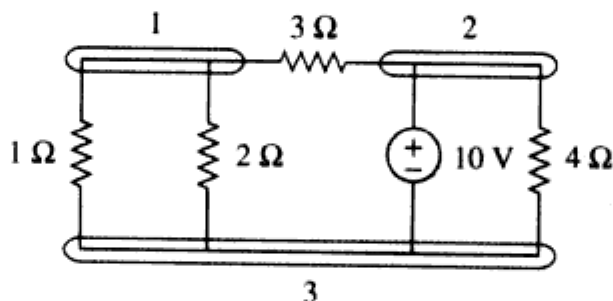


图 2-15 练习题 2-4 的答案

2.4 基尔霍夫定律

分析电路时，只有欧姆定律还不够，但是，欧姆定律与基尔霍夫的两个定律结合起来，就构成了分析各类电路的一组强有力的工具。基尔霍夫定律最初是由德国物理学家基尔霍夫（Gustav Robert Kirchhoff, 1824—1887）于1847年提出的，包括基尔霍夫电流定律（KCL）和基尔霍夫电压定律（KVL）。

基尔霍夫电流定律的基础是电荷守恒定律，即一个系统中电荷的代数和是不能改变的。

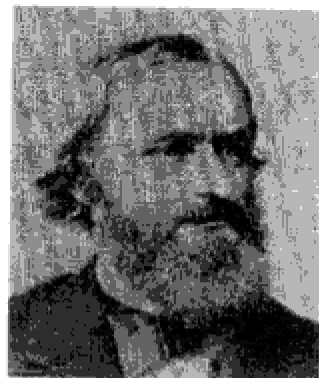
基尔霍夫电流定律（KCL）是指流入任一节点（或任一封闭界面）的电流代数和为零。

KCL的数学形式可以表示为：

$$\sum_{n=1}^{N} i_n = 0 \tag{2-13}$$

其中，N为与该节点相连的支路数，i_n为流入（或流出）该节点的第n条支路的电流。根据这一定律，可以认为流入节点的电流是正的，而流出节点的电流是负的，或者反之。

历史人物



基尔霍夫（Gustav Robert Kirchhoff, 1824—1887），德国物理学家，于1847年提出了两个电路网络中电压与电流关系的基本定律。基尔霍夫定律和欧姆定律共同构成了电路分析理论的基础。

基尔霍夫出生在东普鲁士柯尼斯堡的一个律师家庭。18岁时就进入柯尼斯堡大学读书，毕业后在柏林担任讲师。他与德国化学家罗伯特·本生（Robert Bunsen）合作从事光谱学方面的研究，于1860年发现了铯元素，于1861年发现了铷元素。基尔霍夫辐射定律也使他享誉世界。基尔霍夫在工程界、化学界和物理界都是著名人物。

为了证明KCL，假定有一组电流$i_k(t)$，$k=1, 2, \cdots$，流入某节点。这些电流在该节点处的代数和为：

$$i_T(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \cdots \tag{2-14}$$

对式(2-14)两边取积分，得到：

$$q_T(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t) + \cdots \tag{2-15}$$

其中，$q_k(t)=\int i_k(t)\,dt$，$q_T(t)=\int i_T(t)\,dt$。但是电荷守恒定律要求该节点处电荷的代数和不能发生任何变化，也就是说，该节点存储的净电荷为零。因此，$q_T(t)=0 \rightarrow i_T(t)=0$，从而证明了KCL的正确性。

考虑如图2-16中的节点，应用KCL定律可得：

$$i_1 + (-i_2) + i_3 + i_4 + (-i_5) = 0 \tag{2-16}$$

这是因为i_1、i_3、i_4是流入该节点的电流，而i_2、i_5是流出该节点的电流，移项整理后得到：

$$i_1 + i_3 + i_4 = i_2 + i_5 \tag{2-17}$$

式(2-17)可以看作是KCL的另一种形式，即：

流入节点的电流之和等于流出该节点的电流之和。

注意，KCL还适用于任一封闭界面的情况，即KCL的一般情况，因此节点可以看作是一个封闭曲面收缩后的一个点。在二维空间中，封闭截面与就是一条封闭路径。正如图2-17所示的典型电路，流入图中封闭曲面的总电流等于流出该曲面的总电流。

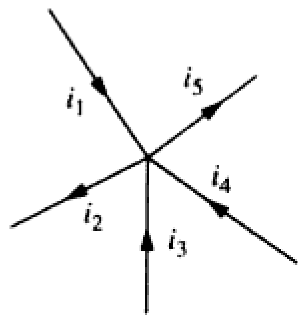


图 2-16 说明 KCL 的节点电流

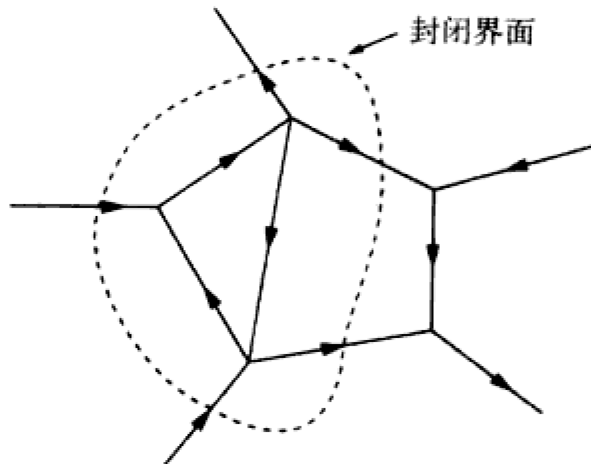


图 2-17 KCL 应用于封闭界面

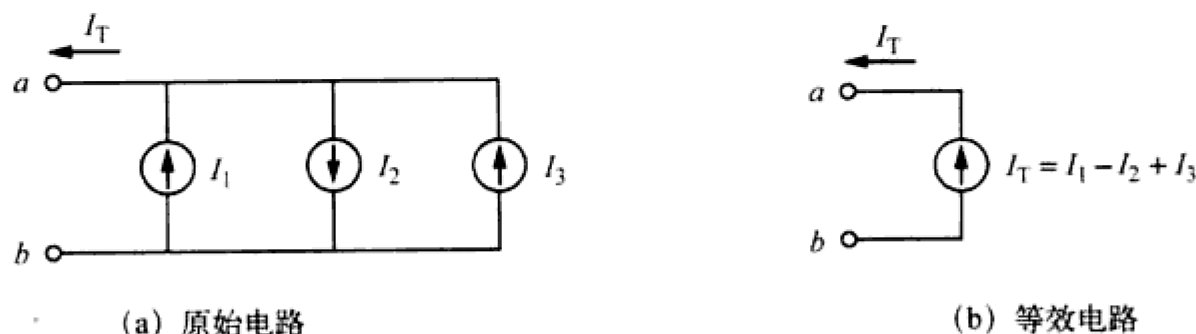
KCL的一个简单应用是并联电流源的合并，合并后的等效电流即各独立电流源所提供电流的代数和。如图2-18a所示的电流源可以合并为图2-18b所示的电流源。在节点a处应用KCL可以得到合并后的即等效电流：

$$I_T + I_2 = I_1 + I_3$$

或者

$$I_T = I_1 - I_2 + I_3 \tag{2-18}$$

串联电路中不可能包含两个不同的电流I_1和I_2，除非$I_1 = I_2$，否则，就会违背基尔霍夫电流定律。



(a) 原始电路　　(b) 等效电路

图 2-18　并联电流源

两个电源（或者两个电路）称为是等价的，如果它们在一对端口处具有相同的i–v关系。

基尔霍夫电压定律的基础是能量守恒原理：

基尔霍夫电压定律（KVL）是指任何封闭路径（或回路）上全部电压的代数和为零。

KVL的数学表达式为：

$$\boxed{\sum_{m=1}^{M} v_m = 0} \tag{2-19}$$

其中，M为回路中的电压数（或回路中的支路数），v_m为第m个电压。

下面利用图2-19所示的电路来说明KVL。图中各电压的符号是环绕回路时首先遇到的端点的极性。回路环绕可以从任何一条支路开始，环绕的方向可以是顺时针，也可以是逆时针。假定从电压源开始，顺时针绕回路一圈如图中箭头所示，那么电压依次是$-v_1$、$+v_2$、$+v_3$、$-v_4$和$+v_5$。例如，环绕到支路3时，首先遇到正端，所以得到电压$+v_3$；而对支路4，首先遇到的是负端，所以得到$-v_4$。因此，根据KVL，有：

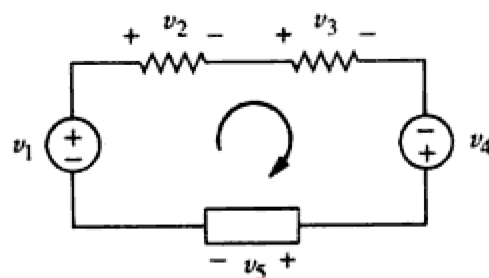


图 2-19　用于说明 KVL 的单回路电路

$$-v_1 + v_2 + v_3 - v_4 + v_5 = 0 \tag{2-20}$$

整理后得到：

$$v_2 + v_3 + v_5 = v_1 + v_4 \tag{2-21}$$

式(2-21)可以解释为：

$$\textbf{回路中电压降落之和＝电压升高之和} \tag{2-22}$$

在回路中，KVL有两种应用方式：顺时针方向或逆时针方向。无论沿哪种方向环绕，回路中电压的代数和均为零。

KVL还有另一种形式。如果按逆时针方向环绕回路，则会得到$+v_1$、$-v_5$、$+v_4$、$-v_3$和$-v_2$，除电压符号相反外，与顺时针方向环绕的情况相同。因此，式(2-20)与式(2-21)保持不变。

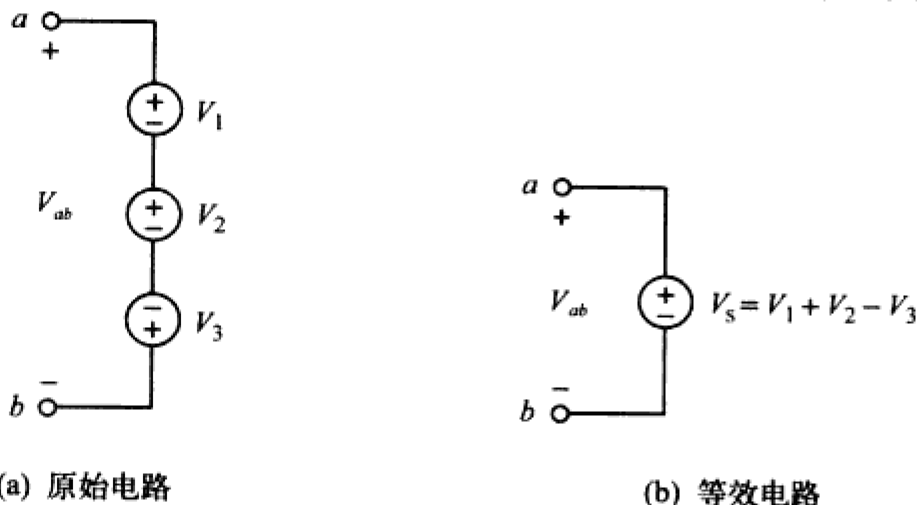
当电压源串联连接时，可以用KVL得出总电压，合并后的等效电压等于各个电压源电压的代数和。例如，对于图2-20a所示的电压源，利用KVL可以得到如图2-20b所示的等效电压源：

$$-V_{ab}+V_1+V_2-V_3=0$$

即

$$V_{ab}=V_1+V_2-V_3 \tag{2-23}$$

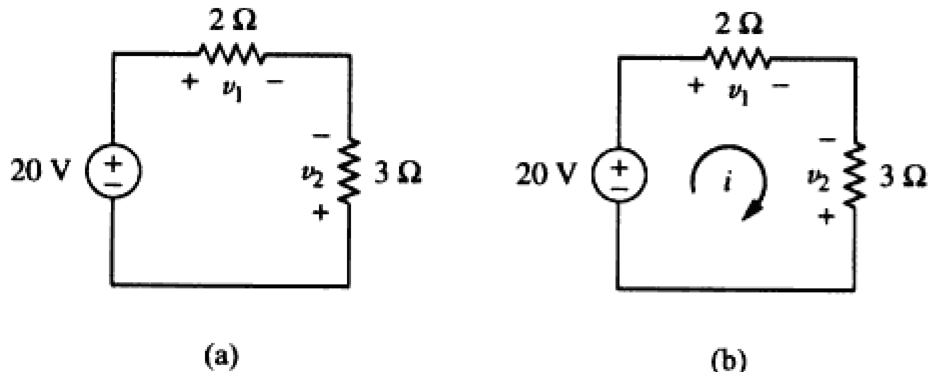
为了避免违反KVL定律，电路中不可能包含并联的两个不同的电压V_1和V_2，除非$V_1=V_2$。



(a) 原始电路　　(b) 等效电路

图 2-20　串联电压源

例题2-5　如图2-21a所示的电路，试求电压v_1与v_2。



(a)　(b)

图 2-21　例题 2-5 的电路原理图

解　为了求出 v_1 与 v_2，需应用欧姆定律和基尔霍夫电压定律。假定流过回路的电流 i 方向如图 2-21b 所示。

由欧姆定律可得：

$$v_1=2i,\qquad v_2=-3i \tag{2-5-1}$$

在回路中应用KVL定律可得：

$$-20+v_1-v_2=0 \tag{2-5-2}$$

将式(2-5-1)代入式(2-5-2)得到：

$$-20+2i+3i=0\qquad 即\qquad 5i=20\quad\Rightarrow\quad i=4\text{ A}$$

最后，将电流i代入式(2-5-1)得到：

$$v_1=8\text{V},\quad v_2=-12\text{V}$$

练习题2-5　试求图2-22所示电路中的v_1与v_2。

答　12V，−6V。

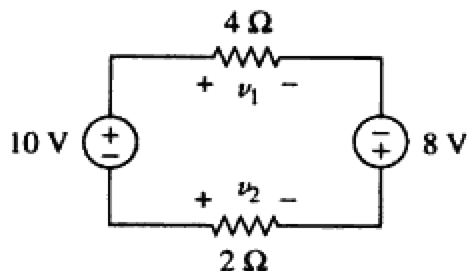


图2-22　练习题2-5的电路原理图

例题2-6　试确定图2-23a所示电路中的v_o与i。

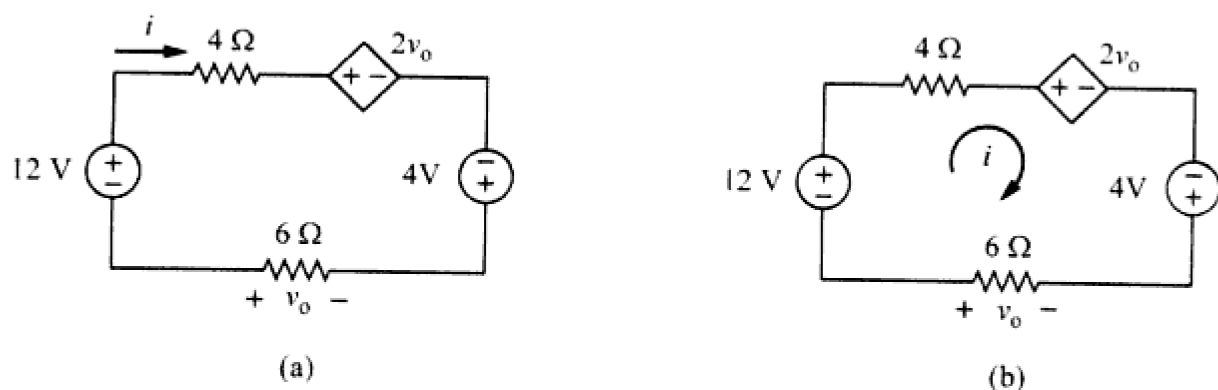


图 2-23 例题 2-6 的电路原理图

解 沿图 2-23b 所示的方向应用 KVL 定律，得到：

$$-12 + 4i + 2v_o - 4 + 6i = 0 \tag{2-6-1}$$

对6 Ω电阻两端应用欧姆定律可得：

$$v_o = -6i \tag{2-6-2}$$

将式(2-6-2)代入式(2-6-1)得到：

$$-16 + 10i - 12i = 0 \quad \Rightarrow \quad i = -8\text{ A}$$

于是，$v_o = 48$ V。

图2-24 练习题2-6的电路原理图

练习题2-6 试求图2-24所示电路中的v_x与v_o。

答 10 V，−5 V。

例题2-7 试求图2-25所示电路中的电流i_o与电压v_o。

解 在节点 a 处应用 KCL 定律，得到：

$$3 + 0.5i_o = i_o \quad \Rightarrow \quad i_o = 6\text{ A}$$

对于4 Ω电阻，应用欧姆定律可得：

$$v_o = 4i_o = 24\text{ V}$$

图 2-25 例题 2-7 的电路原理图

练习题2-7 试求图2-26所示电路中的v_o与i_o。

答 8 V，4 A。

图 2-26 练习题 2-7 的电路原理图

例题2-8 试求图2-27a所示电路中的各个电流与电压值。

解 利用欧姆定律和基尔霍夫定律求解。由于欧姆定律可得：

$$v_1 = 8i_1, \qquad v_2 = 3i_2 \qquad v_3 = 6i_3 \tag{2-8-1}$$

由于各电阻的电压与电流具有上述由欧姆定律确定的伏安关系，因此，实际上需要求出的是(v_1、v_2、v_3)或(i_1、i_2、i_3)。在节点a处，利用KCL定律可以得到：

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \tag{2-8-2}$$

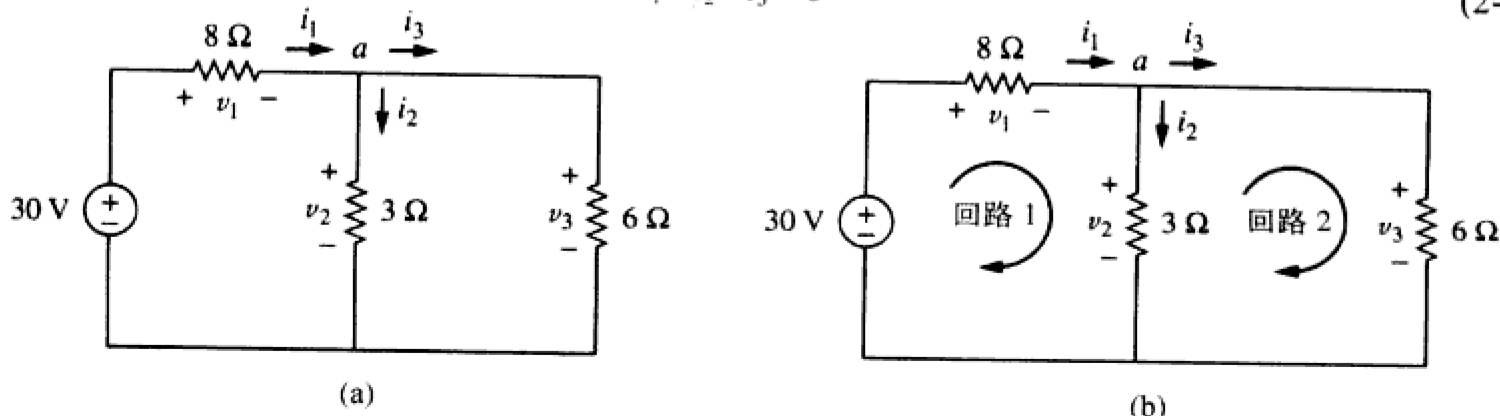


图 2-27 例题 2-8 的电路原理图

对如图2-27b所示的回路1用KVL得到：

$$-30 + v_1 + v_2 = 0$$

利用式(2-8-1)中的i_1、i_2表示上式中的v_1、v_2，得到：

$$-30 + 8\,i_1 + 3\,i_2 = 0$$

即

$$i_1 = \frac{(30-3i_2)}{8} \tag{2-8-3}$$

对回路2应用KVL定律得到：

$$-v_2 + v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_3 = v_2 \tag{2-8-4}$$

这恰好说明两个并联电阻两端的电压是相等的。利用式(2-8-1)中的i_2与i_3来分别表示v_2与v_3，则式(2-8-4)变为：

$$6i_3 = 3i_2 \quad \Rightarrow \quad i_3 = \frac{i_2}{2} \tag{2-8-5}$$

将式(2-8-3)与式(2-8-5)代入式(2-8-2)，得到：

$$\frac{30-3i_2}{8} - i_2 - \frac{i_2}{2} = 0$$

即$i_2 = 2$ A，由i_2的值，利用式(2-8-1)～式(2-8-5)可得：

$i_1 = 3$ A，$i_3 = 1$ A，$v_1 = 24$ V，$v_2 = 6$ V，$v_3 = 6$ V

练习题2-8　试求图2-28所示电路中的各个电流与电压值。

答　$v_1 = 3$ V，$v_2 = 2$ V，$v_3 = 5$ V，$i_1 = 1.5$ A，$i_2 = 0.25$ A，$i_3 = 1.25$ A。

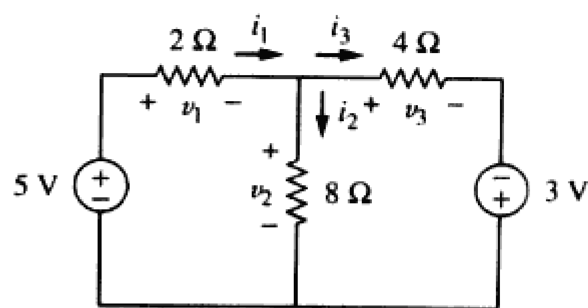


图 2-28　练习题 2-8 的电路原理图

2.5　串联电阻及其分压

在电路分析中经常会遇到串联电阻或并联电阻的合并问题，需引起足够的重视。一次合并两个电阻就可以方便地实现多个串、并联电阻的合并。根据这个观点，考虑如图2-29所示的单回路电路，图中两个电阻是串联的，因为流过这两个电阻的电流i是一样的。对每个电阻应用欧姆定律，则有：

$$v_1 = iR_1, \qquad v_2 = iR_2 \tag{2-24}$$

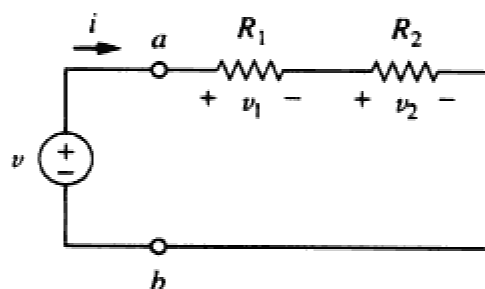


图 2-29　包含两个串联电阻的单回路电路

如果对该回路（沿顺时针方向）应用KVL，则得到：

$$-v + v_1 + v_2 = 0 \tag{2-25}$$

合并式(2-24)与式(2-25)可得：

$$v = v_1 + v_2 = i\,(R_1 + R_2) \tag{2-26}$$

即

$$i = \frac{v}{R_1 + R_2} \tag{2-27}$$

注意，式(2-26)又可以写成：

$$v = iR_{eq} \tag{2-28}$$

表明这两个电阻可以用等效电阻R_{eq}来取代，并且，

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \tag{2-29}$$

于是，图2-29所示的电路可以用图2-30中的等效电路来取代，图2-29与图2-30中的两个电路之所以等效，是因为这两个电路在a、b两端所呈现的电压-电流关系是完全相同的。诸如图2-30这样的等效电路对于简化电路的分析是十非常有用的。一般而言，

任意多个电阻串联后的等效电阻值等于各个电阻值之和。

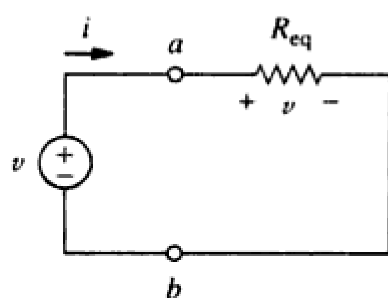


图 2-30 图 2-29 所示电路的等效电路

对于N个电阻串联而言，其等效电阻为：

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_N = \sum_{n=1}^{N} R_n \tag{2-30}$$

串联电阻的特性与阻值等于各电阻阻值之和的一个电阻的特性相同。

为了确定图2-29所示电路中各个电阻上的电压，可以将式(2-26)代入式(2-24)，得到：

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v, \qquad v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v \tag{2-31}$$

注意，电源电压v在各电阻之间的电压分配与各电阻的阻值成正比，电阻值越大，电阻上的电压降就越大，这称作*分压原理*（principle of voltage division），而图2-29所示的电路称为*分压电路*（voltage divider）。一般情况下，如果电源电压为v的分压电路中包含N个电阻（R_1，R_2，…，R_N）串联，则第n个电阻（R_n）上的电压降为：

$$v_n = \frac{R_n}{R_1 + R_2 + \cdots + R_N} v \tag{2-32}$$

2.6 并联电阻及其分流

在如图2-31所示的电路中，两个电阻并联连接，因此它们两端具有相同的电压。由欧姆定律可得：

$$v = i_1 R_1 = i_2 R_2$$

即

$$i_1 = \frac{v}{R_1}, \qquad i_2 = \frac{v}{R_2} \tag{2-33}$$

在节点a处应用KCL，得到总电流i为：

$$i = i_1 + i_2 \tag{2-34}$$

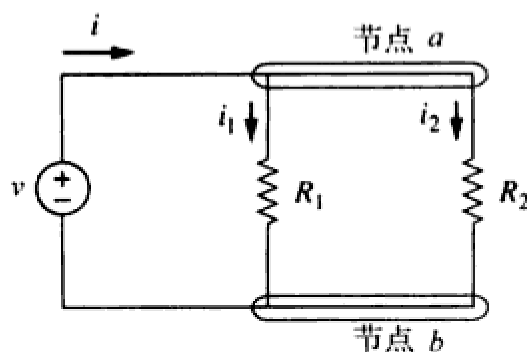


图 2-31 两个电阻的并联

将式(2-33)代入式(2-34)可得：

$$i = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} = v\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{v}{R_{eq}} \tag{2-35}$$

其中，R_{eq}为两个并联电阻的等效电阻值：

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{2-36}$$

或者

$$\frac{1}{R_{eq}}=\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}$$

即

$$R_{eq}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \tag{2-37}$$

两个并联电阻的等效电阻值等于各电阻值的乘积除以各电阻值之和。

必须强调的是，以上叙述仅适用于两个电阻的并联。如果$R_1=R_2$，则由式(2-37)可得$R_{eq}=R_1/2$。可以将式(2-36)扩展到N个电阻并联的一般情况，此时的等效电阻值为：

$$\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\cdots+\frac{1}{R_N} \tag{2-38}$$

由此可见，若干电阻并联后的等效电阻值R_{eq}总是小于其中最小的电阻值。当$R_1=R_2=\cdots=R_N=R$时，有：

$$R_{eq}=\frac{R}{N} \tag{2-39}$$

例如，四个100 Ω的电阻并联连接时的等效电阻值为25 Ω。

在处理电阻并联的问题时，采用电导通常要比采用电阻更为方便。由式(2-38)可知，N个电阻并联后的等效电导为：

$$G_{eq}=G_1+G_2+G_3+\cdots+G_N \tag{2-40}$$

其中，$G_{eq}=1/R_{eq}$，$G_1=1/R_1$，$G_2=1/R_2$，$G_3=1/R_3$，…，$G_N=1/R_N$，式(2-40)表明：

并联电阻的等效电导等于各个电导之和。

并联电导的特性与电导值等于各电导之和的单个电导的特性相同。

这表明图2-31所示的电路可以用图2-32所示的电路取代。容易看出式(2-30)与式(2-40)的相似性，即并联电阻等效电导的推导方法与串联电阻等效电阻的推导方法相同。同样，串联电阻等效电导的计算方法与并联电阻等效电阻的计算方法相同。因此，N个电阻串联（如图2-29所示）的等效电导G_{eq}为：

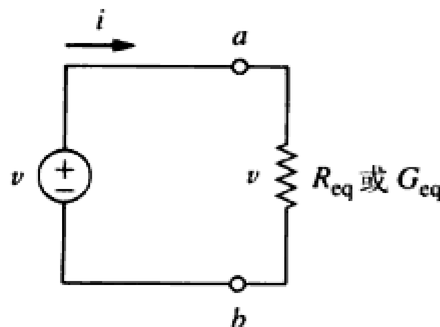


图 2-32 图 2-31 所示电路的等效电路

$$\frac{1}{G_{eq}}=\frac{1}{G_1}+\frac{1}{G_2}+\frac{1}{G_3}+\cdots+\frac{1}{G_N} \tag{2-41}$$

假定流入图2-31中节点a的总电流为i，如何求得电流i_1与i_2呢？我们知道并联等效电阻具有相同的电压v，即

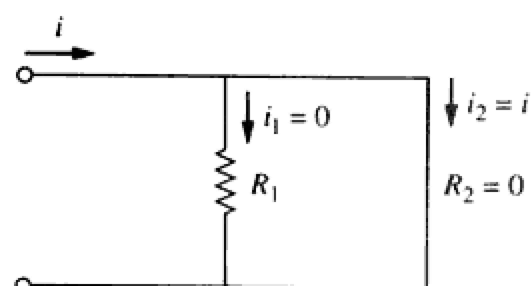
$$v=iR_{eq}=\frac{iR_1R_2}{R_1+R_2} \tag{2-42}$$

合并式(2-33)与式(2-42)，得到：

$$i_1=\frac{R_2i}{R_1+R_2},\quad i_2=\frac{R_1i}{R_1+R_2} \tag{2-43}$$

上式说明总电流i被两个电阻支路分享，且支路电流与电阻值成反比，这个规律被称为分流原理（principle of current division），图2-31所示的电路被称为分流电路（current divider）。可以看出，较小的电阻支路流过较大的电流。

一种极端的情况是假定图2-31所示电路中的一个电阻为零，例如$R_2=0$，即R_2为短路电路，如图2-33a所示。由式(2-43)可知，$R_2=0$意味着$i_1=0$，$i_2=i$，这就是说，总电流i不流经R_1，而只流过$R_2=0$的短路支路，即阻值最小的路径。



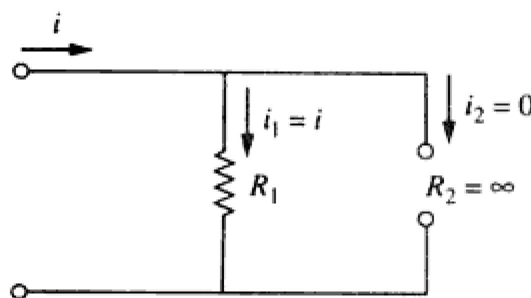
（a）短路

因此，当一个电路被短路时，如图2-33a所示，应该记住如下两点：

（1）等效电阻$R_{eq}=0$（参见$R_2=0$时的式(2-37)）。

（2）全部电流都从短路支路中流过。

另外一个极端情况是$R_2=\infty$，即R_2为开路，如图2-33b所示，此时电流仍然从电阻最小的路径R_1流过。对式(2-37)取极限$R_2\to\infty$，得到$R_{eq}=R_1$。



（b）开路

图 2-33　短路与开路

若以R_1 R_2分别去除式(2-43)的分子和分母，则有：

$$i_1=\frac{G_1}{G_1+G_2}i \tag{2-44a}$$

$$i_2=\frac{G_2}{G_1+G_2}i \tag{2-44b}$$

因此，一般而言，如果电源电流为i的分流电路中包含N个电导（$G_1, G_2, \cdots, G_N$）并联，则流经第n个电导（G_n）的电流为：

$$i_n=\frac{G_n}{G_1+G_2+\cdots+G_N}i \tag{2-45}$$

一般来说，在电路分析过程中，通常需要合并串联和并联的电阻，从而将电阻网络简化为单个等效电阻（equivalent resistance）R_{eq}。该等效电阻即指定网络端口之间的电阻，必须与原网络表现出相同的端口伏安特性。

例题2-9　试求图2-34所示电路的R_{eq}。

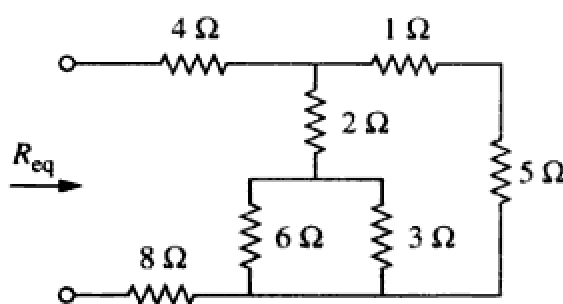


图 2-34　例题 2-9 的电路原理图

解　为求出R_{eq}，需要合并串联电阻和并联电阻。图中6 Ω电阻与3 Ω电阻并联，其等效电阻为（符号‖表示并联）：

$$6\ \Omega \parallel 3\ \Omega=\frac{6\times3}{6+3}=2\ \Omega$$

1 Ω电阻与5 Ω电阻是串联的，所以其等效电阻为：

$$1\ \Omega+5\ \Omega=6\ \Omega$$

于是，图2-34所示电路被简化为图2-35a所示的电路。由图2-35a可以看出两个2 Ω的电阻是串联的，所以其等效电阻为：

$$2\ \Omega+2\ \Omega=4\ \Omega$$

此时，该4 Ω电阻又与6 Ω电阻并联，其等效电阻为：

$$4\Omega \parallel 6\Omega=\frac{4\times6}{4+6}=2.4\ \Omega$$

这样，图2-35a所示的电路又可以简化为图2-35b所示电路。在图2-35b中三个电阻是串联的，因此，电路的等效电阻为：

$$R_{eq} = 4\ \Omega + 2.4\ \Omega + 8\ \Omega = 14.4\ \Omega$$

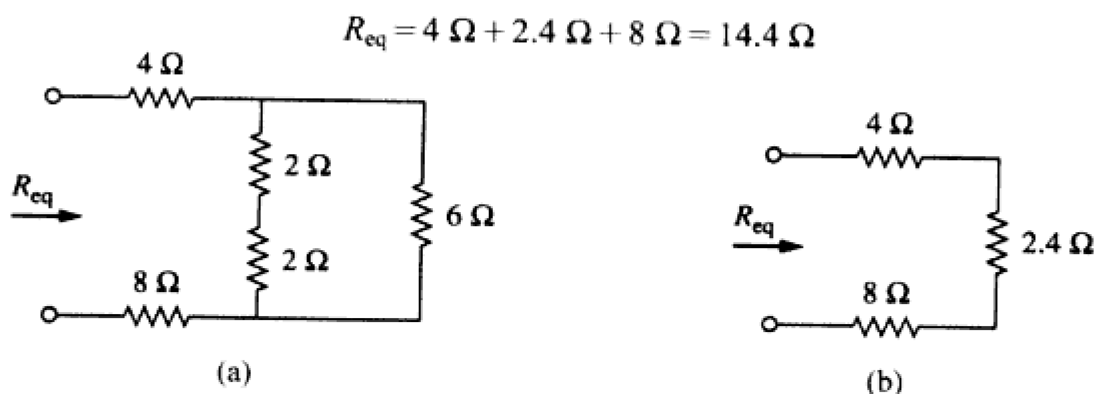


图 2-35 例题 2-9 的等效电路

练习题2-9 合并如图2-36所示电路中的电阻，从而求出该电路的R_{eq}。
答 6 Ω。

例题2-10 试计算图2-37所示的电路的等效电阻R_{ab}。

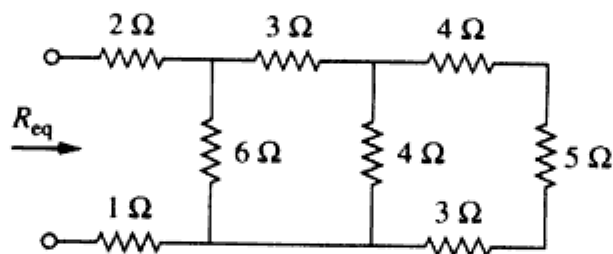


图 2-36 练习题 2-9 的电路原理图

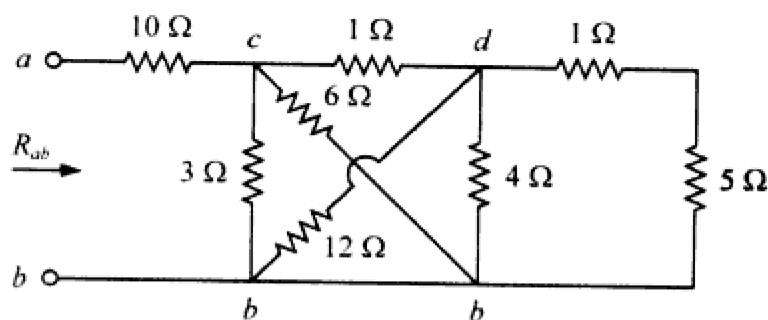


图 2-37 例题 2-10 的电路原理图

解 3 Ω 电阻与 6 Ω 电阻的两端均分别接到节点 c 和节点 b，所以这两个电阻是并联的，合并后的阻值为：

$$3\ \Omega \parallel 6\ \Omega = \frac{3\times6}{3+6} = 2\ \Omega \tag{2-10-1}$$

同理，12 Ω电阻与4 Ω电阻的两端均分别接到节点d和节点b，所以这两个电阻也是并联的，合并为：

$$12\ \Omega \parallel 4\ \Omega = \frac{12\times4}{12+4} = 3\ \Omega \tag{2-10-2}$$

而1 Ω电阻与5 Ω电阻是串联的，其等效电阻为：

$$1\ \Omega + 5\ \Omega = 6\ \Omega \tag{2-10-3}$$

经上述三次合并后，图2-37所示的电路就简化为图2-38a所示的电路。而在图2-38a中，并联连接的3 Ω电阻与6 Ω电阻可合并为2 Ω电阻，其计算方法与式(2-10-1)相同。至此，该2 Ω电阻又与1 Ω电阻串联，从而可以合并为1 Ω + 2 Ω = 3 Ω的电阻。于是，图2-38a所示的电路简化为图2-38b所示的电路，此电路中相互并联的2 Ω电阻与3 Ω电阻可以合并为：

$$2\ \Omega \parallel 3\ \Omega = \frac{2\times3}{2+3} = 1.2\ \Omega$$

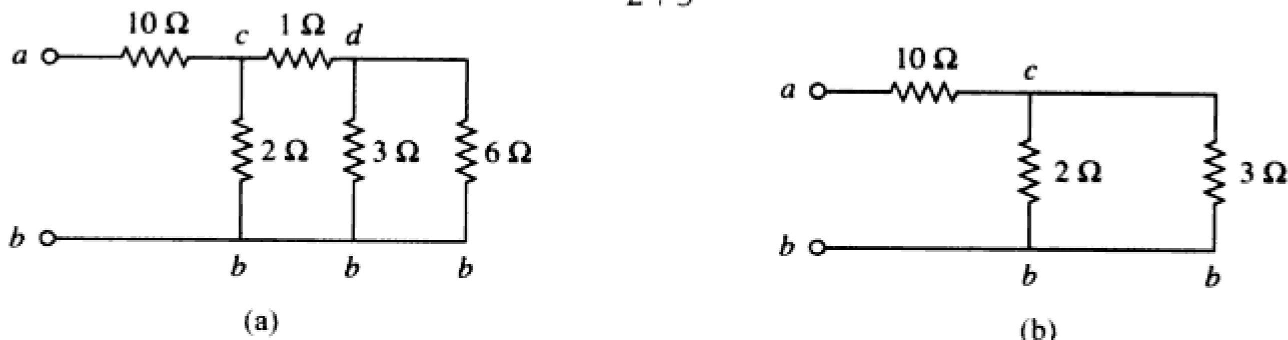


图 2-38 例题 2-10 的等效电路

该1.2 Ω电阻又与10 Ω电阻串联，从而得到等效电阻为：

$$R_{ab}=10+1.2=11.2\ \Omega$$

练习题2-10 试求如图2-39所示电路的R_{ab}。

答 11 Ω。

图 2-39 练习题 2-10 的电路原理图

例题2-11 试求如图2-40a所示电路的等效电导G_{eq}。

解 8 S 电阻与 12 S 电阻在电路中是并联的，所以二者的等效电导为：

$$8\ \text{S}+12\ \text{S}=20\ \text{S}$$

该20 S电阻又与5 S电阻串联，如图2-40b所示，于是合并后的电导为：

$$\frac{20\times5}{20+5}=4\ \text{S}$$

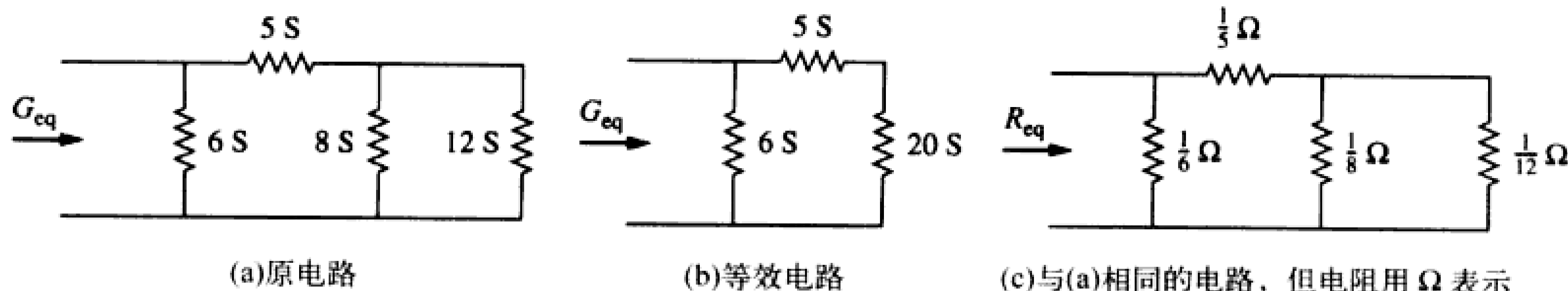


图 2-40 例题 2-11 的电路原理图

该4 S电阻又与6S电阻并联，因此：

$$G_{eq}=6+4=10\ \text{S}$$

应该注意到，图2-40a所示的电路与图2-40c所示的电路是相同的，只是图2-40a中的电阻单位采用西门子，而图2-40c中的电阻单位则采用欧姆。要证明这两个电路是相同的，需求出图2-40c所示电路的等效电阻。

$$R_{eq}=\frac{1}{6}\left\|\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{8}\right\|\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{6}\left\|\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{20}\right)=\frac{1}{6}\right\|\frac{1}{4}$$

$$=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{10}\Omega$$

$$G_{eq}=\frac{1}{R_{eq}}=10\text{S}$$

与上述方法求得的G_{eq}一样。

练习题2-11 试计算如图2-41所示电路的G_{eq}。

答 4 S。

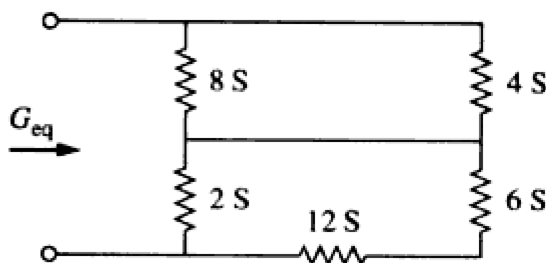


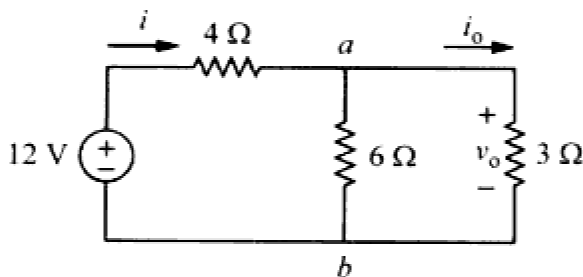
图 2-41 练习题 2-11 的电路原理图

例题2-12 试求如图2-42a所示电路的i_o和v_o，并计算3 Ω电阻所消耗的功率。

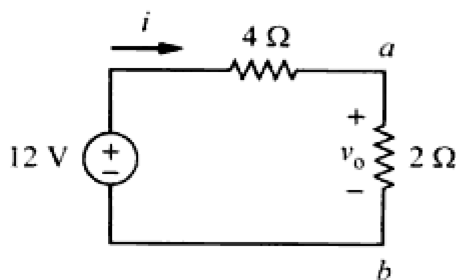
解 6 Ω电阻与3 Ω电阻并联，合并后的电阻为：

$$6\ \Omega \parallel 3\ \Omega = \frac{6\times 3}{6+3} = 2\ \Omega$$

简化电路如图2-42b所示。注意，v_o不会受到电阻合并的影响，因为这两个电阻是并联的，因此具有相同的端电压。根据图2-42b，可以采用两种方法求得v_o。



（a）原电路



（b）等效电路

图 2-42 例题 2-12 的电路原理图

其中一种方法是采用欧姆定律，得到：

$$i = \frac{12}{4+2} = 2\text{ A}$$

所以，$v_o = 2i = 2\times 2 = 4$ V。另一种方式是采用电压分压原理，由于图2-42b中的12 V电压被4 Ω电阻和2 Ω电阻分压，所以，

$$v_o = \frac{2}{2+4}(12\text{ V}) = 4\text{ V}$$

类似地，也可以采用两种方法得到i_o。一种方法是在已经求得v_o后，对图2-42a中的3 Ω电阻支路应用欧姆定律，可得：

$$v_o = 3i_o = 4 \quad \Rightarrow \quad i_o = \frac{4}{3}\text{ A}$$

另一种方法是在已经求得i后，对图2-42a所示电路应用分流原理，得到：

$$i_o = \frac{6}{6+3}i = \frac{2}{3}(2\text{ A}) = \frac{4}{3}\text{ A}$$

3 Ω电阻所消耗的功率为：

$$p_o = v_o i_o = 4\left(\frac{4}{3}\right) = 5.333\text{ W}$$

练习题2-12 试求图2-43所示电路中的v_1与v_2，并计算i_1与i_2以及12 Ω电阻和40 Ω电阻所消耗的功率。

答 $v_1 = 5$ V，$i_1 = 416.7$ mA，$p_1 = 2.083$ W，$v_2 = 10$ V，$i_2 = 250$ mA，$p_2 = 2.5$ W。

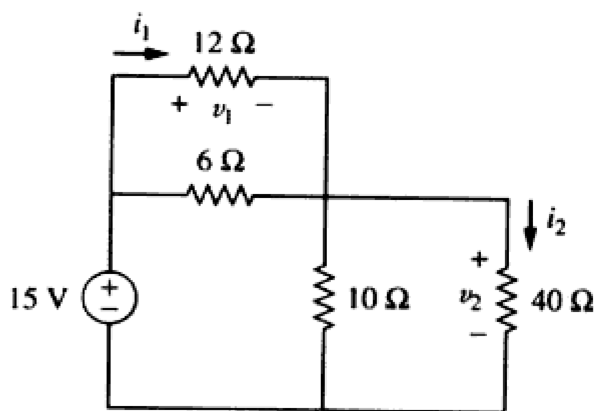
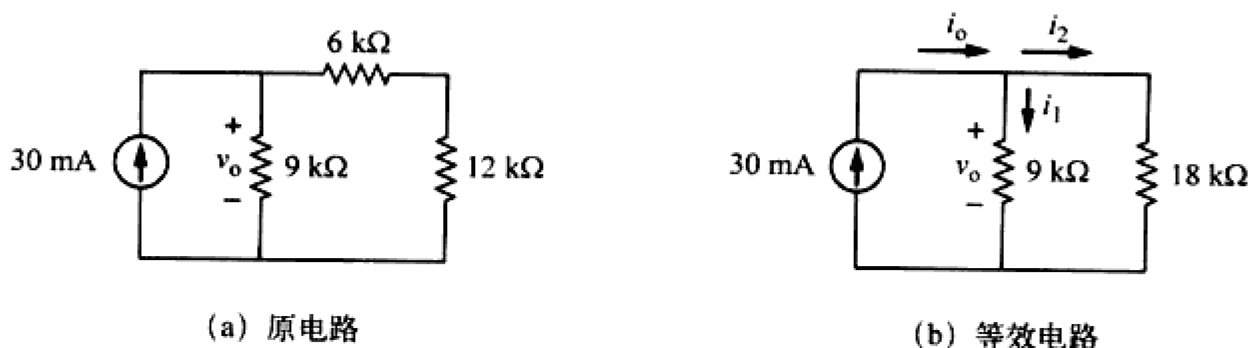


图 2-43 练习题 2-12 的电路原理图

例题2-13 在如图2-44a所示的电路中，试求（a）电压v_o；（b）电流源提供的功率；（c）每个电阻消耗的功率。



(a) 原电路　　(b) 等效电路

图 2-44　例题 2-13 的电路原理图

解 (a) 6 kΩ 电阻与 12 kΩ 电阻串联，合并后的电阻为 6 + 12 = 18 k Ω，于是图 2-44a 所示电路可以简化为图 2-44b 所示电路。采用分流原理可以求出 i_1 与 i_2。

$$i_1 = \frac{18\,000}{9\,000 + 18\,000}(30\,\text{mA}) = 20\,\text{mA}$$

$$i_2 = \frac{9\,000}{9\,000 + 18\,000}(30\,\text{mA}) = 10\,\text{mA}$$

注意，9 kΩ电阻与18 kΩ电阻两端的电压是相同的，所以，$v_o = 9\,000\,i_1 = 18\,000\,i_2 = 180$ V。

(b) 电流源提供的功率为：

$$p_o = v_o\,i_o = 180(30)\,\text{mW} = 5.4\text{ W}$$

(c) 12 k Ω电阻所消耗的功率为：

$$p = iv = i_2(i_2 R) = i_2^2 R = (10 \times 10^{-3})^2(12\,000) = 1.2\text{ W}$$

6 k Ω电阻所消耗的功率为：

$$p = i_2^2 R = (10 \times 10^{-3})^2(6\,000) = 0.6\text{ W}$$

9 kΩ电阻所消耗的功率为：

$$p = \frac{v_o^2}{R} = \frac{(180)^2}{9\,000} = 3.6\text{ W}$$

或者

$$p = v_o\,i_1 = 180(20)\,\text{mW} = 3.6\text{ W}$$

注意，电源提供的功率（5.4W）等于电路元件吸收（消耗）的功率（1.2 + 0.6 + 3.6 = 5.4 W），这正是检查结果正确与否的一种方法。

练习题2-13 在图2-45所示的电路中，试求(a)v_1、v_2；(b) 3 kΩ电阻与20 kΩ电阻消耗的功率；(c) 电流源提供的功率。

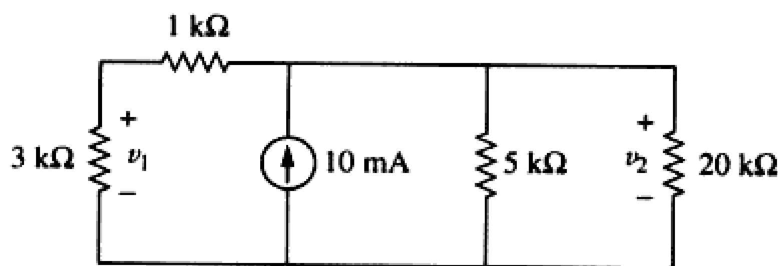


图 2-45　练习题 2-13 的电路原理图

答 (a) 15 V，20 V；(b) 75 mW，20 mW；(c) 200 mW。

2.7 †Y－Δ转换

在电路分析中经常会遇到电阻既非并联又非串联的情况，如图2-46所示的桥式电路，当电阻既

非串联又非并联时，应该如何合并电阻$R_1 \sim R_6$呢？大量具有图2-46所示形式的电路可以利用三端等效网络来简化的。三端等效网络包括如图2-47所示的指的Y型或T型网络，或者如图2-48所示的Δ型或Π型网络。这些网络或独立地或作为大型网络的一部分出现在电路网络中，用于三相网络、滤波器以及匹配网络等电路中。本节主要介绍在网络中如何辨认这类三端网络，以及如何在网络分析中应用Y－Δ转换等问题。

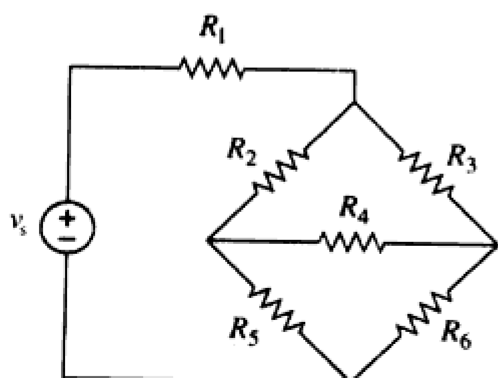
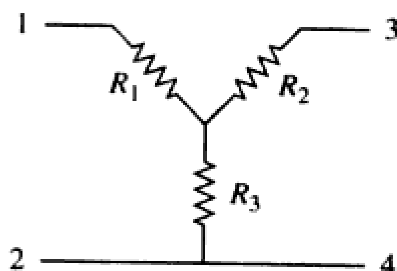
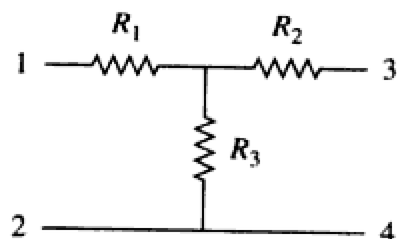


图 2-46　电桥网络

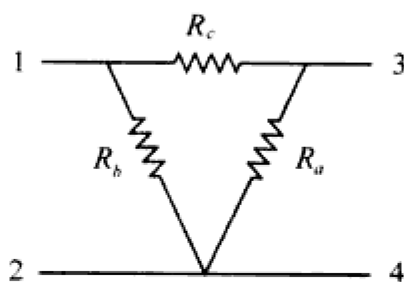


(a) Y 型

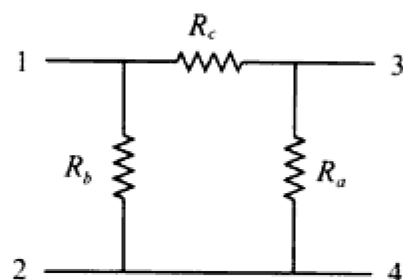


(b) T 型

图 2-47　同一网络的两种形式



(a) Δ 型



(b) Π 型

图 2-48　同一网络的两种形式

2.7.1　Δ－Y 转换

假定将包含Δ结构的电路网络转换为Y网络进行处理更为方便。我们将一个Y网络叠加在一个Δ网络上，并求出Y网络中的等效电阻，为了求出Y网络中的等效电阻，要对两个网络进行比较，并确保Δ（或Π）网络中的每一对节点之间的电阻值等于Y(或T)网络中对应的每对节点之间的电阻值。以图2-47和图2-48中的节点1和节点2为例，有：

$$R_{12}(\mathrm{Y}) = R_1 + R_3 \tag{2-46}$$

$$R_{12}(\Delta) = R_b \parallel (R_a + R_c)$$

令$R_{12}(\mathrm{Y}) = R_{12}(\Delta)$有：

$$R_{12} = R_1 + R_3 = \frac{R_b(R_a + R_c)}{R_a + R_b + R_c} \tag{2-47a}$$

同理，

$$R_{13} = R_1 + R_2 = \frac{R_c(R_a + R_b)}{R_a + R_b + R_c} \tag{2-47b}$$

$$R_{34} = R_2 + R_3 = \frac{R_a(R_b + R_c)}{R_a + R_b + R_c} \tag{2-47c}$$

式(2-47a)减去式(2-47c)可得：

$$R_1 - R_2 = \frac{R_c(R_b - R_a)}{R_a + R_b + R_c} \tag{2-48}$$

式(2-47b)与式(2-48)相加可得：

$$R_1=\frac{R_bR_c}{R_a+R_b+R_c} \tag{2-49}$$

式(2-47b)减去式(2-48)可得：

$$R_2=\frac{R_cR_a}{R_a+R_b+R_c} \tag{2-50}$$

式(2-47a)减去式(2-49)可得：

$$R_3=\frac{R_aR_b}{R_a+R_b+R_c} \tag{2-51}$$

上述式(2-49)～式(2-51)无需死记，将Δ网络转换为Y网络时，可增加一个节点n，如图2-49所示，并按照如下转换规则进行转换。

Y网络各电阻值等于Δ网络中相邻两条支路电阻的乘积除以Δ网络中三个电阻之和。

根据上述规则即可由图2-49得到式(2-49)～式(2-51)。

2.7.2 Y－Δ转换

为了求出将Y网络转换为等效的Δ网络转换公式，首先由式(2-49)～式(2-51)可以得到：

$$\begin{aligned}R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1&=\frac{R_aR_bR_c(R_a+R_b+R_c)}{(R_a+R_b+R_c)^2}\\&=\frac{R_aR_bR_c}{R_a+R_b+R_c}\end{aligned} \tag{2-52}$$

用式(2-49)～式(2-51)分别去除式(2-52)得到：

$$R_a=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_1} \tag{2-53}$$

$$R_b=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_2} \tag{2-54}$$

$$R_c=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_3} \tag{2-55}$$

由式(2-53)～式(2-55)以及图2-49可以得出如下Y－Δ转换规则。

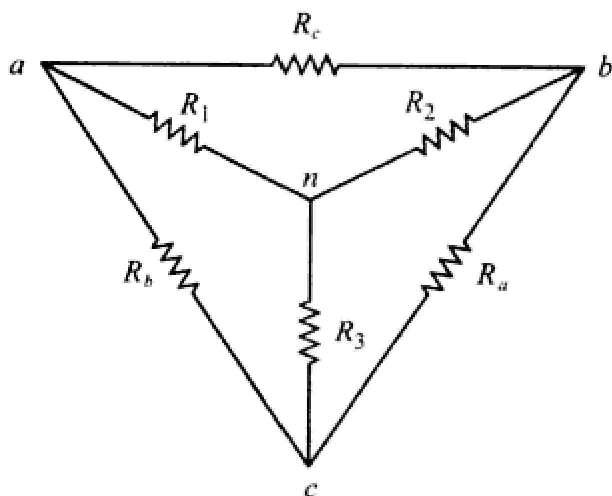


图 2-49　Y网络与Δ网络叠加为相互转换的辅助电路

Δ网络中各电阻值等于Y网络中所有电阻两两相乘之和除以相对的Y网络支路电阻。

称Y网络与Δ网络是平衡的，如果

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_Y, \quad R_a = R_b = R_c = R_\Delta \tag{2-56}$$

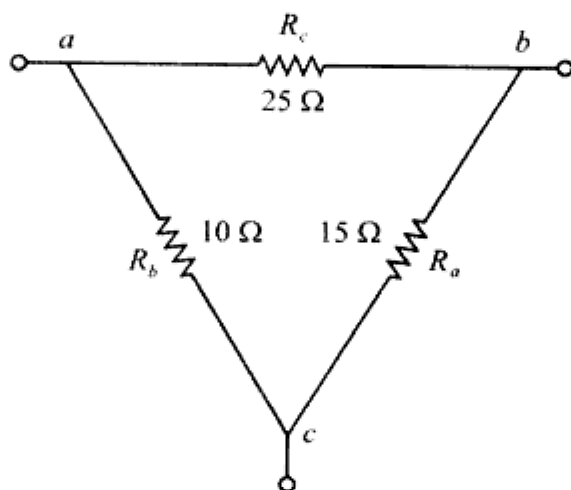
在上述条件下，转换公式变为：

$$R_Y = \frac{R_\Delta}{3} \quad \text{或} \quad R_\Delta = 3R_Y \tag{2-57}$$

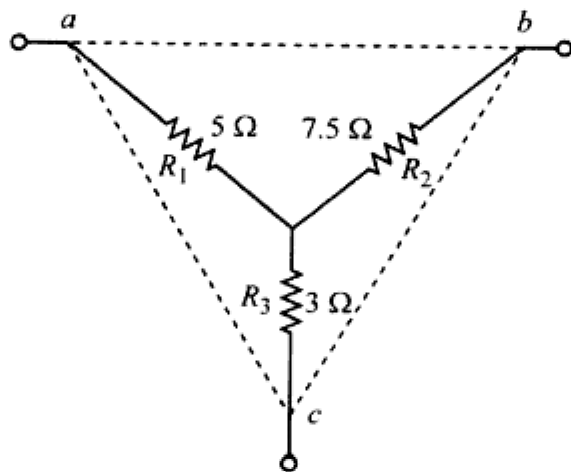
R_Y为什么小于R_Δ呢？这是因为Y型连接有点像电阻的“串联”连接，而Δ型连接则像“并联”连接。

我们注意到在进行转换时，并没有对电路元件做任何增减，只是利用不同的但在数学上等效的三端网络替代原有的三端网络，从而得到一个由电阻串联或并联构成的电路，以便于计算R_{eq}。

例题2-14 将图2-50a所示的Δ网络转换为等效的Y网络。



(a) 原Δ网络



(b) 等效的Y网络

图 2-50 例题 2-14 的电路原理图

解 由式(2-49)～式(2-51)，可得：

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} = \frac{10 \times 25}{15 + 10 + 25} = \frac{250}{50} = 5\Omega$$

$$R_2 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c} = \frac{25 \times 15}{50} = 7.5\Omega$$

$$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c} = \frac{15 \times 10}{50} = 3\Omega$$

等效的Y网络如图2-50b所示。

练习题2-14 将图2-51所示的Y网络转换为Δ网络。

答 $R_a = 140\ \Omega$，$R_b = 70\ \Omega$，$R_c = 35\ \Omega$。

例题2-15 试求图2-52所示电路的等效电阻R_{ab}，并由此计算电流i。

解 （1）明确问题。本例题所要解决的问题已经很清楚明确，但要注意，完成这一步通常会花费相当的时间。

（2）**表述**对问题的理解。如果去掉该电路中的电压源，显然会得到一个纯电阻电路。由于该电

路既包括Δ网络又包括Y网络，因此电路元件的合并会变得更为复杂。一种方法是采用Y－Δ转换来求解这个问题，首先要明确Y网络（该电路中包括两个Y网络，分别位于节点n和节点c）和Δ网络（该电路中包括三个和Δ网络，can、abn和cnb）的位置。

（3）确定**可选**解。可以采用不同的方法求解本题，由于2.7节讨论的主要问题是Y－Δ转换，所以应该采用该方法求解本例。求解等效电阻的另一种方法是在电路中插入一个安培表，并求出ab之间的电压，我们会在第4章学习这种方法。

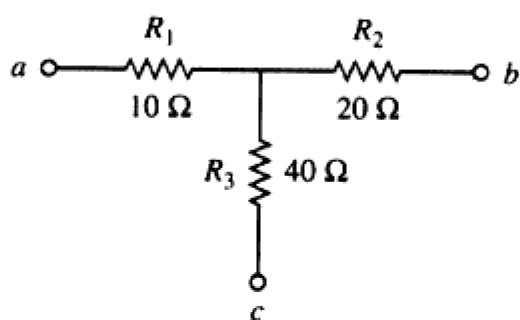


图 2-51　练习题 2-14 的电路原理图

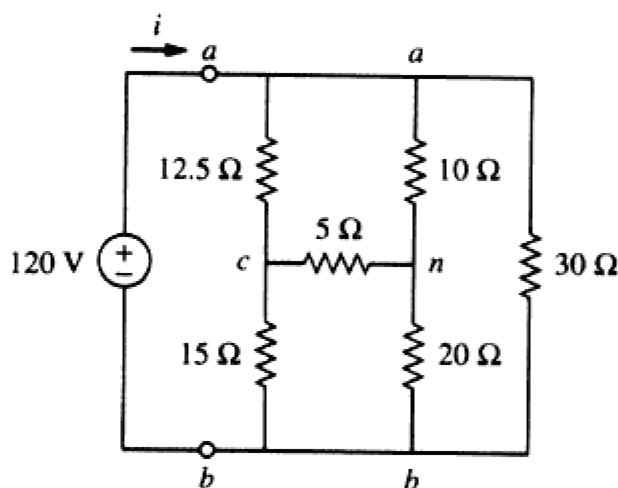


图 2-52　例题 2-15 的电路原理图

这里首先采用Y－Δ转换的方法来求解这个问题，之后在采用Δ－Y转换的方法来检验结果的正确性。

（4）该电路中有两个Y网络和一个Δ网络，只要将其中一个网络进行变换就可以简化电路。如果将由5 Ω、10 Ω和20 Ω电阻构成的Y网络进行转换，并且选择：

$$R_1 = 10\ \Omega,\quad R_2 = 20\ \Omega,\quad R_3 = 5\ \Omega$$

于是，由式(2-53)～式(2-55)可得：

$$R_a = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1} = \frac{10\times 20 + 20\times 5 + 5\times 10}{10} = \frac{350}{10} = 35\Omega$$

$$R_b = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2} = \frac{350}{20} = 17.5\Omega$$

$$R_c = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3} = \frac{350}{5} = 70\Omega$$

将Y网络转换为Δ网络后的等效电路（暂时去掉电压源）如图2-53a所示。合并图中的三对并联电阻，得到：

$$70 \parallel 30 = \frac{70\times 30}{70+30} = 21\ \Omega$$

$$12.5 \parallel 17.5 = \frac{12.5\times 17.5}{12.5+17.5} = 7.292\ \Omega$$

$$15 \parallel 35 = \frac{15\times 35}{15+35} = 10.5\ \Omega$$

于是得到如图2-53b所示的等效电路。因此：

$$R_{ab} = (7.292 + 10.5) \parallel 21 = \frac{17.792\times 21}{17.792+21} = \mathbf{9.632\ \Omega}$$

则：

$$i = \frac{v_s}{R_{ab}} = \frac{120}{9.632} = \mathbf{12.458A}$$

以上就成功地解答了该问题，下面必须对答案做出评价。

(5) **评价结果**。这一步必须确定所得到的答案是否正确，并对最终的结果做出评价。

检验本题的答案相当容易，下面通过Δ−Y转换求解本例来完成检验。下面将Δ网络can转换为Y网络。

设$R_c = 10\ \Omega$，$R_a = 5\ \Omega$，$R_n = 12.5\ \Omega$，由此得到（用d表示Y网络的中心）：

$$R_{ad} = \frac{R_c R_n}{R_a + R_c + R_n} = \frac{10 \times 12.5}{5 + 10 + 12.5} = 4.545\Omega$$

$$R_{cd} = \frac{R_a R_n}{27.5} = \frac{5 \times 12.5}{27.5} = 2.273\Omega$$

$$R_{nd} = \frac{R_a R_c}{27.5} = \frac{5 \times 10}{27.5} = 1.8182\Omega$$

于是得到如图2-53c所示的电路，该电路图中节点d与b之间的电阻为两串联电阻支路的并联等效，即

$$R_{db} = \frac{(2.273 + 15)(1.8182 + 20)}{2.273 + 15 + 1.8182 + 20} = \frac{376.9}{39.09} = 9.642\Omega$$

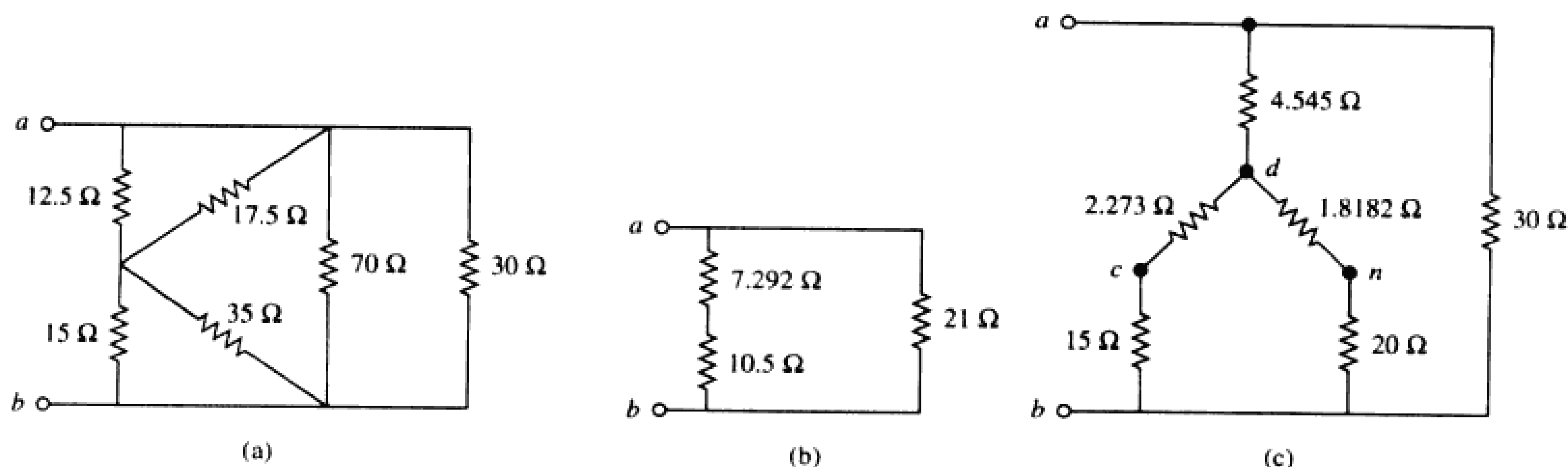


图 2-53 图 2-52 所示电路去掉电压源后的等效电路

该电阻又与4.545 Ω的电阻串联，二者串联后与30 Ω的电阻并联，这样得到该电路的等效电阻为：

$$R_{ab} = \frac{(9.642 + 4.545)30}{9.642 + 4.545 + 30} = \frac{425.6}{44.19} = \mathbf{9.631\Omega}$$

于是，

$$i = \frac{v_s}{R_{ab}} = \frac{120}{9.631} = \mathbf{12.46A}$$

由此可见，采用Y−Δ转换的两种方法会得到相同的结果，这正是一个非常好的检验过程。

(6) 对题解是否**满意**。通过确定电路的等效电阻已经求出了问题的解，并对答案进行了检验，因此所得到的答案显然是满意的，此时就可以提交结果了。

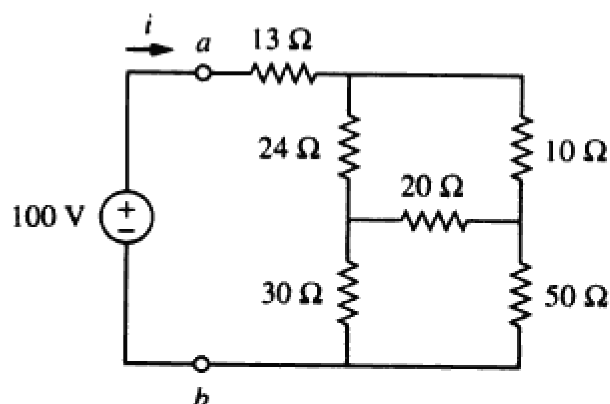


图 2-54 练习题 2-15 的电路原理图

练习题2-15 试求图2-54所示桥式电路中的R_{ab}和i。

答 40 Ω，2.5 A。

2.8 †应用

通常采用电阻器作为将电能转换为热能或其他形式能量的电气装置的模型，这些装置包括导线、

灯泡、电热器、电炉、电烤箱以及扩音器等。本节介绍与本章概念密切相关的实际生活中的两个应用问题——照明系统和直流电表的设计。

历史人物



托马斯·阿尔瓦·爱迪生(Thomas Alva Edison, 1847—1931)可能是美国最伟大的发明家，他拥有1093项发明专利，包括有历史意义的创造发明——白炽灯泡、留声机以及第一部商业电影等。

爱迪生出身于俄亥俄州，在家里七个孩子中排行最小，他不喜欢学校，只接受了三个月的正规教育，就回到家里接受母亲对他的教育，并且很快就学会自己阅读。1868年，爱迪生读到了法拉第的一本书，从而找到了他今后的职业方向。1876年，他迁居新泽西州的门洛帕克，经营着一所由高水平研究人员组成的实验室。他的许多发明都出自该实验室，他的实验室已成为现代研究组织的典范。由于爱迪生兴趣广泛并拥有大量的发明和专利，他开始建立制造公司来制造他发明的产品，他设计了第一个提供照明电的发电站，以爱迪生作为典范和领导者的正规电气工程教育于19世纪20年代中叶开始兴起。

到目前为止，均已假定连接导线为理想导体（即电阻值为零的导体），但是，在实际物理系统中，连接导线的电阻值可能相当大，因此，系统的建模必须包括电阻。

2.8.1 照明系统

诸如室内灯光或圣诞树灯泡等照明系统通常由N个并联或串联的灯泡组成，如图2-55所示，图中各灯泡可建模为电阻。假定所有的灯泡都是一样的，并且V_o为电源电压，那么并联灯泡两端的电压为V_o，串联灯泡两端的电压为V_o/N。串联连接容易实现，但实际上很少使用，其原因有二。第一，它的可靠性差，只要一支灯泡坏了，其他灯泡全都不亮；第二，维修困难，当一支灯泡出现问题时，必须逐个检查所有灯泡才能找到出问题的那一支。

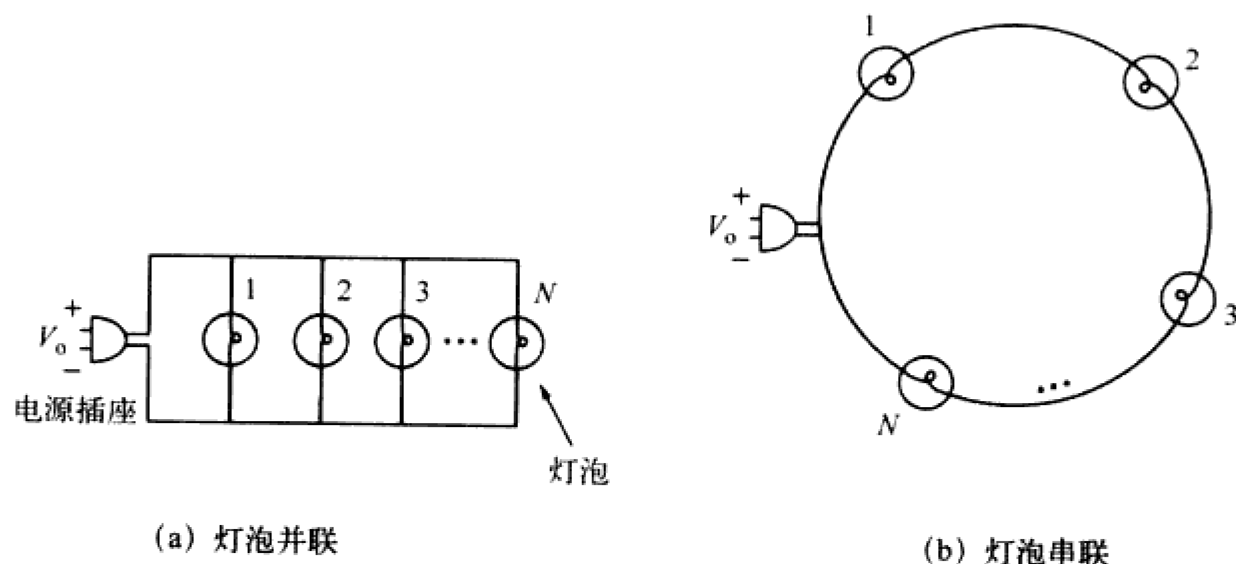
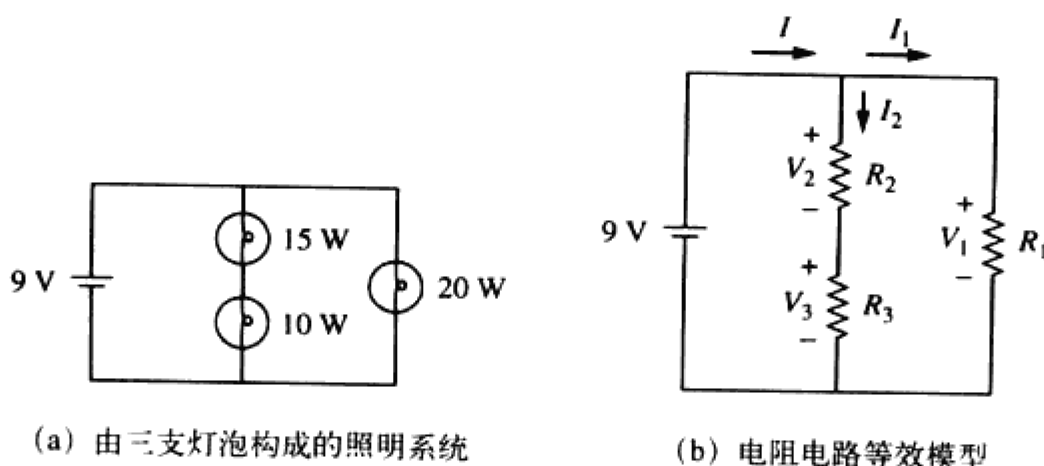


图 2-55 灯泡的并联与串联

例题 2-16 三支灯泡如图 2-56a 那样与一个 9 V 电池相接，试计算：(a) 电池提供的总电流；(b) 流过每支灯泡的电流；(c) 每支灯泡的电阻。

解 (a) 电池提供的总功率等于各灯泡吸收的总功率，即：

$$p = 15 + 10 + 20 = 45\ \text{W}$$



（a）由三支灯泡构成的照明系统　（b）电阻电路等效模型

图 2-56　例题 2-16 的电路图

因为$p=VI$，所以电池提供的总电流量为：

$$I=\frac{p}{V}=\frac{45}{9}=5\,\text{A}$$

（b）可以将灯泡建模为电阻，其等效电路如图2-56b所示。由于R_1（20 W的灯泡）支路与R_2和R_3的串联支路均与电池并联，所以，

$$V_1=V_2+V_3=9\text{V}$$

流过R_1的电流为：

$$I_1=\frac{p_1}{V_1}=\frac{20}{9}=2.222\,\text{A}$$

由KCL可知，流过R_2和R_3串联支路的电流为：

$$I_2=I-I_1=5-2.222=2.778\,\text{A}$$

（c）由于$p=I^2R$，所以：

$$R_1=\frac{p_1}{I_1^2}=\frac{20}{2.222^2}=4.05\Omega$$

$$R_2=\frac{p_2}{I_2^2}=\frac{15}{2.777^2}=1.945\Omega$$

$$R_3=\frac{p_3}{I_3^2}=\frac{10}{2.777^2}=1.297\Omega$$

练习题2-16　参看图2-55，假定有10支灯泡并联，10支灯泡串联，每支灯泡的额定功率为40W，如果电源插座上的电压对并联连接和串联连接两种情况都是110V，试计算在两种情况下流过每支灯泡的电流。

答　0.364 A（并联），0.0364 A（串联）。

2.8.2　直流电表的设计

实际上，电阻是用于控制电流的，在很多应用中都利用了电阻的这一属性，例如图2-57所示的电位器，电位器（potentiometer，pot）一词来源于电位（potential）和计量仪器（meter）两个词的组合，表明电位是可以测量出来的。电位器是一种遵循分压原理的三端装置，实际上就是一种可调分压器，在收音机、电视机和其他电路中常用作控制音量或电平的电压调节器。在图2-57中：

$$V_{\text{out}}=V_{bc}=\frac{R_{bc}}{R_{ac}}V_{\text{in}} \tag{2-58}$$

其中，$R_{ac}=R_{ab}+R_{bc}$。因此，随着电位器的滑动端向c或向a点移动，输出电压V_{out}相应地降低或升高。

能够测量电压、电流和电阻的仪表称为万用表，或伏特欧姆表（volt-ohm meter，VOM）。

负载是接受能量的元件（能量吸收器），它与提供能量的发电机（能量源）相反，有关负载的更多讨论参见4.9.1节。

利用电阻控制电流的另一个应用是模拟直流（dc）电表，即分别用于测量电流、电压和电阻的安培表、伏特表和欧姆表。这些电表中都装有如图2-58所示的达松伐尔（d'Arsonval）测量转动装置。该转动装置主要由一个安装在永久磁铁两极间枢轴上的可转动铁心线圈组成，当电流流经线圈时，产生转矩，使指针偏转。流过线圈电流的大小决定了指针偏转的幅度，并通过测量转动装置上附加的刻度指示出来。例如，当电表转动装置的额定值为1mA、50Ω时，线圈流过1mA的电流就会使电表转动装置发生满刻度偏转。在达松伐尔测量转动装置的基础上附加必要的电路，就可以构成安培表、伏特表或欧姆表。

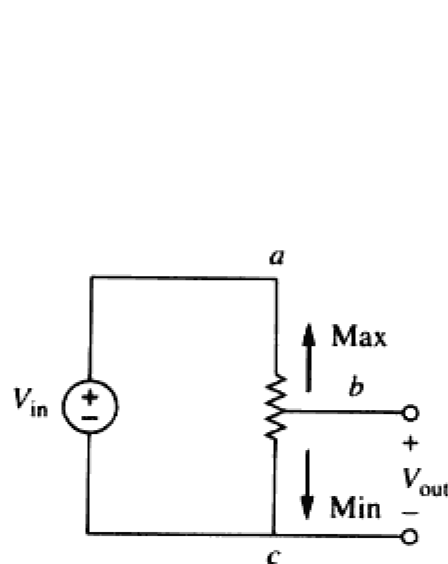


图 2-57 用于控制电平的电位器

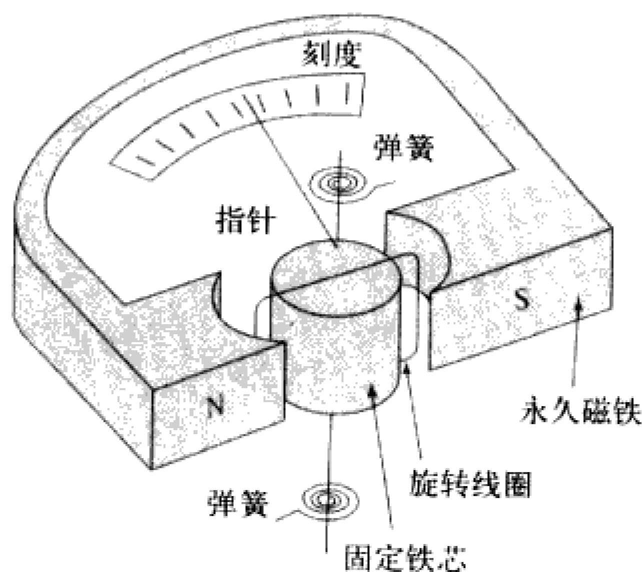


图 2-58 达松伐尔测量转动装置

图2-59给出了电路元件两端连接模拟伏特表和安培表的方法。伏特表测量负载（load）两端的电压，因此与负载元件并联连接。如图2-60a所示，伏特表由达松伐尔转动装置与一阻值为R_m的电阻串联构成，阻值R_m通常设计得很大（理论上为无穷大），以使从电路中分流得电流最小。为了扩展伏特表可测电压的量程，通常将伏特表与扩展量程电阻相串联，如图2-60b所示。当量程开关接到R_1、R_2或R_3时，图2-60b所示的多量程伏特表可以测量得电压分别为0～1V、0～10V或0～100V。

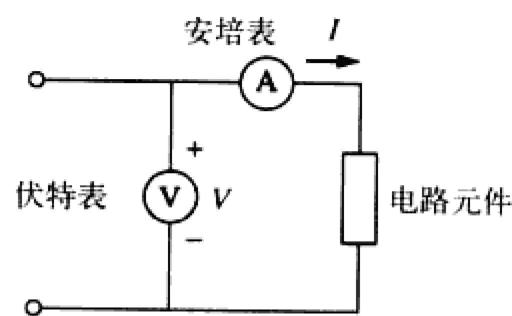


图 2-59 伏特表和安培表与电路元件的连接方式

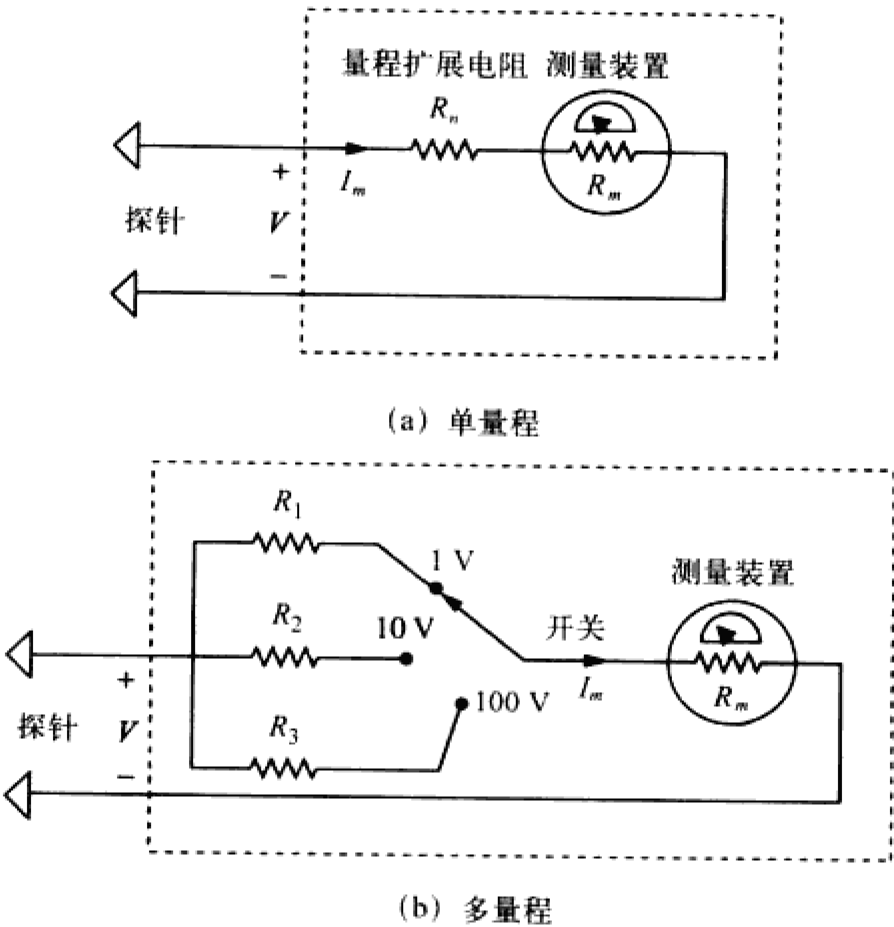
下面计算图2-60a所示单量程伏特表中量程扩展电阻R_n或图2-60b所示多量程伏特表中的$R_n = R_1$、R_2或R_3，计算时需要明确R_n与伏特表的内电阻R_m是串联的。在任何设计中都需要考虑最坏情况，即满量程电流$I_{fs} = I_m$流过电表的情况，此时应该对应于电表的最大电压读数，即满量程电压V_{fs}，由于量程扩展电阻R_n与内阻R_m相串联，所以：

$$V_{fs} = I_{fs}(R_n + R_m) \tag{2-59}$$

由此得到：

$$R_n = \frac{V_{fs}}{I_{fs}} - R_m \tag{2-60}$$

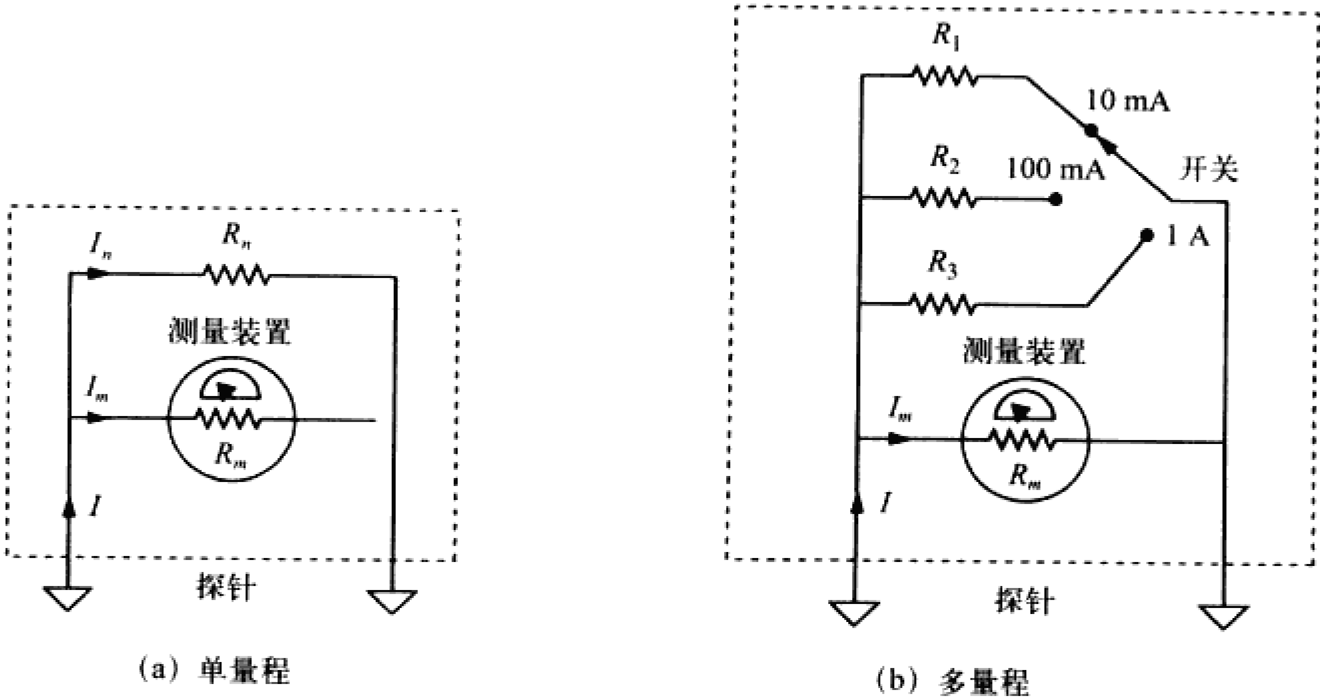
类似地，安培表测量流过负载的电流，因此要与被测负载相串联。如图2-61a所示，安培表由达松伐尔转动装置与一阻值为R_m的电阻并联构成，阻值R_m通常设计得很小（理论上为零），以使从电路中分压得到的电压最小。为了扩展安培表的量程，通常要将分流电阻与R_m相并联，如图2-61b所示。当分流开关接到R_1、R_2或R_3时，安培表的量程分别为0～10 mA、0～100 mA或0～1 A。



(a) 单量程

(b) 多量程

图 2-60 伏特表



(a) 单量程

(b) 多量程

图 2-61 安培表

下面计算如图2-61a所示单量程安培表的分流电阻R_n，或图2-61b所示多量程安培表的$R_n = R_1$、R_2或R_3。注意，R_m与R_n并联，并且在满刻度时，$I = I_{fs} = I_m + I_n$，其中I_n为流过分流电阻R_n的电流，利用分流原理有：

$$I_m = \frac{R_n}{R_n + R_m} I_{fs}$$

即：

$$R_n = \frac{I_m}{I_{fs} - I_m} R_m \tag{2-61}$$

线性电阻阻值R_x的测量方法有两种：一种是间接测量方法，如图2-62a所示，用安培表与该电阻

串联，测出流过它的电流I，再用伏特表并联在该电阻两端，测出它的电压V，从而得到：

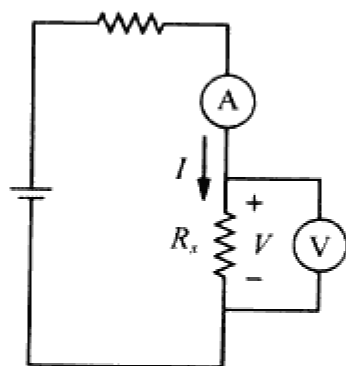
$$R_x = \frac{V}{I} \tag{2-62}$$

测量电阻的直接方法是采用欧姆表。欧姆表由达松伐尔转动装置、可变电阻或电位器以及电池组成，如图2-62b所示，对图2-62b所示电路应用KVL定律有：

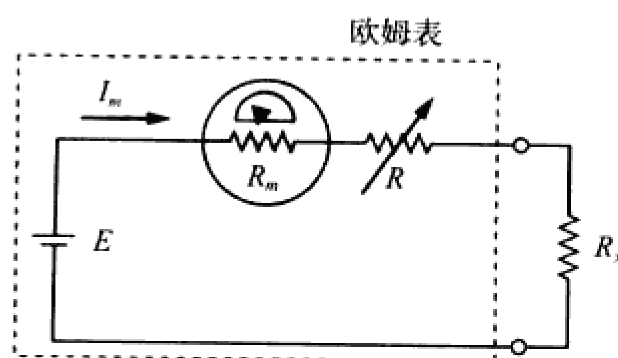
$$E = (R + R_m + R_x) I_m$$

即

$$R_x = \frac{E}{I_m} - (R + R_m) \tag{2-63}$$



(a) 采用安培表和伏特表



(b) 采用欧姆表

图 2-62 测量电阻的两种方法

选取的电阻R应使得电表满刻度偏转，即当$R_x = 0$时，$I_m = I_{fs}$。这意味着，

$$E = (R + R_m) I_{fs} \tag{2-64}$$

将式(2-64)代入式(2-63)得到：

$$R_x = \left(\frac{I_{fs}}{I_m} - 1\right)(R + R_m) \tag{2-65}$$

前面已经指出，本节讨论的各种电表称为模拟电表，均以达松伐尔转动装置为基础构成。另一类电表称为数字电表（digital meter），以有源电路元件如运算放大器等为基础构成。例如，数字式万用表可以用离散数字显示直流或交流电压、电流以及电阻等的测量值，而不像模拟电表那样在连续刻度盘上采用指针偏转的形式指示。在现代实验中，数字式电表可能是最常用的，但是数字电表的设计已经超出本书讨论的范畴。

历史人物



莫尔斯（Samuel F. B. Morse，1791—1872），美国油画家，发明了电报，首次实现了对电的商业应用。

莫尔斯出生于马萨诸塞州的查尔斯顿，就读于耶鲁大学和伦敦皇家艺术学院，之后成为一名艺术家。20世纪30年代，他对发明电报产生了兴趣，于1836年研制出电报样机，并于1838年申请了专利，美国参议院为莫尔斯提供资金，用于构建巴尔的摩与华盛顿之间的电报线路。1844年5月24日，莫尔斯成功发出了第一条著名的电报信息："What hath God wrought！"莫尔斯还研究开发了字母和数字的点划编码，用于发送电报信息。电报的发展导致了日后电话的发明。

例题2-17 根据图2-60所示伏特表的结构，试设计如下多量程伏特表：

(a) 0～1 V (b) 0～5 V (c) 0～50 V (d) 0～100 V

假定内阻$R_m = 2\ \text{k}\Omega$，满量程电流$I_{fs} = 100\ \mu\text{A}$。

解 利用式(2-60)并假定 R_1、R_2、R_3和 R_4分别对应于0～1 V、0～5 V、0～50 V和0～100 V的伏特表量程，可得：

(a) 当量程为0～1 V时，

$$R_1 = \frac{1}{100\times10^{-6}} - 2\,000 = 10\,000 - 2\,000 = 8\,\text{k}\Omega$$

(b) 当量程为0～5 V时，

$$R_2 = \frac{5}{100\times10^{-6}} - 2\,000 = 50\,000 - 2\,000 = 48\,\text{k}\Omega$$

(c) 当量程为0～50 V时，

$$R_3 = \frac{50}{100\times10^{-6}} - 2\,000 = 500\,000 - 2\,000 = 498\,\text{k}\Omega$$

(d) 当量程为0～100 V时，

$$R_4 = \frac{100\,\text{V}}{100\times10^{-6}} - 2\,000 = 1\,000\,000 - 2\,000 = 998\,\text{k}\Omega$$

注意，对于这四个量程，其总电阻（$R_n + R_m$）与满刻度电压V_{fs}之比均为常数，且等于$1/I_{fs}$，该比值（单位为欧姆每伏特，Ω/V）称为伏特表的灵敏度（sensitivity）。灵敏度越高，伏特表越好。

练习题2-17 根据图2-61所示安培表的结构，试设计如下多量程安培表：

(a) 0～1 A；(b) 0～100 mA；(c) 0～10 mA

假定满量程电流$I_m = 1$ mA且安培表的内阻$R_m = 50\ \Omega$。

答 分流电阻分别为：0.05 Ω；0.505 Ω；5.556 Ω。

2.9 本章小结

(1) 电阻是电路中的无源元件，其两端的电压v流过它的电流i成正比，即电阻为遵循欧姆定律的器件：

$$v = iR$$

其中R为电阻的阻值。

(2) 短路电路是阻值为零（$R = 0$）的电阻（即理想的导线）。开路电路是阻值为无穷大（$R = \infty$）的电阻。

(3) 电阻的电导G为该电阻阻值的倒数：

$$G = \frac{1}{R}$$

(4) 支路为电路中的单个二端元件，节点为两条或两条以上支路的连接点，回路为电路中的闭合路径。电路网络中的支路数 b，节点数 n 与独立回路数 l 满足如下关系：

$$b = l + n - 1$$

(5) 基尔霍夫电流定律（KCL）表明，任一节点电流的代数和为零。换而言之，流入节点的电流之和等于流出该节点的电流之和。

(6) 基尔霍夫电压定律（KVL）表明，闭合路径上电压的代数和为零。换而言之，回路中电压升高之和等于电压降落之和。

(7) 首尾顺序相连的两个元件称为是串联的。流过串联元件的电流相同（$i_1 = i_2$）。两端连到相

同的两个节点上的两个元件称为是并联的，并联元件两端的电压相同（$v_1 = v_2$）。

（8）当两个电阻$R_1(=1/G_1)$与$R_2(=1/G_2)$串联时，其等效电阻R_{eq}与等效电导G_{eq}为：

$$R_{eq} = R_1 + R_2, \qquad G_{eq} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$$

（9）当两个电阻$R_1(=1/G_1)$与$R_2(=1/G_2)$并联时，其等效电阻R_{eq}与等效电导G_{eq}为：

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \qquad G_{eq} = G_1 + G_2$$

（10）两个电阻串联的分压原理可以表示为：

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v, \qquad v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v$$

（11）两个电阻并联的分流原理可以表示为：

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i, \qquad i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

（12）Δ-Y转换公式为：

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}, \qquad R_2 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c}, \qquad R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$$

（13）Y-Δ转换公式为：

$$R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}, \qquad R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}, \qquad R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$$

（14）本章介绍的基本定律可应用于照明系统以及直流电表设计等问题中。

复习题

2-1 电阻的倒数为：

(a) 电压 (b) 电流 (c) 电导 (d) 库仑

2-2 电热器从120V电压获取的电流为10 A，则电热器的电阻为：

(a) 1200 Ω (b) 120 Ω

(c) 12 Ω (d) 1.2 Ω

2-3 一台1.5 kW烤面包机的电流为12 A，则其压降为：

(a) 18 kV (b) 125 V

(c) 120 V (d) 10.42 V

2-4 一支2 W、80 kΩ的电阻安全工作时的最大电流为：

(a) 160 kA (b) 40 kA (c) 5 mA (d) 25 μA

2-5 一个网络包括12条支路，8条独立回路，试问该网络中有几个节点？

(a) 19 (b) 17 (c) 5 (d) 4

2-6 图2-63所示电路中的电流I为：

(a) −0.8 A (b) −0.2 A

(c) 0.2 A (d) 0.8 A

2-7 图2-64中的电流I_o为：

(a) −4 A (b) −2 A (c) 4 A (d) 16 A

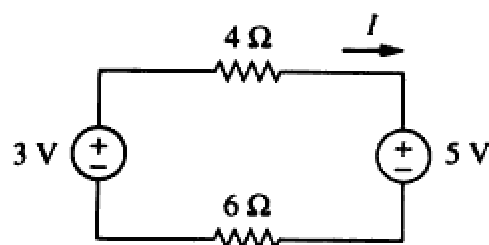


图 2-63 复习题 2-6 的电路原理图

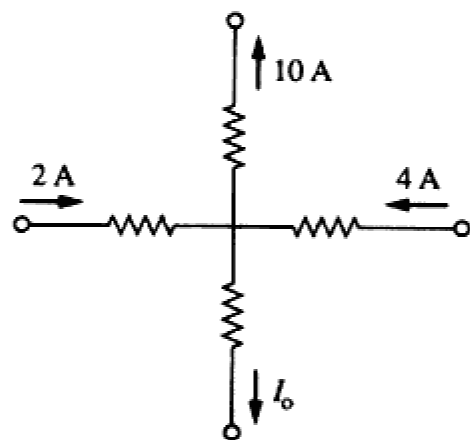


图 2-64 复习题 2-7 的电路原理图

2-8 在图2-65所示电路中，V等于：

(a) 30 V (b) 14 V

(c) 10 V (d) 6 V

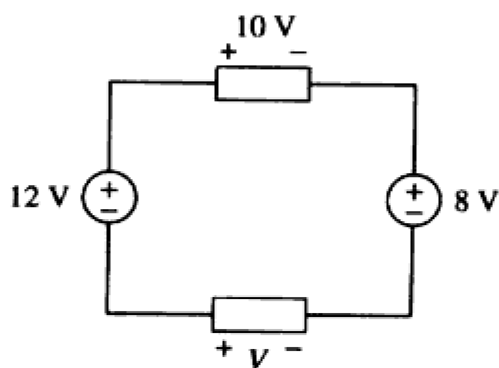


图 2-65 复习题 2-8 的电路原理图

2-9 图2-66中哪一个电路的$V_{ab}=7$ V?

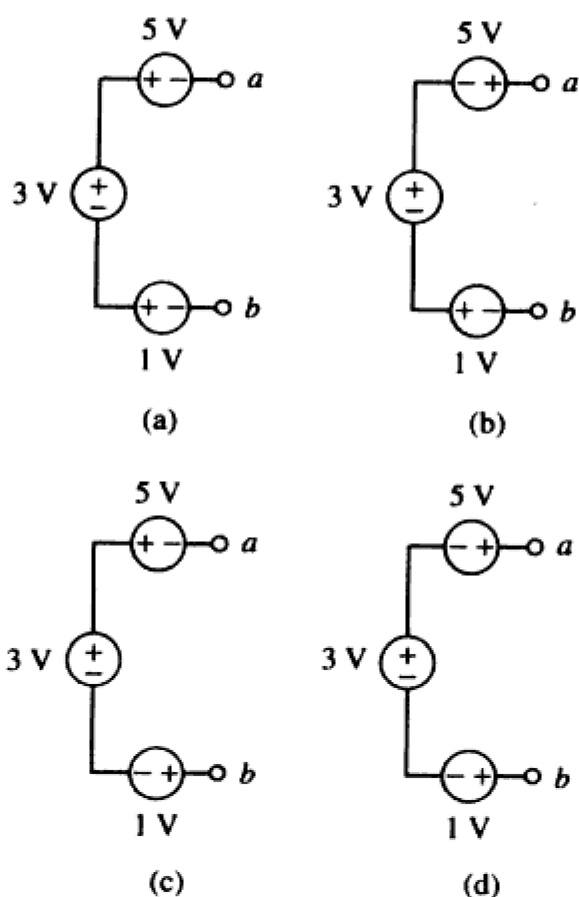


图 2-66 复习题 2-9 的电路原理图

2-10 在图2-67所示电路中，R_3减小会导致以下哪个量减小：

(a) 流过R_3的电流

(b) R_3两端的电压

(c) R_1两端的电压

(d) R_2消耗的功率

(e) 以上选项均不正确

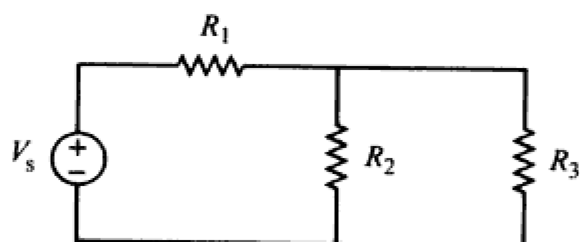


图 2-67 复习题 2-10 的电路原理图

答案 2-1 c；2-2 c；2-3 b；2-4 c；2-5 c；2-6 b；2-7 a；2-8 d；2-9 d；2-10 b，d。

习题

2.2 节

2-1 一支5 kΩ电阻两端的电压为16 V，试求流过该电阻的电流。

2-2 试求额定值为60 W、120 V的灯泡的热电阻。

2-3 某圆形横截面的硅棒长4 cm，如果该硅棒在室温下的电阻值为240 Ω，试求该硅棒的截面半径为多少?

2-4 (a) 试计算图2-68中开关掷于位置1时的电流i。

(b) 当开关掷于位置2时，试求电流i。

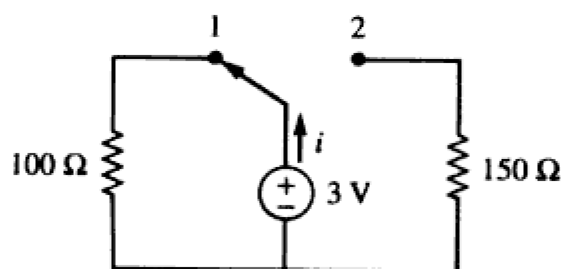


图 2-68 习题 2-4 的电路原理图

2.3 节

2-5 在图2-69所示的网络图中，试求其节点数、支路数和回路数。

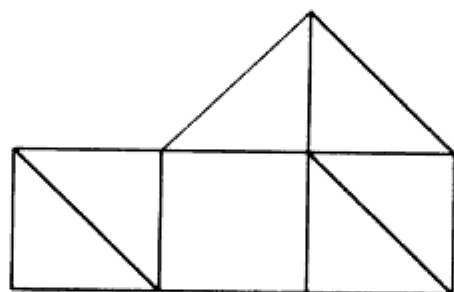


图 2-69 习题 2-5 的网络图

2-6 在图2-70所示的网络图中，试确定其支路数和节点数。

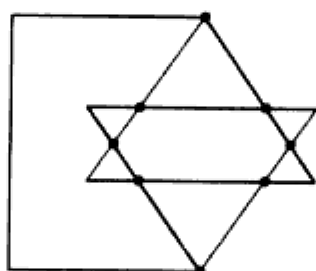


图 2-70 习题 2-6 的网络图

2-7 试求图2-71所示电路的支路数和节点数。

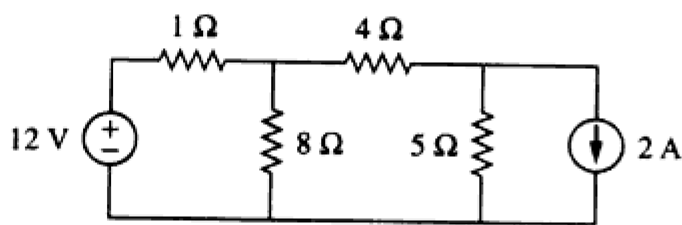


图 2-71 习题 2-7 的电路原理图

2.4 节

2-8 利用KCL求图2-72所示电路中的i_1、i_2和i_3。

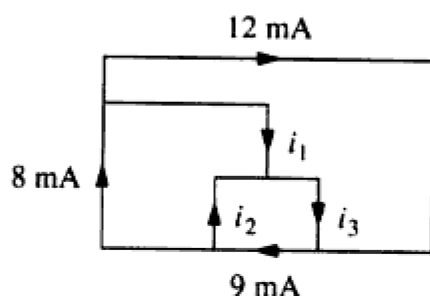


图 2-72 习题 2-8 的电路原理图

2-9 试求图2-73所示电路中的i_1、i_2和i_3。

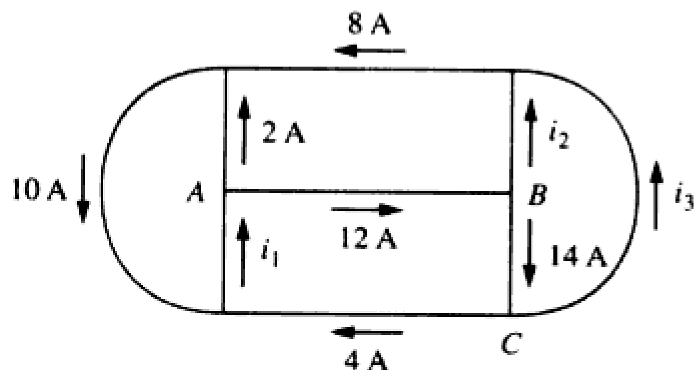


图 2-73 习题 2-9 的电路原理图

2-10 试求图2-74所示电路中的i_1和i_2。

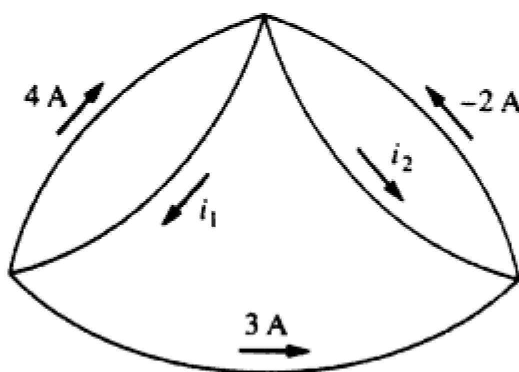


图 2-74 习题 2-10 的电路原理图

2-11 在图 2-75 所示电路中，试计算 V_1 与 V_2。

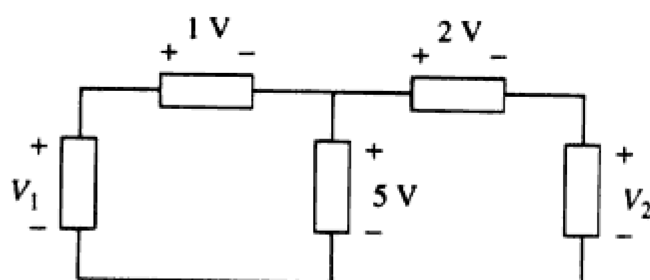


图 2-75 习题 2-11 的电路原理图

2-12 在图2-76所示电路中，试求v_1、v_2和v_3。

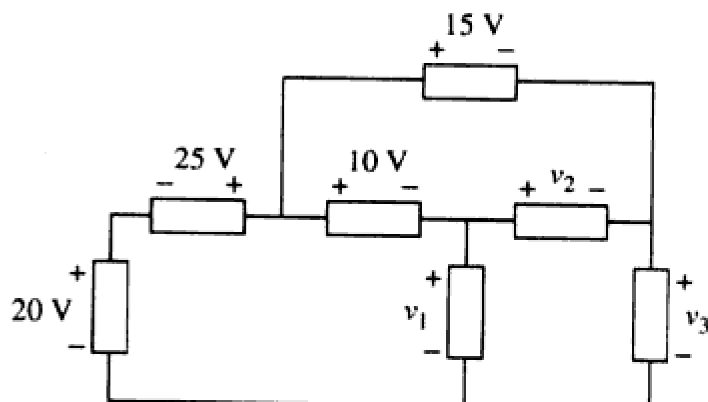


图 2-76 习题 2-12 的电路原理图

2-13 对于求图2-77所示电路，试利用KCL求出支路电流$I_1 \sim I_4$。

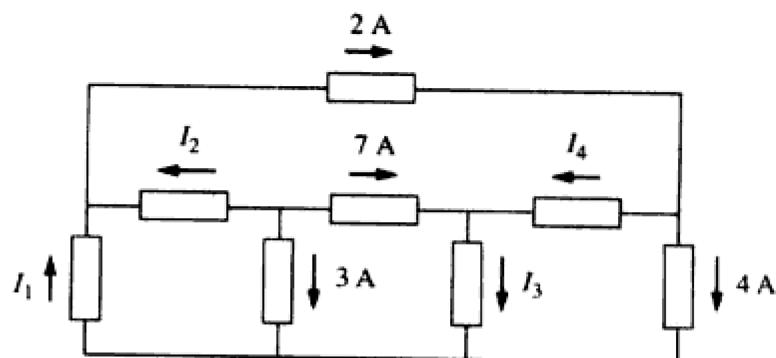


图 2-77 习题 2-13 的电路原理图

2-14 在图2-78所示电路中，试利用KVL计算支路

电$V_1 \sim V_4$。

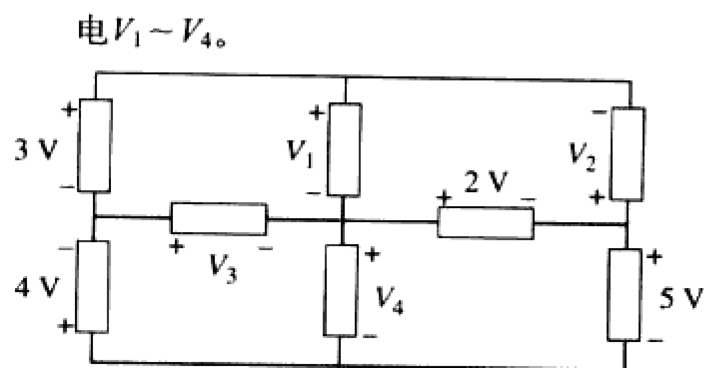


图 2-78 习题 2-14 的电路原理图

2-15 试计算图2-79所示电路中的v和i_x。

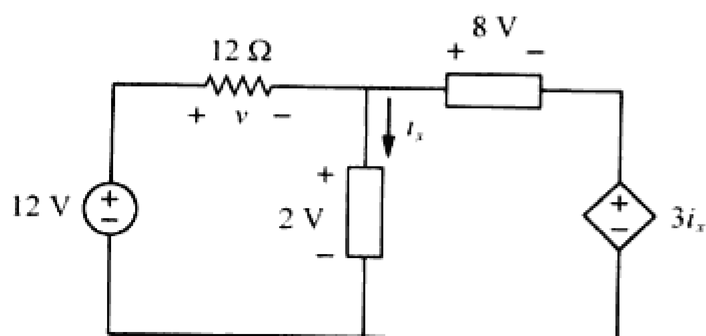


图 2-79 习题 2-15 的电路原理图

2-16 试求图2-80所示的电路中的V_o。

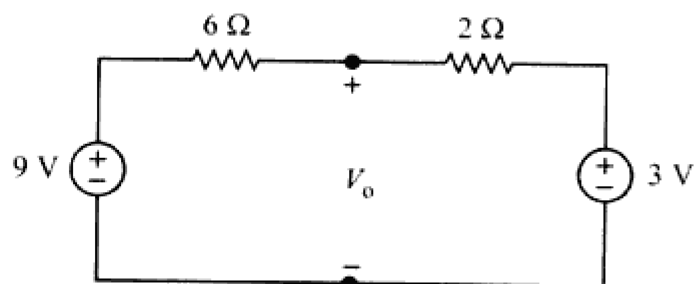


图 2-80 习题 2-16 的电路原理图

2-17 试求图2-81所示电路中的$v_1 \sim v_3$。

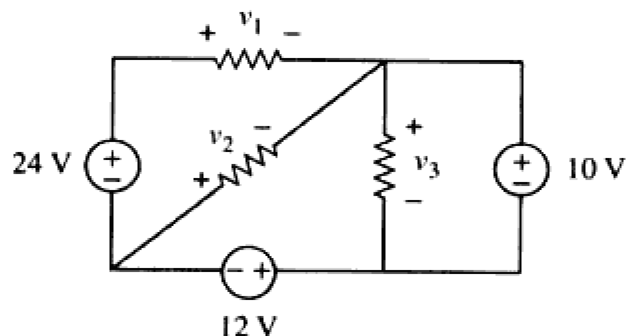


图 2-81 习题 2-17 的电路原理图

2-18 试求图2-82所示电路中的I与V_{ab}。

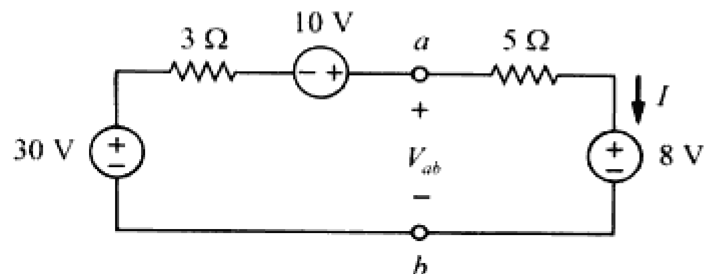


图 2-82 习题 2-18 的电路原理图

2-19 在图2-83所示电路中，试求I、电阻消耗的功率以及各电源提供的功率。

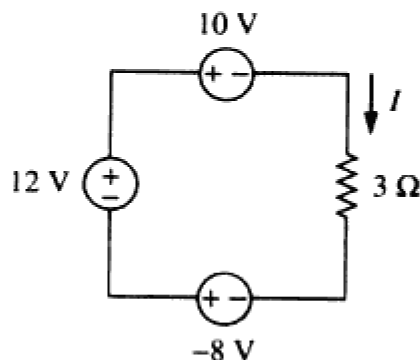


图 2-83 习题 2-19 的电路原理图

2-20 试确定图2-84所示电路中的i_o。

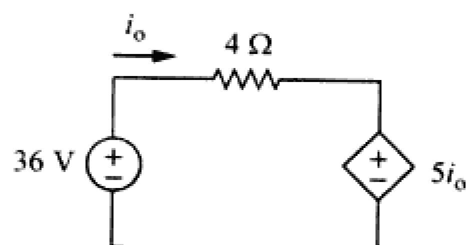


图 2-84 习题 2-20 的电路原理图

2-21 试求图2-85所示电路中的V_x。

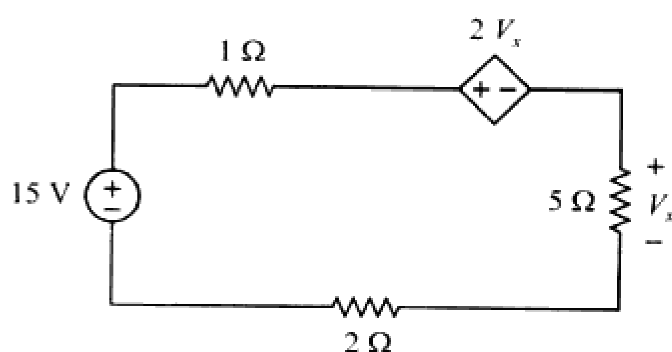


图 2-85 习题 2-21 的电路原理图

2-22 试求图2-86所示电路中的V_o以及受控源所消耗的功率。

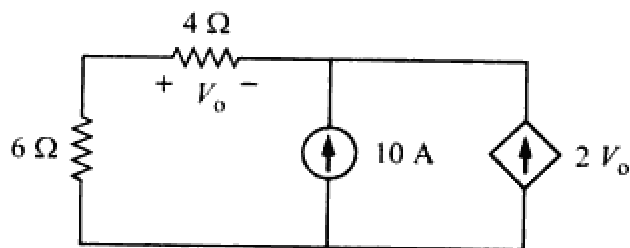


图 2-86 习题 2-22 的电路原理图

2-23 在图2-87所示电路中，试确定V_x以及12 Ω电阻吸收的功率。

2-24 对于图2-88所示的电路，试求用α，R_1，R_2，R_3和R_4表示的V_o/V_s，如果$R_1=R_2=R_3=R_4$，

试求α取何值时，$|V_o/V_s|=10$。

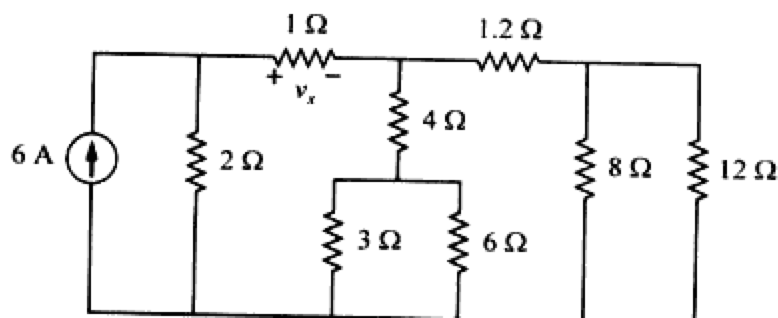


图 2-87 习题 2-23 的电路原理图

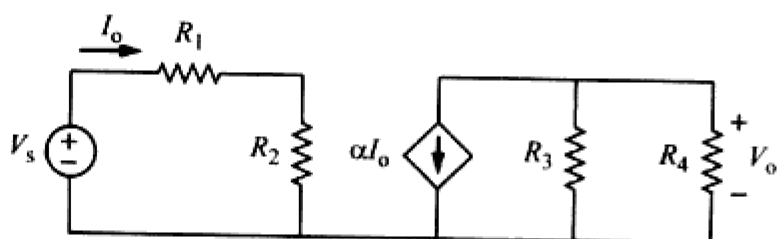


图 2-88 习题 2-24 的电路原理图

2-25 在图2-89所示的电路网络中，试求流过20 kΩ电阻的电流、两端的电压，以及所消耗的功率。

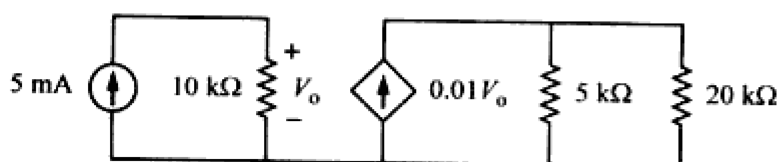


图 2-89 习题 2-25 的电路原理图

2.5 节和 2.6 节

2-26 在图2-90所示的电路中，$i_o=2$ A，试计算i_x以及该电路消耗的总功率。

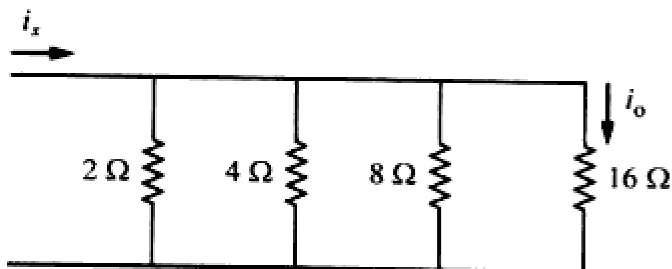


图 2-90 习题 2-26 的电路原理图

2-27 试计算图2-91所示电路中的V_o。

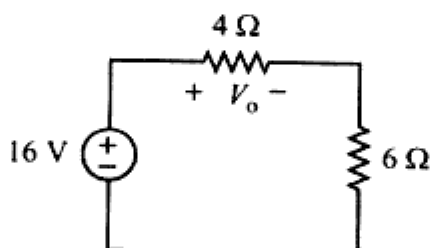


图 2-91 习题 2-27 的电路原理图

2-28 试求图2-92所示电路中的v_1、v_2和v_3。

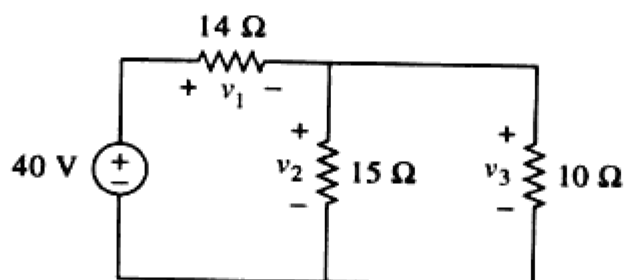


图 2-92 习题 2-28 的电路原理图

2-29 图2-93中所有电阻均为1 Ω，试求R_{eq}。

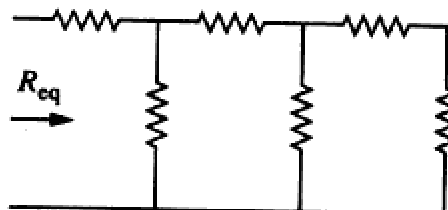


图 2-93 习题 2-29 的电路原理图

2-30 试求图2-94所示电路中的R_{eq}。

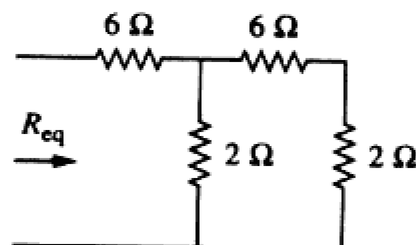


图 2-94 习题 2-30 的电路原理图

2-31 对于图2-95所示电路，试确定$i_1 \sim i_5$。

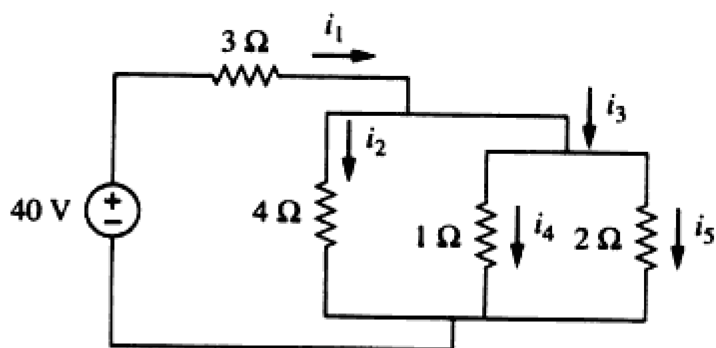


图 2-95 习题 2-31 的电路原理图

2-32 试求图2-96所示电路中的$i_1 \sim i_4$。

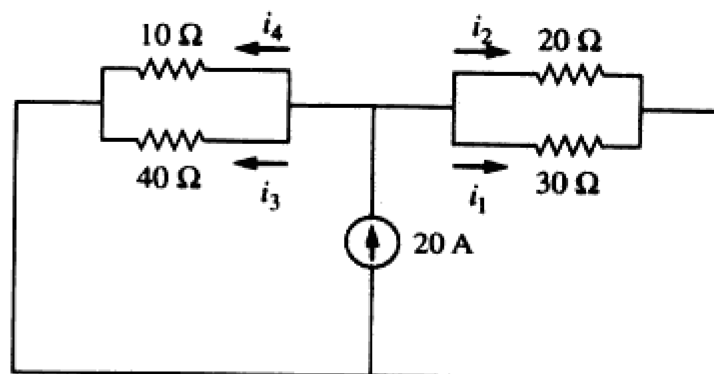


图 2-96 习题 2-32 的电路原理图

2-33 试求图2-97所示电路中的v与i。

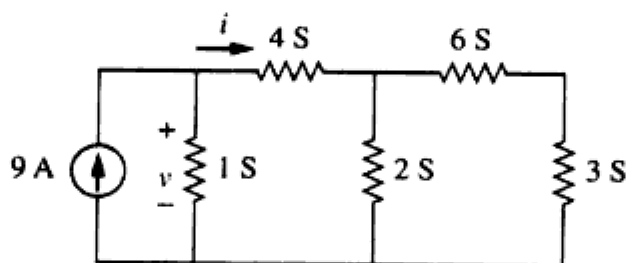


图 2-97　习题 2-33 的电路原理图

2-34　利用电阻的串/并联合并，求出图2-98所示电路从电源端看到的等效电阻，并求该电路的总功耗。

2-35　试计算图2-99所示电路中的V_o和I_o。

2-36　试求图2-100所示电路中的i与V_o。

2-37　试求图2-101所示电路中的R。

2-38　试求图2-102所示电路中的R_{eq}与i_o。

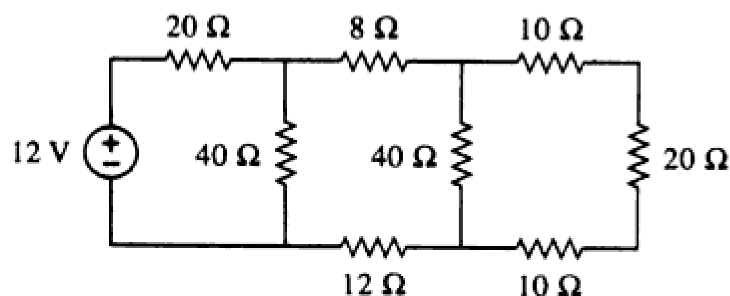


图 2-98　习题 2-34 的电路原理图

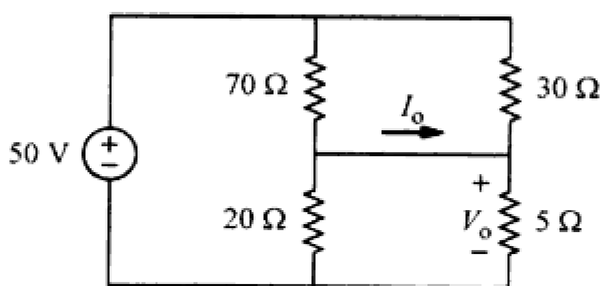


图 2-99　习题 2-35 的电路原理图

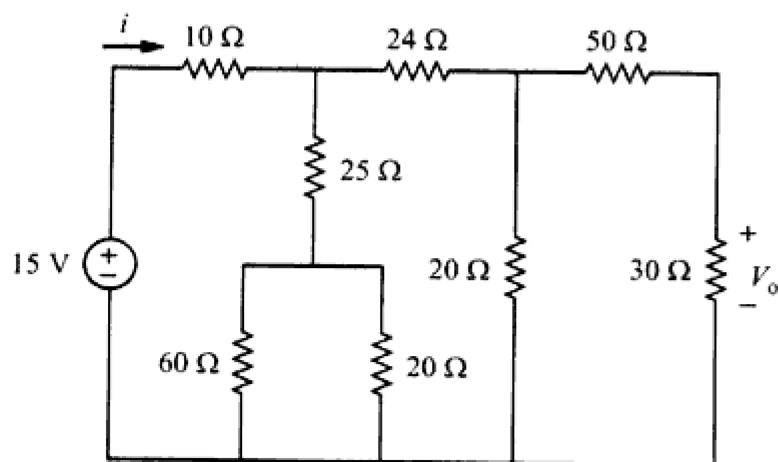


图 2-100　习题 2-36 的电路原理图

2-39　试计算图2-103所示各电路中的R_{eq}。

2-40　在图2-104所示的梯形网络中，试求I与R_{eq}。

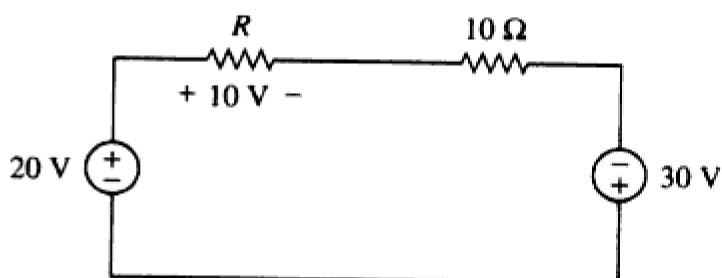


图 2-101　习题 2-37 的电路原理图

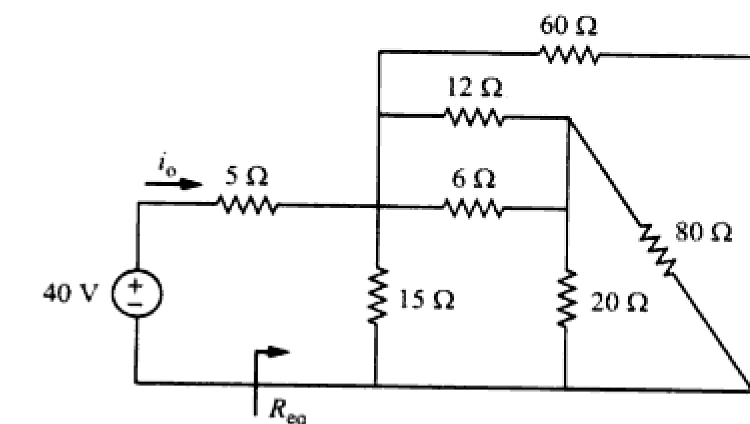


图 2-102　习题 2-38 的电路原理图

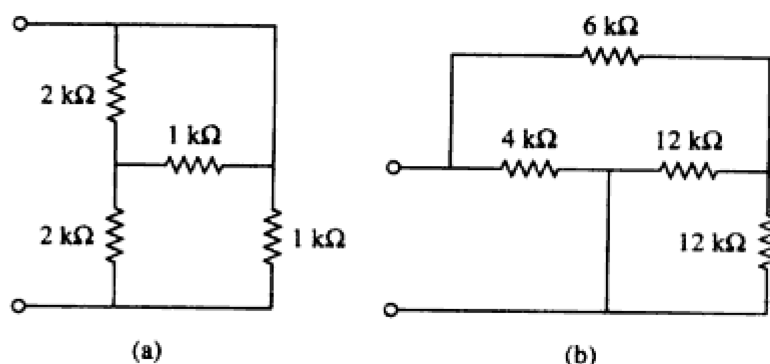


图 2-103　习题 2-39 的电路原理图

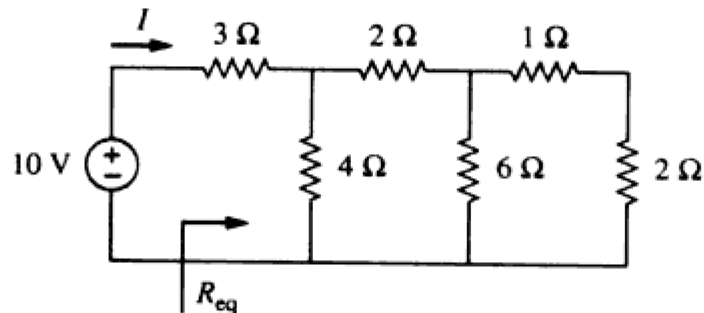


图 2-104　习题 2-40 的电路原理图

2-41　如果图2-105所示电路中$R_{eq}=50\ \Omega$，试求R。

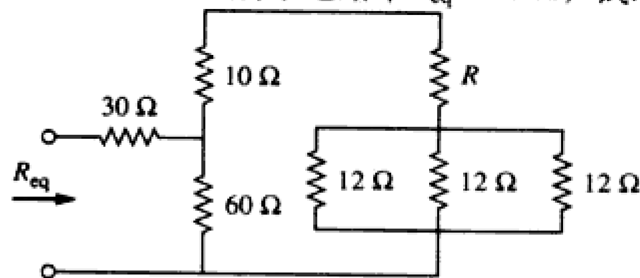


图 2-105　习题 2-41 的电路原理图

2-42　将图2-106中各电路简化为a、b两端的单电阻电路。

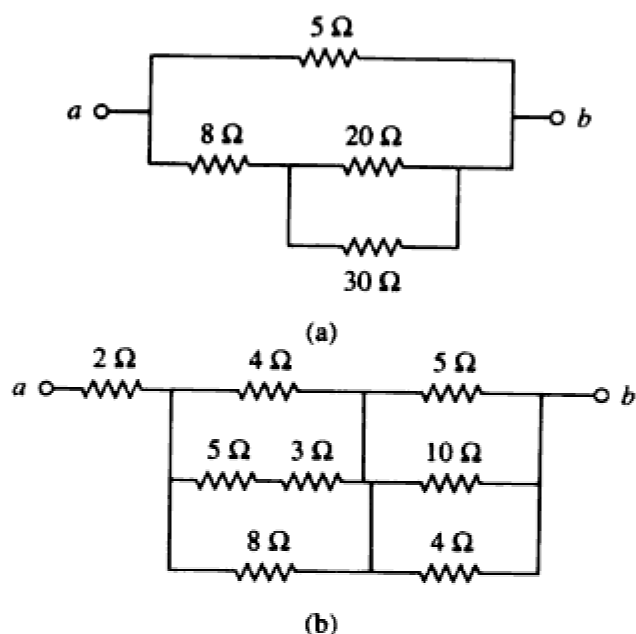


图 2-106 习题 2-42 的电路原理图

2-43 试计算图2-107所示各电路a、b两端的等效电阻R_{eq}。

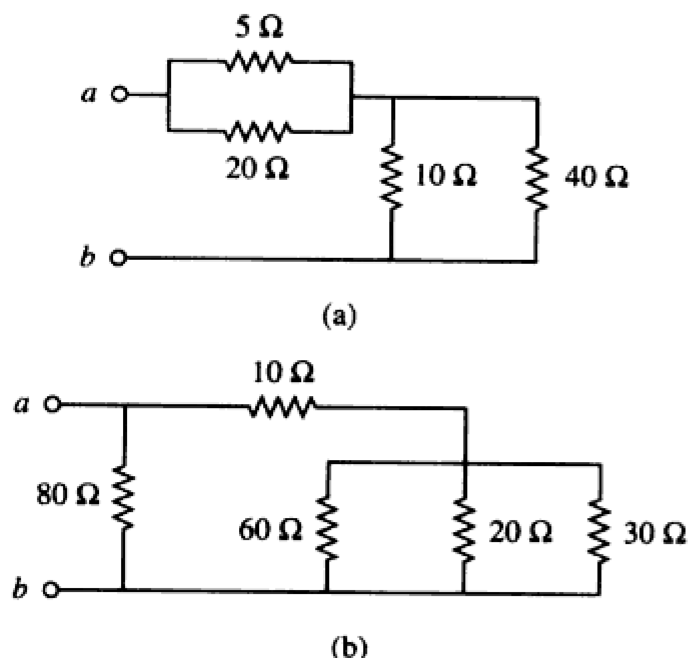


图 2-107 习题 2-43 的电路原理图

2-44 试求图2-108所示电路a、b两端的等效电阻。

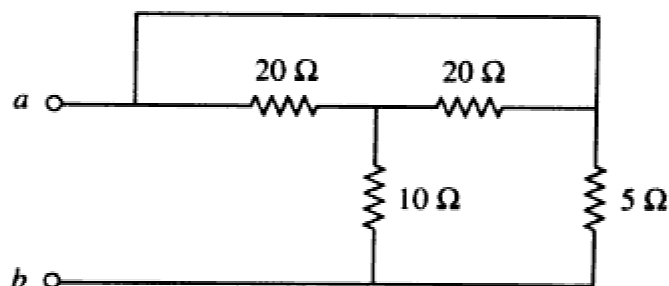
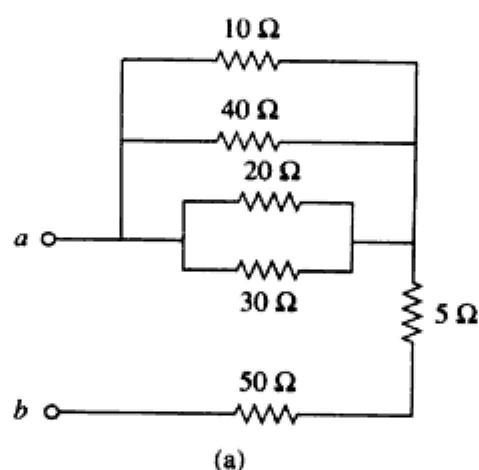


图 2-108 习题 2-44 的电路原理图

2-45 试求图2-109所示各电路中a、b两端的等效电阻。

2-46 试求图2-110所示电路中的I。



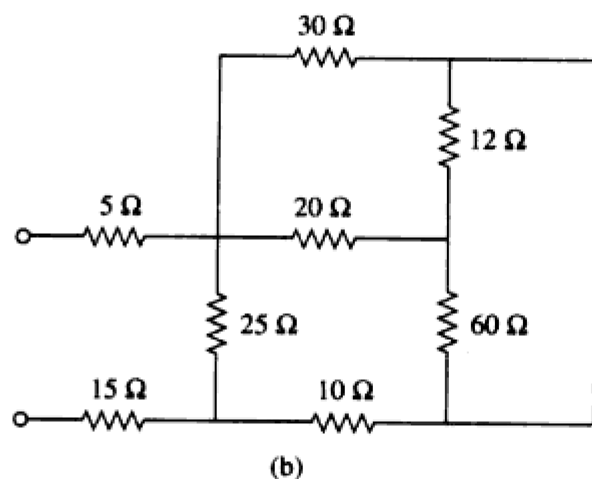


图 2-109 习题 2-45 的电路原理图

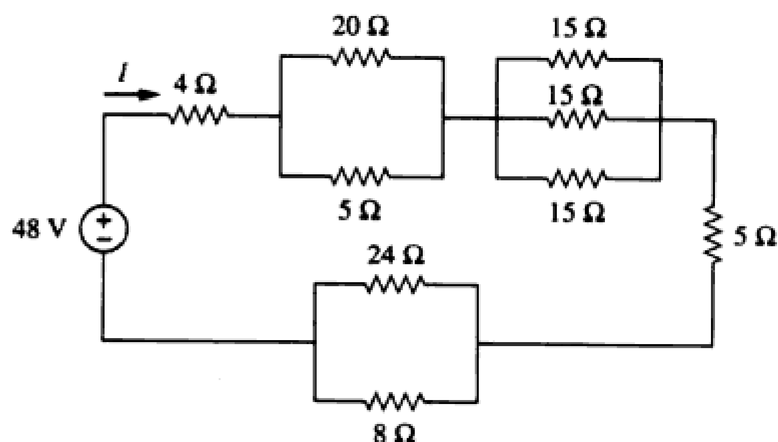


图 2-110 习题 2-46 的电路原理图

2-47 试求图2-111所示电路中的等效电阻R_{ab}。

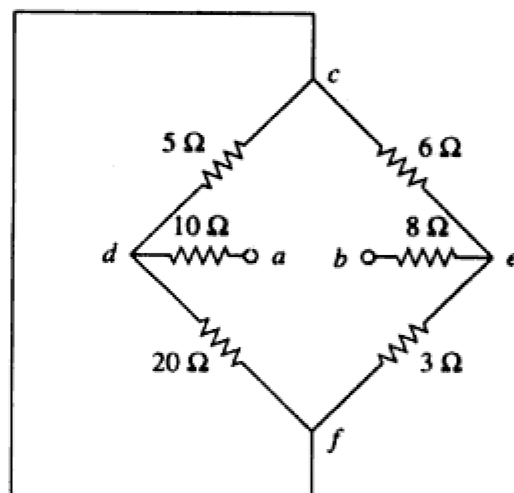


图 2-111 习题 2-47 的电路原理图

2.7 节

2-48 将图2-112所示的两个Y网络转换为Δ网络。

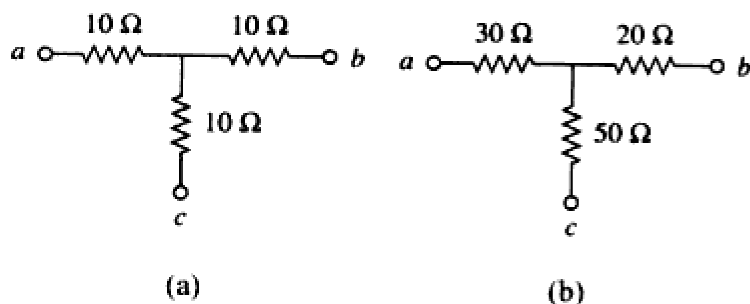


图 2-112 习题 2-48 的电路原理图

2-49 将图2-113所示的两个Δ网络转换为Y网络。

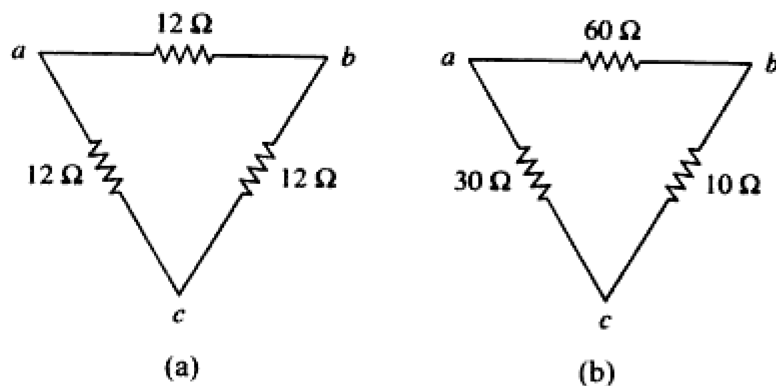


图 2-113 习题 2-49 的电路原理图

2-50 在图2-114所示电路中，要使电流源给电阻提供800 mW的功率，R应为多少？

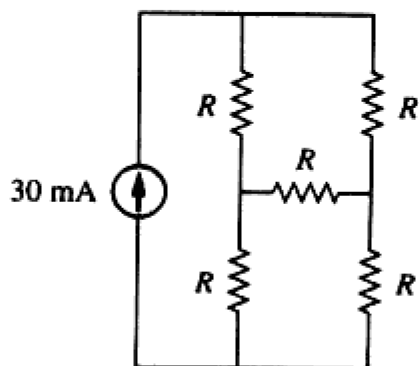


图 2-114 习题 2-50 的电路原理图

2-51 对图2-115所示各个电路，试求a、b两端的等效电阻。

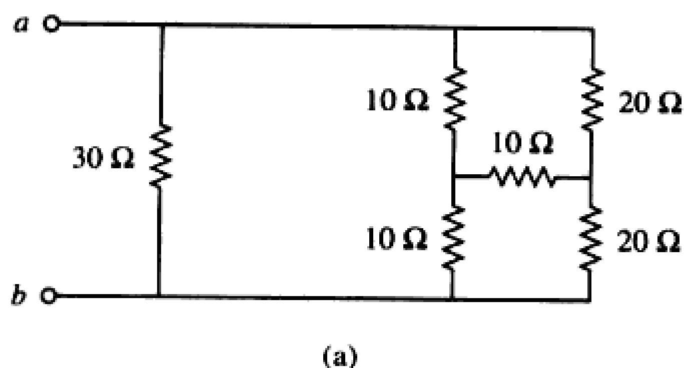


图 2-115 习题 2-51 的电路原理图

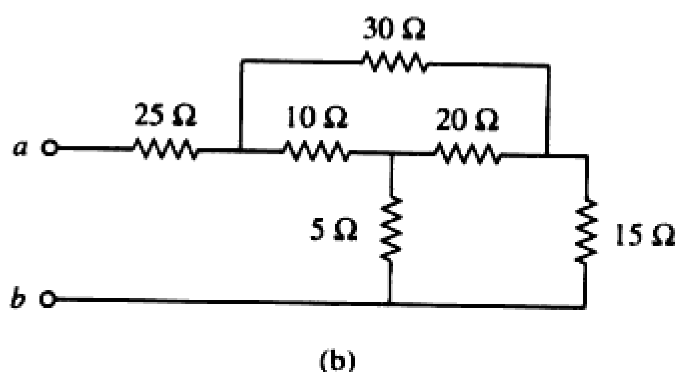


图 2-115 （续）

*2-52 试求图2-116所示电路中的等效电阻，该电路中所有电阻均为1 Ω。

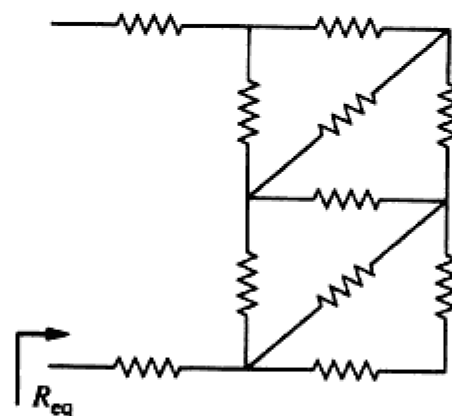
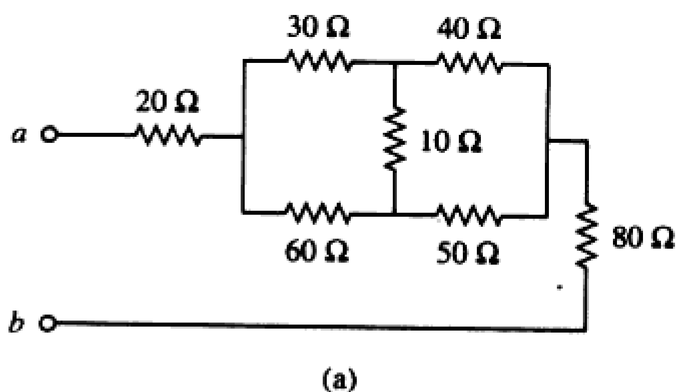


图 2-116 习题 2-52 的电路原理图

带*号的习题表示富有挑战性的习题。

*2-53 试求图2-117所示各电路中的等效电阻R_{ab}，在图b中所有电阻的阻值均为30 Ω。

2-54 在图2-118所示电路中，试求（a）a、b两端；（b）c、d 两端的等效电阻。



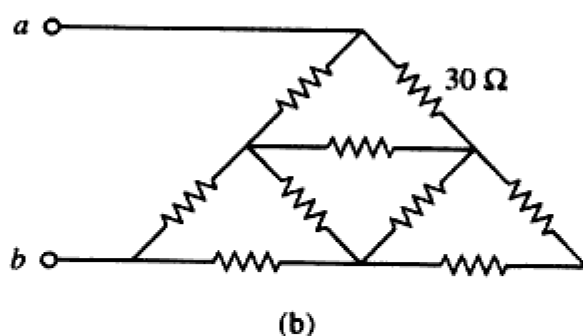


图 2-117 习题 2-53 的电路原理图

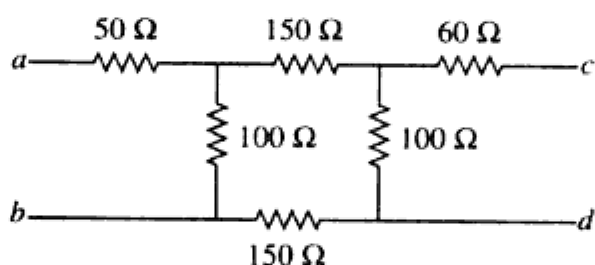


图 2-118 习题 2-54 的电路原理图

2-55 试计算图2-119所示电路中的I_o。

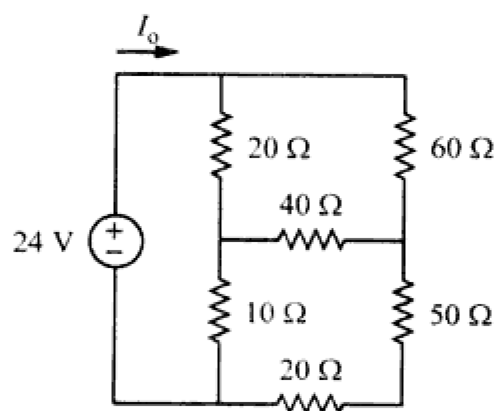


图 2-119 习题 2-55 的电路原理图

2-56 试确定图2-120所示电路中的V。

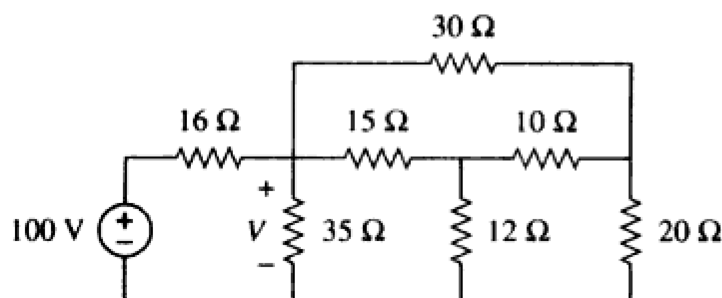


图 2-120 习题 2-56 的电路原理图

*2-57 试求图2-121所示电路中的R_{eq}与I。

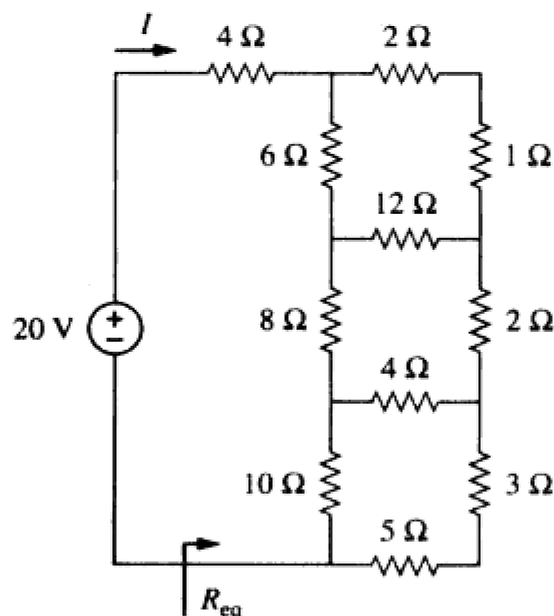


图 2-121 习题 2-57 的电路原理图

2.8 节

2-58 图2-122电路中灯泡的额定值为120 V、0.75A，试计算要使灯泡工作在额定条件下的V_s。

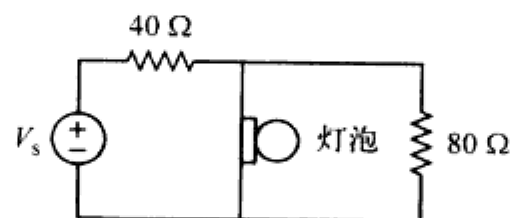


图 2-122 习题 2-58 的电路原理图

2-59 三支灯泡串联连接到100 V的电池两端，如图2-123所示，试求流过灯泡的电流I。

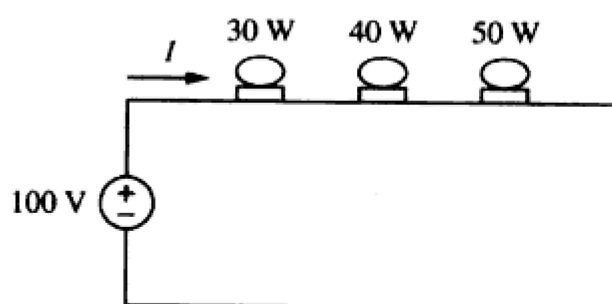


图 2-123 习题 2-59 的电路原理图

2-60 如果习题2-59中的三支灯泡并联连接到100 V电池两端，试计算流过各灯泡的电流。

2-61 设计一个如图2-124所示的照明系统，包括一个功率为70 W的供电电源和两支灯泡。要求必须从如下三支可用灯泡中选取两支，使得所设计的系统价格最低，并且$I = 1.2\ \text{A} \pm 5\%$：

$R_1 = 80\ \Omega$，价格＝$ 0.60（标准尺寸）；

$R_2 = 90\ \Omega$，价格＝$ 0.90（标准尺寸）；

$R_3 = 100\ \Omega$，价格＝$ 0.75（非标准尺寸）。

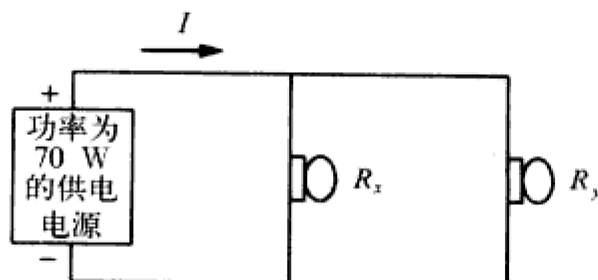


图 2-124 习题 2-61 的电路原理图

2-62 某三线系统为两个负载A和B供电，如图2-125所示，负载A由电流为8 A的马达组成，负载B为电流等于2A的PC机。假定该系统每天工作10小时，电费为6美分/kWh，试计算一年365天所消耗电能的费用。

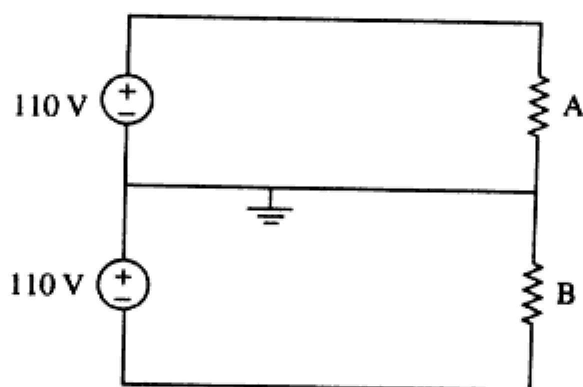


图 2-125 习题 2-62 的电路原理图

2-63 如果采用内阻为100 Ω、最大电流容量为2mA的安培表测量5 A的电流，试确定所需的电阻值，并计算分流电阻所消耗的功率。

2-64 图2-126所示电位器（可调电阻）R_x用于调节电流i_x，使其变化范围为1 A～10 A，试计算相应的R与R_x的值。

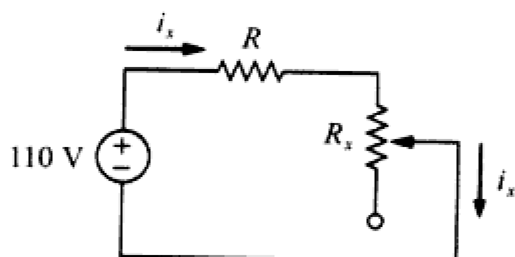


图 2-126 习题 2-64 的电路原理图

2-65 一个内阻为1 kΩ的达松伐尔电表需要10 mA的电流才能使指针满刻度偏转。试计算以50V为满刻度时所需连接的串联电阻值。

2-66 某灵敏度为20 kΩ/V的电压表满刻度为10 V，试求

(a) 使该表满刻度读数为50V时所需连接的串联电阻值；

(b) 满刻度时，该串联电阻上消耗的功率。

2-67 (a) 试求图2-127a所示电路中的电压V_o；

(b) 当一个内阻为6 kΩ的伏特表如图2-120b连接时，试求电压V'_o；

(c) 电表的有限阻值会引入测量误差，试计算如下百分比误差：

$$\left|\frac{V_o - V_o'}{V_o}\right| \times 100\%$$

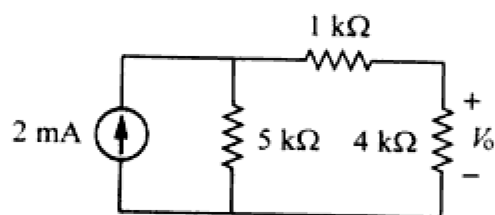
(d) 如果内阻为36 kΩ，试求其百分比误差。

2-68 (a) 试求图2-128a所示电路中的电流I；

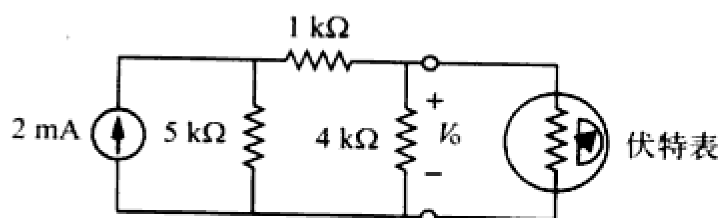
(b) 如果在电路中插入一个内阻为1 Ω的安培表用于测量I'，如图2-121b所示，试求测得的I'；

(c) 试计算该安培表引入的百分比误率：

$$\left|\frac{I - I'}{I}\right| \times 100\%$$

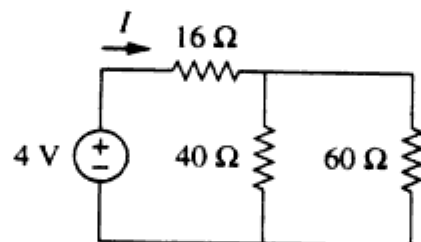


(a)

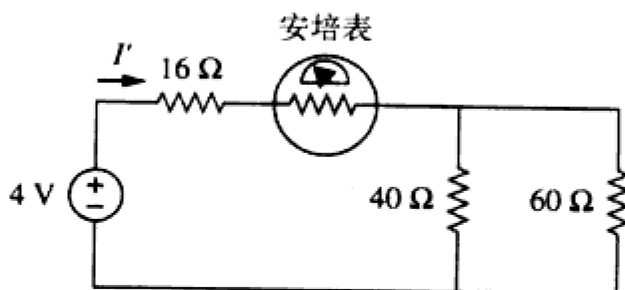


(b)

图 2-127 习题 2-67 的电路原理图



(a)



(b)

图 2-128 习题 2-68 的电路原理图

2-69 采用伏特表测量图2-129所示电路的V_o，伏特表的模型由理想伏特表和与之并联的100 kΩ内阻构成。设V_s = 40 V，R_s = 10 kΩ，

$R_1=20\,\text{k}\Omega$，试在

(a) $R_2=1\,\text{k}\Omega$；

(b) $R_2=10\,\text{k}\Omega$；

(c) $R_2=100\,\text{k}\Omega$三种情况下，计算有伏特表和无伏特表时的V_o。

2-70 (a) 试计算如图2-130所示惠斯通电桥中的v_a、v_b与v_{ab}。

(b) 如果接地位置由o变为a，重做（a）中的计算。

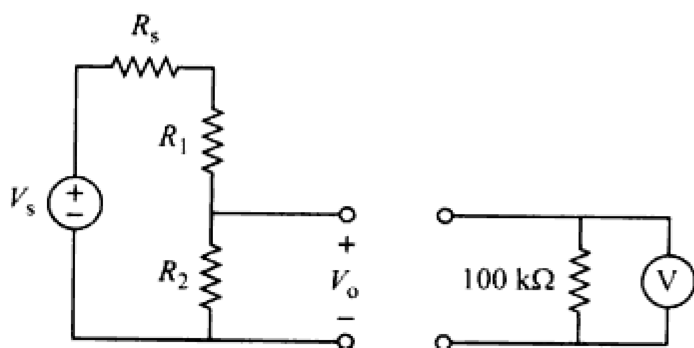


图 2-129 习题 2-69 的电路原理图

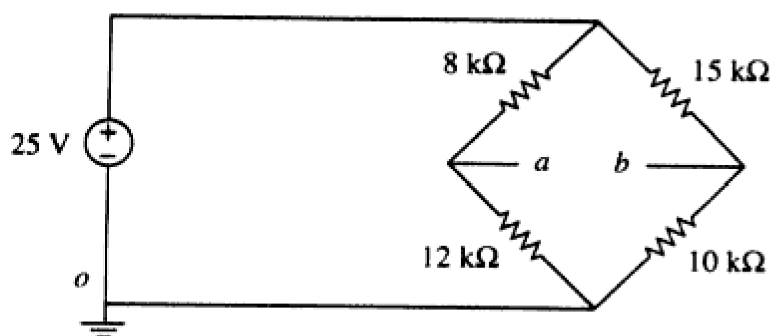


图 2-130 习题 2-70 的电路原理图

2-71 图2-131给出了一个太阳能光电板的电路模型，如果$V_s=30\,\text{V}$，$R_1=20\,\Omega$，$i_L=1\,\text{A}$，试求R_L。

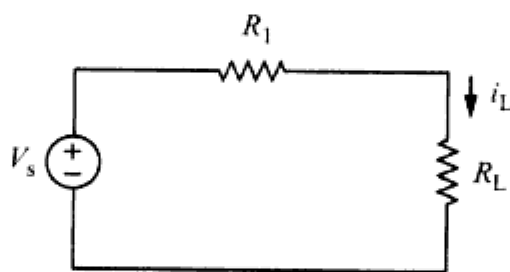


图 2-131 习题 2-71 的电路原理图

2-72 试求图2-132所示两路功率分配电路中的V_o。

2-73 安培表的模型由一个理想安培表和与之串联的20 Ω电阻构成，该表与一电流源和一个未知电阻R_x相连接，如图2-133所示，记录当前安培表的读数，增加电位器R并进行调节，直至安培表读数下降为原先记录值的一半，此时$R=65\,\Omega$，试求R_x的值。

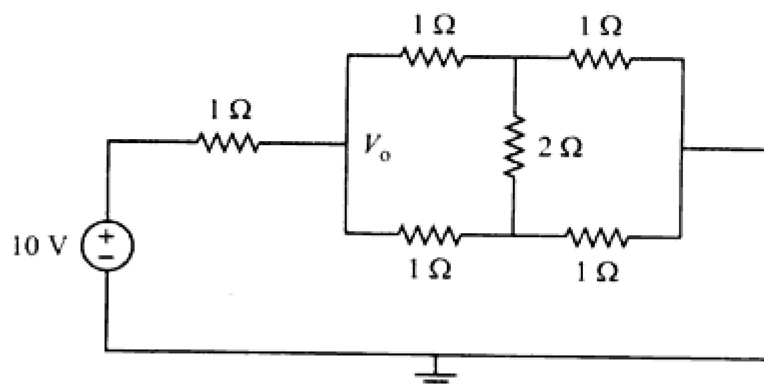


图 2-132 习题 2-72 的电路原理图

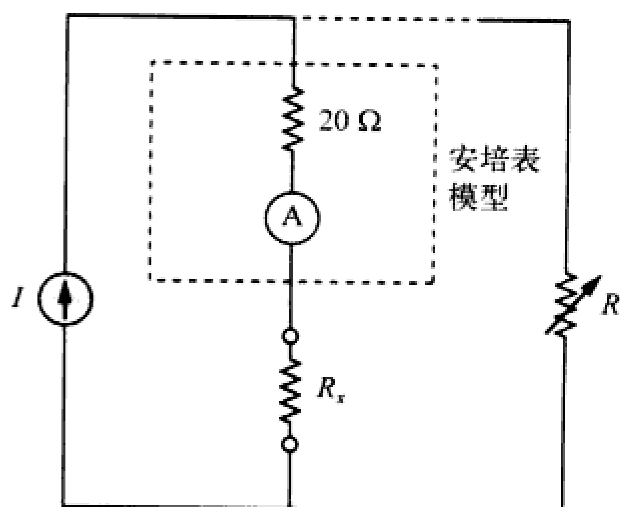


图 2-133 习题 2-73 的电路原理图

2-74 图2-134所示电路用于控制马达的转速，当开关掷于高、中、低三个不同位置时，马达电流分别为5 A、3 A和1 A，可以用一个20 mΩ的负载电阻作为该马达的电路模型，试求串联降压电阻R_1、R_2和R_3。

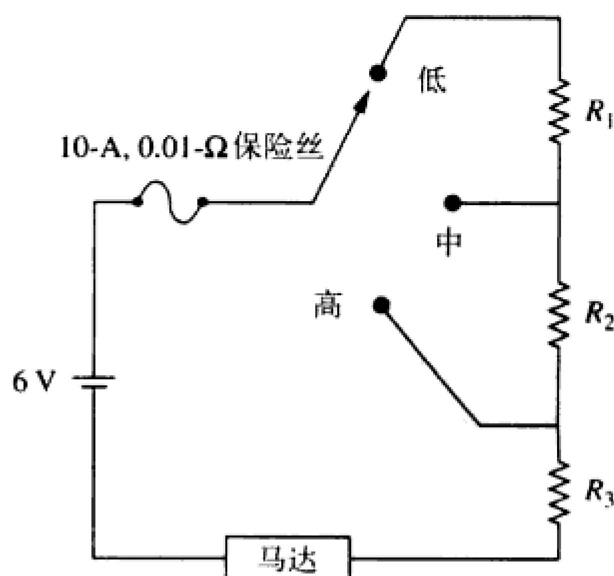


图 2-134 习题 2-74 的电路原理图

2-75 试求图2-135所示四路功率分配电路中的

R_{ab}，假定图中各元件均为1 Ω。

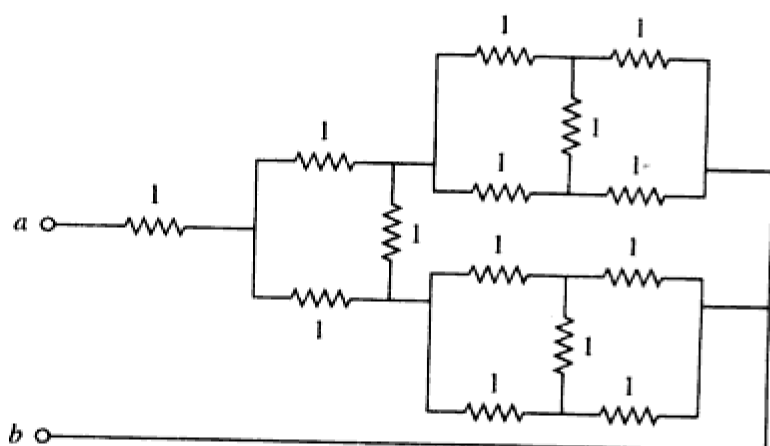


图 2-135 习题 2-75 的电路原理图

2-76 对图2-136所示的八路功率分配电路，重做习题2-75。

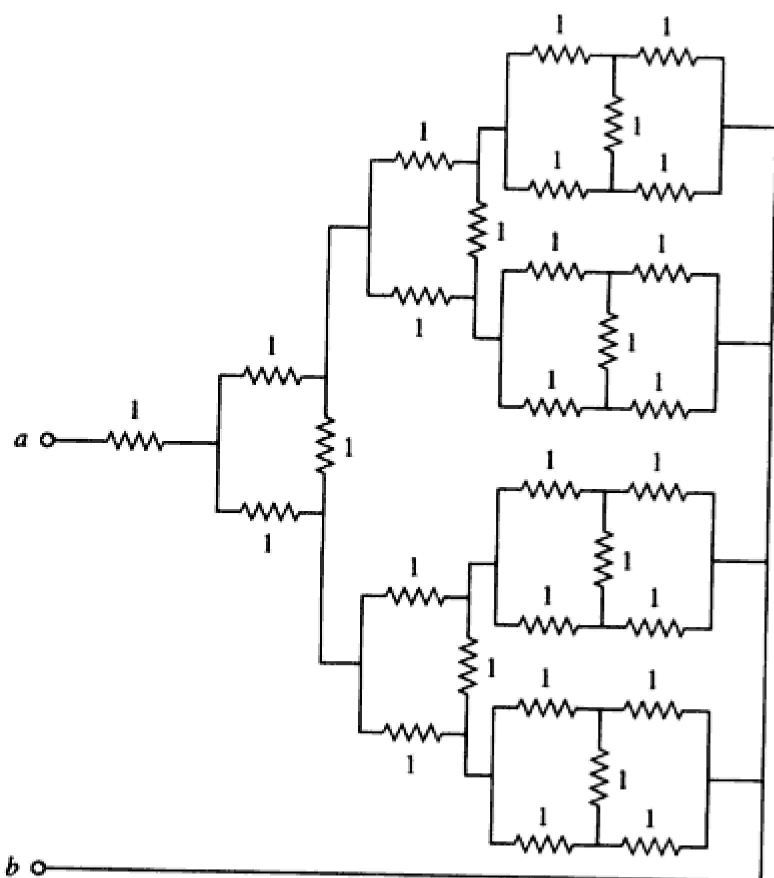


图 2-136 习题 2-76 的电路原理图

2-77 假定你所在的电路实验室中有大量如下商用标称电阻：

1.8 Ω 20 Ω 300 Ω 24 kΩ 56 kΩ

试利用电阻的串并联合并和数量最少的上述电阻，得到电路设计中所需的如下阻值：

(a) 5 Ω (b) 311.8 Ω

(c) 40 kΩ (d) 52.32 kΩ

2-78 在图2-137所示电路中，滑动端将电位器阻值调节在αR与 $(1-\alpha)R$之间，$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$，试求$v_o/v_s$。

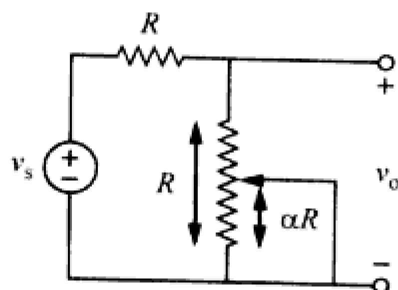


图 2-137 习题 2-78 的电路原理图

2-79 将一个额定值为240 mW、6 V的电动削铅笔刀与一9V电池相连，如图2-138所示。试计算使该电动削铅笔刀正常工作时所需串联的分压电阻值R_x。

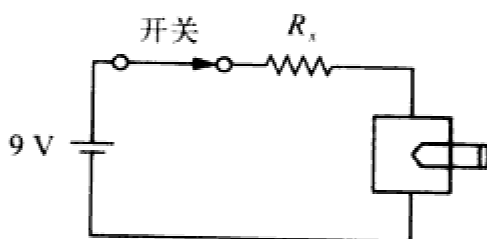


图 2-138 习题 2-79 的电路原理图

2-80 扬声器与放大器如图2-139所示相连接，如果10 Ω扬声器从放大器获取的最大功率为12 W，试确定一个4 Ω扬声器从放大器获取的最大功率为多少？

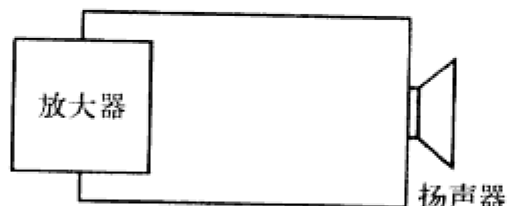


图 2-139 习题 2-80 的电路原理图

2-81 在某应用中，图2-140所示电路的设计必须满足如下两项标准：

(a) $V_o/V_s=0.05$ (b) $R_{eq}=40\ \text{k}\Omega$

如果负载电阻固定为5 kΩ，试求满足上述标准的电阻R_1与R_2。

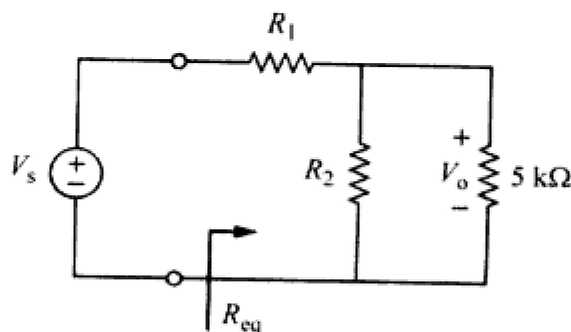


图 2-140 习题 2-81 的电路原理图

2-82 某电阻列阵的引脚图如图2-141所示，试求下

述引脚之间的等效电阻：

(a) 1与2 (b) 1与3 (c) 1与4

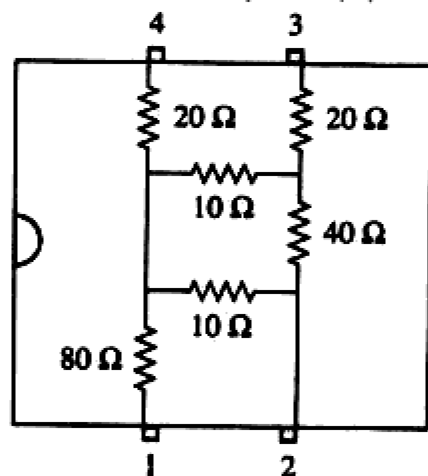


图 2-141 习题 2-82 的电路原理图

2-83 两精密仪器工作的额定值如图 2-142 所示，试求利用 24V 电池为这两个仪器供电时所要求的 R_1 与 R_2。

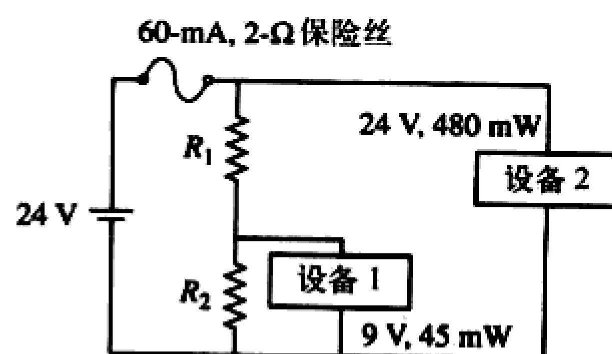


图 2-142 习题 2-83 的电路原理图

第3章 分 析 方 法

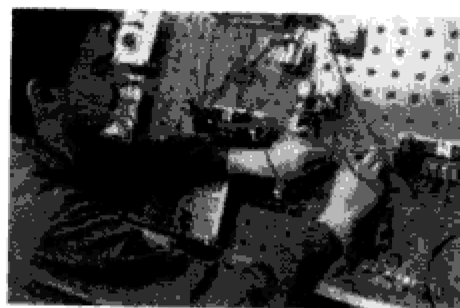
任何伟大的事情都不是一蹴而就的。探索伟大的科学发现，描绘精美的画卷，创作不朽的诗篇，成为高官或者名垂千古的将军，做任何伟大的事情都需要时间、耐心和毅力。这些事情都只能点点滴滴地积累，逐步地达成。

——W. J. Wilmont Buxton

拓展职业生涯

以电子学为职业

电子学是电子电路分析的应用领域之一，电子学（electronics）这一术语最初用于区分极低电流电路，但现在的情况并非如此，因为功率半导体器件就是在大电流下运行的。目前认为电子学是研究电荷在气体、真空或半导体中运动的科学。现代电子学包括晶体管和晶体管电路。早期的电子电路由分立元件组装而成，但是许多现代电子电路是在半导体基片或芯片上制成的集成电路。



电子工程师正在检修电路板

电子电路在自动化、广播、计算机和仪器等许多领域有着广泛的应用。采用电子电路的设备或装置数不胜数，收音机、电视机、计算机以及立体声系统等只是电子电路的几种常见应用。

电子工程师经常会利用、设计或构建由不同电子电路组成的电子系统，从而实现各种不同的功能。因此，理解并掌握电子电路的运行与分析对于电子工程师至关重要。电子学已经成为电气工程中不同于其他学科的一门专业学科，由于电子学领域的发展总是最先进的，所以电子工程师必须及时更新知识，做到这一点的最好办法就是成为专业机构中的一员，如成为美国电气与电子工程师协会（IEEE）的会员。IEEE是全球最大的专业技术协会，会员数量超过300 000，其会员可以从IEEE每年出版的大量杂志、期刊、汇刊和会议/论坛论文集中受益匪浅，读者应该考虑成为IEEE的会员。

3.1 引言

掌握了电路理论的基本定律（欧姆定律和基尔霍夫定律）之后，本章将应用这些定律推导进行电路分析的两种有效方法：基于基尔霍夫电流定律系统应用的节点分析法；基于基尔霍夫电压定律系统应用的网孔分析法。这两种电路分析方法极其重要，所以应该说这一章是本书中最为重要的一章，学生应予以足够的重视。

采用本章介绍的两种方法可以分析任意线性电路，得到一组联立方程组，之后通过解方程组得出所需的电流或电压值。求解线性联立方程组的一种方法是克莱姆（Cramer）法则，即利用方程组中系数行列式的商来计算电路变量。本章将通过例题说明上述方法。

本章还介绍了本书通篇都要使用的电路模拟计算机软件——Windows系统下的PSpice的使用方法。最后，本章将应用所学到的电路分析方法分析晶体管电路。

3.2 节点分析法

节点分析法是利用节点电压作为电路变量分析电路的一般方法，选择节点电压而不是元件电压

作为电路变量进行分析更为方便，同时也会减少联立方程组中方程的数量。

节点分析法也称为节点电压法。

为简单起见，本节假定所分析的电路中不包含电压源，而包含电压源时的电路分析将在下一节予以讨论。

采用节点分析法（nodal analysis）就是要求出节点电压，假定电路中包含n个节点，且不包含电压源，则电路的节点分析可按照如下三个步骤完成：

求解节点电压的步骤：

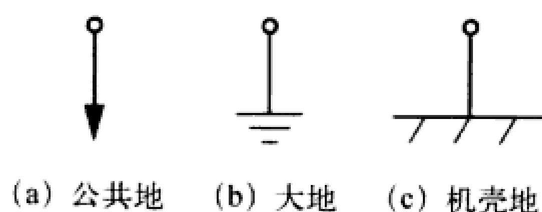
（1）选取一个节点作为参考节点，为其余$n-1$个节点分配电压v_1、v_2、…、v_{n-1}，这些电压均为相对于参考节点的电位。

（2）对$n-1$个非参考节点应用KCL列写方程组，此时需根据欧姆定律用节点电压来表示各支路电流。

（3）求解线性联立方程组从而得到未知的节点电压。

下面就解释并应用上述三个步骤。

节点分析法的第一步是选取一个节点作为参考节点（reference node）或已知节点（datum node），由于假定参考节点电位为零，通常称之为地（ground）。参考节点可以用图3-1所示的三个符号表示。图3-1c所示的接地类型称为机壳地（chassis ground），通常用于机壳和底盘作为所有电路参考节点的设备中。当以大地作为参考电位，则采用图3-1a或图3-1b的大地（earth ground）符号表示。本书将采用图3-1b所示的接地符号。



（a）公共地 （b）大地 （c）机壳地

图 3-1 表示参考节点的常用符号

一旦选定了参考节点，就可以为非参考节点指定电压，例如在图3-2a所示电路中，节点0为参考节点（$v=0$），而节点1和节点2的电压分别指定为v_1和v_2。应该记住，节点电压总是相对于参考节点定义的，如图3-2a所示，各节点电压为从参考节点到相应的非参考节点的电压升高，即各节点相对于参考节点的电压。

非参考节点的个数等于独立方程的个数。

节点分析法的第二步是对每个非参考节点应用KCL定律列方程，为了避免在同一电路中符号过多，现将图3-2a所示电路重画于图3-2b，并在图中增加了电流i_1、i_2和i_3，分别表示流过电阻R_1、R_2和R_3的电流。对节点1应用KCL定律，有：

$$I_1 = I_2 + i_1 + i_2 \tag{3-1}$$

而对于节点2，有：

$$I_2 + i_2 = i_3 \tag{3-2}$$

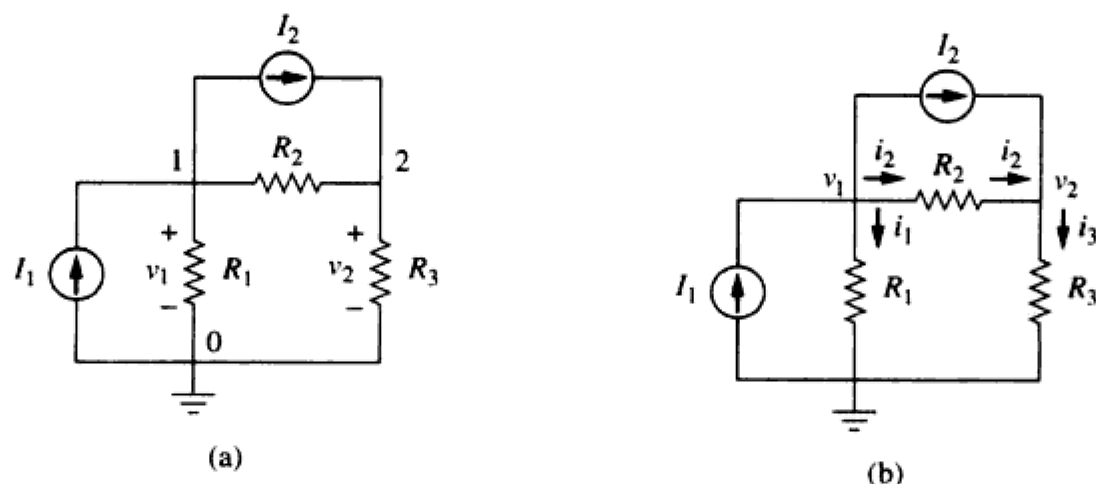


图 3-2 用于说明节点分析法的典型电路

接着根据欧姆定律用节点电压表示未知电流i_1、i_2和i_3。必须牢记的一点是，由于电阻是无源元

件，所以按照无源符号规约，电流总是从高电位流向低电位，即：

通过电阻的电流总是由高电位向低电位流动。

可将上述原理表达为：

$$\boxed{i = \frac{v_{\text{higher}} - v_{\text{lower}}}{R}} \tag{3-3}$$

注意，该原理与第2章中对电阻的定义是一致的，参见图2-1。于是，由图3-2b可得：

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{v_1 - 0}{R_1} \quad \text{或} \quad i_1 = G_1 v_1 \\ i_2 &= \frac{v_1 - v_2}{R_2} \quad \text{或} \quad i_2 = G_2(v_1 - v_2) \\ i_3 &= \frac{v_2 - 0}{R_3} \quad \text{或} \quad i_3 = G_3 v_2 \end{aligned} \tag{3-4}$$

将式(3-4)代入式(3-1)与式(3-2)，分别得到：

$$I_1 = I_2 + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} \tag{3-5}$$

$$I_2 + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = \frac{v_2}{R_3} \tag{3-6}$$

当采用电导表示时，式(3-5)与式(3-6)变为：

$$I_1 = I_2 + G_1 v_1 + G_2(v_1 - v_2) \tag{3-7}$$

$$I_2 + G_2(v_1 - v_2) = G_3 v_2 \tag{3-8}$$

节点分析法的第三步是求解节点电压。如果对n-1个非参考节点应用KCL，就可以得到n-1个联立方程，如上例中，有两个非参考节点，得到式(3-5)和式(3-6)或者式(3-7)和式(3-8)两个联立方程。对于图3-2所示电路，利用代入法、消元法、克莱姆法则或矩阵求逆法等标准方法求解式(3-5)与式(3-6)或者式(3-7)与式(3-8)就可以得到节点电压v_1与v_2。采用后两种方法时，必须将联立方程表示成矩阵形式，例如，式(3-7)与式(3-8)以矩阵形式表示为：

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 - I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{3-9}$$

解之即得到v_1与v_2，式(3-9)的一般形式将在3.6节中讨论。求解联立方程还可以借助于计算器或计算机软件，如MATLAB、Mathcad、Maple和Quattro Pro等工具软件计算。

例题3-1　试计算图3-3a所示电路中各节点的电压。

解　为了进行节点分析，在图3-3a中标出相应的电压、电流，得到用于分析的图3-3b。应该注意应用KCL时电流的选取方法，图中除了电流源支路外，其余电流的流向标记可以是任意的，但必须保持一致（例如，若i_2由左边流入4 Ω的电阻，则i_2必须从电阻的右边流出该电阻），选定参考节点后，图中的v_1、v_2即为所求的相对于参考节点的电压。

对节点1应用KCL和欧姆定律，得到：

$$i_1 = i_2 + i_3 \quad \Rightarrow \quad 5 = \frac{v_1 - v_2}{4} + \frac{v_1 - 0}{2}$$

将后一个方程的两边同乘以4，得：

$$20 = v_1 - v_2 + 2v_1$$

即

$$3v_1 - v_2 = 20 \tag{3-1-1}$$

同理，在节点2处有：

$$i_2 + i_4 = i_1 + i_5 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1 - v_2}{4} + 10 = 5 + \frac{v_2 - 0}{6}$$

两边同乘以12，得到：

$$3v_1 - 3v_2 + 120 = 60 + 2v_2$$

即

$$-3v_1 + 5v_2 = 60 \tag{3-1-2}$$

于是，得到两个联立方程式(3-1-1)与式(3-1-2)，采用以下任何一种解法均可求出电压v_1与v_2。

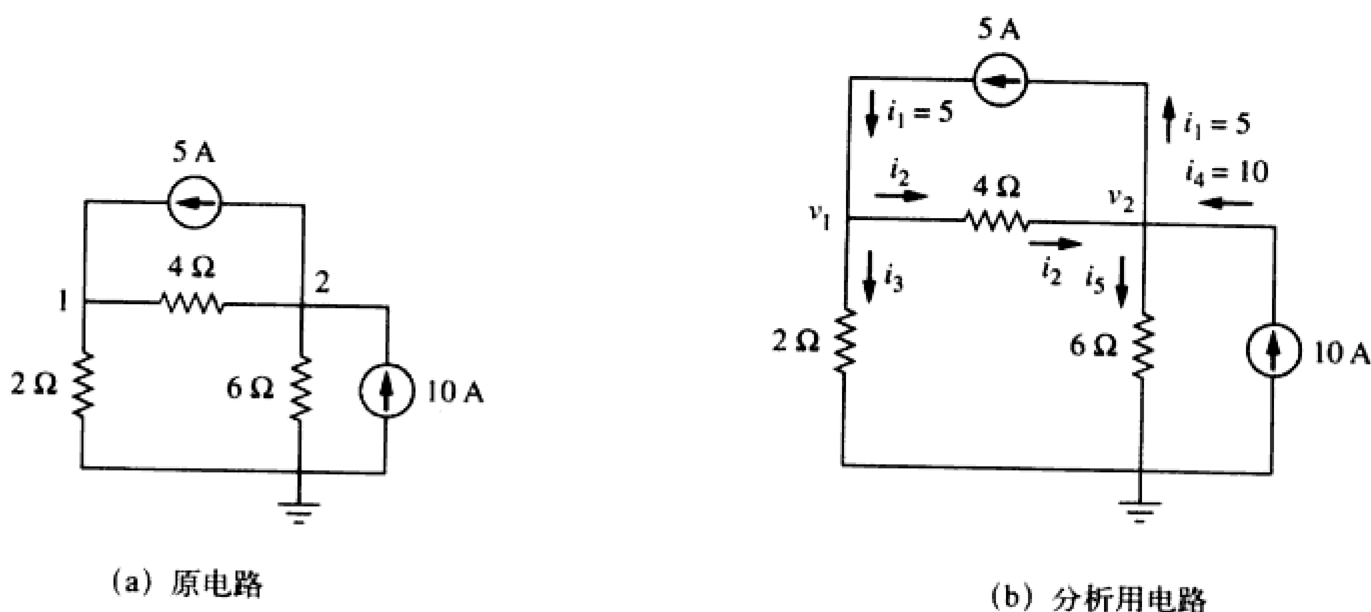


图 3-3 例题 3-1 的电路

方法1：采用消元法，将式(3-1-1)与式(3-1-2)相加，得到：

$$4v_2 = 80 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 20\text{ V}$$

将$v_2 = 20$代入式(3-1-1)，得到：

$$3v_1 - 20 = 20 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{40}{3} = 13.333\text{ V}$$

方法2：利用克莱姆法则，将式(3-1-1)与式(3-1-2)写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 60 \end{bmatrix} \tag{3-1-3}$$

系数矩阵行列式的值为：

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 3 = 12$$

于是，v_1与v_2分别为：

$$v_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 20 & -1 \\ 60 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{100 + 60}{12} = 13.333\text{ V}$$

$$v_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 20 \\ -3 & 60 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{180 + 60}{12} = 20\text{ V}$$

与采用消元法得到的结果相同。

如果要求各个电流值，则由节点电压值可以很容易地得到：

$i_1=5\text{ A}$，$i_2=\dfrac{v_1-v_2}{4}=-1.6668\text{ A}$，$i_3=\dfrac{v_1}{2}=6.666\text{ A}$，$i_4=10\text{ A}$，$i_5=\dfrac{v_2}{6}=3.333\text{ A}$

i_2为负值，表明其流向与假定的方向相反。

练习题3-1 试求图3-4所示电路的节点电压。

答 $v_1=-2\text{ V}$，$v_2=-14\text{ V}$。

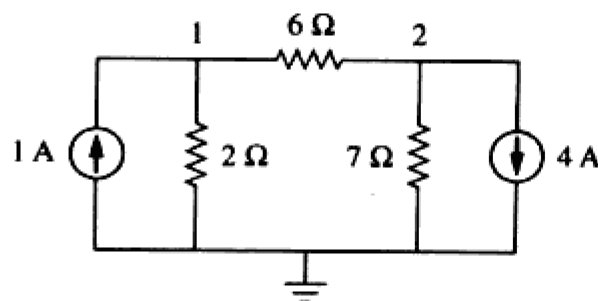
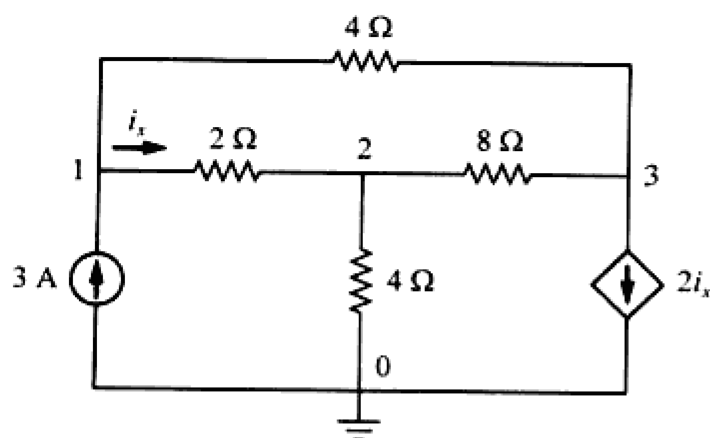


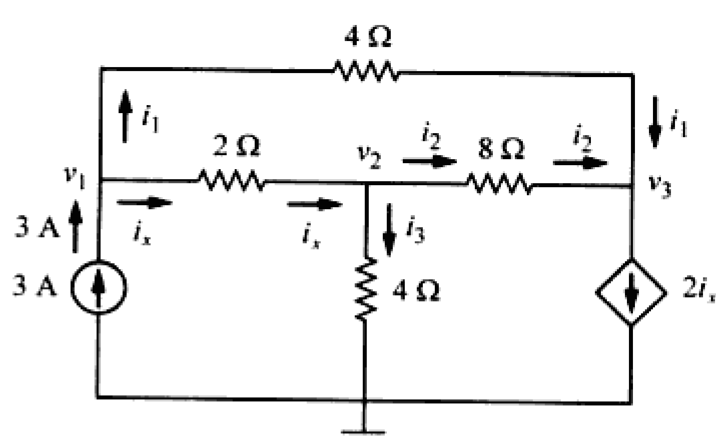
图 3-4 练习题 3-1 的电路原理图

例题3-2 试求图3-5a所示电路中的节点电压。

解 与例题3-1电路包括两个非参考节点不同，本例题电路中有三个非参考节点。三个节点电压v_1、v_2、v_3以及各支路电流的标记如图3-5b所示。



（a）原电路



（b）分析用电路

图 3-5 例题 3-2 的电路原理图

对于节点1，有：

$$3=i_1+i_x \quad\Rightarrow\quad 3=\frac{v_1-v_3}{4}+\frac{v_1-v_2}{2}$$

两边同乘以4，并移项整理得：

$$3v_1-2v_2-v_3=12 \tag{3-2-1}$$

对于节点2，有：

$$i_x=i_2+i_3 \quad\Rightarrow\quad \frac{v_1-v_2}{2}=\frac{v_2-v_3}{8}+\frac{v_2-0}{4}$$

两边同乘以8并移项整理得：

$$-4v_1+7v_2-v_3=0 \tag{3-2-2}$$

对于节点3，有：

$$i_1+i_2=2i_x \quad\Rightarrow\quad \frac{v_1-v_3}{4}+\frac{v_2-v_3}{8}=\frac{2(v_1-v_2)}{2}$$

两边同乘以8，移项整理后再除以3，得到：

$$2v_1-3v_2+v_3=0 \tag{3-2-3}$$

于是，得到三个用于求解节点电压v_1、v_2和v_3的联立方程。下面将采用三种方法求解方程组。

方法1：采用消元法，将式(3-2-1)与式(3-2-3)相加，得到：

$$5v_1-5v_2=12$$

即

$$v_1-v_2=\frac{12}{5}=2.4 \tag{3-2-4}$$

将式(3-2-2)与式(3-2-3)相加，得到：

$$-2v_1+4v_2=0 \quad \Rightarrow \quad v_1=2v_2 \tag{3-2-5}$$

将式(3-2-5)代入式(3-2-4)，有：

$$2v_2-v_2=2.4 \quad \Rightarrow \quad v_2=2.4, \quad v_1=2v_2=4.8\ \text{V}$$

由式(3-2-3)可得：

$$v_3=3v_2-2v_1=3v_2-4v_2=-v_2=-2.4\ \text{V}$$

综上：

$$v_1=4.8\ \text{V}, \quad v_2=2.4\ \text{V}, \quad v_3=-2.4\ \text{V}$$

方法2：利用克莱姆法则，将式(3-2-1)～式(3-2-3)写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3-2-6}$$

由此可得：

$$v_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad v_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad v_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}$$

其中，Δ、Δ_1、Δ_2和Δ_3为待计算的行列式。由附录A可知，计算3×3矩阵的行列式时，应重复添加该矩阵的前两行，并交叉相乘，具体过程如下所示：

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=21-12+4+14-9-8=10$$

同理，可以得到：

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 12 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 12 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix}=84+0+0-0-36-0=48$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 3 & 12 & -1 \\ -4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 12 & -1 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0+0-24-0-0+48=24$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 12 \\ -4 & 7 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 12 \\ -4 & 7 & 0 \end{vmatrix}=0+144+0-168-0-0=-24$$

于是得到：

$$v_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{48}{10}=4.8\,\text{V},\qquad v_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{24}{10}=2.4\,\text{V},\qquad v_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-24}{10}=-2.4\,\text{V}$$

与采用方法1所得的结果相同。

方法3：利用MATLAB求解矩阵，式(3-2-6)可以写为：

$$\boldsymbol{AV}=\boldsymbol{B}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$$

其中，$\boldsymbol{A}$为3×3方阵，$\boldsymbol{B}$为列矢量，$\boldsymbol{V}$为由所要求的v_1、v_2和v_3组成的列矢量。利用MATLAB计算$\boldsymbol{V}$的程序如下：

```
>> A = [3  -2  -1; -4  7  -1; 2  -3  1];
>> B = [12  0  0]';
>> V = inv (A) *B
          4.8000
    V =   2.4000
         -2.4000
```

于是，$v_1=4.8$ V，$v_2=2.4$ V，$v_3=-2.4$ V。与采用前两种方法得到的结果相同。

练习题3-2 试求图3-6所示电路中三个非参考节点的电压。

答 $v_1=80$ V，$v_2=-64$ V，$v_3=156$ V。

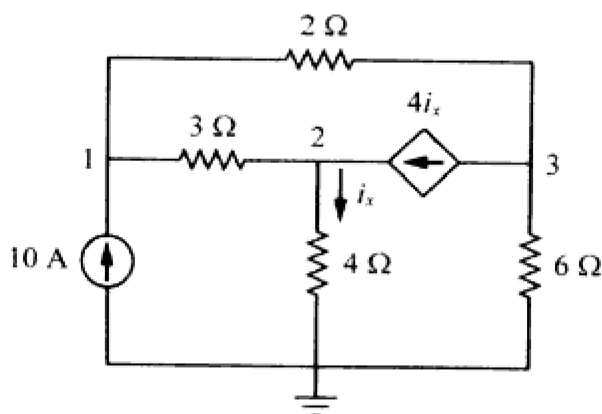


图 3-6 练习题 3-2 的电路原理图

3.3 包括电压源的节点分析法

下面讨论电压源对节点分析法的影响？以图3-7所示的电路为例，分如下两种情况进行讨论。

第1种情况：如果电压源接在参考节点与非参考节点之间，那么非参考节点的电压就等于电压源的电压。例如，在图3-7中，

$$v_1=10\text{ V}\tag{3-10}$$

因此，在这种情况下可以简化电路的分析。

第2种情况：如果电压源（独立源或受控源）接在两个非参考节点之间，则这两个非参考节点构成一个广义节点（generalized node）或超节点（supernode）。此时可以采用KCL和KVL确定节点电压。

超节点由两个非参考节点和其间的电压源（独立源或受控源）以及与之并联的元件所组成。

超节点可以看成是包含电压源及其两个节点的一个封闭曲面。

在图3-7中，节点2和节点3组成一个超节点（超节点可以由两个以上节点组成，如图3-14所示电

路)。仍然可以采用上一节介绍的三个步骤分析含有超节点的电路，只是对超节点的处理方法不同而已，为什么呢？因为节点分析法的基本要素是应用KCL，要求知道流过各元件的电流。事先并不知道流过电压源的电流，但是，与普通节点一样，在超节点处必须满足KCL，因此在图3-7中的超节点处，有：

$$i_1 + i_4 = i_2 + i_3 \tag{3-11a}$$

即

$$\frac{v_1 - v_2}{2} + \frac{v_1 - v_3}{4} = \frac{v_2 - 0}{8} + \frac{v_3 - 0}{6} \tag{3-11b}$$

为了对图3-7中的超节点应用基尔霍夫电压定律，现将该节点重新画于图3-8中，顺时针方向环绕回路一周，得到：

$$-v_2 + 5 + v_3 = 0 \Rightarrow \quad v_2 - v_3 = 5 \tag{3-12}$$

由式(3-10)、式(3-11b)与式(3-12)就可以得到节点电压。

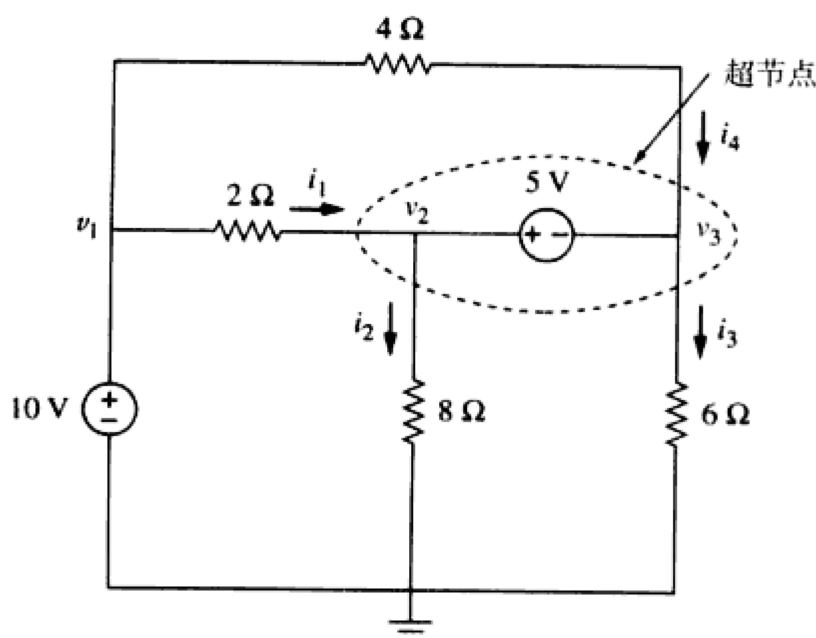


图 3-7 有广义节点的电路

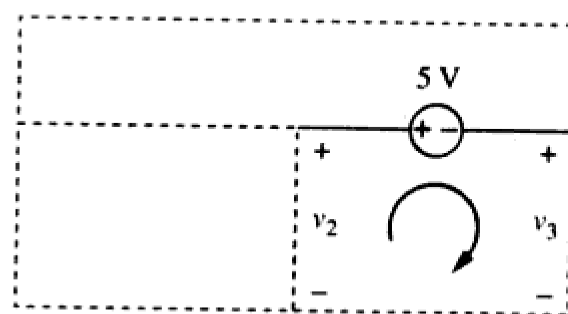


图 3-8 对超节点应用 KVL

超节点具有如下三个属性：

(1) 超节点内的电压源提供了一个求解节点电压所需的约束方程。

(2) 超节点本身没有电压。

(3) 包含超节点电路的求解要求同时利用KCL和KVL。

例题3-3 试求图3-9所示电路中的节点电压。

解 该电路中的超节点包括2V电压源、节点1、节点2以及10 Ω电阻。对图3-10a所示电路中的超节点应用KCL，可得：

$$2 = i_1 + i_2 + 7$$

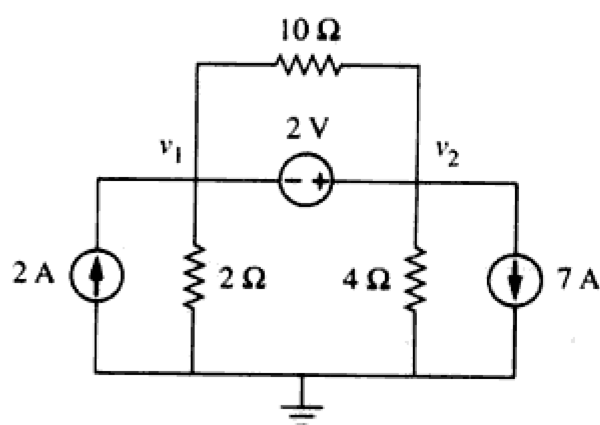


图 3-9 例题 3-3 的电路原理图

用节点电压表示i_1与i_2，有：

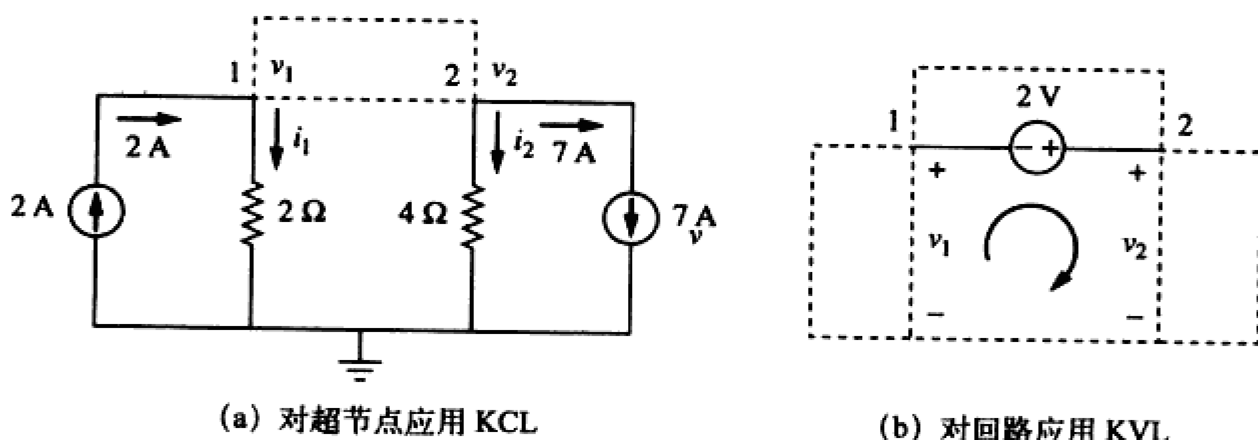
$$2 = \frac{v_1 - 0}{2} + \frac{v_2 - 0}{4} + 7 \quad \Rightarrow \quad 8 = 2v_1 + v_2 + 28$$

即

$$v_2 = -20 - 2v_1 \tag{3-3-1}$$

为了得到v_1与v_2之间的关系，对图3-10b所示电路应用KVL，绕回路一周可得：

$$-v_1-2+v_2=0 \quad \Rightarrow \quad v_2=v_1+2 \tag{3-3-2}$$



(a) 对超节点应用 KCL (b) 对回路应用 KVL

图 3-10 对超节点和回路分别应用 KCL 和 KVL

由式(3-3-1)与式(3-3-2)可得：

$$v_2=v_1+2=-20-2v_1$$

即

$$3v_1=-22 \quad \Rightarrow \quad v_1=-7.333\ \text{V}$$

并且$v_2=v_1+2=-5.333$V。注意，10 Ω电阻对电路的节点电压没有任何影响，因为它是连接在超节点两端。

练习题3-3 试求图3-11所示电路中的v与i。
答 −0.2 V，1.4 A。

例题3-4 试求图3-12所示电路的节点电压。

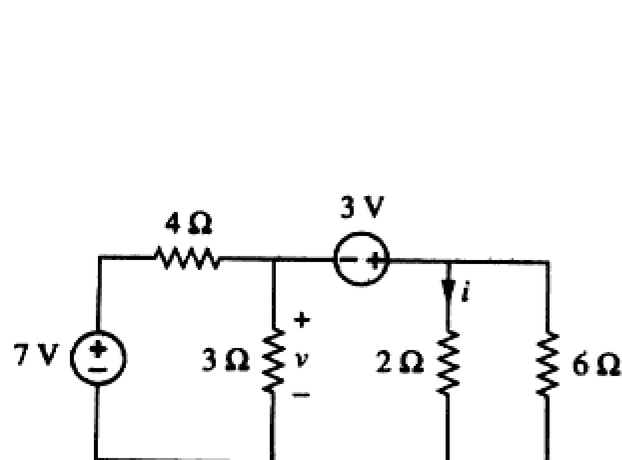


图 3-11 习题 3-3 的电路原理图

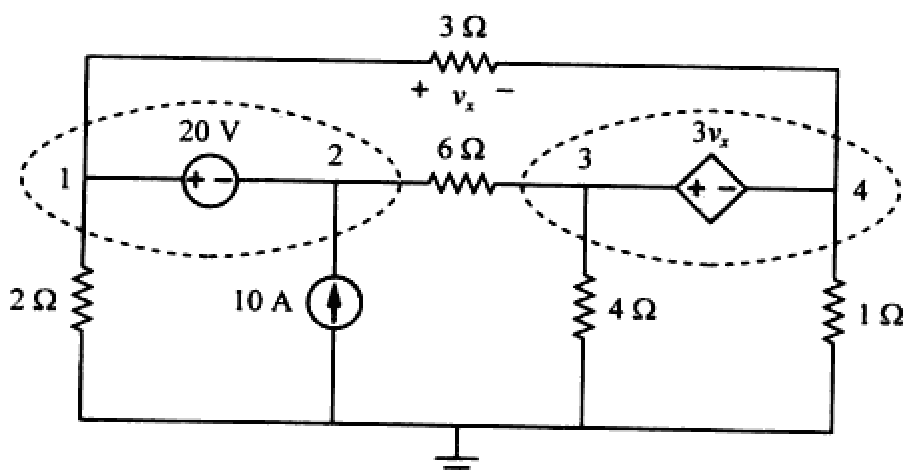


图 3-12 例题 3-4 的电路原理图

解 节点1和节点2组成一个超节点，节点3和节点4也组成一个超节点，对这两个超节点分别应用KCL，如图3-13a所示，对超节点1、超节点2处，有：

$$i_3+10=i_1+i_2$$

用节点电压表示上式可得：

$$\frac{v_3-v_2}{6}+10=\frac{v_1-v_4}{3}+\frac{v_1}{2}$$

即

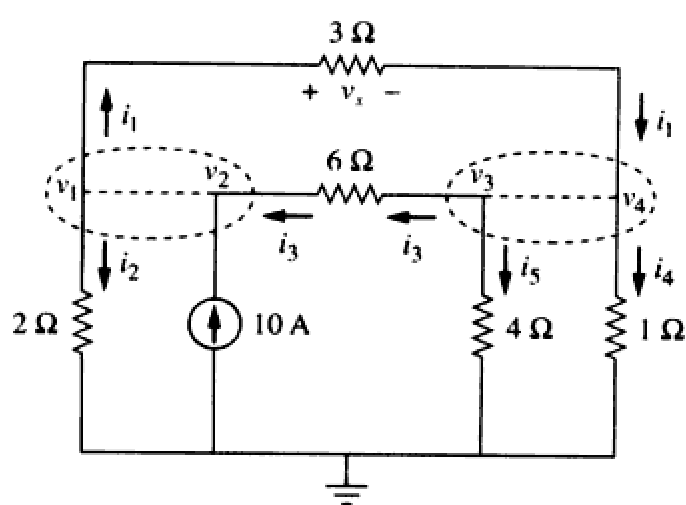
$$5v_1 + v_2 - v_3 - 2v_4 = 60 \tag{3-4-1}$$

在超节点3、超节点4处有：

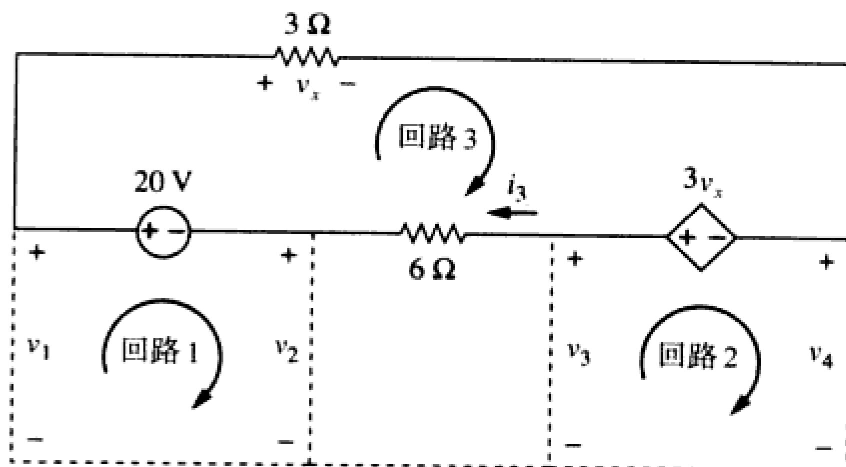
$$i_1 = i_3 + i_4 + i_5 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1 - v_4}{3} = \frac{v_3 - v_2}{6} + \frac{v_4}{1} + \frac{v_3}{4}$$

即

$$4v_1 + 2v_2 - 5v_3 - 16v_4 = 0 \tag{3-4-2}$$



(a) 对两个超节点应用 KCL



(b) 对回路应用 KVL

图 3-13 对超节点和回路分别应用 KCL 和 KVL

下面对包含电压源的支路应用KVL，如图3-13b所示。对于回路1，有：

$$-v_1 + 20 + v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 - v_2 = 20 \tag{3-4-3}$$

对于回路2，有：

$$-v_3 + 3\,v_x + v_4 = 0$$

但是，由于$v_x = v_1 - v_4$，所以：

$$3v_1 - v_3 - 2v_4 = 0 \tag{3-4-4}$$

对于回路3，有，

$$v_x - 3\,v_x + 6i_3 - 20 = 0$$

因为$6i_3 = v_3 - v_2$并且$v_x = v_1 - v_4$，所以：

$$-2v_1 - v_2 + v_3 + 2v_4 = 20 \tag{3-4-5}$$

需要求解的四个节点电压为v_1、v_2、v_3和v_4，只需从式(3-4-1)～式(3-4-5)的五个方程中选取四个即可联立求解。虽然第五个方程是多余的，但可以用它来检验结果的正确性。可以直接利用MATLAB求解式(3-4-1)～式(3-4-4)，也可以消去其中一个节点电压，求解三个联立方程。由式(3-4-3)可得$v_2 = v_1 - 20$，将该式分别代入式(3-4-1)与式(3-4-2)，得到：

$$6v_1 - v_3 - 2v_4 = 80 \tag{3-4-6}$$

以及

$$6v_1 - 5v_3 - 16v_4 = 40 \tag{3-4-7}$$

式(3-4-4)、式(3-4-6)与式(3-4-7)写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & -2 \\ 6 & -5 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix}$$

利用克莱姆法则，得到：

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & -1 & -2\\6 & -1 & -2\\6 & -5 & -16\end{vmatrix}=-18,\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}0 & -1 & -2\\80 & -1 & -2\\40 & -5 & -16\end{vmatrix}=-480$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}3 & 0 & -2\\6 & 80 & -2\\6 & 40 & -16\end{vmatrix}=-3120,\quad \Delta_4=\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\6 & -1 & 80\\6 & -5 & 40\end{vmatrix}=840$$

因此，各个节点电压为：

$$v_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-480}{-18}=26.67\,\text{V},\quad v_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-3120}{-18}=173.33\,\text{V},$$

$$v_4=\frac{\Delta_4}{\Delta}=\frac{840}{-18}=-46.67\,\text{V}$$

并且$v_2=v_1-20=6.667$ V，至此还未使用式(3-4-5)，可用其检验结果的正确性。

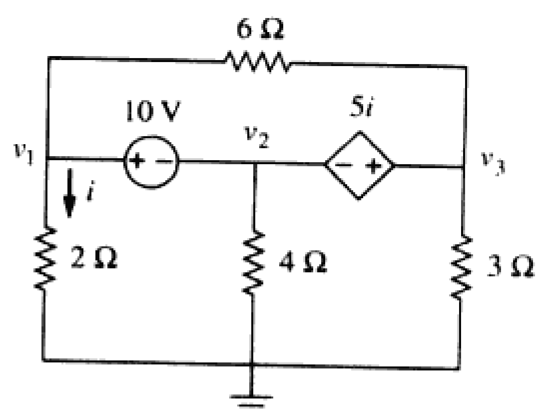


图 3-14 练习题 3-4 的电路原理图

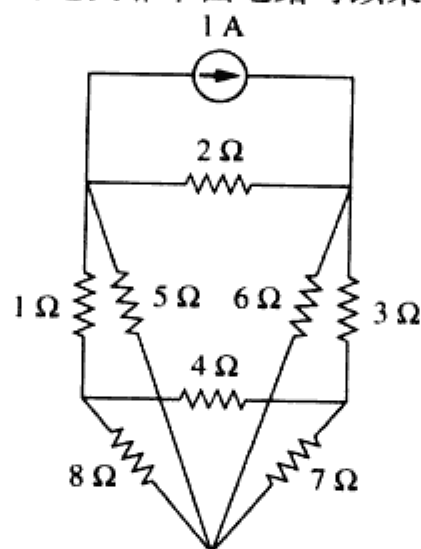
练习题3-4 试利用节点分析法求图3-14所示电路中的v_1、v_2与v_3。

答 $v_1=3.043$ V，$v_2=-6.956$ V，$v_3=0.6522$ V。

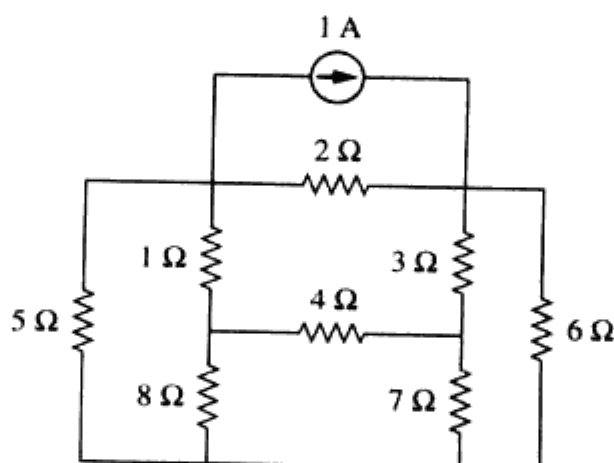
3.4 网孔分析法

网孔分析法是将网孔电流作为电流变量进行电路分析的另一种重要方法，以网孔电流而不是元件电流作为电流变量，分析起来很方便，而且可以减少联立方程的个数。前面已经介绍过，回路是一条封闭路径，回路上的节点在该回路中只出现一次，而网孔也是回路，是不包含任何其他回路在内的回路。

节点分析法是采用KCL求解给定电路的未知电压的方法，而网孔分析法则是采用KVL来求解未知电流的方法。网孔分析法不像节点分析法那样通用，因此它仅适用于分析*平面*（planar）电路。所谓平面电路是指没有交叉支路相互连接的电路，其电路图是平面的，否则，称之为*非平面*（nonplanar）电路。有的电路，看起来有交叉支路，但是如果整理重画后没有交叉支路，那么仍然是平面电路。例如，图3-15a所示电路有两条交叉支路，但它等效于图3-15b所示的电路，因此，图3-15a所示电路为平面电路。然而，图3-16所示电路为非平面电路，因为没有任何方法可以把它重画为没有交叉支路的电路，对这类非平面电路可以采用节点分析法进行分析，但不属于本书的讨论范畴。



(a) 有交叉支路的平面电路



(b) 重画后的电路，没有交叉支路

图 3-15

网孔分析法也称为回路分析法或网孔电流法。

为了更好地理解网孔分析法，首先应该进一步解释何谓网孔。

网孔是指内部不包含任何其他回路的一条回路。

例如，在图3-17中，路径*abefa*和*bcdeb*均为网孔，但路径*abcdefa*就不是网孔。流经网孔的电流称为网孔电流（mesh current），网孔分析法就是采用KVL求出给定电路的网孔电流的方法。

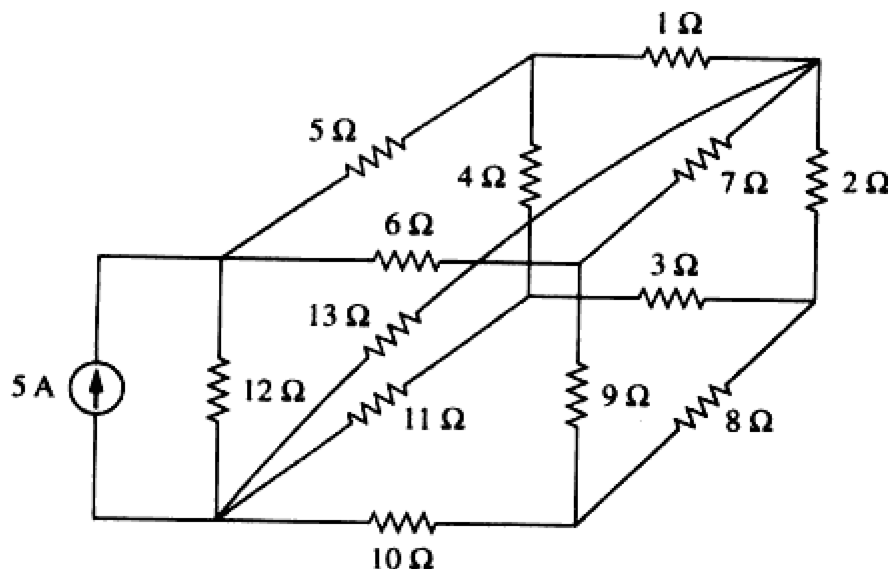


图 3-16 非平面电路

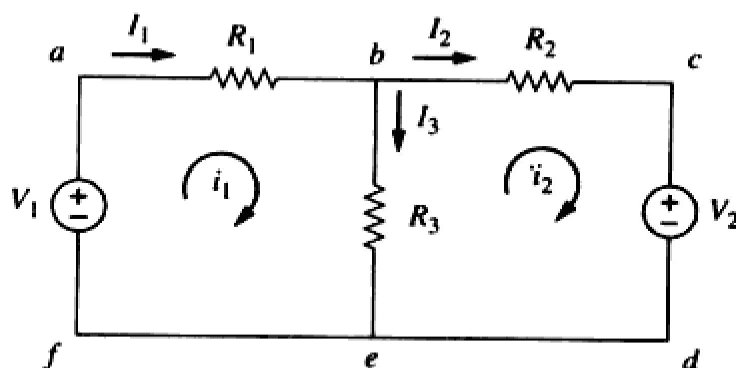


图 3-17 有两个网孔的电路

本节讨论不包含电流源的平面电路网孔分析法，下一节将考虑包括电流源的网孔分析法。对包含n个网孔的电路进行网孔分析时，应遵循如下三个步骤。

求解网孔电流的步骤：

（1）为n个网孔分别指定网孔电流i_1，i_2，…，i_n。

（2）对n个网孔分别应用KVL，并根据欧姆定律用网孔电流来表示各个电压。

（3）求解n个联立方程，得到网孔电流。

虽然*abcdefa*是回路而不是网孔，但KVL仍然适用。从这个意义上讲，回路分析法与网孔分析法是一回事。

下面以图3-17所示电路为例来说明上述步骤。第一步定义网孔1和网孔2的网孔电流分别为i_1和i_2。虽然，各网孔电流可赋以任意方向，但习惯上总是假定各网孔电流按顺时针方向流动。

网孔电流的方向可以是任意的（顺时针方向或逆时针方向），并不会影响解的有效性。

第二步，对各网孔应用KVL。对网孔1应用KVL可得：

$$-V_1+R_1\,i_1+R_3(\,i_1-i_2\,)=0$$

即

$$(\,R_1+R_3\,)\,i_1-R_3\,i_2=V_1 \tag{3-13}$$

对网孔2应用KVL，得到：

$$R_2 i_2 + V_2 + R_3 (i_2 - i_1) = 0$$

即

$$-R_3 i_1 + (R_2 + R_3) i_2 = -V_2 \tag{3-14}$$

注意，在式(3-13)中，i_1的系数为第一个网孔中的电阻之和，而i_2的系数则是网孔1和网孔2公共电阻阻值的相反数，这一规律在式(3-14)中也是成立的。因此，上述规律可以作为写出网孔方程的快捷方法，3.6节将对此作进一步的讨论。

如果一个网孔电流假定为顺时针方向，而另一个网孔电流假定为逆时针方向，这种快捷方法就不适用了。

第三步，求解网孔电流。将式(3-13)与式(3-14)写成矩阵形式，得到：

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix} \tag{3-15}$$

解之即可得到网孔电流i_1和i_2。可以选用任何一种方法求解上述联立方程，根据式(2-12)，如果电路中包含n个节点、b条支路和l条独立回路（即网孔），则$l = b - n + 1$。因此，采用网孔分析法求解电路参数需要l个独立方程的联立求解。

注意，支路电流与网孔电流是不同的，只有在孤立网孔的情况下，两者才是相同的。为区分这两类电流，下面用i表示网孔电流，用I表示支路电流，而用I_1、I_2、I_3表示网孔电流的代数和。由图3-17显然可知：

$$I_1 = i_1, \quad I_2 = i_2, \quad I_3 = i_1 - i_2 \tag{3-16}$$

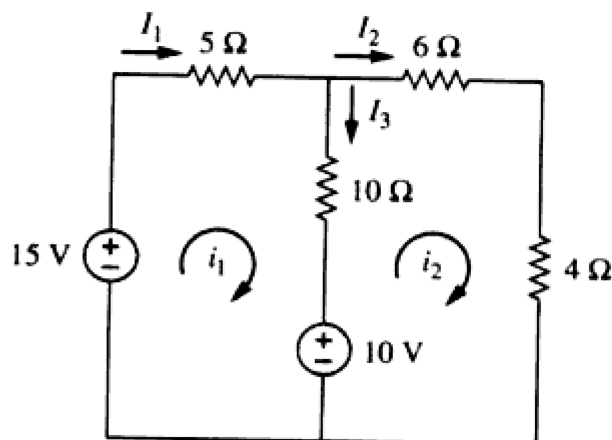


图 3-18 例题 3-5 的电路原理图

例题3-5 试利用网孔分析法求图3-18所示电路中的支路电流I_1、I_2和I_3。

解 首先利用KVL求出网孔电流。对于网孔1，有：

$$-15 + 5 i_1 + 10 (i_1 - i_2) + 10 = 0$$

即

$$3 i_1 - 2 i_2 = 1 \tag{3-5-1}$$

对于网孔2，有：

$$6 i_2 + 4 i_2 + 10 (i_2 - i_1) - 10 = 0$$

即

$$i_1 = 2 i_2 - 1 \tag{3-5-2}$$

方法1：采用代入法，将式(3-5-2)代入式(3-5-1)，得到：

$$6 i_2 - 3 - 2 i_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad i_2 = 1\ \text{A}$$

由式(3-5-2)，$i_1 = 2 i_2 - 1 = 2 - 1 = 1$ A，因此：

$$I_1 = i_1 = 1\ \text{A}, \quad I_2 = i_2 = 1\ \text{A}, \quad I_3 = i_1 - i_2 = 0$$

方法2：采用克莱姆法则，将式(3-5-1)与式(3-5-2)写成矩阵形成：

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

各行列式为：

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4$$

所以：

$$i_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=1\text{A},\qquad i_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=1\text{A}$$

结果与方法1相同。

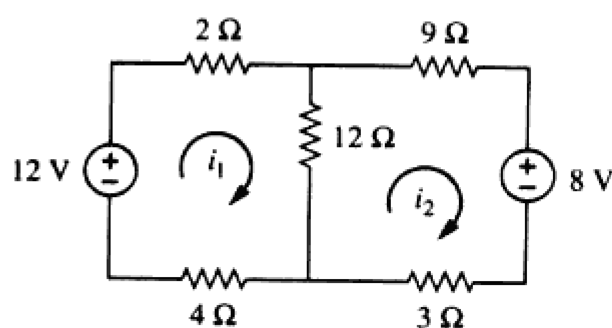


图 3-19 练习题 3-5 的电路原理图

练习题3-5 试计算图3-19所示电路中的网孔电流i_1与i_2。

答 $i_1=\dfrac{2}{3}\text{A}$，$i_2=0\text{ A}$。

例题3-6 试利用网孔分析法求图3-20所示电路中的电流I_o。

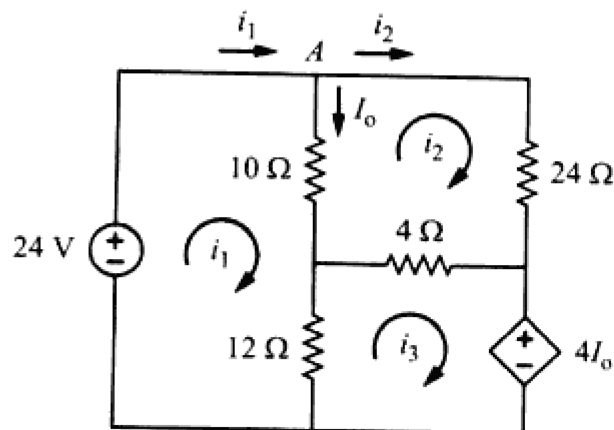


图 3-20 例题 3-6 的电路原理图

解 对三个网孔依次应用KVL。对于网孔1，有：

$$-24+10(i_1-i_2)+12(i_1-i_3)=0$$

即

$$11i_1-5i_2-6i_3=12 \tag{3-6-1}$$

对于网孔2，

$$24i_2+4(i_2-i_3)+10(i_2-i_1)=0$$

即

$$-5i_1+19i_2-2i_3=0 \tag{3-6-2}$$

对于网孔3，

$$4I_o+12(i_3-i_1)+4(i_3-i_2)=0$$

但是在节点A处有$I_o=i_1-i_2$，代入上式可得：

$$4(i_1-i_2)+12(i_3-i_1)+4(i_3-i_2)=0$$

即

$$-i_1-i_2+2i_3=0 \tag{3-6-3}$$

式(3-6-1)～式(3-6-3)写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix}11 & -5 & -6\\ -5 & 19 & -2\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\\ i_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

得到各行列式的值为：

$$\Delta=\left|\begin{array}{ccc}11 & -5 & -6\\ -5 & 19 & -2\\ -1 & -1 & 2\\ 11 & -5 & -6\\ -5 & 19 & -2\end{array}\right|$$

$$=418-30-10-114-22-50=192$$

$$\Delta_1=\left|\begin{array}{ccc}12 & -5 & -6\\ 0 & 19 & -2\\ 0 & -1 & 2\\ 12 & -5 & -6\\ 0 & 19 & -2\end{array}\right|=456-24=432$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 11 & 12 & -6 \\ -5 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 11 & 12 & -6 \\ -5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 24 + 120 = 144$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 11 & -5 & 12 \\ -5 & 19 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 11 & -5 & 12 \\ -5 & 19 & 0 \end{vmatrix} = 60 + 228 = 288$$

利用克莱姆法则计算的各网孔电流为：

$$i_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{432}{192} = 2.25\text{A}, \quad i_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{144}{192} = 0.75\text{A}$$

$$i_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{288}{192} = 1.5\text{A}$$

所以，$I_o = i_1 - i_2 = 1.5$ A。

练习题3-6 试利用网孔分析法计算图3-21所示电路中的I_o。

答 -5 A。

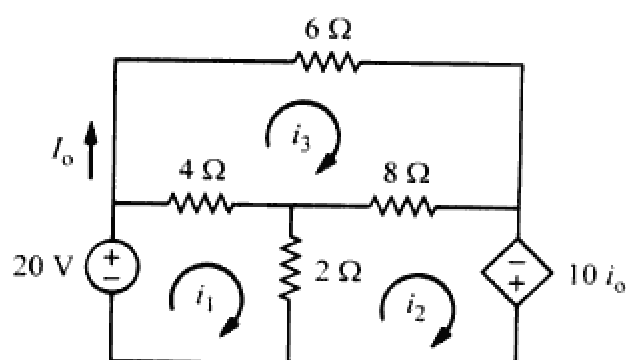


图 3-21 练习题 3-6 的电路原理图

3.5 包括电流源的网孔分析法

将网孔分析法用于包含电流源（独立源或受控源）的电路时，看起来会比较复杂。但实际上，由于电流源的存在，减少了方程的个数，求解反而会更容易些。考虑如下两种情况：

第1种情况：电流源仅存在于一个网孔中，如图3-22所示。设网孔电流$i_2 = -5$ A，并对另一个网孔按照通常方法写出网孔方程为：

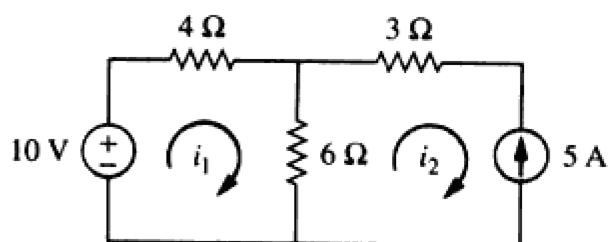
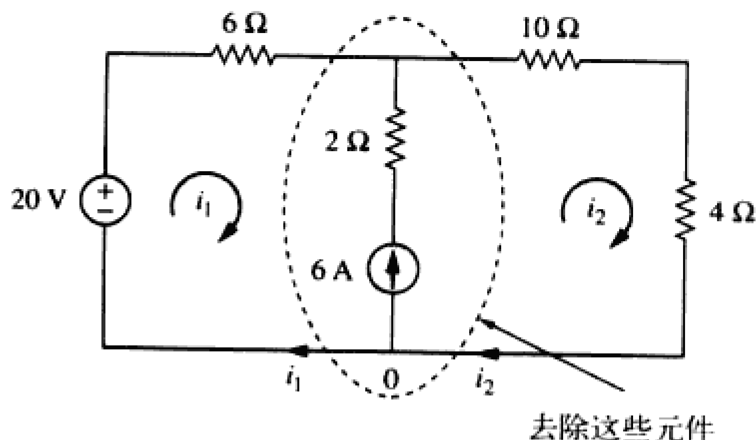


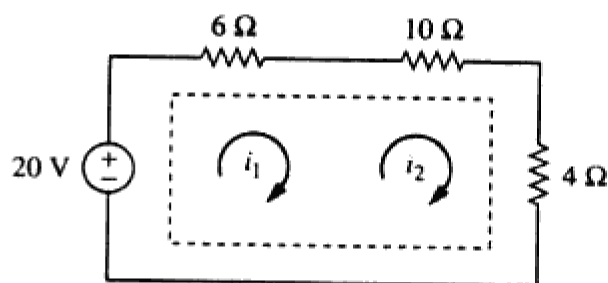
图 3-22 包括电流源的电路

$$-10 + 4i_1 + 6(i_1 - i_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1 = -2\,\text{A} \tag{3-17}$$

第2种情况：电流源存在于两个网孔之间，如图3-23a所示，将电流源和与之相串联的元件去除后，得到一个*超网孔*（supermesh），如图3-23b所示。于是，



（a）包含公共电流源的两个网孔



（b）去除电流源后得到的超网孔

图 3-23

当两个网孔共有一个电流源（独立源或受控源）时，就产生一个超网孔。

如图3-23b所示，所创建的超网孔由两个网孔的外围元件构成，并应对其进行不同的处理（如果一个电路包括两个或两个以上超网孔，应将其合并为一个更大的超网孔）。为什么要对超网孔进行不同的处理呢？因为网孔分析法应用KVL时必须知道各支路的电压，但事先并不知道电流源两端的电压。然而，超网孔必须与其他网孔一样，仍然要满足KVL的应用条件。因此，对图3-23b所示的超网孔应用KVL有：

$$-20+6\,i_1+10\,i_2+4\,i_2=0$$

即

$$6\,i_1+14\,i_2=20 \tag{3-18}$$

再对两个网孔公共支路上的节点应用KCL，对图3-23a中的节点0应用KCL得到：

$$i_2=i_1+6 \tag{3-19}$$

解方程式(3-18)与式(3-19)，得到：

$$i_1=-3.2\text{ A},\qquad i_2=2.8\text{ A} \tag{3-20}$$

超网孔具有如下三个属性：

（1）超网孔中的电流源提供了求解网孔电流所需的约束方程。

（2）超网孔本身没有电流。

（3）对超网孔要同时应用KVL和KCL。

例题3-7 试利用网孔分析法求图3-24所示电路中的$i_1\sim i_4$。

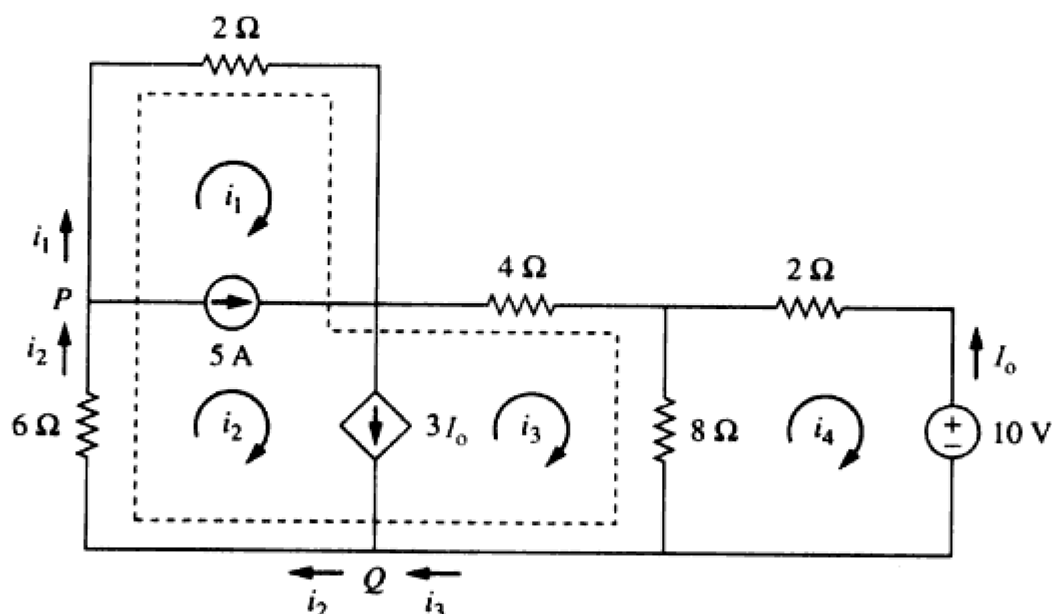


图 3-24 例题 3-7 的电路原理图

解 可以看出网孔1与网孔2共有一个独立电流源，所以它们构成一个超网孔。同样，网孔2与网孔3共有一个受控电流源，所以它们又构成另一个超网孔。这两个超网孔相交组成一个更大的超网孔，如图中虚线所示。对这一更大的超网孔应用KVL，有：

$$2\,i_1+4\,i_3+8\,(i_3-i_4)+6\,i_2=0$$

即

$$i_1+3\,i_2+6\,i_3-4\,i_4=0 \tag{3-7-1}$$

对于独立电流源，在节点P处应用KCL，有：

$$i_2=i_1+5 \tag{3-7-2}$$

对于受控电流源，在节点Q处应用KCL，有：

$$i_2=i_3+3\,I_o$$

但$I_o=-i_4$，所以：

$$i_2=i_3-3\,i_4 \tag{3-7-3}$$

对网孔4应用KVL，有：

$$2\,i_4+8\,(i_4-i_3)+10=0$$

即

$$5\,i_4-4\,i_3=-5 \tag{3-7-4}$$

由式(3-7-1)～式(3-7-4)，得到：

$$i_1=-7.5\text{ A},\quad i_2=-2.5\text{ A},\quad i_3=3.93\text{ A},\quad i_4=2.143\text{ A}$$

练习题3-7 试利用网孔分析法求图3-25所示电路中的i_1、i_2和i_3。

答 $i_1=3.474$ A，$i_2=0.4737$ A，$i_3=1.1052$ A。

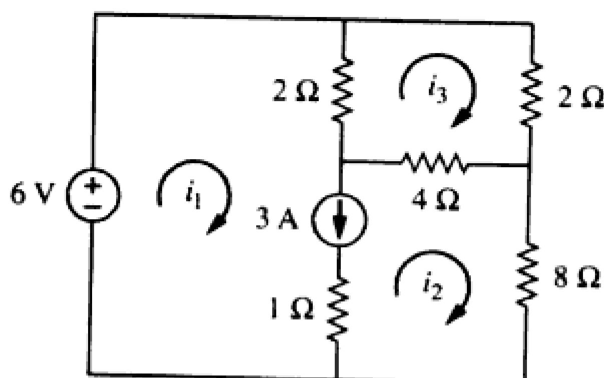


图 3-25 练习题 3-7 的电路原理图

3.6 †基于观察法的节点分析与网孔分析

本节给出节点分析法与网孔分析法的一般表达式，它是一种基于观察电路的快捷方法。

如果电路中的所有电源均为独立电流源，则无需像3.2节那样对各节点应用KCL得到节点电压方程，可以通过对电路的观察写出方程组。下面以图3-2所示的电路为例，为方便起见，将其重新画为图3-26a。该电路包括两个非参考节点，同时3.2节推导出的节点方程为：

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2+G_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_1-I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{3-21}$$

观察式(3-21)可知，对角线上的各项分别等于节点1和节点2相连接的电导之和，而非对角线上各项等于连接于节点之间电导的相反数。同样，式(3-21)等号右边各项为流入节点电流的代数和。

一般而言，如果包含独立电流源的一个电路中具有N个非参考节点，则节点电压方程可以用电导表示为如下形式：

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{N1} & G_{N2} & \cdots & G_{NN} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} \tag{3-22}$$

或简化为：

$$\boldsymbol{Gv}=\boldsymbol{i} \tag{3-23}$$

其中，

G_{kk} = 与节点k相连接的各电导之和；

$G_{kj}=G_{jk}$ = 直接与节点k，j相连接的电导之和的相反数，其中$k\neq j$；

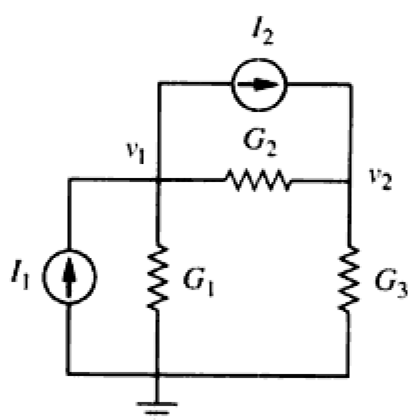
v_k = 节点k处的未知电压；

i_k=直接与节点k相连接的所有独立电流源的代数和，且认为流入该节点的电流为正。

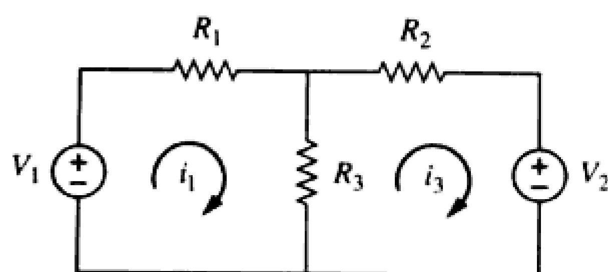
G称为电导矩阵（conductance matrix），**v**是输出矢量，**i**是输入矢量。求解式(3-22)就可以得到未知的节点电压。应该记住，式(3-22)仅对具有独立电流源和线性电阻的电路有效。

同样，当线性电阻电路中仅包含独立电压源时，可以用考察法得到网孔电流方程。为方便起见，将图3-17所示的电路重画于图3-26b。该电路有两个非参考节点，同时3.4节推导出的节点方程为：

$$\begin{bmatrix} R_1+R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2+R_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix} \tag{3-24}$$



（a）图 3-2 的电路



（b）图 3-17 的电路

图 3-26

由式(3-24)可以看出，各对角线元素为相关网孔中的电阻之和，而非对角线元素等于网孔1与网孔2公共电阻的相反数，式(3-24)右边各项为相关网孔中顺时针方向上所有独立电压源的代数和。

一般地，如果电路包含N个网孔，则其网孔电流方程可以用电阻表示为：

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1N} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{N1} & R_{N2} & \cdots & R_{NN} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \tag{3-25}$$

或简化为：

$$\boldsymbol{Ri}=\boldsymbol{v} \tag{3-26}$$

其中，

R_{kk}=网孔k中各电阻之和；

$R_{kj}=R_{jk}$=网孔k与网孔j的公共电阻之和的相反数，且$k\neq j$；

i_k=网孔k中顺时针方向的未知网孔电流；

v_k=网孔k中沿顺时针方向的所有独立电压源的代数和，认为电压升高为正。

R称为电阻矩阵（resistance matrix），**i**为输出矢量，**v**为输入矢量。求解式(3-25)就可以得到未知的网孔电流。

例题3-8 试采用观察法写出图3-27所示电路的节点电压矩阵方程。

解 图3-27所示电路包含四个非参考节点，所以需要四个节点方程。这就是说，电导矩阵**G**应为4×4矩阵，矩阵**G**的对角线元素如下，单位为西门子：

$$G_{11}=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=0.3,\quad G_{22}=\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{1}=1.325,\quad G_{33}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=0.5,\quad G_{44}=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=1.625$$

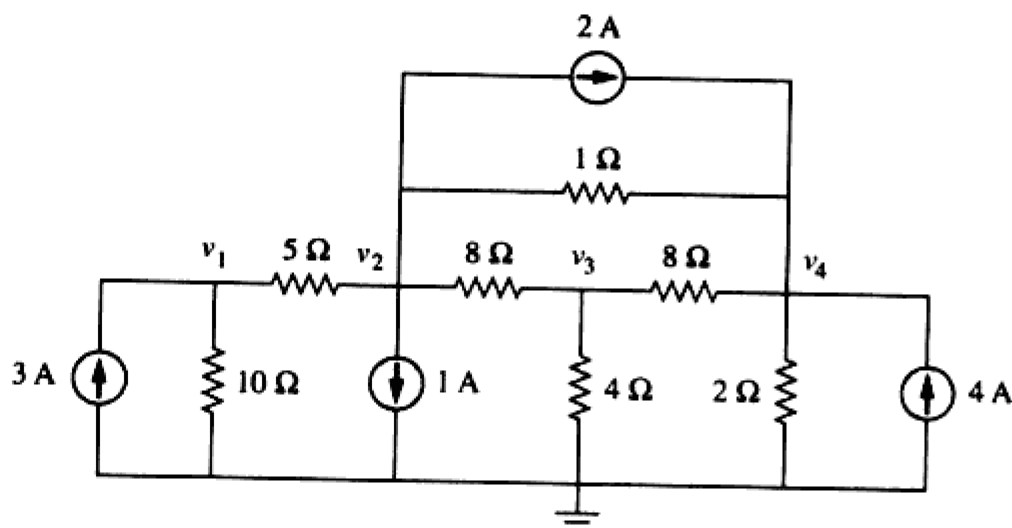


图 3-27 例题 3-8 的电路原理图

非对角线元素为：

$$G_{12} = -\frac{1}{5} = -0.2, \quad G_{13} = G_{14} = 0$$

$$G_{21} = -0.2, \quad G_{23} = -\frac{1}{8} = -0.125, \quad G_{24} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$G_{31} = 0, \quad G_{32} = -0.125, \quad G_{34} = -\frac{1}{8} = -0.125$$

$$G_{41} = 0, \quad G_{42} = -1, \quad G_{43} = -0.125$$

输入电流矢量i的各项如下，单位为安培：

$$i_1 = 3, \qquad i_2 = -1-2 = -3, \qquad i_3 = 0, \qquad i_4 = 2+4 = 6$$

因此，节点电压方程为：

$$\begin{bmatrix} 0.3 & -0.2 & 0 & 0 \\ -0.2 & 1.325 & -0.125 & -1 \\ 0 & -0.125 & 0.5 & -0.125 \\ 0 & -1 & -0.125 & 1.625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

可以利用MATLAB求解上式，得到节点电压v_1、v_2、v_3和v_4。

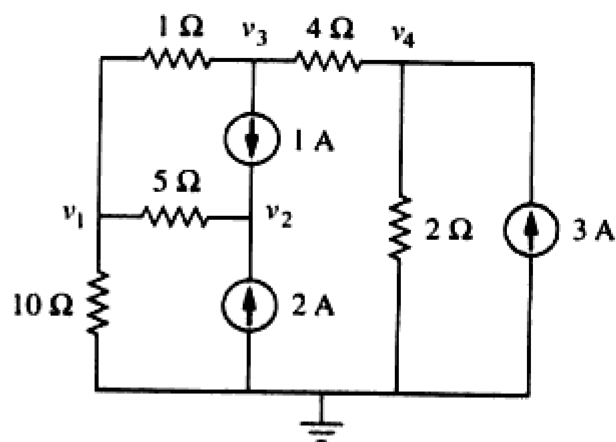


图 3-28 练习题 3-8 的电路原理图

练习题3-8 试利用观察法写出图3-28所示电路的节点电压方程。

答

$$\begin{bmatrix} 1.3 & -0.2 & -1 & 0 \\ -0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1.25 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.25 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

例题3-9 试利用观察法写出图3-29所示电路的网孔电流方程。

解 图中所示电路有5个网孔，所以电阻矩阵为5×5，对角线上各元素如下，单位为欧姆：

$$R_{11} = 5+2+2 = 9, \qquad R_{22} = 2+4+1+1+2 = 10$$

$$R_{33}=2+3+4=9,\qquad R_{44}=1+3+4=8,\qquad R_{55}=1+3=4$$

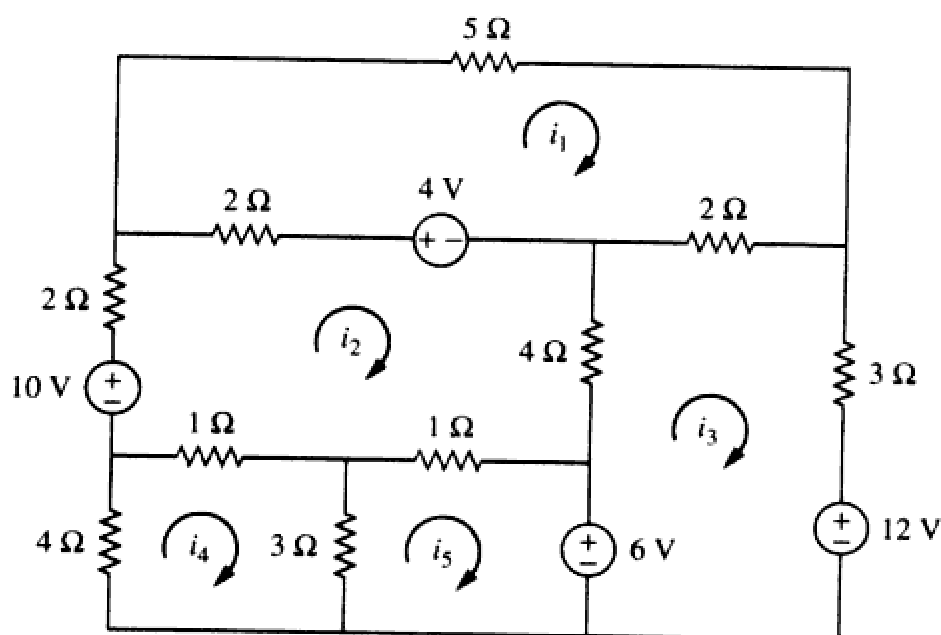


图 3-29 例题 3-9 的电路原理图

非对角线元素为：

$$R_{12}=-2,\ R_{13}=-2,\ R_{14}=0=R_{15}$$
$$R_{21}=-2,\ R_{23}=-4,\ R_{24}=-1,\quad R_{25}=-1$$
$$R_{31}=-2,\ R_{32}=-4,\ R_{34}=0=R_{35}$$
$$R_{41}=0,\ R_{42}=-1,\ R_{43}=0,\quad R_{45}=-3$$
$$R_{51}=0,\ R_{52}=-1,\ R_{53}=0,\quad R_{54}=-3$$

输入电压矢量v的各项如下，单位为伏特：

$$v_1=4,\ v_2=10-4=6$$
$$v_3=-12+6=-6,\ v_4=0,\ v_5=-6$$

所以，网孔电流方程为：

$$\begin{bmatrix} 9 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & -4 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -6 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

由此可以利用MATLAB求出网孔电流i_1、i_2、i_3、i_4和i_5。

练习题3-9 试利用观察法写出图3-30所示电路的网孔电流方程。

答

$$\begin{bmatrix} 170 & -40 & 0 & -80 & 0 \\ -40 & 80 & -30 & -10 & 0 \\ 0 & -30 & 50 & 0 & -20 \\ -80 & -10 & 0 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 0 & 80 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ -12 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

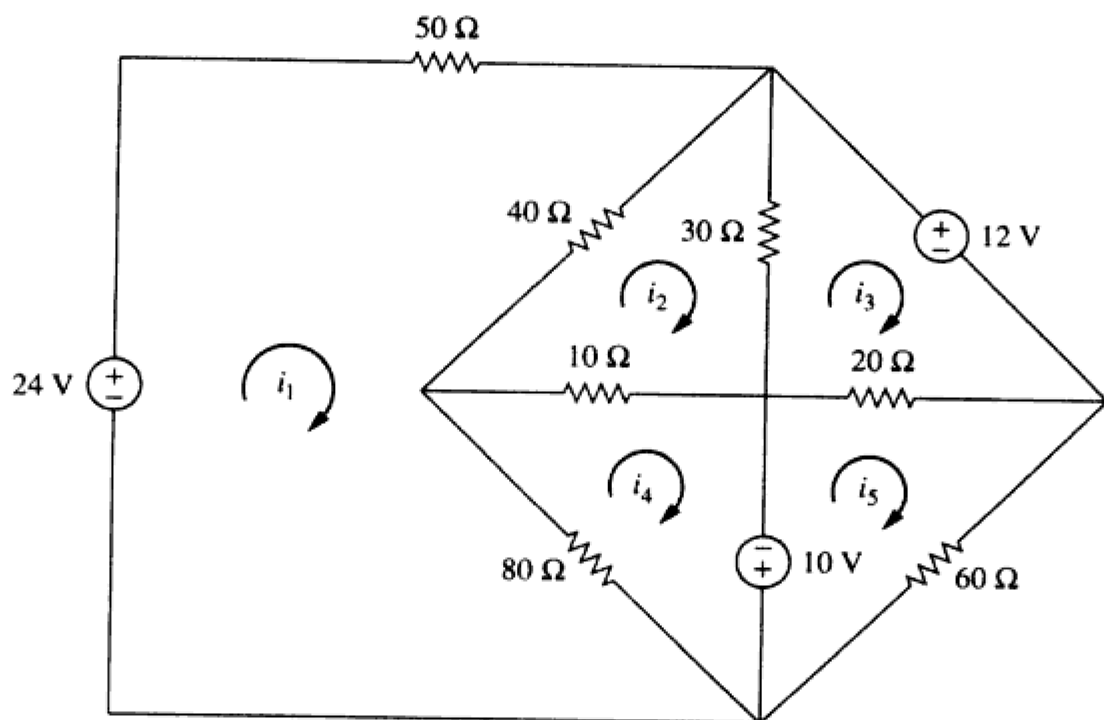


图 3-30 练习题 3-9 的电路原理图

3.7 节点分析法与网孔分析法的比较

节点分析法和网孔分析法为分析复杂电路网络提供了系统的解决方法。但是有人会问：在分析电路网络时，怎样才能知道采用哪一种方法更好、更有效呢？最佳方法的选取受到两个因素的制约。

第一因素是特定网络本身的特征。包含大量串联元件、电压源或超网孔的电路网络更适合采用网孔分析法，而包含较多并联元件、电流源或超节点的电路网络，则适合采用节点分析法。同样，节点数少于网孔数的电路网络则宜采用节点分析法；而网孔数少于节点数的电路则宜采用网孔分析法。选取哪种分析方法的关键在于采用所选定的方法得到的联立方程的个数更少。

第二个因素是所需要求的电路参数信息。如果要求节点电压，可能用节点分析法较为有利，如果要求支路电流或网孔电流，采用用网孔分析法则更好些。

同时掌握这两种分析方法是很有帮助的，其原因有二：首先，如果可能，可以用一种方法来验证另一种方法得到的结果正确与否；其次，由于这两种方法都有其各自的局限性，因此适用于特定问题的分析方法可能只是其中的一种方法。例如，对晶体管电路的分析只能采用网孔电流法，参见3.9节。但是由于不存在求解放大器端电压的直接方法，所以网孔分析法不适合用于求解运算放大器电路的分析问题，这一点将在第5章中予以讨论。另外，由于网孔分析法仅适用于平面电路网络，所以，对非平面网络只能采用节点分析法。同时节点分析法更易于通过编程用计算机求解，从而适合解决难以通过手算来分析的复杂电路网络问题。下面就介绍一种基于节点分析法的计算机软件包。

3.8 用 PSpice 软件包进行电路分析

PSpice是在阅读本书过程中要学习的用于电路分析的计算机软件工具。本节将举例说明如何利用Windows操作系统下的PSpice元件来分析已经学过的直流电路。

应该注意，只有在所有电路元件值都已知的条件下，PSpice才有助于确定支路电压和电流。

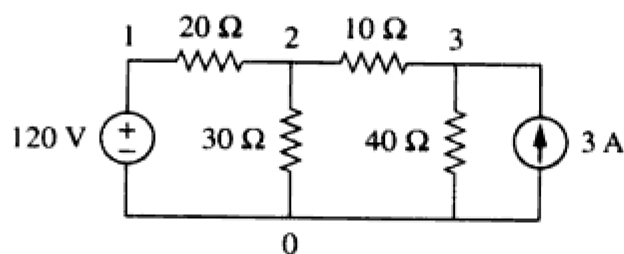


图 3-31 例题 3-10 的电路原理图

例题3-10 试利用PSpice求图3-31所示电路中的节点

电压。

解 首先，利用Schematics画出给定电路，可以画出如图3-32所示的电路原理图。因为要对电路作直流分析，所以应采用电压源VDC和电流源IDC。同时加入伪元件VIEWPOINTS显示所要求的节点电压。将电路画好后保存为文件exam310.sch，选择Analysis/Simulate程序运行PSpice，计算机对电路模拟后的结果就会显示在VIEWPOINT上，并存入输出文件exam310.out中，输出文件内容如下：

```
NODE  VOLTAGE    NODE  VOLTAGE   NODE  VOLTAGE
 (1)  120.0000   (2)   81.2900   (3)   89.0320
```

表明$V_1=120$ V，$V_2=81.29$ V，$V_3=89.032$ V。

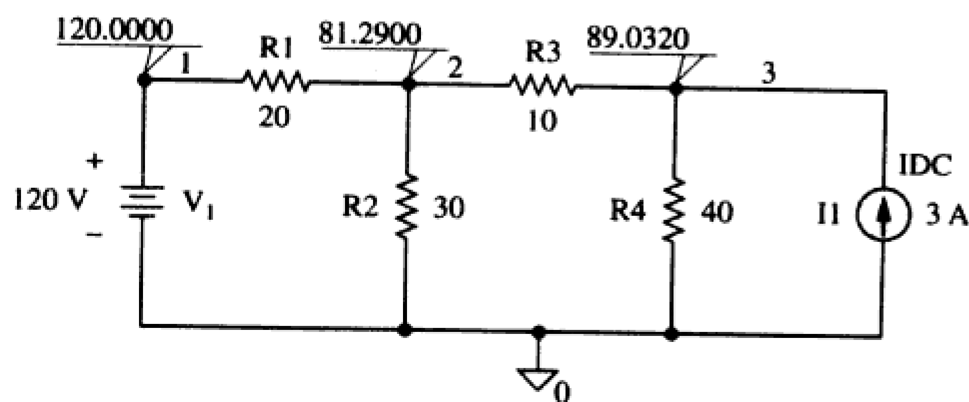


图 3-32 利用 PSpice 画出的图 3-31 所示电路的原理图

练习题3-10 试利用PSpice求图3-33所示电路的节点电压。

答 $V_1=-40$ V，$V_2=57.14$ V，$V_3=200$ V。

例题3-11 试确定图3-34所示电路中的电流i_1、i_2和i_3。

解 利用Schematics画出的电路原理图如图3-35所示（图3-35所示原理图中包含输出结果，表明该图是仿真结束后显示在屏幕上的原理图）。图3-35中的电压控制电压源E1的输入为4 Ω电阻两端的电压，其增益设定为3。为显示所求的电流，在相应的支路中插入伪元件IPROBES。将该电路原理图保存在文件exam311.sch中并运行Analysis/Simulate程序，模拟结果显示于IPROBES上并保存在输出文件exam.out中，由输出文件或IPROBES，可以得到$i_1=i_2=1.333$ A，$i_3=2.667$ A。

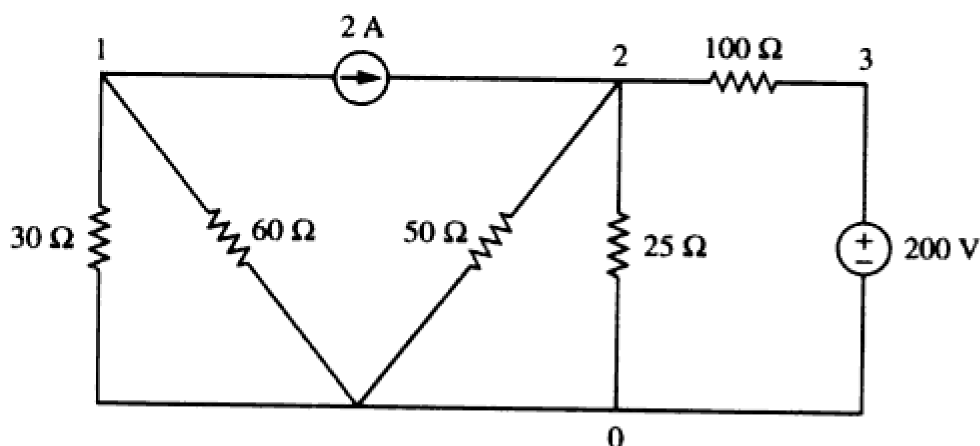


图 3-33 练习题 3-10 的电路原理图

练习题3-11 试利用PSpice确定图3-36所示电路中的电流i_1、i_2和i_3。

答 $i_1=-0.4286$ A，$i_2=2.286$ A，$i_3=2$ A。

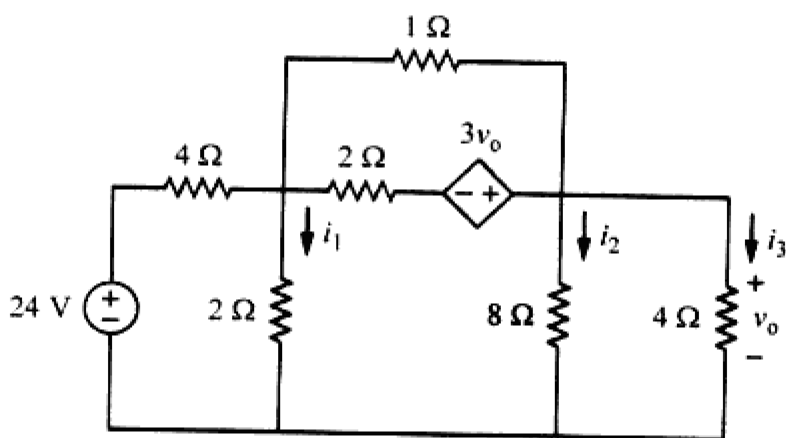


图 3-34　例题 3-11 的电路原理图

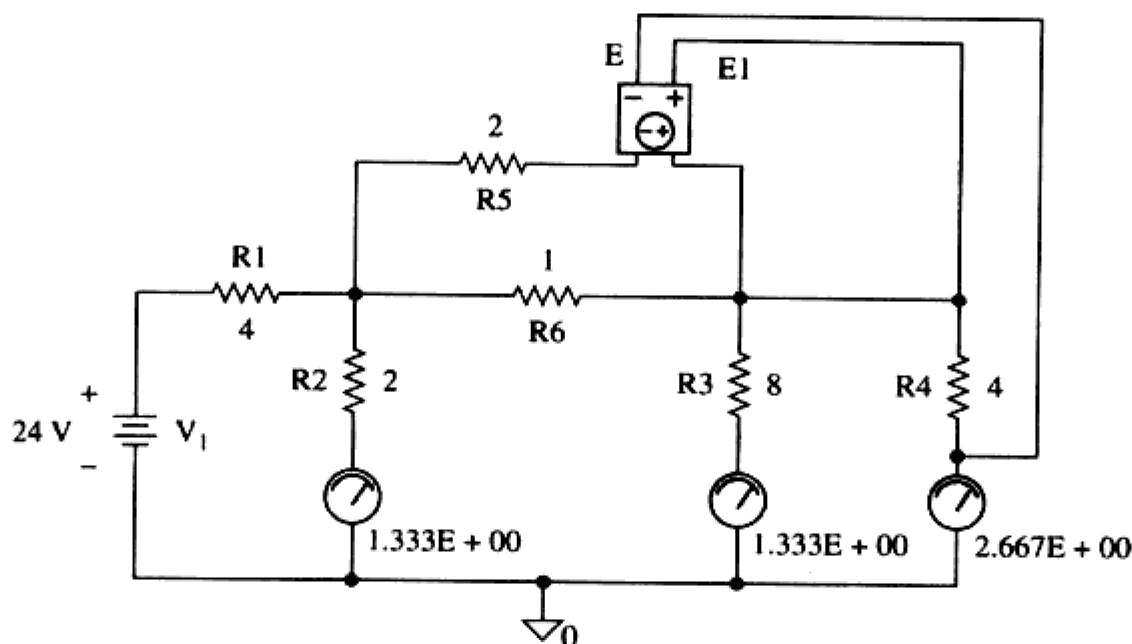


图 3-35　图 3-34 所示电路的仿真原理图

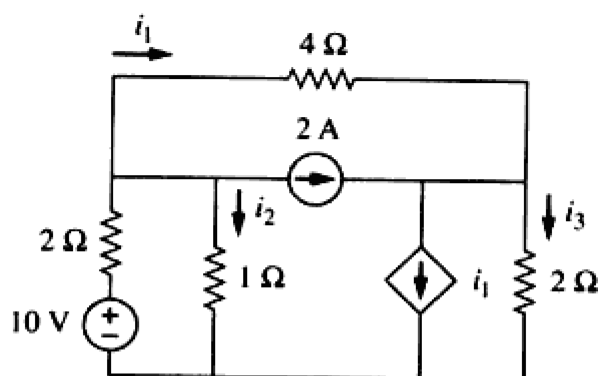


图 3-36　练习题 3-36 的电路原理图

3.9　†应用：直流晶体管电路

许多人都使用过电子产品，并且具有一定的使用个人计算机的经验。这些电子产品以及计算机中集成电路的基本元件是大家熟知的有源三端器件——晶体管（transistor），工程技术人员必须掌握晶体管的相关知识和使用方法才能开始进行电路设计。

图3-37给出了几种不同的商用晶体管。晶体管的基本类型有两种：双极型晶体管（bipolar junction transistor，BJT）和场效应晶体管（field-effect transistor，FET）。本节仅讨论其中第一种类型的晶体管，即至今仍经常使用的双极型晶体管。目的在于对BJT有足够的了解，从而能够应用本章介绍的方法分析直流晶体管电路。

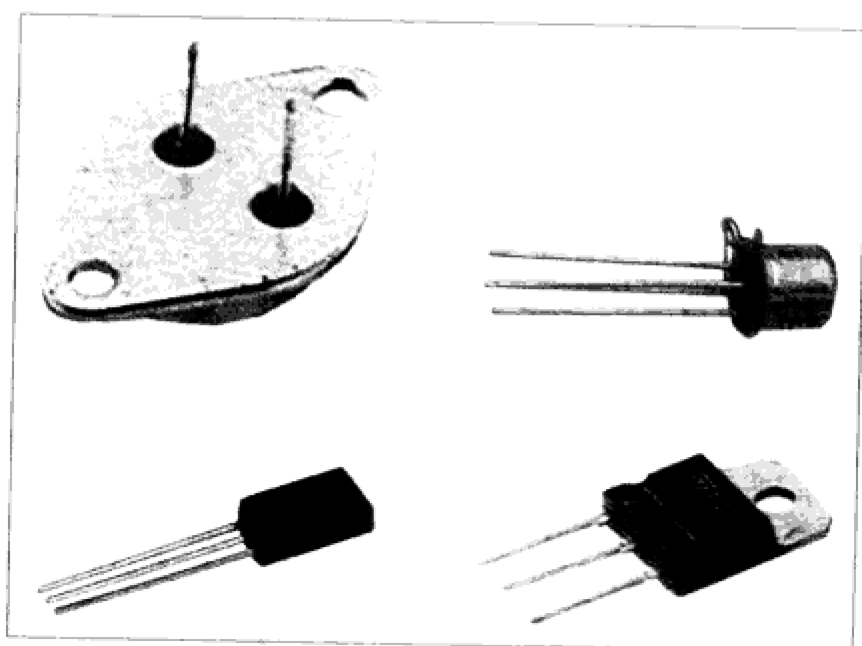


图 3-37 几种不同类型的晶体管（Tech America）

历史人物



美国朗讯科技公司/贝尔实验室许可

威廉·肖克莱（William Schockley，1910—1989），约翰·巴丁（John Bardeen，1908—1991）、沃尔特·布拉顿（Walter Brattain，1902—1987），共同发明了晶体管。

在从“工业时代”向“工程师时代”过渡的过程中，任何事物产生的影响都不及晶体管的影响，肖克莱博士、巴丁博士和布拉顿博士也不会想到它们会对历史产生如此不可思议的影响。在贝尔实验室工作期间，他们成功地演示了巴丁博士与布拉顿博士于1947年发明的点接触晶体管，以及肖克莱博士于1948年设计的结型晶体管，并于1951年顺利投产。

有趣的是，至今应用最广泛的场效应晶体管的思想是由美国的德国移民J.E.Lilienfel于1925—1928年提出的，这可以由其申请的关于场效应晶体管的专利得到证实。然而不幸的是，实现这种器件的技术直到1954年肖克莱场效应晶体管成为现实后才如愿以偿，试想如果提前30年就制造出晶体管，当今世界又是一番何等景象。

为了表彰发明晶体管的杰出贡献，肖克莱博士、巴丁博士和布拉顿博士于1956年被授予诺贝尔物理学奖，其中巴丁博士是唯一一位两次获得诺贝尔物理学奖的科学家，在此之后他因为在伊利诺伊大学（University of Illinois）工作期间在超导研究方面取得的重大成就而第二次获奖。

双极型晶体管分为两种类型：npn型与pnp型，电路符号如图3-38所示。每一种器件都有三个极，分别命名为发射极（E）、基极（B）和集电极（C）。对于npn型晶体管，图3-39给出来其电流流向和电压极性。对图3-39a应用KCL，得到：

$$\boxed{I_E = I_B + I_C} \tag{3-27}$$

其中，I_E、I_C和I_B分别为晶体管的发射极电流、集电极电流和基极电流。类似地，对图3-39b应用KVL，可得：

$$V_{CE} + V_{EB} + V_{BC} = 0 \tag{3-28}$$

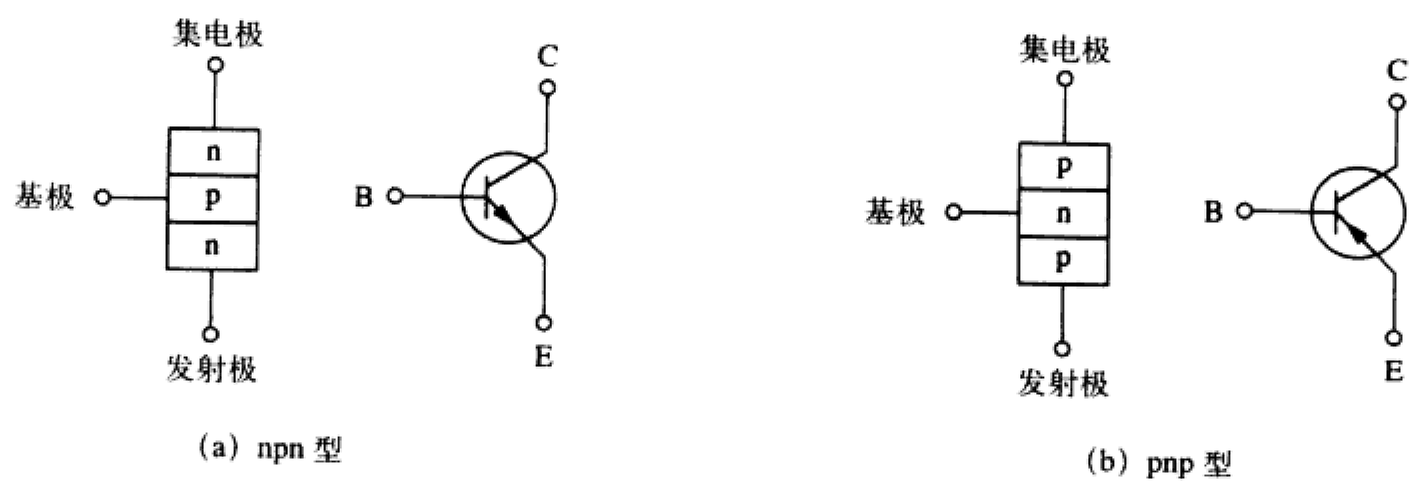


图 3-38 两类双极型晶体管及其电路符号

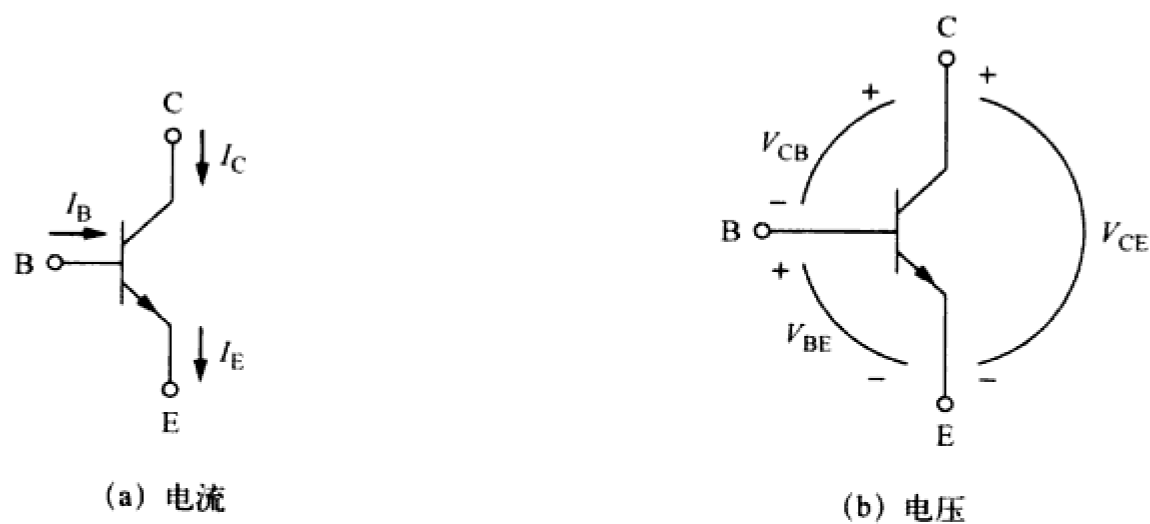


图 3-39 npn 型晶体管的电极参量

其中，V_{CE}、V_{EB}和V_{BC}分别为晶体管的集电极—发射极电压、发射极—基极电压和基极—集电极电压。双极型晶体管有三种工作模式：放大、截止和饱和。当晶体管处于放大工作模式时，V_{BE}的典型值约为0.7 V，并且：

$$I_C = \alpha I_E \tag{3-29}$$

其中，α称为*共基极电流增益*（common-base current gain）。在式(3-29)中，α表示由发射极注入的电子被集电极收集的比例。同样，有：

$$\boxed{I_C = \beta I_B} \tag{3-30}$$

其中，β称为*共发射极电流增益*（common-emiter current gain）。α与β是给定晶体管的特性参数，通常假定为一个常量，α的典型取值范围在0.98～0.999之间，β的典型取值范围在50～1000之间。由式(3-27)～式(3-30)可以证明：

$$I_E = (1+\beta)\ I_B \tag{3-31}$$

且

$$\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha} \tag{3-32}$$

上述等式表明，当双极型晶体管工作在放大模式时，可以建模为一个受控源——电流控制电流源。因此，在进行电路分析时，可以用图3-40b所示的直流等效模型来代替图3-40a所示的npn型晶体管。由于式(3-32)中的β通常较大，所以用一个很小的基极电流就可以控制输出电路中很

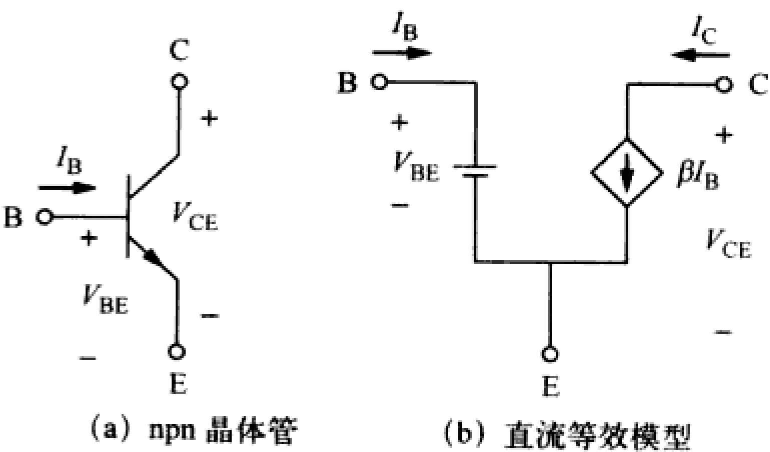


图 3-40 npn 晶体管及其直流等效模型

大的电流，也就是说，双极型晶体管可以用作放大器，既提供电流增益又提供电压增益，这类放大器可用于为诸如扬声器和控制电机等换能器提供足够大的功率。

实际上，对晶体管电路的研究推动着对受控源的研究。

通过下面的例题应该注意到，由于晶体管各极之间存在电位差，所以不能直接利用节点分析法来分析晶体管电路，只有用晶体管的等效模型取代晶体管之后，才能利用节点分析法求解电路参数。

例题3-12 试求图3-41所示晶体管电路中的I_B、I_C和v_o。假定晶体管工作在放大模式，并且$\beta=50$。

解 对输入回路应用KVL，得到：

$$-4+I_B\ (20\times10^3)\ +V_{BE}=0$$

由于在放大模式下，$V_{BE}=0.7\text{ V}$，所以：

$$I_B=\frac{4-0.7}{20\times10^3}=165\mu\text{A}$$

而

$$I_C=\beta I_B=50\times165\ \mu\text{A}=8.25\text{ mA}$$

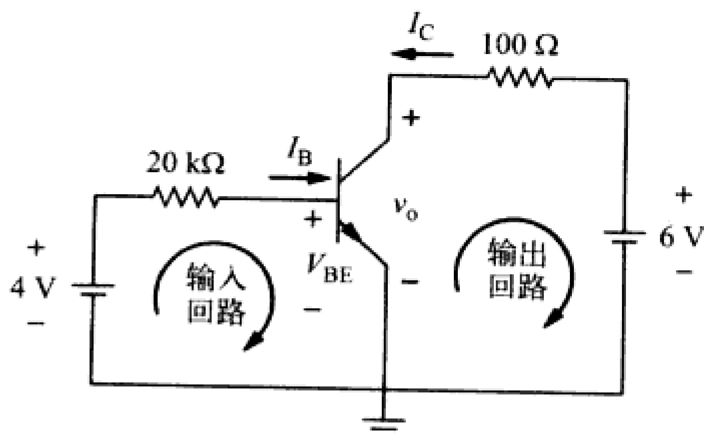


图 3-41 例题 3-12 的电路原理图

对输出回路应用KVL，得到：

$$-v_o-100\ I_C+6=0$$

即

$$v_o=6-100\ I_C=6-0.825=5.175\text{ V}$$

注意，本题中$v_o=V_{CE}$。

练习题3-12 在如图3-42所示的晶体管电路中，设$\beta=100$，$V_{BE}=0.7\text{ V}$，试求v_o与V_{CE}。

答 2.876 V，1.984 V。

例题3-13 在如图3-43所示的双极型晶体管电路中，设$\beta=150$且$V_{BE}=0.7\text{ V}$，试求v_o。

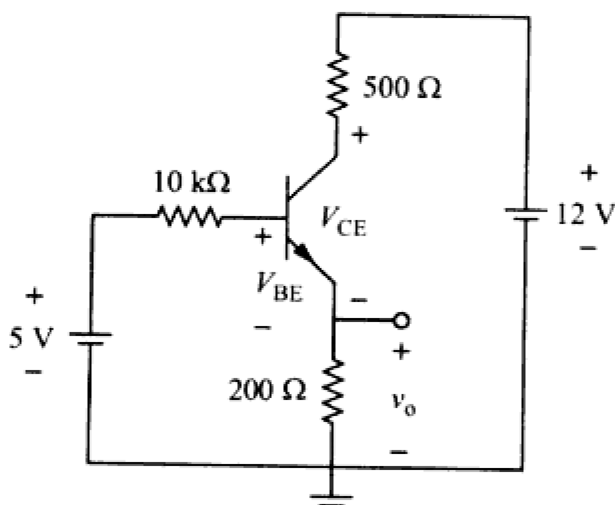


图 3-42 练习题 3-12 的电路原理图

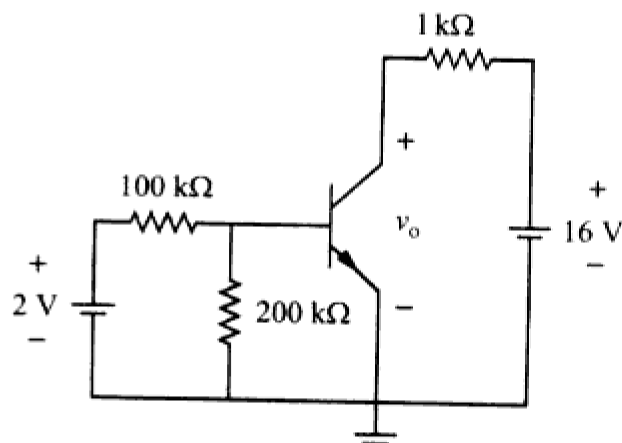


图 3-43 练习题 3-13 的电路原理图

解

（1）**明确**问题。本例题所要分析的电路已经很清楚，所要解决的问题也已经很明确，不存在要问的其他问题。

（2）**表述**对问题的理解。本例题要求解图3-43所示电路的输出电压，该电路包含一个理想晶体管，其$\beta=150$且$V_{BE}=0.7\text{ V}$。

（3）确定**可选**解。可以采用网孔分析法求解v_o，也可以将晶体管用其等效电路取代并采用节点分析求解。下面就采用这两种方法进行分析，并相互验证结果的正确性，第三种验证方法是利用PSpice对等效电路进行模拟分析。

(4) **尝试问题的不同解法。**

方法1：对于图3-44a中的第一个回路有，

$$-2+100\text{k}\,I_1+200\text{k}\,(I_1-I_2)=0 \qquad \text{即 } 3I_1-2I_2=2\times10^{-5} \tag{3-13-1}$$

对于回路2有，

$$200\text{k}\,(I_2-I_1)+V_{BE}=0 \qquad \text{即} -2I_1+2I_2=-0.7\times10^{-5} \tag{3-13-2}$$

这样就得到包含两个未知变量的方程，可用于求解I_1与I_2。将式(3-13-1)与式(3-13-2)相加得到：

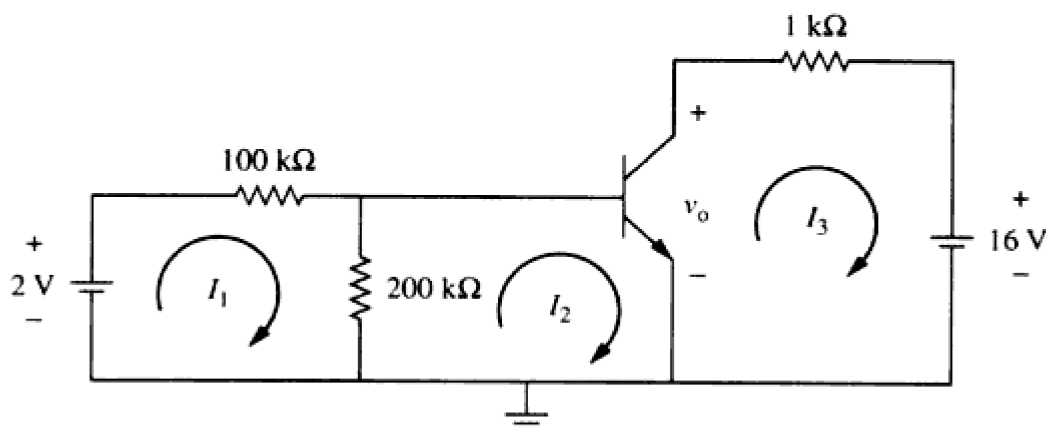
$$I_1=1.3\times10^{-5}\,\text{A} \qquad \text{且 } I_2=(-0.7+2.6)\,10^{-5}/2=9.5\,\mu\text{A}$$

由于$I_3=-150I_2=-1.425$ mA，所以利用回路3可以求出v_o：

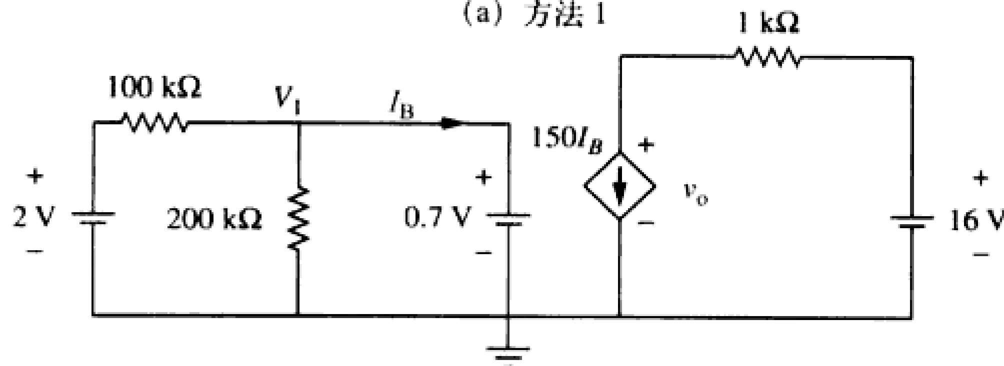
$$-v_o+1\,\text{k}\,I_3+16=0$$

即

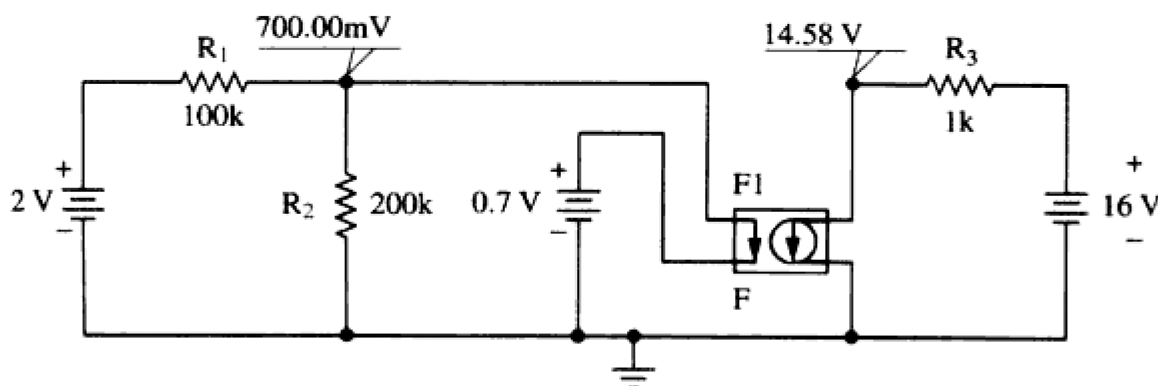
$$v_o=-1.425+16=\mathbf{14.575\ V}$$



(a) 方法1



(b) 方法2



(c) 方法3

图 3-44 求解例题 3-13 的方法

方法2：将晶体管用其等效电路取代后得到如图3-44b所示的电路。可以利用节点分析法求解v_o：在节点1处：$V_1=0.7$ V

$$(0.7-0.2)/100\text{k}+0.7/200\text{k}+I_B=0 \qquad \text{即}I_B=9.5\,\mu\text{A}$$

在节点2处：

$$150I_B + (v_o-16)/1k = 0 \qquad 即 v_o = 16-150\times10^3\times9.5\times10^{-6} = \mathbf{14.575\ V}$$

(5) **评价**得到的结果，对答案进行验证，可以利用PSpice做进一步的检验（方法3），得到如图3-44c所示的结果。

(6) 对结果是否**满意**？显然，已经得到可信度很高的满意结果，可以将上述求解过程作为本题的答案。

练习题3-13 在图3-45所示的晶体管电路中，$\beta=80$，$V_{BE}=0.7\ V$，试求v_o与I_o。

答 3 V，150 μA。

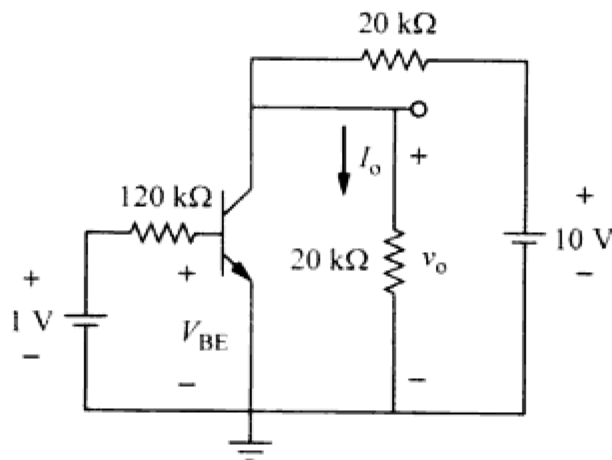


图 3-45 练习题 3-13 的电路原理图

3.10 本章小结

(1) 节点分析法是基尔霍夫电流定律在非参考节点上的应用（该分析方法既适用于平面电路又适用于非平面电路），分析结果用节点电压表示。通过求解联立方程组就可以得到各节点的电压。

(2) 超节点由与电压源（独立源或受控源）连接的两个非参考节点组成。

(3) 网孔分析法是基尔霍夫电压定律在平面电路中的应用，分析结果用网孔电流表示。通过求解联立方程组就可以得到各网孔电流。

(4) 超网孔由具有公共电流源（独立源或受控源）的两个网孔所组成。

(5) 当电路中节点方程数少于网孔方程数时，通常采用节点分析法，当电路中网孔方程数少于节点方程数时，通常采用网孔分析法。

(6) 可以利用PSpice软件对电路进行模拟分析。

(7) 可以利用本章所介绍的各种方法进行直流晶体管电路的分析。

复习题

3-1 对图3-46所示电路的节点1应用KCL得到：

(a) $2+\frac{12-v_1}{3}=\frac{v_1}{6}+\frac{v_1-v_2}{4}$

(b) $2+\frac{v_1-12}{3}=\frac{v_1}{6}+\frac{v_2-v_1}{4}$

(c) $2+\frac{12-v_1}{3}=\frac{0-v_1}{6}+\frac{v_1-v_2}{4}$

(d) $2+\frac{v_1-12}{3}=\frac{0-v_1}{6}+\frac{v_2-v_1}{4}$

3-2 对图3-46所示电路的节点2应用KCL得到：

(a) $\frac{v_2-v_1}{4}+\frac{v_2}{8}=\frac{v_2}{6}$

(b) $\frac{v_1-v_2}{4}+\frac{v_2}{8}=\frac{v_2}{6}$

(c) $\frac{v_1-v_2}{4}+\frac{12-v_2}{8}=\frac{v_2}{6}$

(d) $\frac{v_2-v_1}{4}+\frac{v_2-12}{8}=\frac{v_2}{6}$

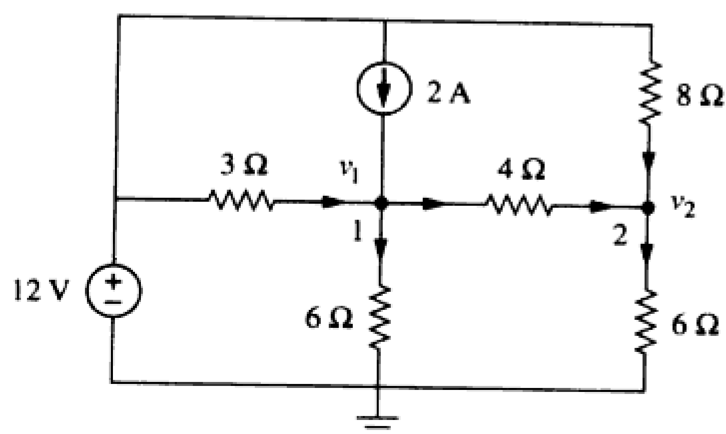


图 3-46 复习题 3-1 和 3-2 的电路原理图

3-3 在图3-47所示电路中，v_1与v_2之间的关系为：

(a) $v_1 = 6i + 8 + v_2$ (b) $v_1 = 6i - 8 + v_2$

(c) $v_1 = -6i + 8 + v_2$ (d) $v_1 = -6i - 8 + v_2$

3-4 在图3-47所示电路中，电压v_2为：

(a) −8 V (b) −1.6 V

(c) 1.6 V (d) 8 V

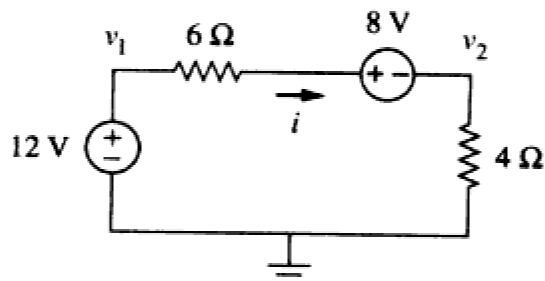


图 3-47 复习题 3-3 和 3-4 的电路原理图

3-5 图3-48所示电路中的电流i为：

(a) −2.667 A (b) −0.667 A

(c) 0.667 A (d) 2.667 A

3-6 图3-48所示电路的回路电流方程为：

(a) $-10 + 4i + 6 + 2i = 0$

(b) $10 + 4i + 6 + 2i = 0$

(c) $10 + 4i - 6 + 2i = 0$

(d) $-10 + 4i - 6 + 2i = 0$

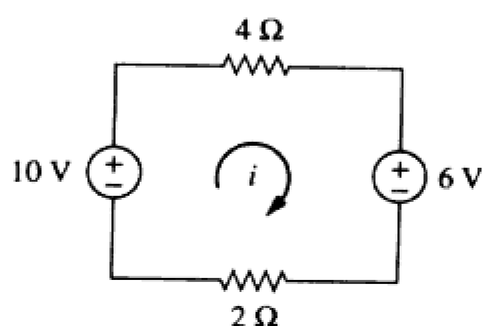


图 3-48 复习题 3-5 和 3-6 的电路原理图

3-7 在图3-49所示电路中，电流i_1为：

(a) 4 A (b) 3 A (c) 2 A (d) 1 A

3-8 在图3-49所示电路中，电流源两端的电压v为：

(a) 20 V (b) 15 V (c) 10 V (d) 5 V

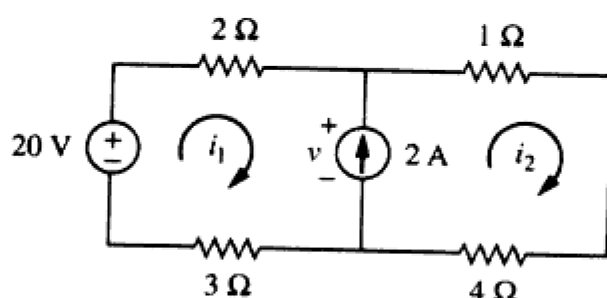


图 3-49 复习题 3-7 和 3-8 的电路原理图

3-9 PSpice软件中，电流控制电压源的名称为：

(a) EX (b) FX (c) HX (d) GX

3-10 以下关于伪元件IPROBE的叙述中哪些是不正确的？

(a) 它必须串联连接

(b) 它绘制出支路电流的波形

(c) 它显示其所连接支路的电流

(d) 并联连接后，可显示电压

(e) 它只用于直流分析

(f) 它并不对应于某个具体电路元件

答案 3-1 a；3-2 c；3-3 a；3-4 c；3-5 c；3-6 a；3-7 d；3-8 b；3-9 c；3-10 b，d。

习题

3.2 节与 3.3 节

3-1 试利用节点分析法确定图 3-50 所示电路中的I_x。

3-2 试求图3-51所示电路中的v_1与v_2。

3-3 试求图3-52所示电路中的电流$I_1 \sim I_4$以及电压v_o。

3-4 试计算图3-53所示电路中的电流$I_1 \sim I_4$。

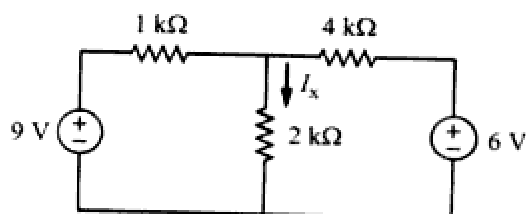


图 3-50 习题 3-1 的电路原理图

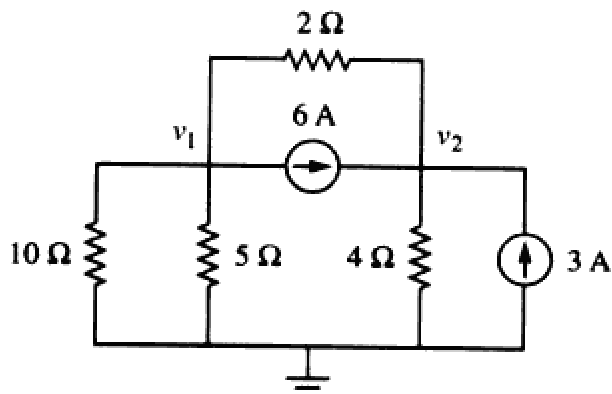


图 3-51 习题 3-2 的电路原理图

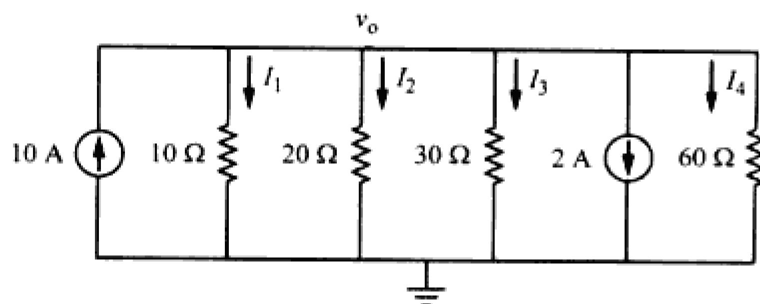


图 3-52 习题 3-3 的电路原理图

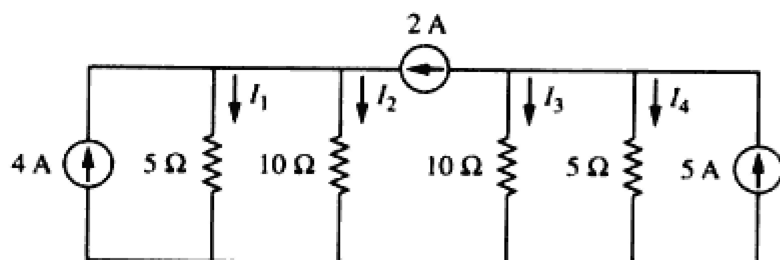


图 3-53 习题 3-4 的电路原理图

3-5 试求图3-54所示电路中的v_o。

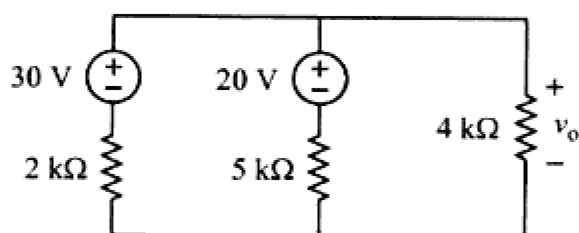


图 3-54 习题 3-5 的电路原理图

3-6 试利用节点分析法计算图3-55所示电路中的v_o。

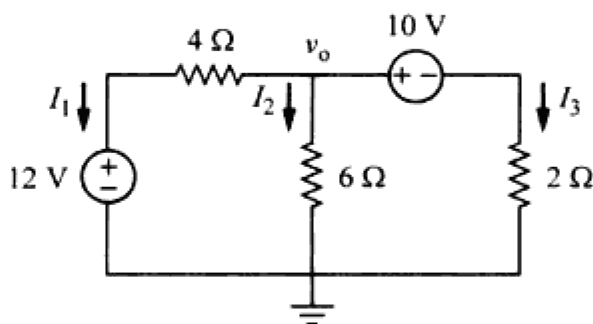


图 3-55 习题 3-6 的电路原理图

3-7 试利用节点分析法计算图3-56所示电路中的V_x。

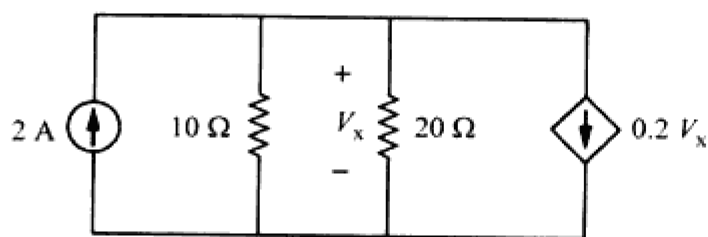


图 3-56 习题 3-7 的电路原理图

3-8 试利用节点分析法计算图3-57所示电路中的v_o。

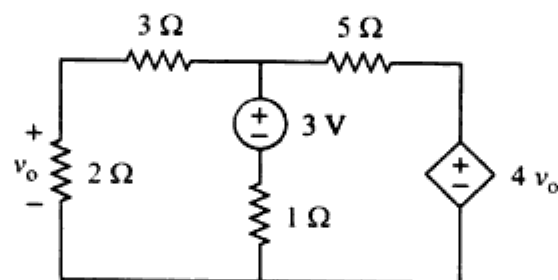


图 3-57 习题 3-8 的电路原理图

3-9 试利用节点分析法计算图3-58所示电路中的I_b。

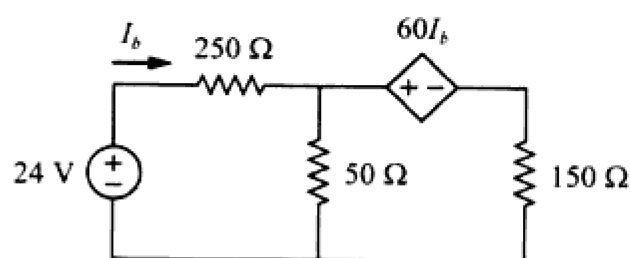


图 3-58 习题 3-9 的电路原理图

3-10 试求图3-59所示电路中的I_o。

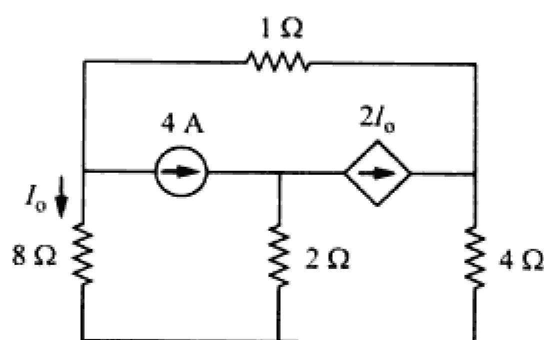


图 3-59 习题 3-10 的电路原理图

3-11 试求图3-60所示电路中的V_o以及所有电阻消耗的功率。

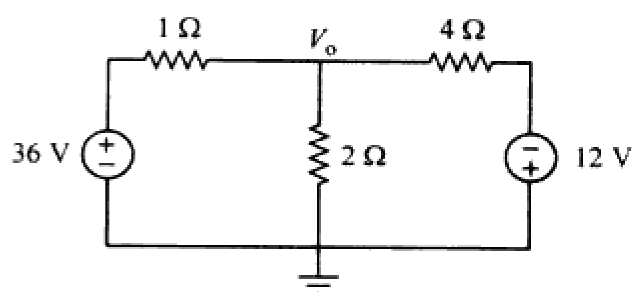


图 3-60 习题 3-12 的电路原理图

3-12 试利用节点分析法确定图3-61所示电路中的V_o。

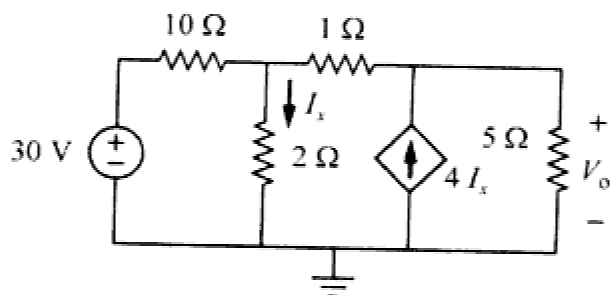


图 3-61 习题 3-13 的电路原理图

3-13 试利用节点分析法计算图3-62所示电路中的v_1与v_2。

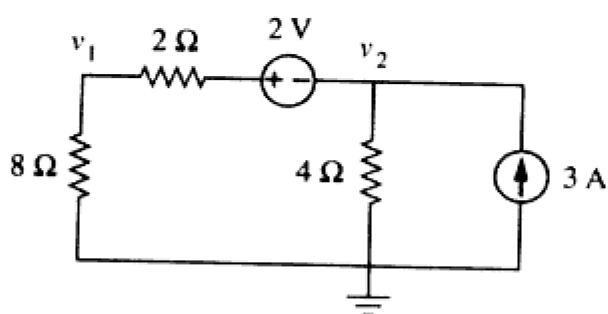


图 3-62 习题 3-13 的电路原理图

3-14 试利用节点分析法计算图3-63所示电路中的v_o。

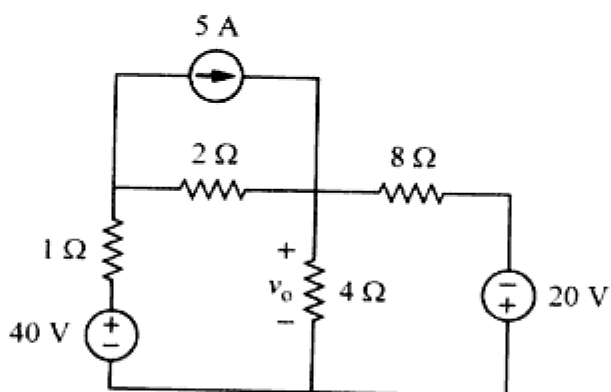


图 3-63 习题 3-14 的电路原理图

3-15 试利用节点分析法计算图3-64所示电路中的i_o，并确定各电阻消耗的功率。

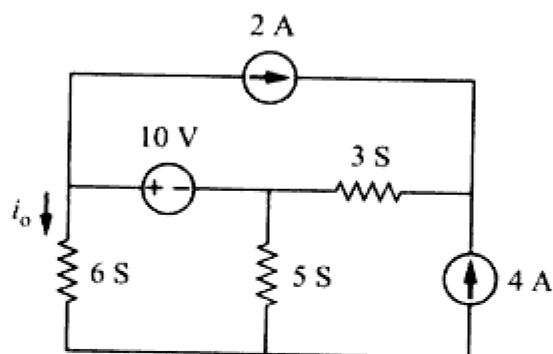


图 3-64 习题 3-15 的电路原理图

3-16 试利用节点分析法确定图3-65所示电路中的$v_1 \sim v_3$。

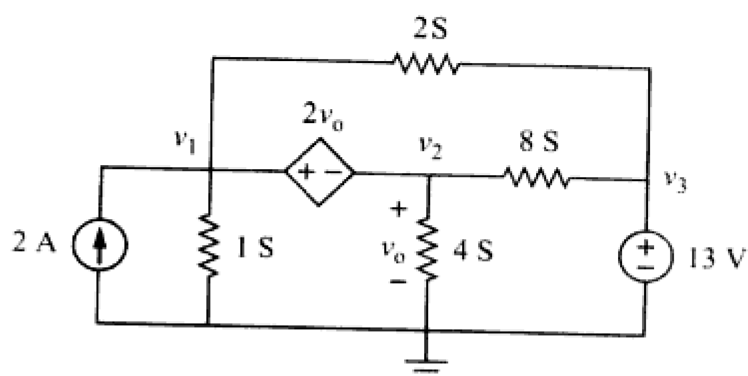


图 3-65 习题 3-16 的电路原理图

3-17 试利用节点分析法计算图3-66电路中的i_o。

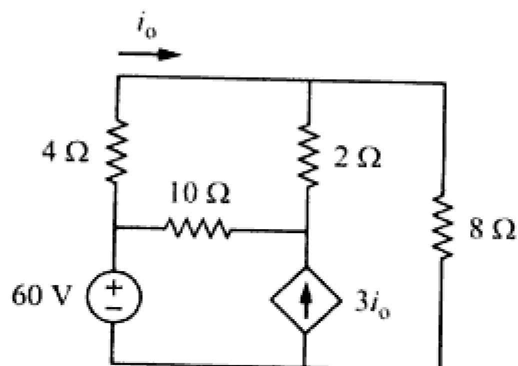


图 3-66 习题 3-17 的电路原理图

3-18 试利用节点分析法确定图3-67电路中的各节点电压。

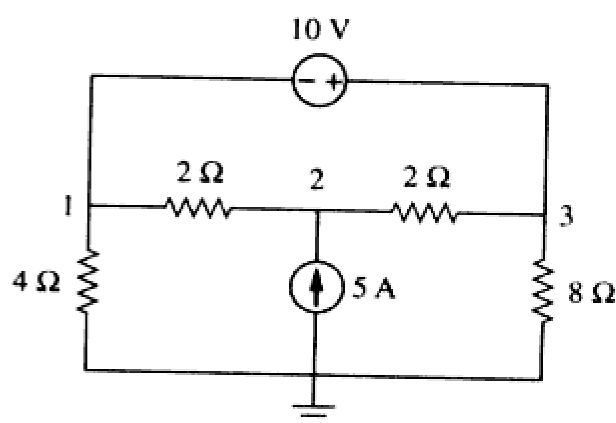


图 3-67 习题 3-18 的电路原理图

3-19 试利用节点分析法计算图3-68所示电路中的v_1、v_2和v_3。
ML

3-20 试利用节点分析法计算图3-69所示电路中的v_1、v_2和v_3。

3-21 试利用节点分析法计算图3-70所示电路中的v_1与v_2。

3-22 试确定图3-71所示电路中的v_1与v_2。

3-23 试利用节点分析法求图3-72所示电路中的V_o。

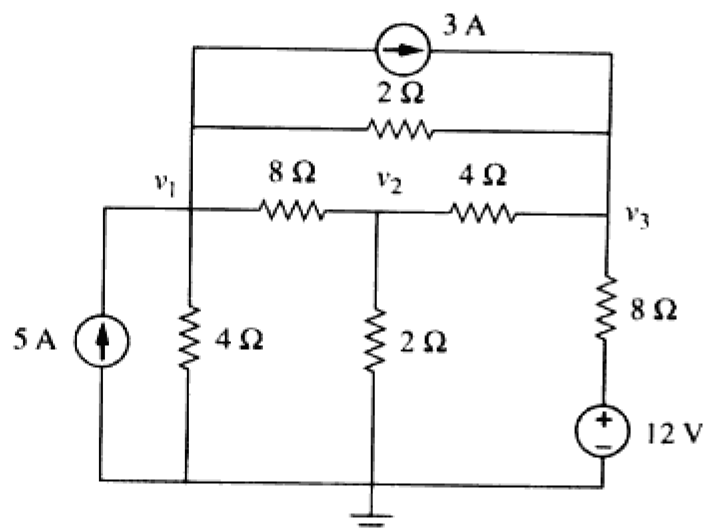


图 3-68 习题 3-19 的电路原理图

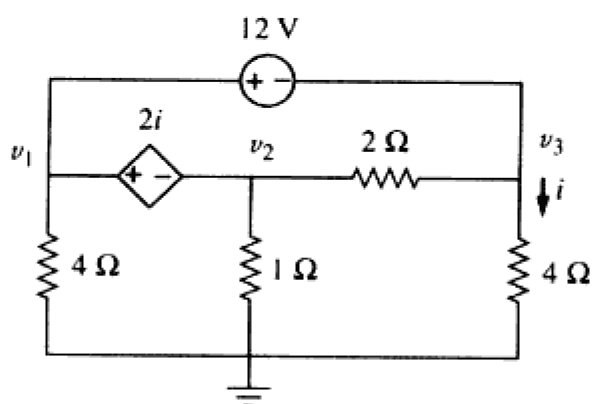


图 3-69 习题 3-20 的电路原理图

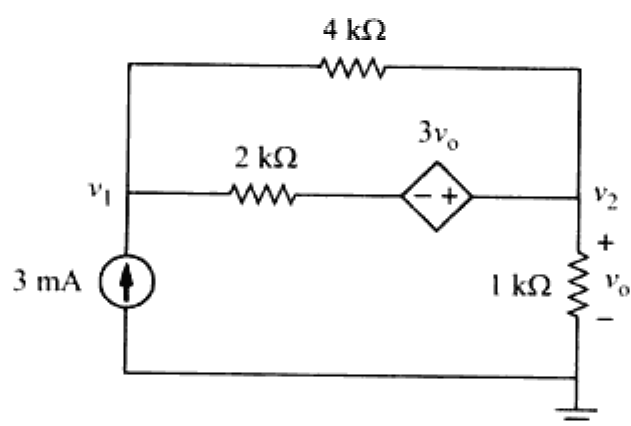


图 3-70 习题 3-21 的电路原理图

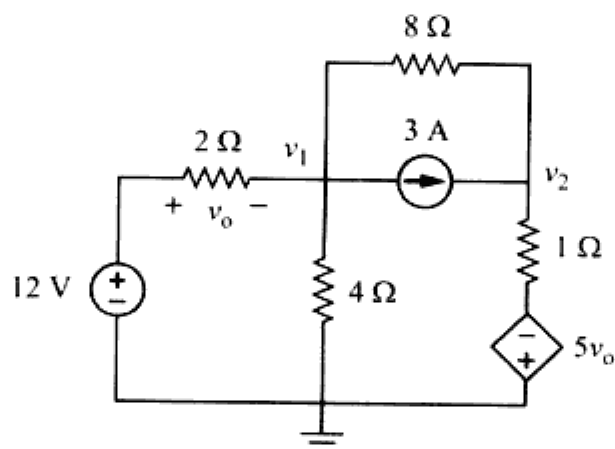


图 3-71 习题 3-22 的电路原理图

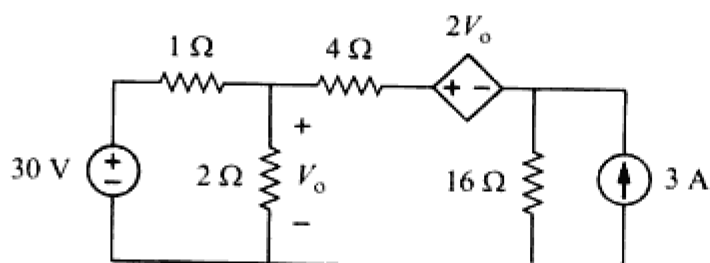


图 3-72 习题 3-23 的电路原理图

3-24 试利用节点分析法和MATLAB计算图3-73所示电路中的V_o。

ML

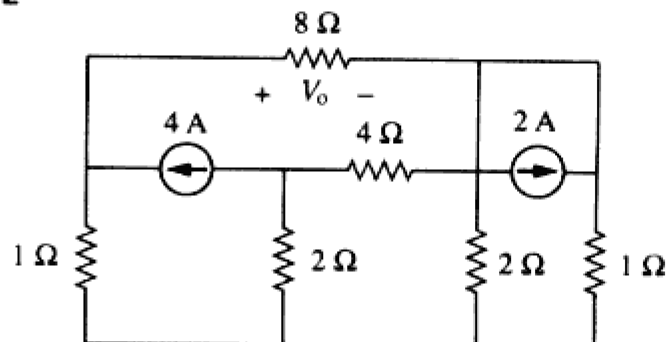


图 3-73 习题 3-24 的电路原理图

3-25 试利用节点分析法和MATLAB确定图3-74所示电路中的各个节点电压。

ML

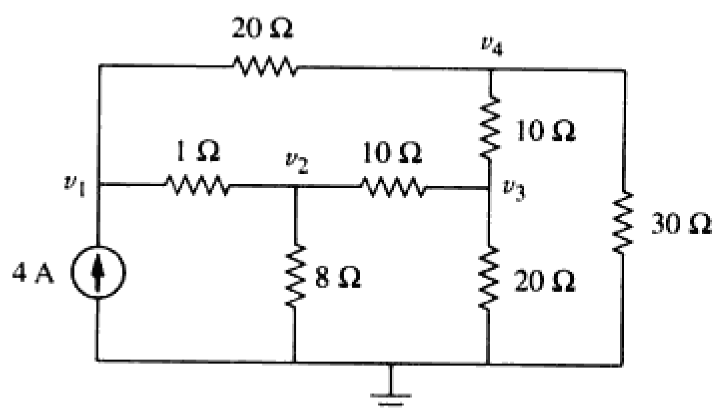


图 3-74 习题 3-25 的电路原理图

3-26 试计算图3-75所示电路中的节点电压v_1、v_2与v_3。

ML

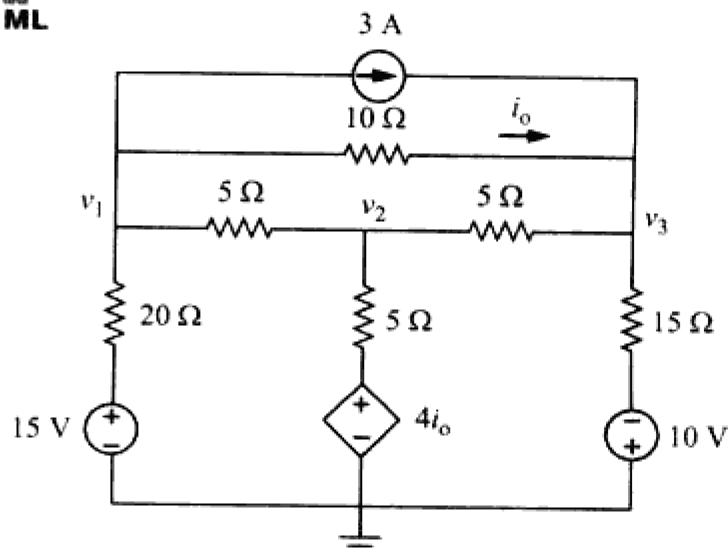


图 3-75 习题 3-26 的电路原理图

*3-27 试利用节点分析法确定图3-76所示电路中的电压v_1、v_2与v_3。
ML

*3-28 试利用MATLAB计算图3-77所示电路中节点a、b、c、d的电压。
ML

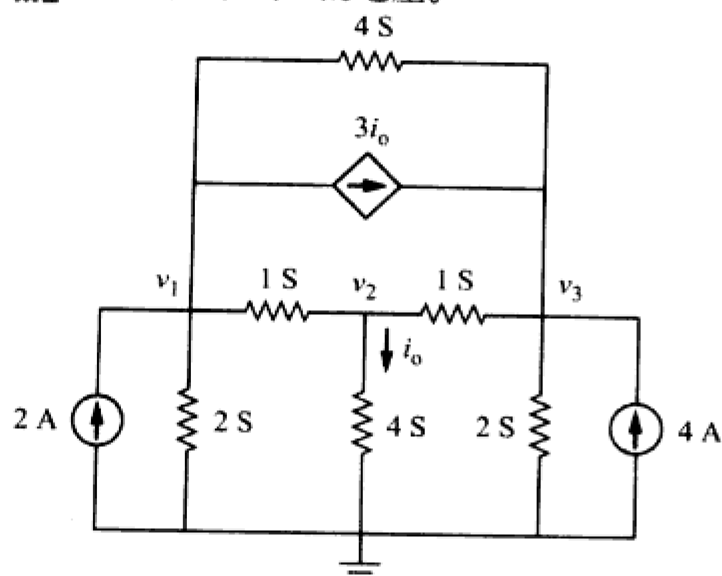


图 3-76 习题 3-27 的电路原理图

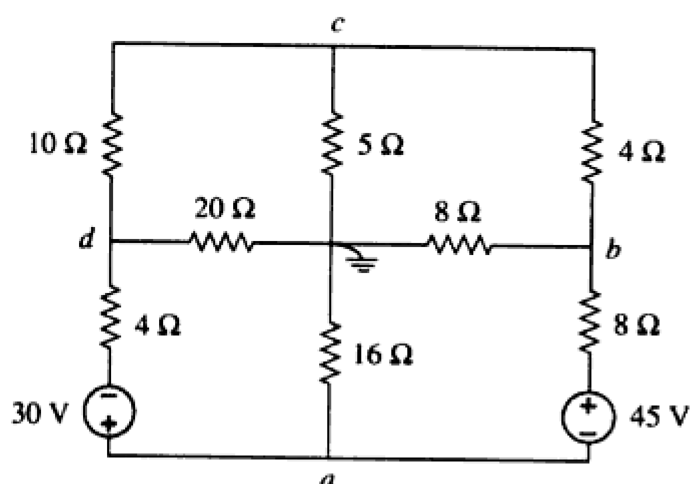


图 3-77 习题 3-28 的电路原理图

3-29 试利用MATLAB计算图3-78所示电路中的节点电压。
ML

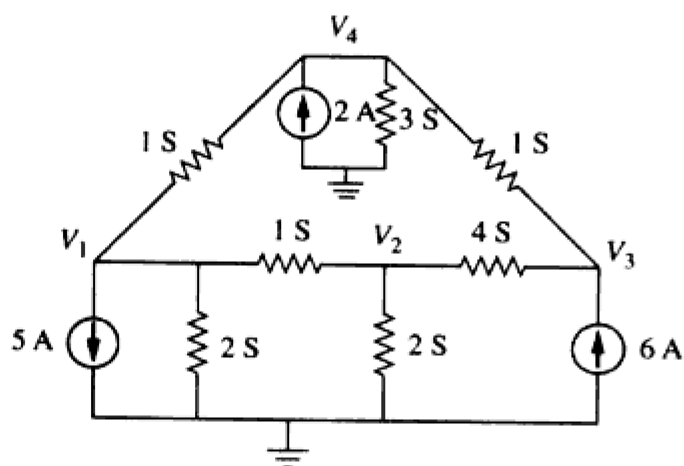


图 3-78 习题 3-29 的电路原理图

3-30 试利用节点分析法图3-79所示电路中的v_o与I_o。

3-31 试求图3-80所示电路中的节点电压。
ML

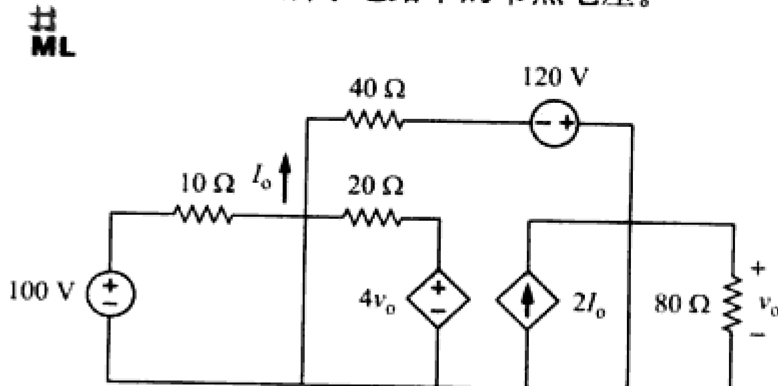


图 3-79 习题 3-30 的电路原理图

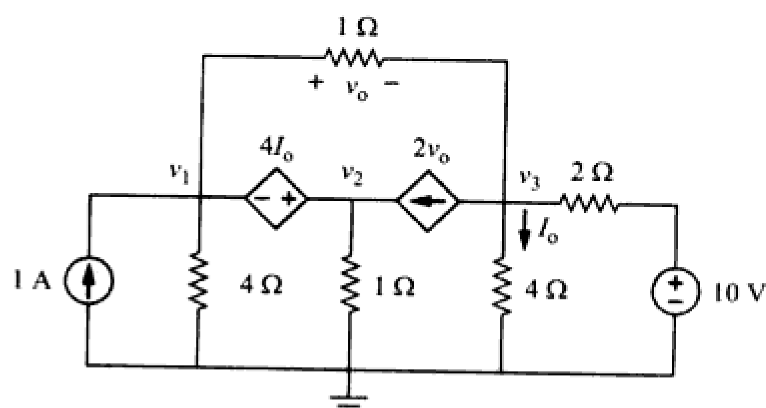


图 3-80 习题 3-31 的电路原理图

*3-32 试确定图3-81所示电路中的节点电压v_1、v_2和v_3。
ML

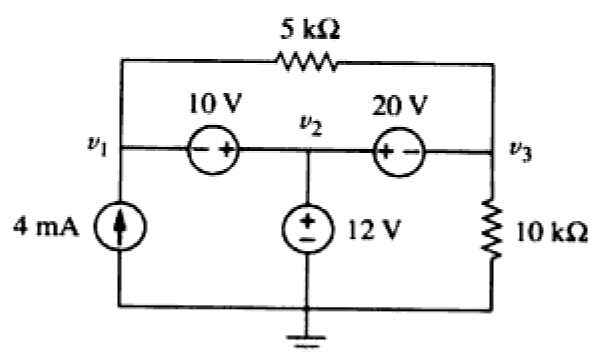


图 3-81 习题 3-32 的电路原理图

3.4 节和 3.5 节

3-33 在图3-82所示电路中，哪一个电路是平面电路？对于平面电路，试重新画出没有交叉支路的电路。

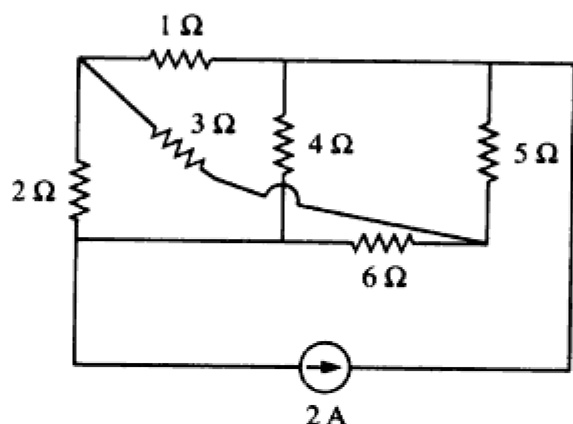
3-34 试确定图3-83所示电路中哪一个是平面电路，并重新画出没有交叉支路的电路。

3-35 试利用网孔分析法重做习题3-5。

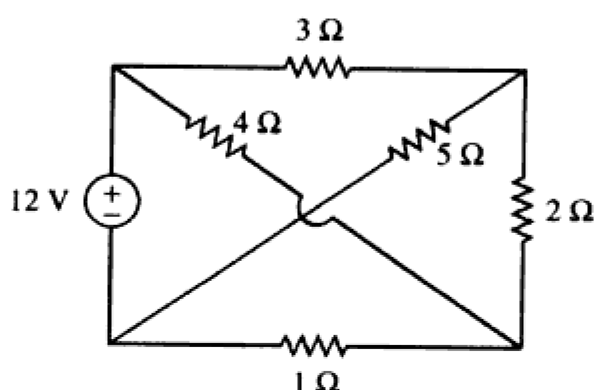
3-36 试利用网孔分析法重做习题3-6。

3-37 试利用网孔分析法求解习题3-8。

* 星号表示富有挑战性的习题。

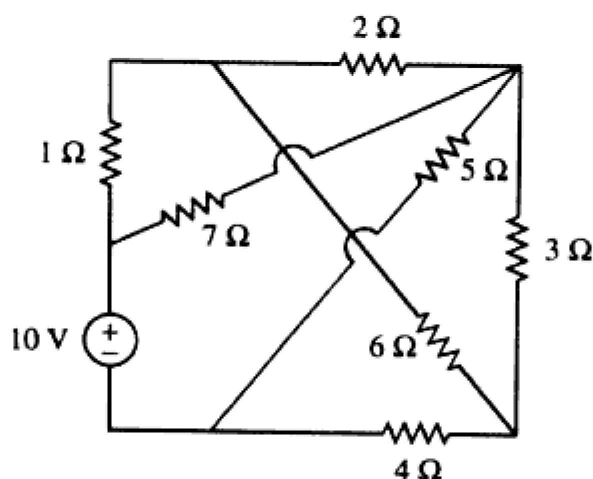


(a)

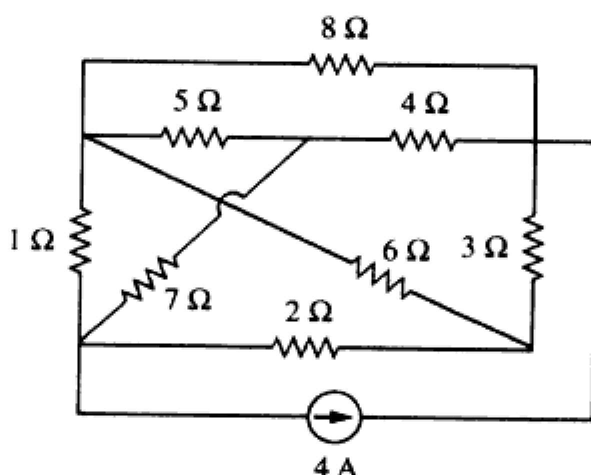


(b)

图 3-82 习题 3-33 的电路原理图



(a)



(b)

图 3-83 习题 3-34 的电路原理图

3-38 试利用网孔分析法确定图3-84所示电路中的 I_o。
ML

3-39 试求图3-85所示电路中的网孔电流i_1与i_2。

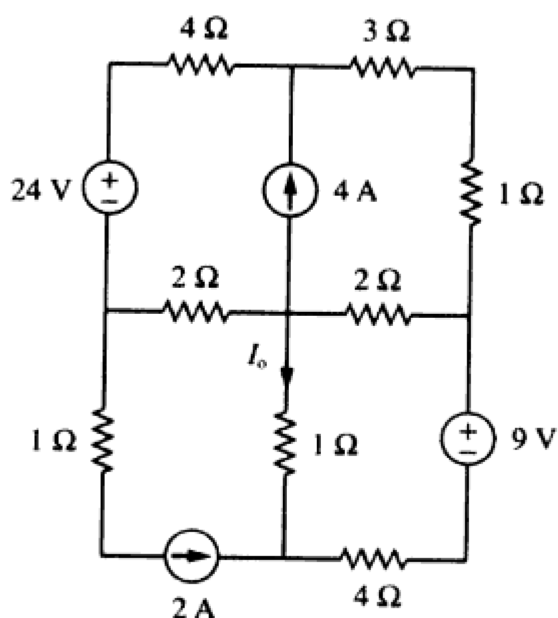


图 3-84 习题 3-38 的电路原理图

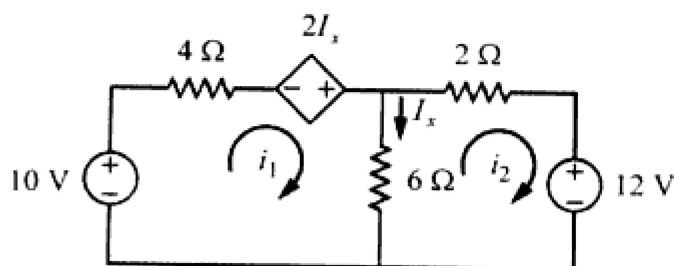


图 3-85 习题 3-39 的电路原理图

3-40 试利用网孔分析法计算图3-86所示桥式网络中的电流i_o。
ML

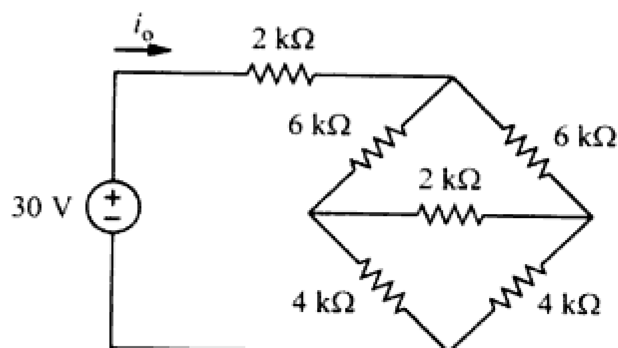


图 3-86 习题 3-40 的电路原理图

3-41 试利用网孔分析法计算图3-87所示电路中的电流i。
ML

3-42 试确定图3-88所示电路中的网孔电流。
ML

3-43 试利用网孔分析法计算图3-89所示电路中的v_{ab}与i_o。
ML

3-44 试利用网孔分析法计算图3-90所示电路中的电流i_o。

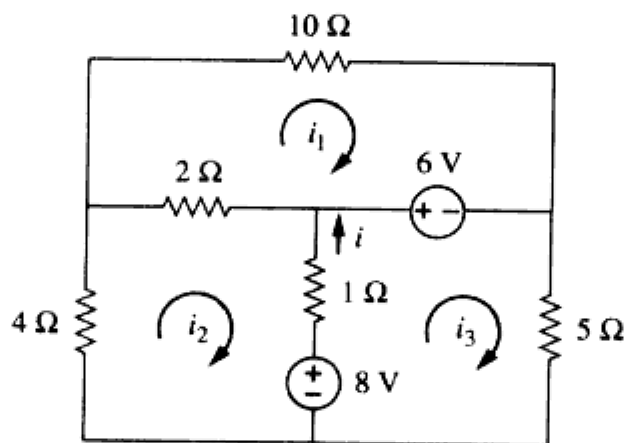


图 3-87 习题 3-41 的电路原理图

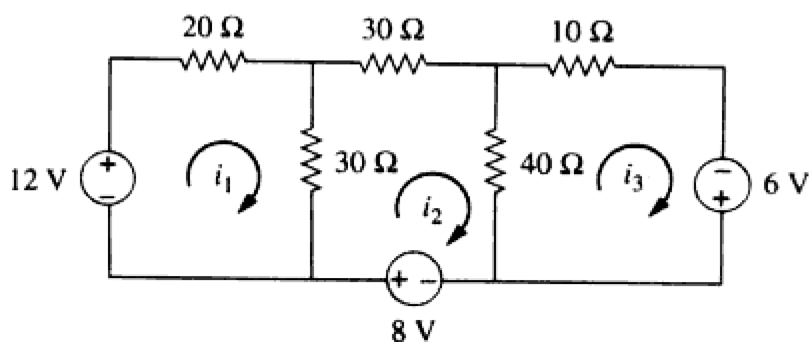


图 3-88 习题 3-42 的电路原理图

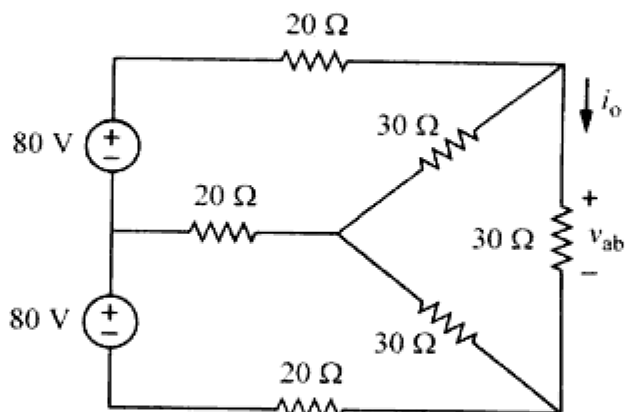


图 3-89 习题 3-43 的电路原理图

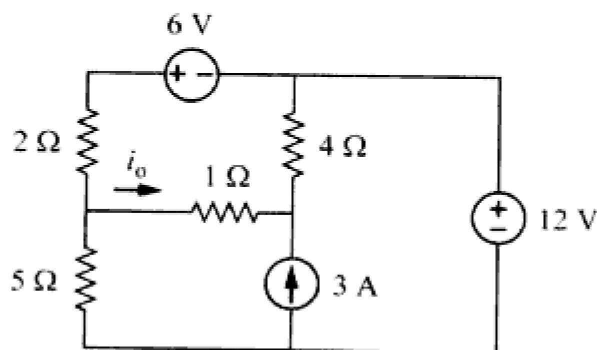


图 3-90 习题 3-44 的电路原理图

3-45 试求图3-91所示电路中的电流i。
ML

3-46 试计算图3-92所示电路中的网孔电流i_1与i_2。

3-47 试利用网孔分析法重做习题3-19。
ML

3-48 试利用网孔分析法确定流过图3-93所示电路中10 kΩ电阻的电流。
ML

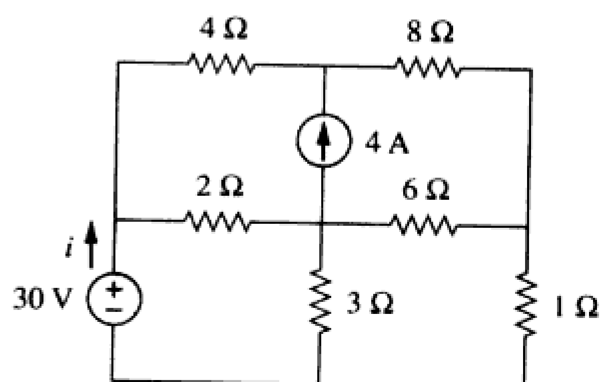


图 3-91 习题 3-45 的电路原理图

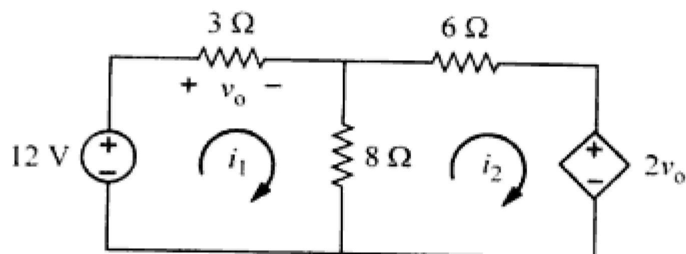


图 3-92 习题 3-46 的电路原理图

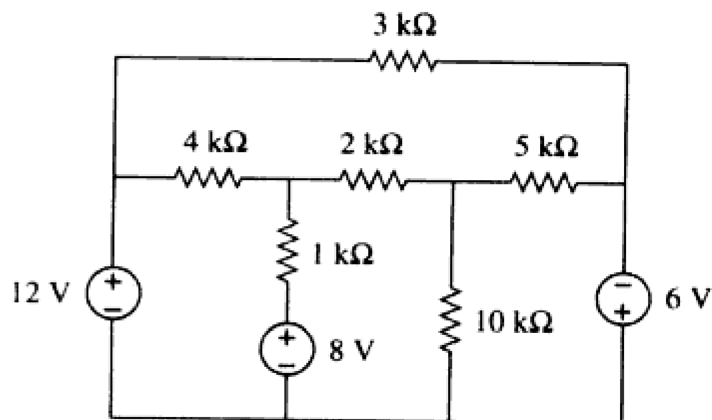


图 3-93 习题 3-48 的电路原理图

3-49 试求图3-94所示电路中的v_o与i_o。

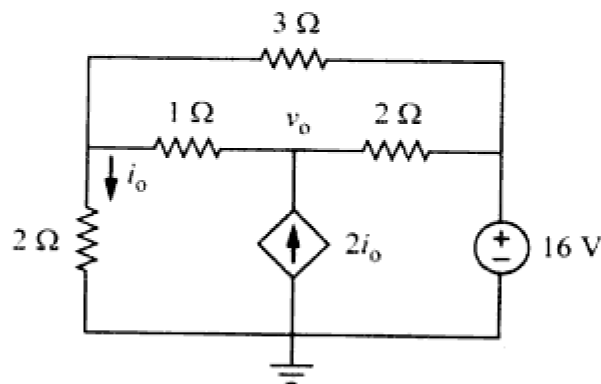


图 3-94 习题 3-49 的电路原理图

3-50 试利用网孔分析法确定图3-95所示电路中的电流i_o。
ML

3-51 试利用网孔分析法确定图3-96所示电路中的电压v_o。

3-52 试利用网孔分析法确定图3-97所示电路中的电流i_1、i_2和i_3。
ML

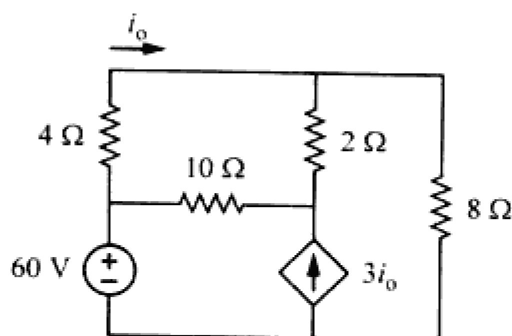


图 3-95 习题 3-50 的电路原理图

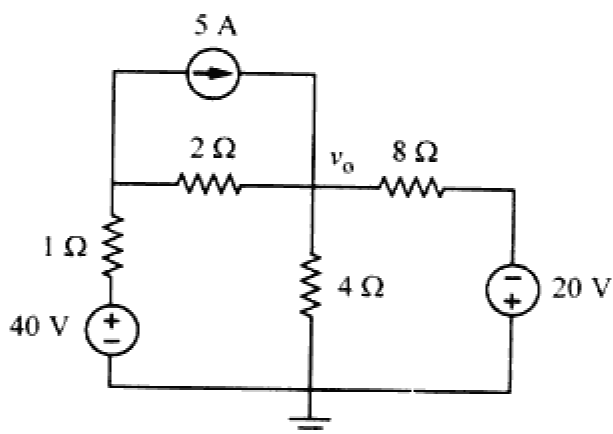


图 3-96 习题 3-51 的电路原理图

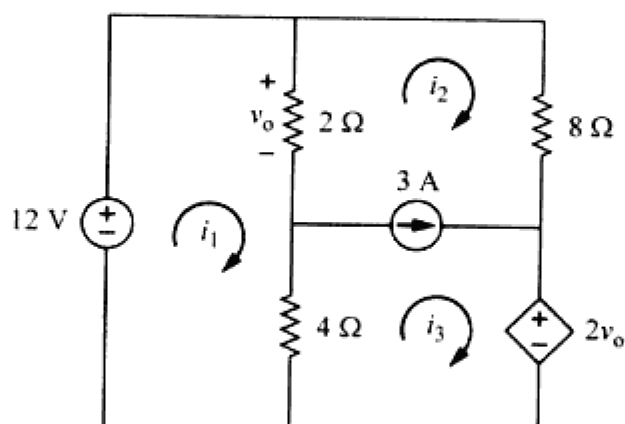


图 3-97 习题 3-52 的电路原理图

3-53 试利用MATLAB确定图3-98所示电路中的网孔电流。

ML

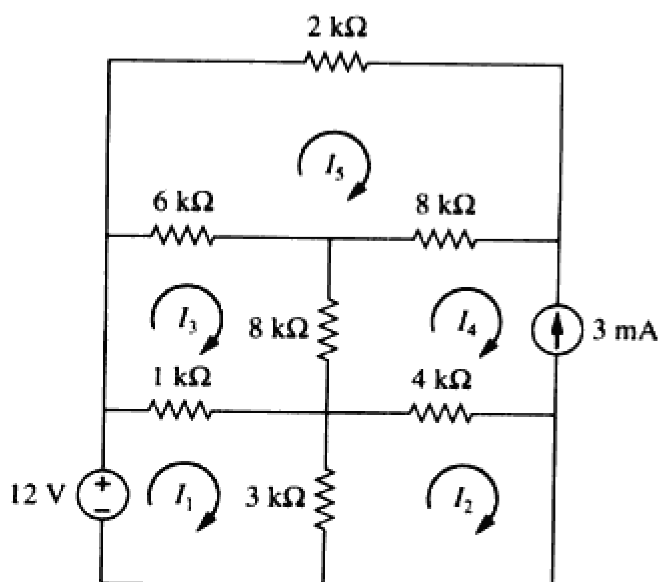


图 3-98 习题 3-53 的电路原理图

3-54 试求图3-99所示电路中的网孔电流i_1、i_2和i_3。

ML

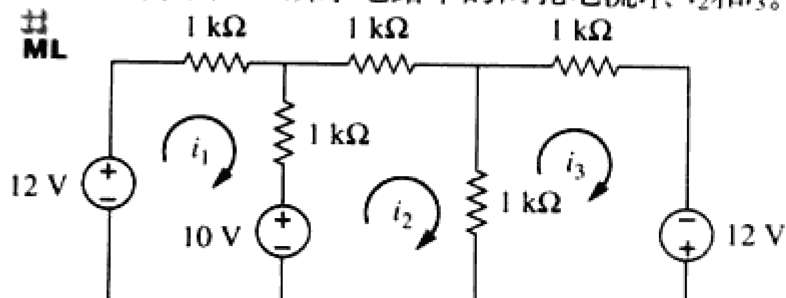


图 3-99 习题 3-54 的电路原理图

*3-55 试求图3-100所示电路中的I_1、I_2和I_3。

ML

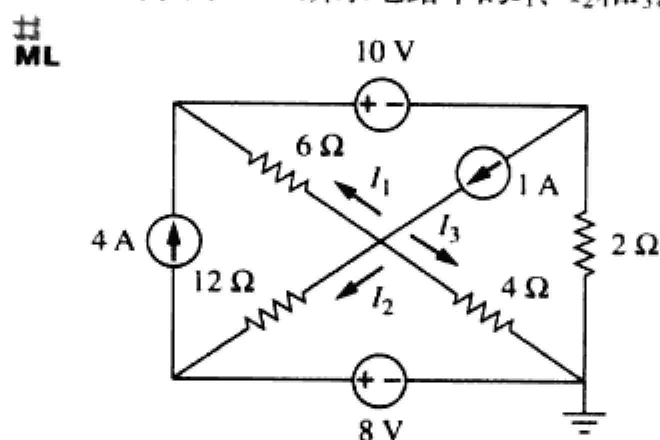


图 3-100 习题 3-55 的电路原理图

3-56 试求图3-101所示电路中的v_1与i_2。

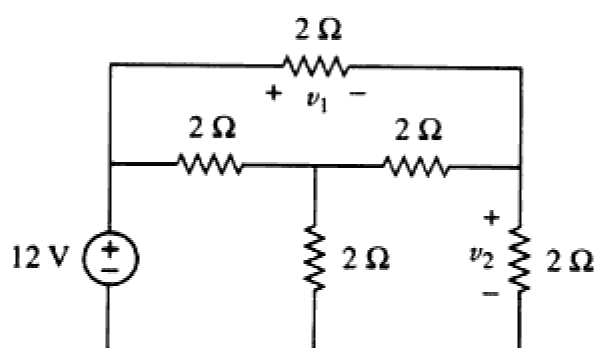


图 3-101 习题 3-56 的电路原理图

3-57 在图3-102所示电路中，假定i_o = 18 mA，试求R、V_1与V_2的值。

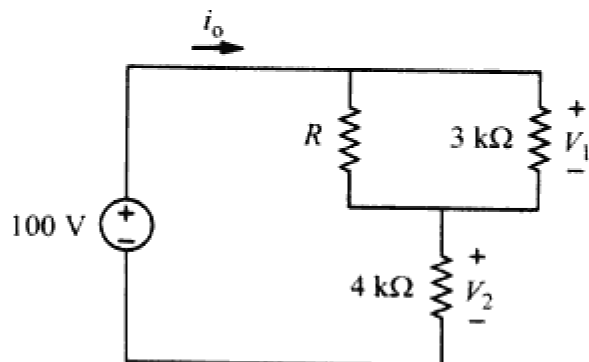


图 3-102 习题 3-57 的电路原理图

3-58 试求图3-103所示电路中的i_1、i_2和i_3。

ML

3-59　试利用网孔分析法重做习题3-30。

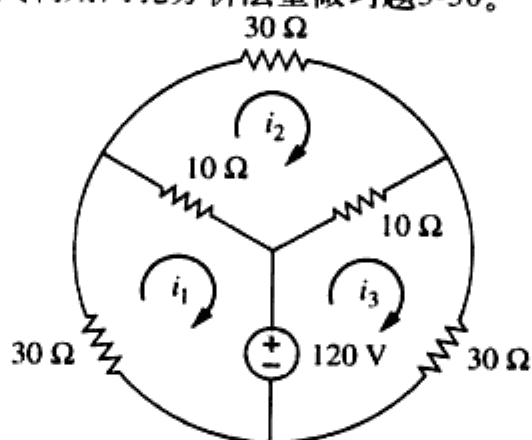


图 3-103　习题 3-58 的电路原理图

3-60　试计算图3-104所示电路中各电阻消耗的功率。

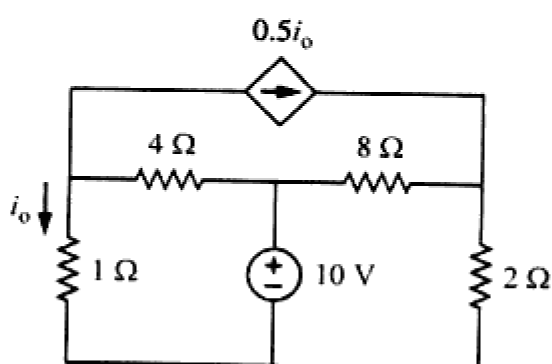


图 3-104　习题 3-60 的电路原理图

3-61　试计算图3-105所示电路中的电流增益i_o/i_s。

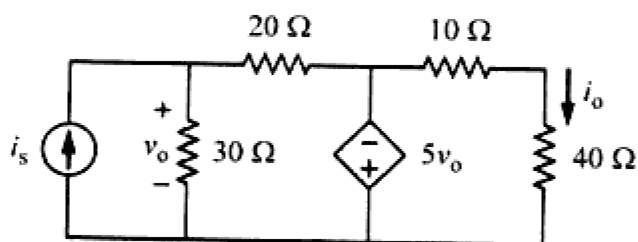


图 3-105　习题 3-61 的电路原理图

3-62　试求图3-106所示电路中的网孔电流i_1、i_2和i_3。

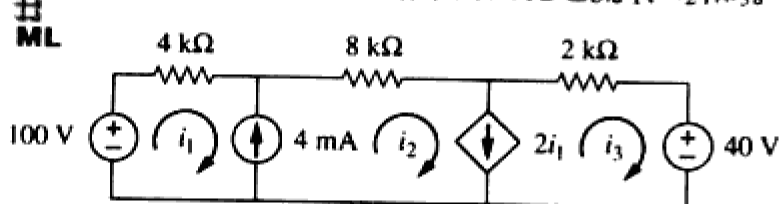


图 3-106　习题 3-62 的电路原理图

3-63　试求图3-107所示电路中的v_x与i_x。

3-64　试求图3-108所示电路中的v_o与i_o。

3-65　试利用MATLAB计算图3-109所示电路中的网孔电流。

3-66　试写出图3-110所示电路的网孔方程，并利用MATLAB确定网孔电流。

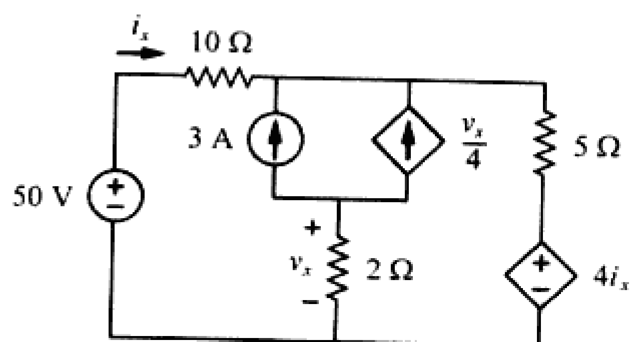


图 3-107　习题 3-63 的电路原理图

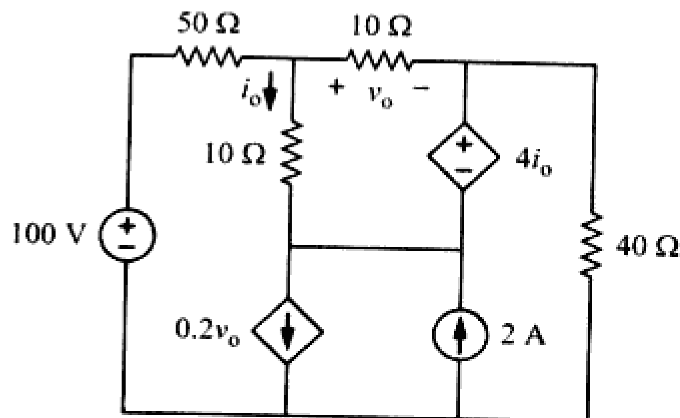


图 3-108　习题 3-64 的电路原理图

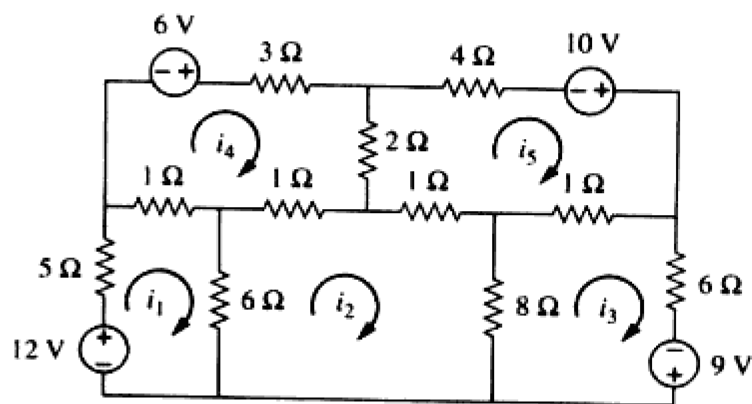


图 3-109　习题 3-65 的电路原理图

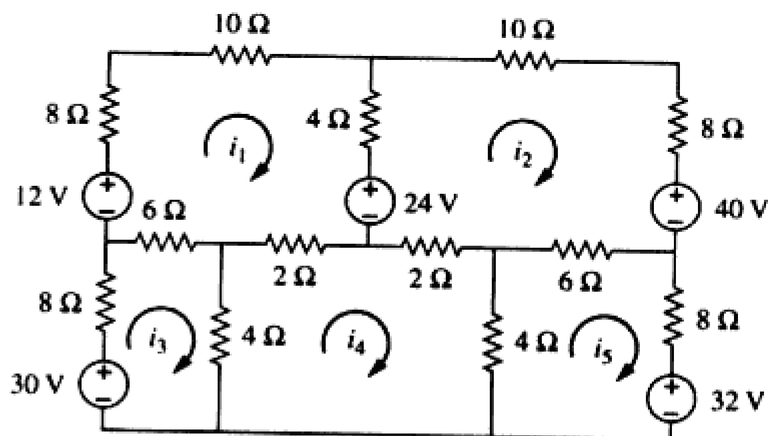


图 3-110　习题 3-66 的电路原理图

3.6 节

3-67　试通过观察法写出图3-111所示电路的节点电压方程，并计算电压V_o。

3-68　试求图3-112所示电路中的电压V_o。

3-69　试通过观察法写出图3-113所示电路的节点

电压方程。

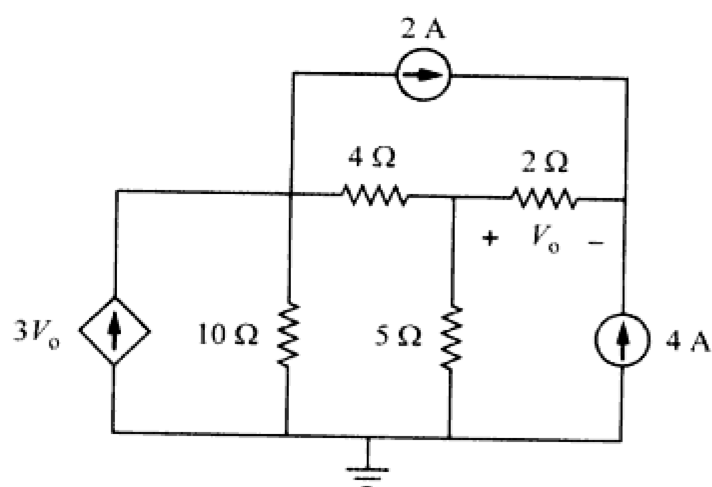


图 3-111　习题 3-67 的电路原理图

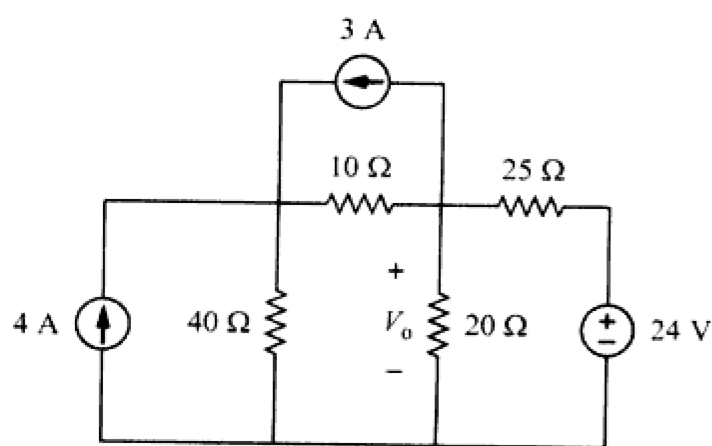


图 3-112　习题 3-68 的电路原理图

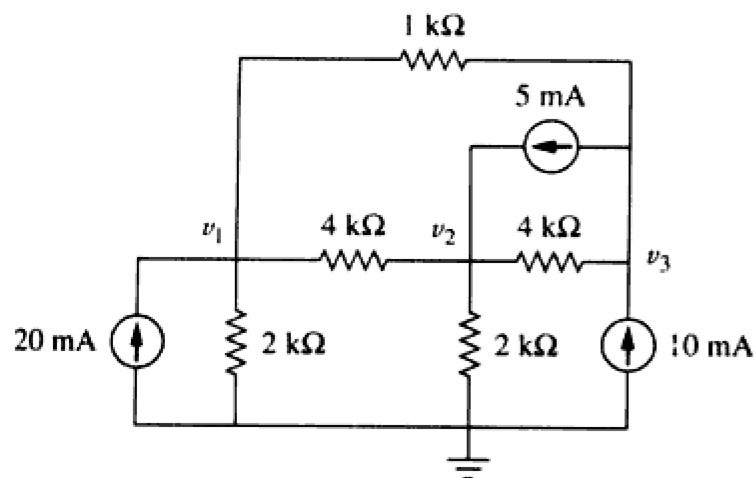


图 3-113　习题 3-69 的电路原理图

3-70　试通过观察法写出图3-114所示电路的节点电压方程，并确定V_1与V_2的值。

3-71　试写出图3-115所示电路的网孔电流方程，之后计算i_1、i_2和i_3的值

3-72　试通过观察法写出图3-116所示电路的网孔电流方程。

3-73　试写出图3-117所示电路的网孔电流方程。

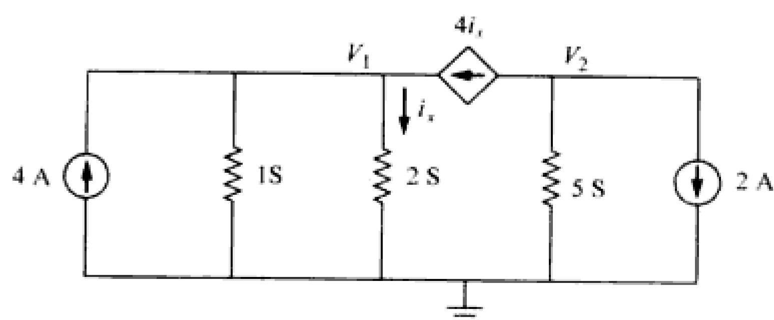


图 3-114　习题 3-70 的电路原理图

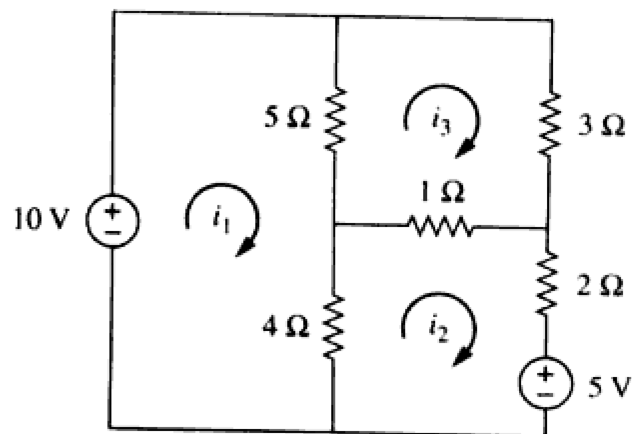


图 3-115　习题 3-71 的电路原理图

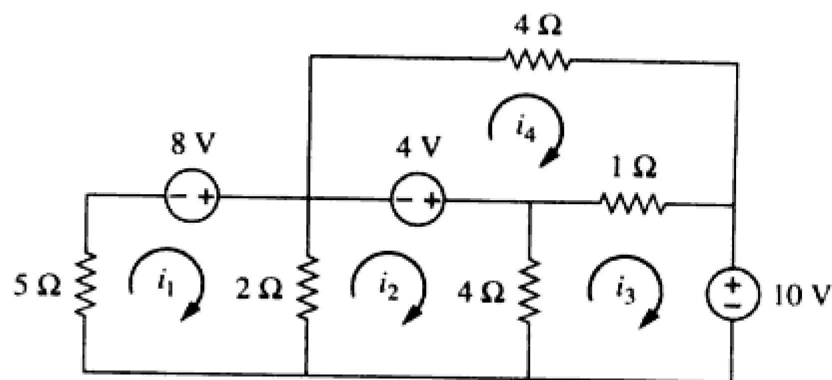


图 3-116　习题 3-72 的电路原理图

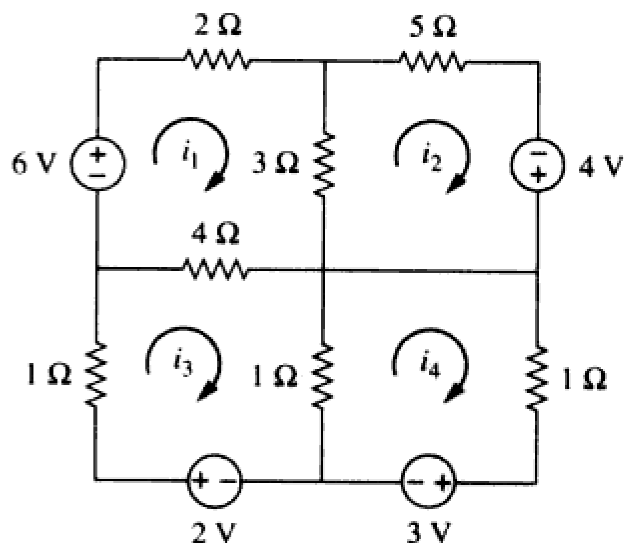


图 3-117　习题 3-73 的电路原理图

3-74　试通过观察法写出图3-118所示电路的网孔电流方程。

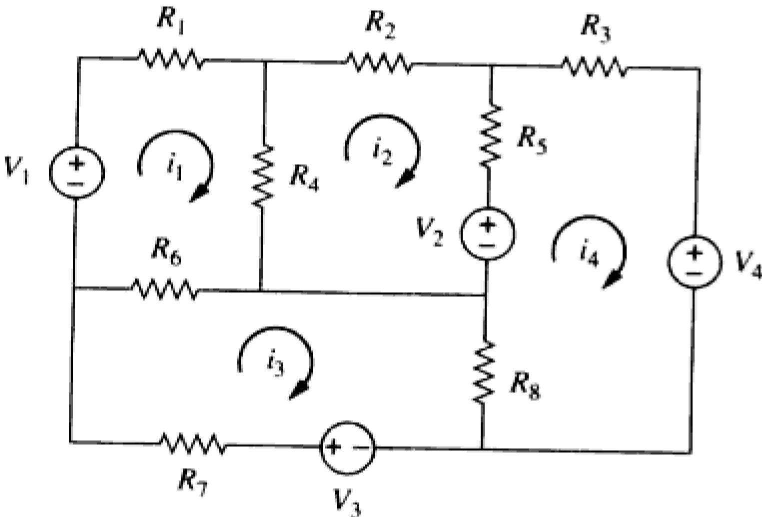


图 3-118　习题 3-74 的电路原理图

3.8 节

ps

3-75　试利用PSpice求解习题3-58。

3-76　试利用PSpice求解习题3-27。

3-77　试利用PSpice求解图3-119所示电路中的V_1与V_2。

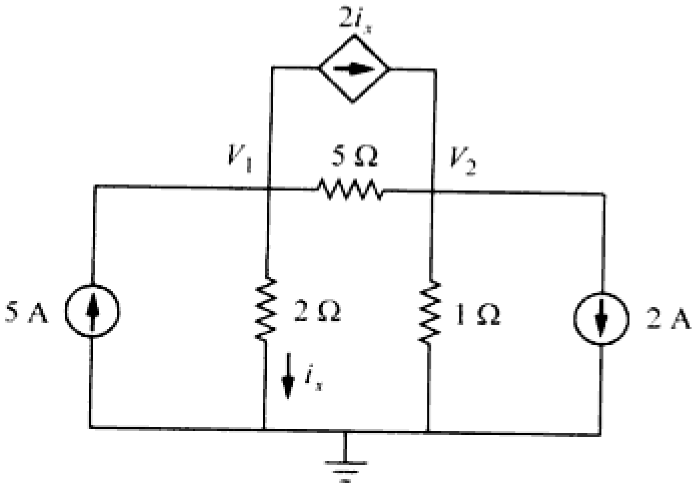


图 3-119　习题 3-77 的电路原理图

3-78　试利用PSpice求解习题3-20。

3-79　试利用PSpice重做习题3-28。

3-80　试利用PSpice求解图3-120所示电路中的节点电压$v_1 \sim v_4$。

ML

3-81　试利用PSpice求解例题3-4。

3-82　如果某电路网络在PSpice环境下的原理图网络表（Schemetics Netlist）如下所示，试画出该网络的电路原理图。

```
R_R1    1    2    2K
R_R2    2    0    4K
R_R3    3    0    8K
R_R4    3    4    6K
R_R5    1    3    3K
V_VS    4    0    DC      100
I_IS    0    1    DC      4
F_F1    1    3    VF_F1   2
VF_F1   5    0    0 V
E E1    3    2    1       3    3
```

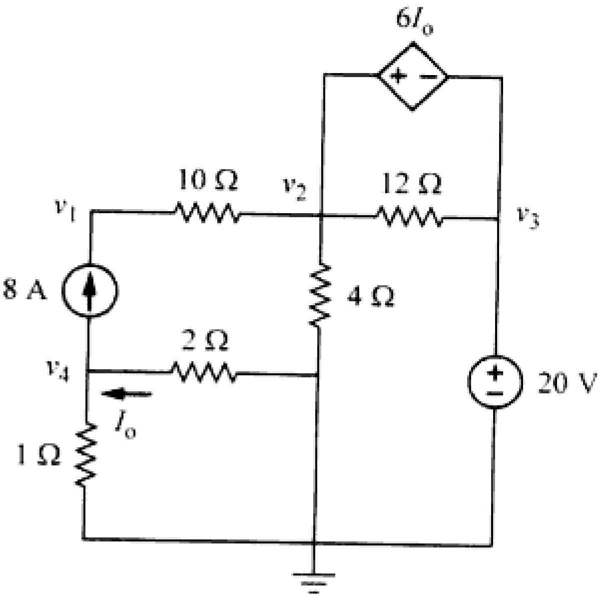


图 3-120　习题 3-80 的电路原理图

3-83　某特定电路的原理图网络表如下所示，试画出该网络的电路原理并确定节点2的电压。

```
R_R1    1    2    20
R_R2    2    0    50
R_R3    2    3    70
R_R4    3    0    30
V_VS    1    0    20V
I_IS    2    0    DC    2A
```

3.9 节

3-84　试计算图3-121所示电路中的v_o与I_o。

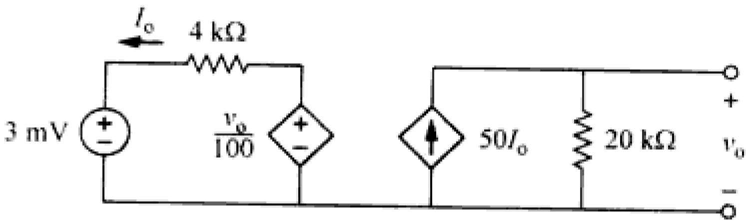


图 3-121　习题 3-84 的电路原理图

3-85　阻值为9 Ω的音频放大器为扬声器提供功率，要使所传递的功率最大，扬声器的阻值应为多少？

e2d

3-86　试计算图3-122所示简化的晶体管电路中的电压v_o。

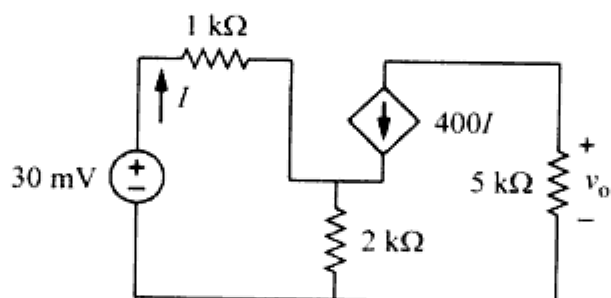


图 3-122 习题 3-86 的电路原理图

3-87 试求图3-123所示电路的增益v_o/v_s。

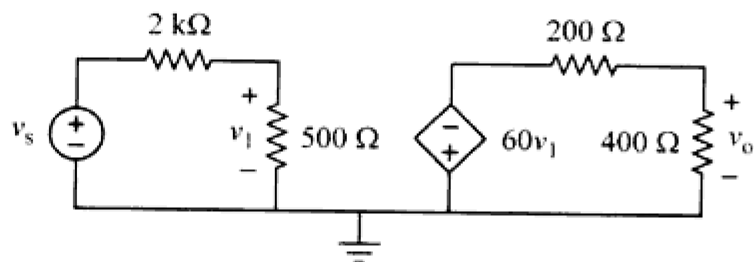


图 3-123 习题 3-87 的电路原理图

*3-88 试确定图3-124所示晶体管放大电路的增益v_o/v_s。

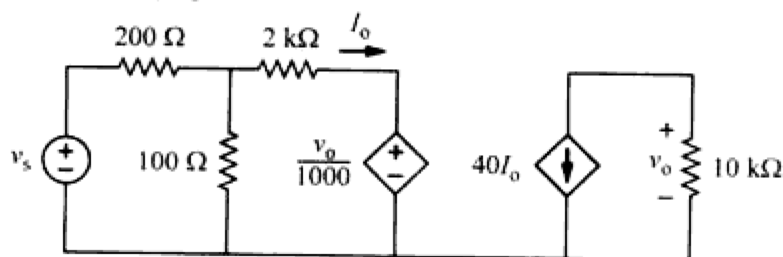


图 3-124 习题 3-88 的电路原理图

3-89 在图3-125所示的晶体管电路中，假定$\beta=100$，$V_{BE}=0.7$ V，试求I_B与V_{CE}。

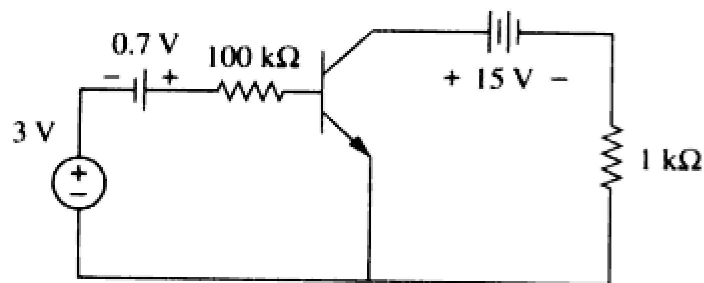


图 3-125 习题 3-89 的电路原理图

3-90 在图3-126所示的晶体管电路中，假定$v_o=4$ V，$\beta=150$，$V_{BE}=0.7$ V，试计算v_s。

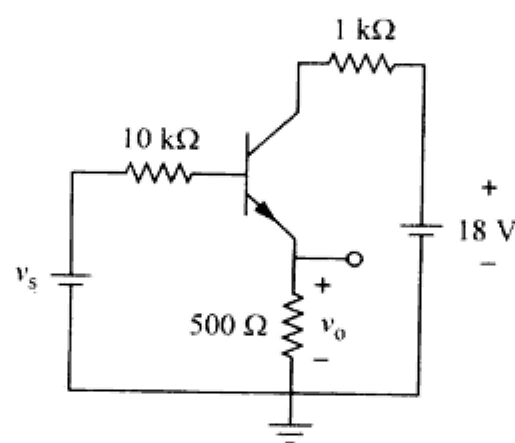


图 3-126 习题 3-90 的电路原理图

3-91 在图3-127所示的晶体管电路中，假定$\beta=200$，$V_{BE}=0.7$ V，试求I_B、V_{CE}与v_o。

3-92 在图3-128所示电路中，假定$\beta=100$，$V_{BE}=0.7$V，试求I_B与V_C。

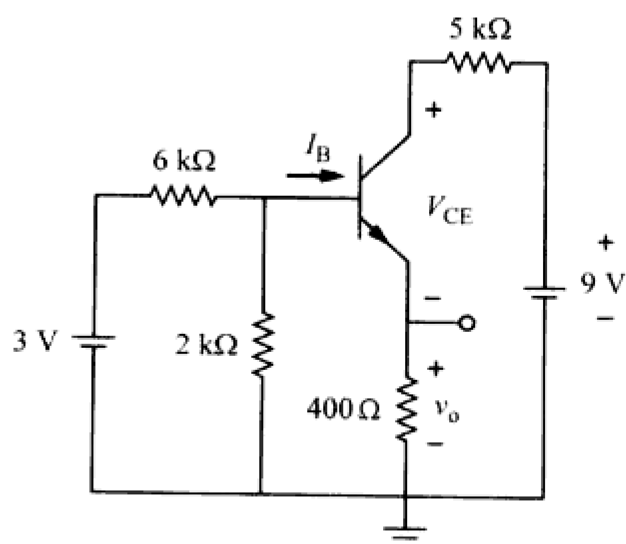


图 3-127 习题 3-91 的电路原理图

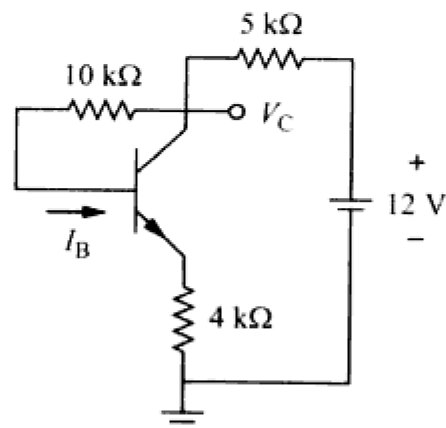


图 3-128 习题 3-92 的电路原理图

综合题

*3-93 试通过手算的方法重做例题3-11。

第4章 电路定理

自然规律公正又可怕，没有任何同情与怜悯，例如烈火的燃烧、洪水的泛滥、空气的消耗以及泥土的掩埋。如果对违反人类法律的犯罪行为的惩罚能同违反自然规律的行为的惩罚一样不可避免，也就是说人类能像自然界一样不会做出错误判断，这样也许对于我们整个人类的生存会相当不错。

——亨利·瓦兹沃思·朗费罗

增强技能，拓展职业生涯

提高你的交际能力

学习电路分析课程是准备从事电子工程事业的第一步，而在校学习期间提高与人和社会的交际技能同样也是为今后工作做准备，因为人们生活中的大部分时间都在相互交流。

业界人士经常抱怨刚毕业的工程师在书面交流和口头交流方面没有做好充分的准备。具备良好交际能力的工程师已变成了宝贵的财富。

你可能会说、会写。但是，如何进行卓有成效的交流呢？有效交流的艺术是一位成功工程师必须具备的重要才能。



卓有成效的交际能力被许多人认为是行政晋升中最为重要的一环

对于工程师而言，良好的交际能力是不断晋升的关键所在。在一项美国公司进行的关于什么因素影响管理人员晋升的调查中，列举了22项有关个人素质的问题及其在晋升中的重要性。调查结果可能令人大吃一惊："来自经验的技术能力"位列倒数第四。自信、有追求、灵活、成熟、能作出合理的决定、与人合作以及刻苦工作等品格都排在前面，而名列第一位的则是"交际能力"。自己的事业愈往上发展，需要的人际沟通就愈多。因此，应该将卓有成效的交流作为个人职业道路上的一项重要手段和必备能力。

掌握有效的交际方法是一生都必须重视的事情，需要不断地锻炼、不断地提高。在校学习期间是开始培养交际能力的最佳时机，不断地寻找机会培养和提高自己的读、写、听、说能力。可以通过课堂展示、集体课程设计、参与学生社团活动和选修交流课程等培养自己这方面的能力。现在就开始要比工作后再注意这个问题风险小得多。

4.1 引言

第3章中利用基尔霍夫定律分析电路的一个突出优点是无需对原电路结构做任何更改即可完成对电路的分析，其缺点是对于大型的复杂电路而言，这种方法的求解计算过程会变得相当繁琐。

随着电路应用领域的不断扩展，已从简单电路演化到复杂电路。为了处理复杂电路，工程技术专家经多年努力提出了一些定理以简化电路分析的方法，其中包括戴维南（Thevenin）定理和诺顿（Norton）定律。由于这些定理适用于线性（linear）电路，因此本章首先讨论线性电路的概念，在此基础上进一步讨论叠加定理、电源变换以及最大功率传输等概念。最后一节将介绍应用本章知识处

理电源建模和电阻测量等问题。

4.2 线性性质

线性关系是一种描述线性因果关系的元件属性。虽然该属性适用于许多电路元件，本章仅限于讨论电阻元件的线性特性。线性是指齐次性（比例性）与可加性的组合。

齐次性是指，如果输入［也称激励（excitation)］乘以一个常数，那么输出[也称响应（response）］也会相应地乘以同一个常数。以电阻为例，根据欧姆定律可知，输入电流i与输出电压v之间的关系为：

$$v = iR \tag{4-1}$$

如果电流乘以常量k，那么电压也相应地增加了k倍，即：

$$\boxed{kiR = kv} \tag{4-2}$$

可加性是指，对各个输入之和的响应等于每个输入单独作用于系统时的响应之和，仍以上述电阻的电压-电流关系为例，如果

$$v_1 = i_1R \tag{4-3a}$$

且

$$v_2 = i_2R \tag{4-3b}$$

那么，当输入为$(i_1 + i_2)$时，有：

$$\boxed{v = (i_1 + i_2)R = i_1R + i_2R = v_1 + v_2} \tag{4-4}$$

因此，称电阻为线性元件，因为它的电压-电流关系既满足齐次性又满足可加性。

一般而言，如果一个电路既满足齐次性又满足可加性，则称之为线性电路，线性电路中仅包含线性元件、线性受控源和独立源。

线性电路是指输出与输入呈线性关系（或成正比例关系）的电路。

本书只讨论线性电路。注意，由于功率$p = i^2R = v^2/R$（是一个二次函数，而不是线性函数），因此功率与电压（或电流）之间的关系非线性的。所以，本章介绍的定理不适用于功率。



图 4-1 输入为 v_s，输出为 i 的线性电路

例如，当电流i_1流过电阻R时，电阻吸收的功率$p_1 = R\,i_1^2$，当电流i_2流过电阻R时，电阻吸收的功率$p_2 = R\,i_2^2$。当电流$i_1 + i_2$流过电阻R时，吸收的功率$p_3 = R\,(i_1 + i_2)^2 = R\,i_1^2 + R\,i_2^2 + 2\,R\,i_1\,i_2 \neq p_1 + p_2$。因此，功率关系是非线性的。

为了说明线性原理，考虑图4-1所示的线性电路，该线性电路内部没有独立源，并由电压源v_s激励，即该电路的输入为v_s，在电路输出端接一负载电阻R，取流经电阻R的电流i作为输出。假定$v_s = 10$ V时，$i = 2$ A，那么根据线性原理，当$v_s = 1$ V时，应有$i = 0.2$ A。同理，如果$i = 1$ mA，则其输入必为$v_s = 5$ mV。

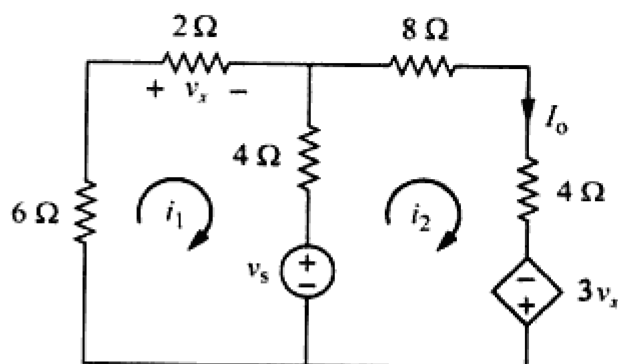


图 4-2 例题 4-1 的电路原理图

例题4-1 当$v_s = 12$ V和24 V时，求图4-2所示电路中的i_o。

解 对两个回路应用KVL，得到：

$$12i_1-4i_2+v_s=0 \tag{4-1-1}$$
$$-4i_1+16i_2-3v_x-v_s=0 \tag{4-1-2}$$

而$v_x=2\,i_1$，于是式(4-1-2)成为：

$$-10i_1+16i_2-v_s=0 \tag{4-1-3}$$

将式(4-1-1)与式(4-1-3)相加，得到：

$$2\,i_1+12\,i_2=0 \quad\Rightarrow\quad i_1=-6\,i_2$$

代入式(4-1-1)，可得：

$$-76\,i_2+v_s=0 \quad\Rightarrow\quad i_2=\frac{v_s}{76}$$

当$v_s=12$ V时：

$$I_o=i_2=\frac{12}{76}\text{ A}$$

当$v_s=24$ V时：

$$I_o=i_2=\frac{24}{76}\text{ A}$$

这说明，当电源电压为原来的2倍时，I_o也变为原来的2倍。

练习题4-1 当$i_s=15$ A和30 A时，试求图4-3所示电路中的v_o。
答 10 V，20 V。

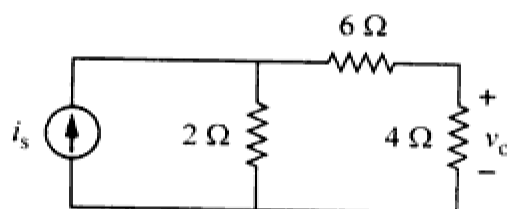


图 4-3 练习题 4-1 的电路原理图

例题4-2 在图4-4所示电路中，假定$I_o=1$ A，试利用线性原理确定I_o的实际值。

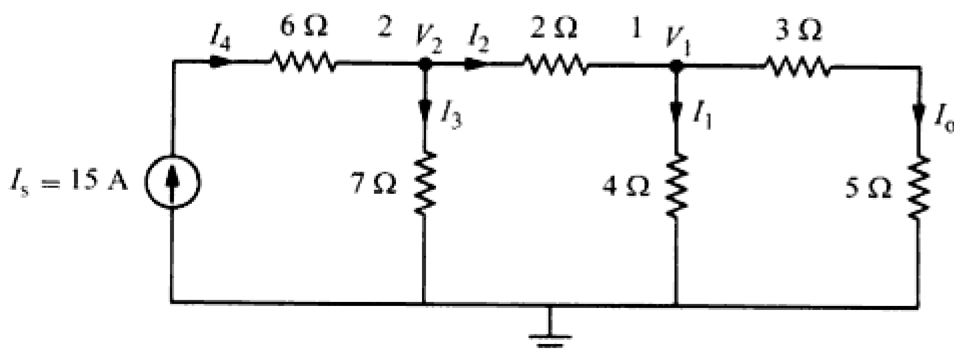


图 4-4 例题 4-2 的电路原理图

解 如果$I_o=1$ A，则$V_1=(3+5)\,I_o=8$ V，并且$I_1=V_1/4=2$ A，对节点1应用KCL，可得：

$$I_2=I_1+I_o=3\text{ A}$$

$$V_2=V_1+2\,I_2=8+6=14\text{V},\quad I_3=\frac{V_2}{7}=2\text{ A}$$

对节点2应用KCL，得到：

$$I_4=I_3+I_2=5\text{ A}$$

因此，$I_s=5$ A。这表明如果假定$I_o=1$ A，则得到电流源$I_s=5$ A，该电路中电流源实际为15 A，此时实际得到的$I_o=3$ A。

练习题4-2 在图4-5所示电路中，假定$V_o=1$ V，试利用线性原理计算V_o的实际值。
答 4 V。

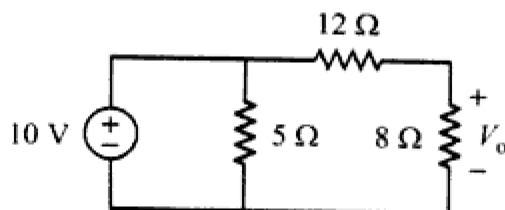


图 4-5 练习题 4-2 的电路原理图

4.3 叠加原理

当一个电路包含两个或多个独立电源时，求解电路特定变量（电压或电流）值的一种方法是利用第3章已经学过的节点分析法或网孔分析法，另一种方法是求出各独立源对所求变量的贡献，然后相加得到最终的响应，后一种方法称为叠加原理（superposition）。

叠加原理的基础是电路的线性性质。

叠加原理是指线性电路中元件两端电压（或流经元件的电流）是在每个独立源单独作用下在该元件两端的电压（或流经该元件的电流）的代数和。

叠加原理不仅仅局限于电路分析，对因果关系满足线性性质的其他许多领域同样适用。

采用叠加原理可以帮助我们分析包含多个独立源的线性电路，即分别计算各独立源对电路的贡献，之后相加得到总的响应。但是，应用叠加原理必须注意如下两点：

(1) 每次计算仅考虑一个独立源，其他独立源均应关闭（turn off），即其他各电压源要用0 V（即短路）来取代，而各电流源要用0 A（即开路）来取代。这样，就得到了更为简单、更便于处理的电路。

与关闭意思相同的常见术语包括：封闭（killed）、使其无效（make inactive）、实效（deadened）或置零（set equal to zero）等。

(2) 因为受控源受到电路变量的控制，所以应保持不变。

应用叠加原理时，必须按照如下三个步骤进行。

应用叠加原理的三个步骤：

(1) 关闭除一个独立电源以外的其他所有独立电源，利用第2章和第3章介绍的分析方法，求出有效独立源作用于电路的输出（电压或电流）。

(2) 对其他各独立源重复步骤1。

(3) 将各个独立源单独作用于电路时产生的响应进行代数相加，从而得到电路总的响应。

采用叠加原理分析电路的一个主要缺点是所涉及的计算比较多。如果待分析电路包含三个独立源，则必须分析计算三个由独立源单独作用的简化电路。然而，叠加原理的优点在于，利用短路取代电压源，或利用开路取代电流源，的确可以降低电路的复杂程度，将复杂电路简化为简单电路。

必须牢记，叠加原理的基础是线性性质，因此它并不适用于各电源产生的功率，因为电阻吸收的功率随电压或电流的平方关系变化。如果要求功率，必须先利用叠加原理计算流经元件的电流（或元件两端的电压），之后再计算功率。

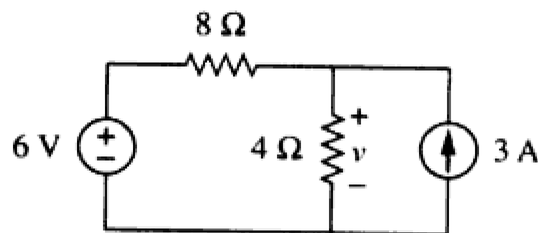


图 4-6　例题 4-3 的电路原理图

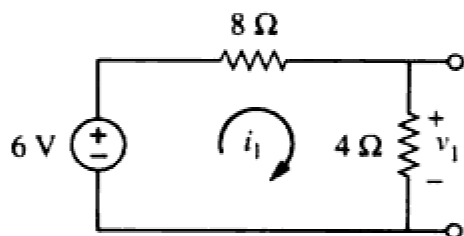
例题4-3　试利用叠加原理计算图4-6所示电路中的v。

解　电路中包括两个电源，根据叠加原理，令：

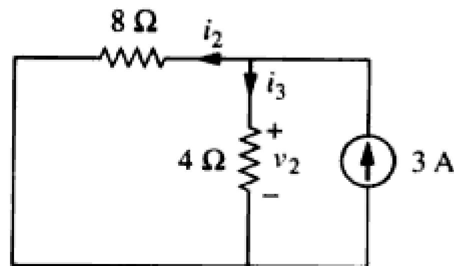
$$v = v_1 + v_2$$

其中，v_1与v_2分别为6 V电压源和3 A电流源对v的贡献。为求出v_1，应设电流源为零，如图4-7a所示，对图4-7a中回路应用KVL，得到：

$$12\,i_1 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1 = 0.5\ \text{A}$$



(a) 计算 v_1



(b) 计算 v_2

图 4-7　例题 4-3 的电路原理图

因此，

$$v_1 = 4\,i_1 = 2\text{ V}$$

另外，还可以采用分压原理计算v_1，即：

$$v_1 = \frac{4}{4+8}(6) = 2\text{ V}$$

为求出v_2，应设电压源为零，如图4-7b所示，利用分流原理可得：

$$i_3 = \frac{8}{4+8}(3) = 2\text{ A}$$

因此，

$$v_2 = 4\,i_3 = 8\text{ V}$$

于是

$$v = v_1 + v_2 = 2 + 8 = 10\text{ V}$$

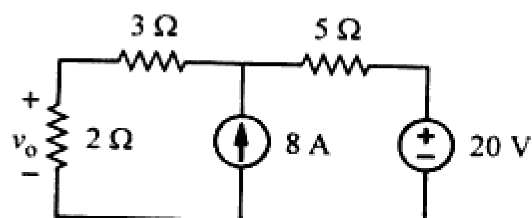


图 4-8 练习题 4-3 的电路原理图

练习题4-3 试利用叠加原理求出图4-8所示电路中的v_o。
答 12 V。

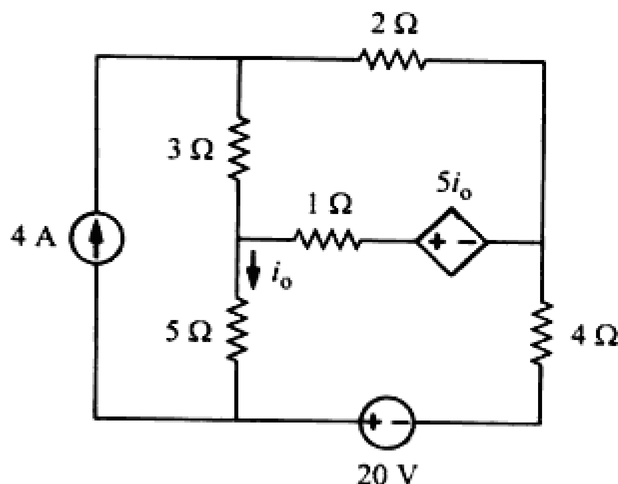


图 4-9 例题 4-4 的电路原理图

例题4-4 试利用叠加原理求出图4-9所示电路中的i_o。
解 图4-9所示电路中包含一个受控源，计算过程中必须保持不变。令：

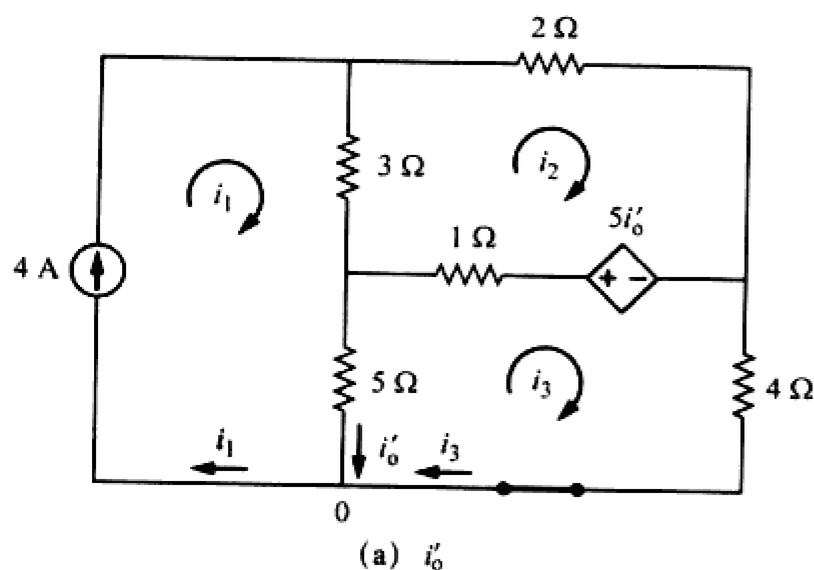
$$i_o = i_o' + i_o'' \tag{4-4-1}$$

其中，i_o'与i_o''分别为由4 A电流源与20 V电压源引起的响应。为求出i_o'，须关闭20 V电压源，从而得到如图4-10a所示的电路。下面采用网孔分析法求i_o'，对于回路1，

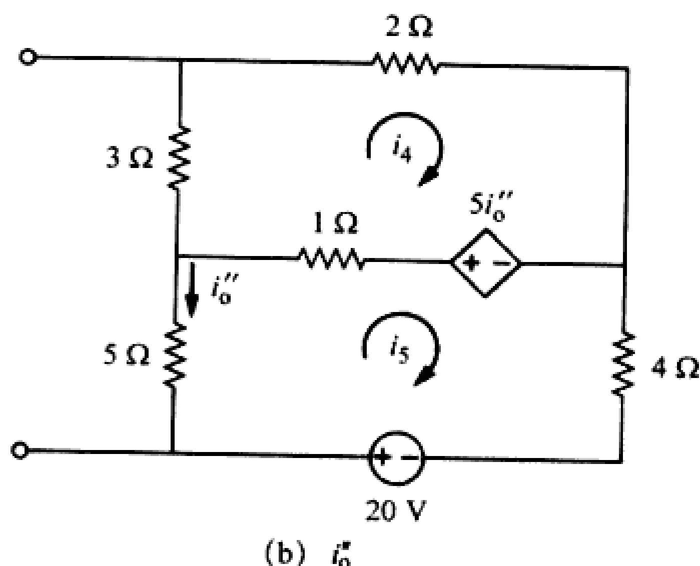
$$i_1 = 4\text{A} \tag{4-4-2}$$

对于回路2，

$$-3i_1 + 6i_2 - 1i_3 - 5i_o' = 0 \tag{4-4-3}$$



(a) i_o'



(b) i_o''

图 4-10 例题 4-4 的电路原理图利用叠加原理计算

对于回路3，

$$-5i_1 - 1i_2 + 10i_3 + 5i_o' = 0 \tag{4-4-4}$$

但在节点0处，有：

$$i_3 = i_1 - i_o = 4 - i_o' \tag{4-4-5}$$

将式(4-4-2)与式(4-4-5)代入式(4-4-3)与式(4-4-4)，得到两个联列方程：

$$3i_2 - 2i_o' = 8 \tag{4-4-6}$$

$$i_2 + 5i_o' = 20 \tag{4-4-7}$$

解之得：

$$i_o' = \frac{52}{17}\text{A} \tag{4-4-8}$$

为求出i_o''，须关闭4 A电流源，从而得到如图4-10b所示的电路。对回路4应用KVL，得到：

$$6i_4 - i_5 - 5i_o'' = 0 \tag{4-4-9}$$

对于回路5：

$$-i_4 + 10i_5 - 20 + 5i_o'' = 0 \tag{4-4-10}$$

而$i_5 = -i_o''$。将其代入式(4-4-9)与式(4-4-10)可得：

$$6i_4 - 4i_o'' = 0 \tag{4-4-11}$$

$$i_4 + 5i_o'' = -20 \tag{4-4-12}$$

解之得：

$$i_o'' = -\frac{60}{17}\text{A} \tag{4-4-13}$$

将式(4-4-8)与式(4-4-13)代入式(4-4-1)，得到：

$$i_o = -\frac{8}{17} = -0.4706\text{ A}$$

练习题4-4 试利用叠加原理计算图4-11所示电路中的v_x。

答 $v_x = 12.5$ V。

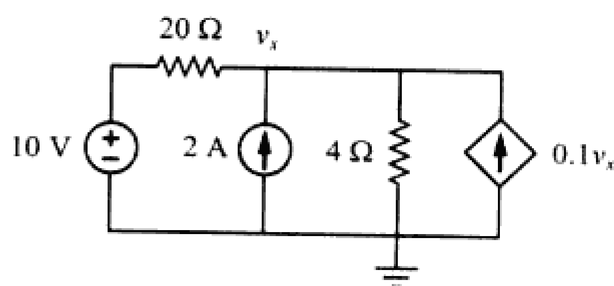


图 4-11 练习题 4-4 的电路原理图

例题4-5 试利用叠加原理计算图4-12所示电路中的i。

解 本例电路中包含三个电源，于是令：

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

其中，i_1、i_2、i_3分别为由12 V电压源、24 V电压源和3 A电流源所产生的电流。为求出i_1，考虑如图4-13a所示的电路，(位于右侧的) 4 Ω电阻和与之串联的8 Ω电阻合并后得12 Ω电阻，该12 Ω电阻又与4 Ω电阻并联，合并后得12 × 4/16 = 3 Ω。因此，

$$i_1 = \frac{12}{6} = 2\text{ A}$$

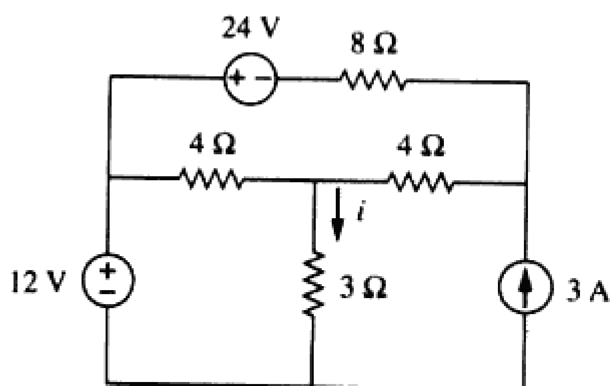


图 4-12 例题 4-5 的电路原理图

为求出i_2，考虑如图4-13b所示的电路，采用网孔分析法得到：

$$16i_a - 4i_b + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4i_a - i_b = -6 \tag{4-5-1}$$

$$7i_b - 4i_a = 0 \quad \Rightarrow \quad i_a = \frac{7}{4}i_b \tag{4-5-2}$$

将式(4-5-2)代入式(4-5-1)得到：

$$i_2 = i_b = -1$$

为求出i_3，考虑如图4-13c所示的电路，采用节点分析法得到：

$$3 = \frac{v_2}{8} + \frac{v_2 - v_1}{4} \quad \Rightarrow \quad 24 = 3v_2 - 2v_1 \tag{4-5-3}$$

$$\frac{v_2 - v_1}{4} = \frac{v_1}{4} + \frac{v_1}{3} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{10}{3}v_1 \tag{4-5-4}$$

将式(4-5-4)代入式(4-5-3)得到$v_1 = 3$，并且：

$$i_3 = \frac{v_1}{3} = 1\text{ A}$$

于是，

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = 2 - 1 + 1 = 2\text{ A}$$

练习题4-5 试利用叠加原理求出图4-14所示电路中的I。
答 0.75 A。

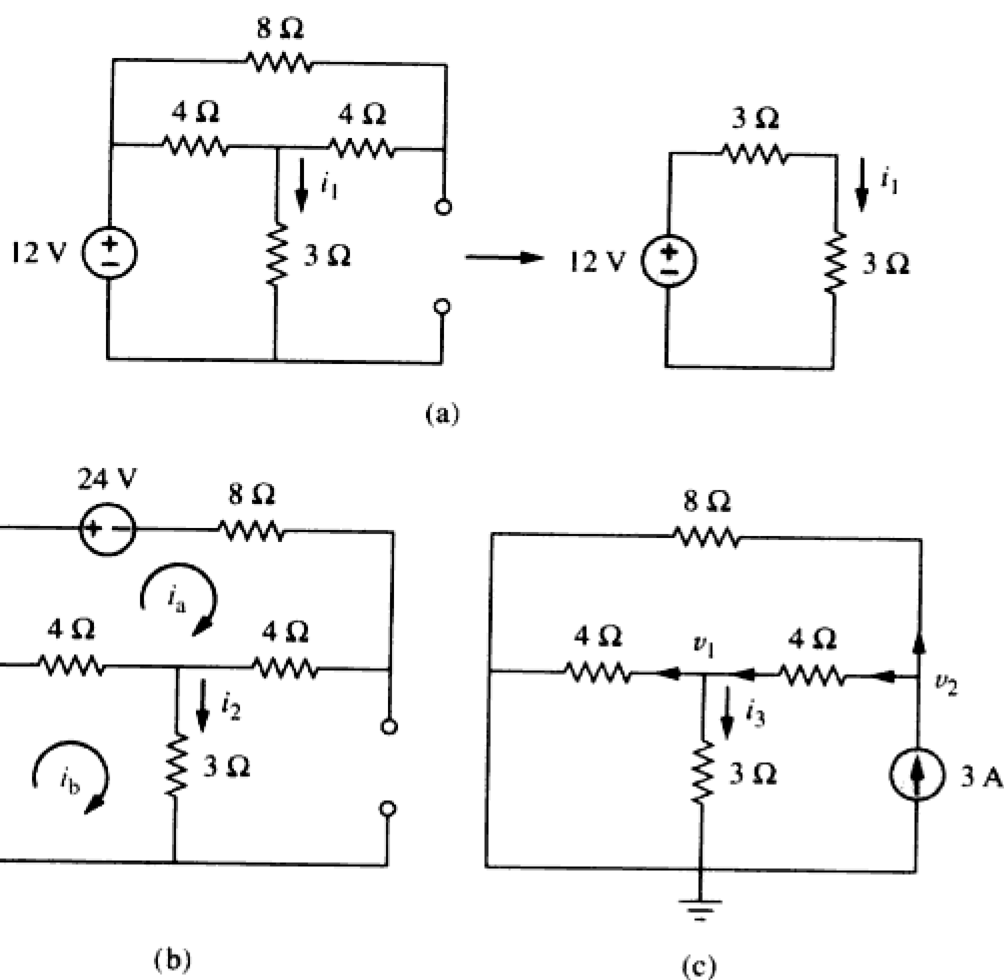


图 4-13 例题 4-5 的电路原理图

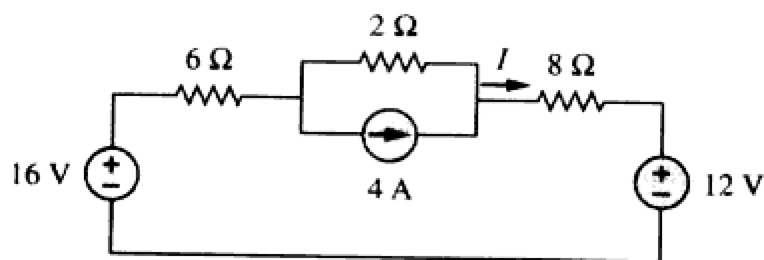


图 4-14 练习题 4-5 的电路原理图

4.4 电源变换

由前面章节的学习可知，串-并联合并与Y-Δ转换等方法有助于简化电路，本节介绍的电源转换（source transformation）是简化电路的另一个工具，这些工具的基础在于等效（equivalence）的概

念，即等效电路是指与原电路具有相同v-i特性的电路。

由3.6节可知，当电路中的电源均为独立电流源（或独立电压源）时，仅通过观察法就可以写出电路的节点电压（或网孔电流）方程，因此，在电路分析时，如果能像图4-15那样，将与电阻串联的电压源转换为与电阻并联的电流源，或者反之，就会使分析变得非常方便的。这种转换称为电源转换。

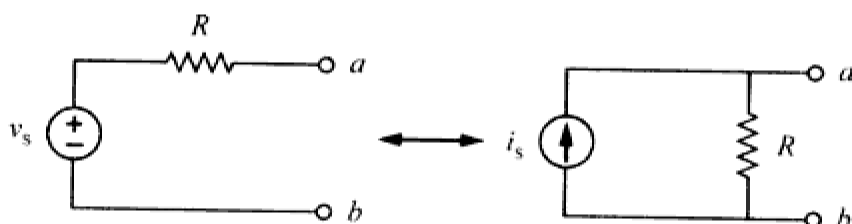


图 4-15 独立电源的变换

电源变换是指用与电阻并联的电流源i_s取代与电阻串联的电压源v_s（或者反之）的转换过程。

只要如图4-15所示的两个电路在端口$a-b$呈现相同的电压-电流关系，则二者就是等效的。可以很容易地证明这两个电路的等效关系，如果将两个电源均关闭，则两个电路在端口$a-b$的等效电阻均为R。同时，当端口$a-b$短路时，则在左边电路中从a到b的短路电流为$i_{sc}=v_s/R$，在右边电路中从a到b的短路电流为$i_{sc}=i_s$。于是，为了使这两个电路等效，就必须满足$v_s/R=i_s$。因此，电源变换必须满足：

$$v_s = i_s R \qquad \text{或} \qquad i_s = \frac{v_s}{R} \tag{4-5}$$

电源变换同样适用于受控源，但前提是必须对受控变量做细致的处理。如图4-16所示，电阻串联的受控电压源可以转换为与电阻并联的受控电流源，反之亦然，但必须确保满足式(4-5)。

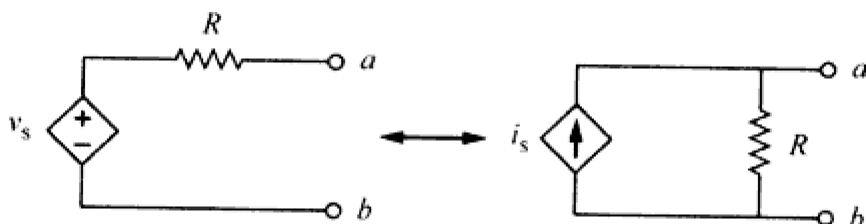


图 4-16 受控源的变换

与第2章所学的Y-Δ变换一样，电源变换并不会对电路的其他部分产生任何影响，因此，电源变换是一种通过对电路形式的变换简化电路分析有力工具。但是，在进行电源变换时，必须注意如下两点：

（1）由图4-15（或图4-16）可见，电流源的电流方向应该指向电压源的正极。

（2）由式(4-5)可知，在$R=0$，即理想电压源的情况下，是不能进行电源变换的，然而实际电路中均为非理想电压源，即$R\neq 0$。同样，$R=\infty$的理想电流源也不能用有限电压源来取代。本章第4.10.1节将会对理想电源和非理想电源做进一步的讨论。

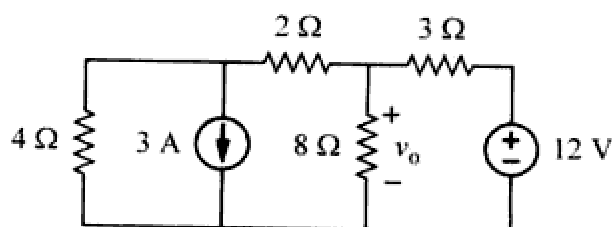


图 4-17 例题 4-6 的电路原理图

例题4-6 试利用电源变换的方法求图4-17所示电路中的v_o。

解 首先对图4-17中的电流源和电压源分别进行变换，得到如图4-18a所示的电路。之后，将相互串联的4 Ω电阻与2 Ω电阻合并起来，同时对12V电压源进行变换，得到如图4-18b所示的电路。接着将相互并联的3 Ω电阻与6 Ω电阻合并为一个2 Ω电阻，将2 A电流源与4 A电流源合并为一个2 A电流源，

这样，重复几次电源变换后，就会得到如图4-18c所示的电路。

对图4-18c所示电路应用分流原理，得到：

$$i=\frac{2}{2+8}(2)=0.4\,\text{A}$$

并且

$$v_o=8i=8\,(0.4)=3.2\,\text{V}$$

另外，由于图4-18c中的8 Ω电阻与2 Ω电阻是并联的，其两端的电压应相同，因此，

$$v_o=(8\parallel 2)(2\,\text{A})=\frac{8\times 2}{10}(2)=3.2\,\text{V}$$

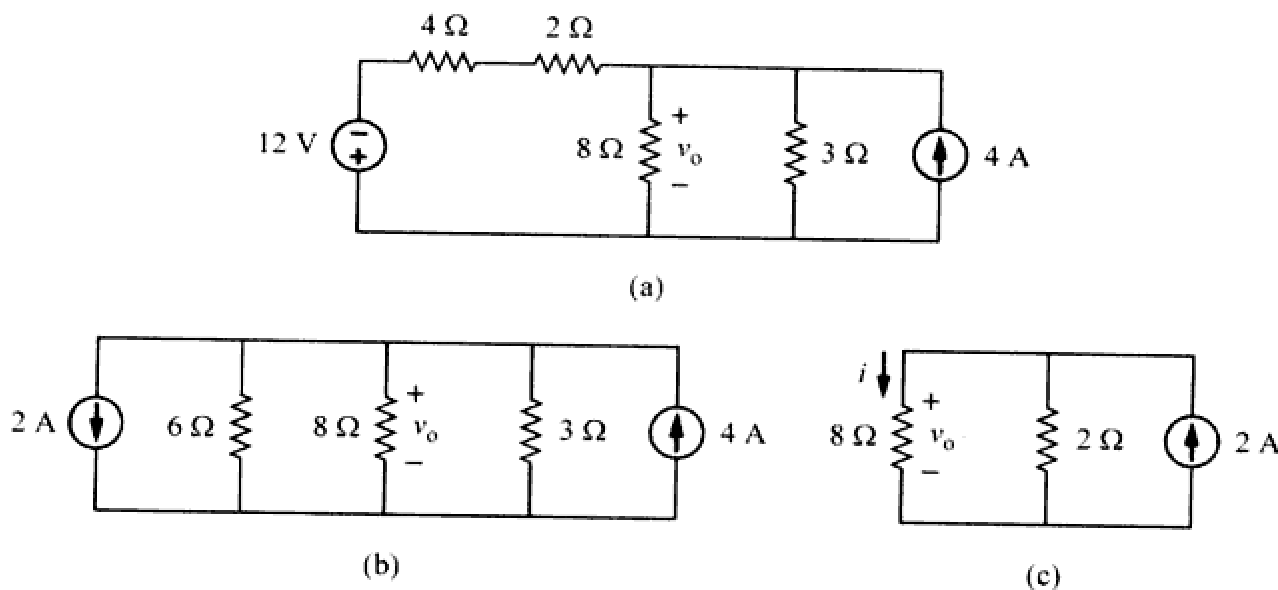


图 4-18 例题 4-6 的电路原理图

练习题4-6 试利用电源变换的方法求图4-19所示电路中的i_o。

答 1.78 A。

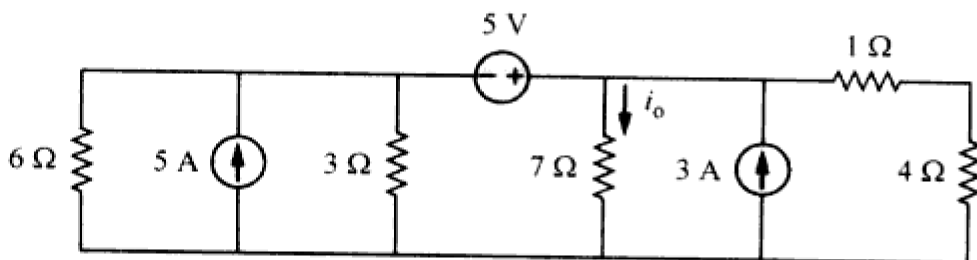


图 4-19 练习题 4-6 的电路原理图

例题4-7 试利用电源变换的方法求图4-20所示电路中的v_x。

解 图4-20所示电路中包含一个电压控制电流源，将该受控电流源与6 V电压源进行电源变换，得到如图4-21a所示电路。由于18 V电压源没有与任何电阻相串联，所以不能进行电源变换，图4-21a中两个并联的2 Ω电阻可以合并为1 Ω电阻，它又与3 A的电流源相并联。再将该电流源变换为电压源，得到如图4-21b所示的电路，注意v_x的两个端点仍保持不变。对图4-21b的回路应用KVL，得到：

$$-3+5i+v_x+18=0 \qquad (4\text{-}7\text{-}1)$$

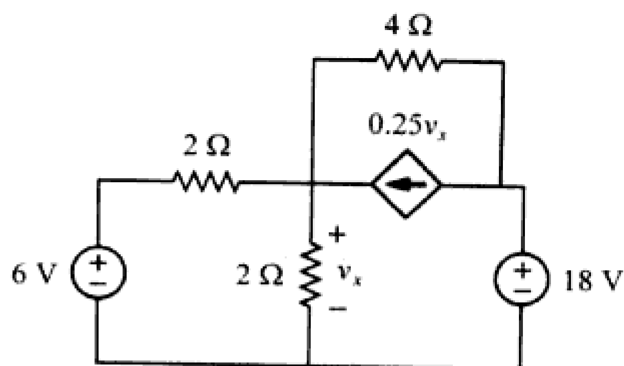


图 4-20 例题 4-7 的电路原理图

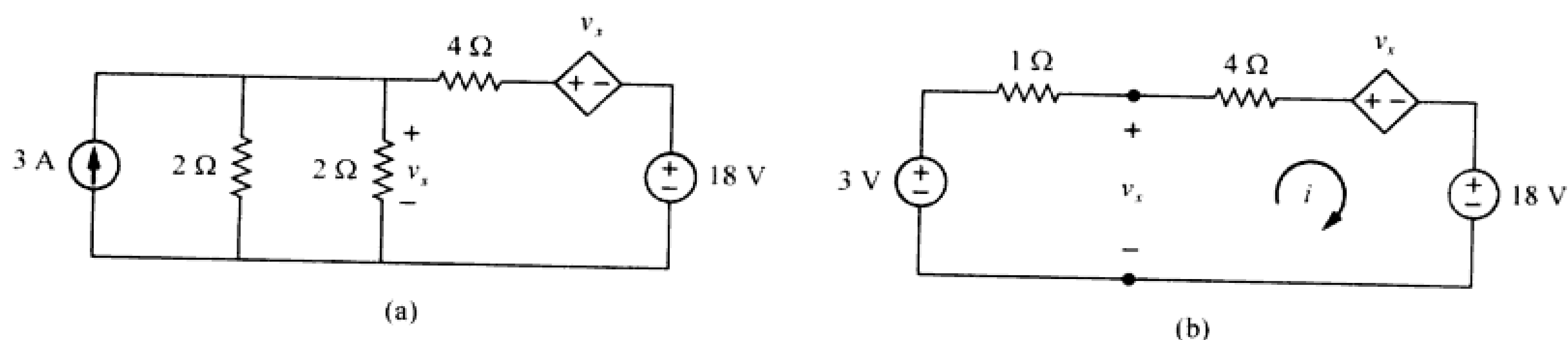


图 4-21 对图 4-20 所示电路进行电源变换后得到的例题 4-7 的电路原理图

对仅包含3 V电压源，1 Ω电阻和v_x的回路应用KVL，得到：

$$-3+1i+v_x=0 \quad \Rightarrow \quad v_x=3-i \tag{4-7-2}$$

代入式(4-7-1)得到：

$$15+5i+3-i=0 \quad \Rightarrow \quad i=-4.5\text{ A}$$

另外，对图4-21b中包含v_x，4Ω电阻、电压控制电压源和18V电压源的回路应用KVL，同样可得：

$$-v_x+4i+v_x+18=0 \quad \Rightarrow \quad i=-4.5\text{ A}$$

于是：$v_x=3-i=7.5$ V。

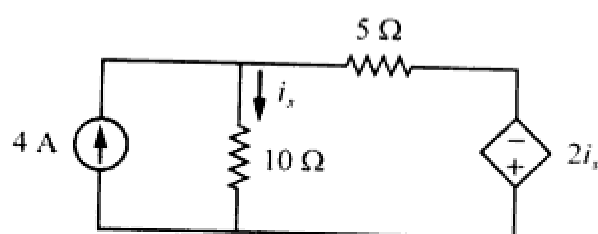


图 4-22 练习题 4-7 的电路原理图

练习题4-7 试利用电源变换的方法求图4-22所示电路中的i_x。

答 1.176 A。

4.5 戴维南定理

实际电路经常会出现这样的情况：电路中某个特定的元件（通常称为*负载*）是可变的，而其他元件则是固定不变的。典型的例子是家中的电源插座可以连接不同的家用电器，从而形成可变负载。可变元件每改变一次，就要对整个电路重新分析一遍。为了避免这个问题，戴维南定理提供了一种用等效电路取代电路中不变部分的方法。

根据戴维南定理，图4-23a所示的线性电路可以用图4-23b所示的电路来取代。（图4-23中的负载可以是单个电阻，也可以是另一个电路）。图4-23b中端口$a-b$左边的电路称为**戴维南等效电路**（Thevenin equivalent circuit），它是由法国电报工程师利昂·戴维南（M. Leon Thevenin，1857—1926）于1883年提出的。

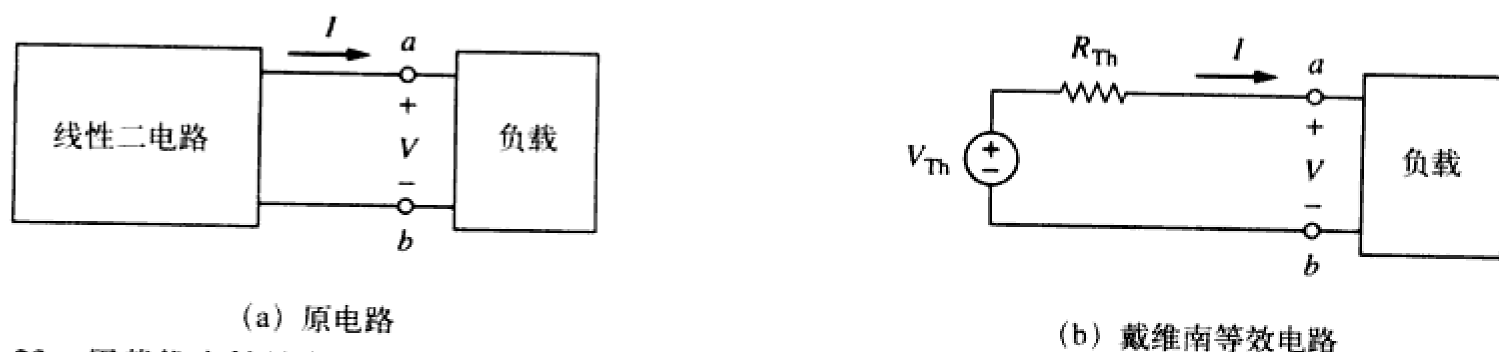


图 4-23 用戴维南等效电路取代线性二端电路

戴维南定理：线性二端电路可以用一个由电压源V_{Th}和与之串联的电阻R_{Th}组成的等效电路所取代，其中V_{Th}为端口的开路电压，R_{Th}为独立源关闭时端口的输入（或等效）电阻。

戴维南定理的证明将在本章稍后的4.7节中给出，现在关注的主要问题是如何求出戴维南等效电压V_{Th}与电阻R_{Th}。为此，假定图4-23所示的两个电路等效。如果两个电路具有相同的端口电压–电流

关系，则称这两个电路是等效的。下面就找出使得图4-23所示两个电路等效的条件。如果使端口a-b开路（去掉负载），即无电流流过，那么由于两电路等效，从而图4-23a中a、b两端的开路电压必定等于图4-23b中的电压V_{Th}，因此，V_{Th}就是端口的开路电压v_{oc}，如图4-24a所示，即：

$$V_{Th} = v_{oc} \tag{4-6}$$

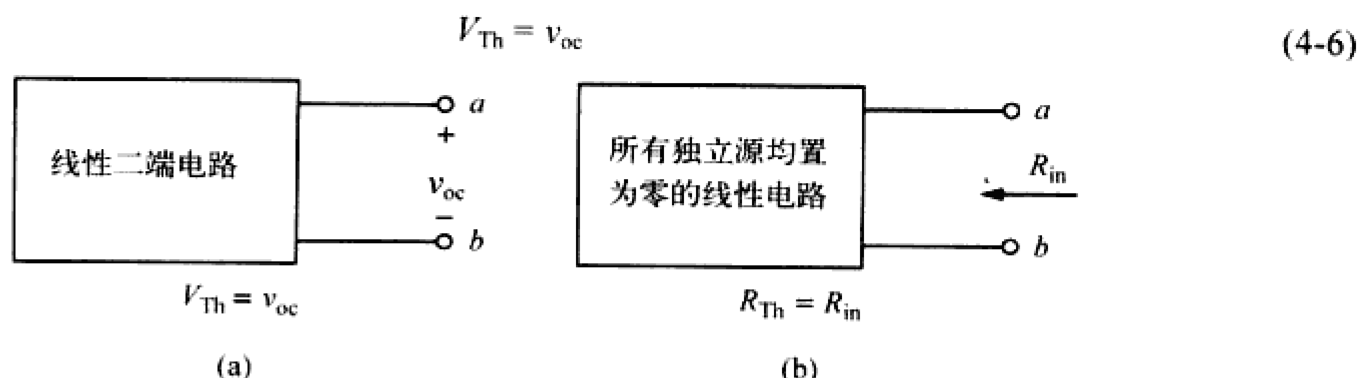


图 4-24 确定 V_{Th} 与 R_{Th}

另外，在断开负载，使端口a-b开路的同时，将电路的所有独立源关闭。既然两个电路是等效的，那么图4-23a中a、b两端的输入电阻（即等效电阻）应该等于图4-23b中的R_{Th}，因此，R_{Th}就是当独立源关闭时端口的输入电阻，如图4-24b所示，即：

$$R_{Th} = R_{in} \tag{4-7}$$

利用上述思想求戴维南电阻R_{Th}时，需考虑如下两种情况：

情况1：当网络中不含有受控源时，关闭所有独立源。此时R_{Th}就是由a、b两端向网络看进去的输入电阻，如图4-24b所示。

情况2：当网络中包含受控源时，关闭所有独立源，根据叠加原理，由于受控源受电路变量的控制，因而不能关闭。此时可以在a、b两端施加一个电压源v_o，并计算出相应的电流i_o，即可得到$R_{Th} = v_o/i_o$，如图4-25a所示。或者在a、b两端插入一个电流源i_o，如图4-25b所示，并计算出端口电压v_o，同样可得到$R_{Th} = v_o/i_o$。利用这两种方法所得到的结果是相同的，任何一种方法都可以假定v_o与i_o取任意值，例如假定$v_o = 1$ V或$i_o = 1$ A，甚至可以对v_o或i_o的取值不作任何假设。

稍后还会介绍求R_{Th}的另一种方法，即$R_{Th} = \frac{v_{oc}}{i_{sc}}$。

将所有独立源均置为零的电路　a　i_o　v_o　b　$R_{Th} = \frac{v_o}{i_o}$

(a)

将所有独立源均置为零的电路　a　+　v_o　−　b　i_o　$R_{Th} = \frac{v_o}{i_o}$

(b)

图 4-25 电路中包含受控源时，求 R_{Th} 的方法

经常会出现R_{Th}取负数的情况，此时的负电阻（$v = -iR$）表示电路是提供功率的，当电路中含有受控源时，就可能出现这种情况，例题4-10将举例说明。

戴维南定理在电路分析中是非常重要的。利用该定理可以简化电路，可以将大规模电路用一个独立电压源和一个串联电阻来取代，因而，在电路设计中是一个强有力的工具。

如前所述，带有可变负载的线性电路可以用戴维南等效电路取代除负载以外的电路，该等效电路的外部特性与原电路完全相同。在如图4-26a所示的终端接有负载R_L的线性电路中，一旦找到该负

载端的戴维南等效电路，如图4-26b所示，则可以很容易地确定流过该负载的电流I_L和该负载两端的电压V_L。由图4-26b，可得：

$$I_L = \frac{V_{Th}}{R_{Th}+R_L} \tag{4-8a}$$

$$V_L = R_L I_L = \frac{R_L}{R_{Th}+R_L}V_{Th} \tag{4-8b}$$

由图4-26b可以看出，戴维南等效电路就是一个简单的分压器，通过观察就可以方便地得到负载电压V_L。

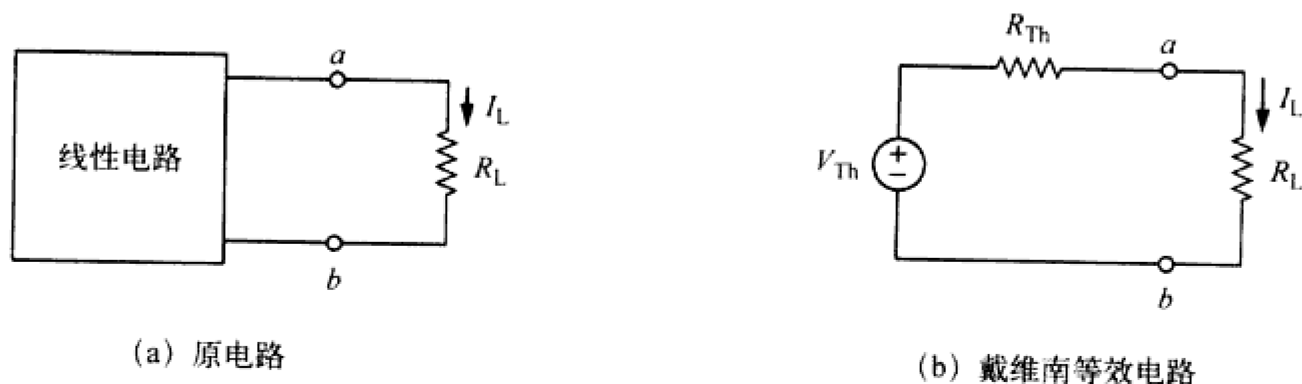


图 4-26 带有负载的电路

例题4-8 试求图4-27所示的电路中端口a-b两端左侧的戴维南等效电路，之后求出当$R_L=6\ \Omega$、$16\ \Omega$和$36\ \Omega$时，流经R_L的电流。

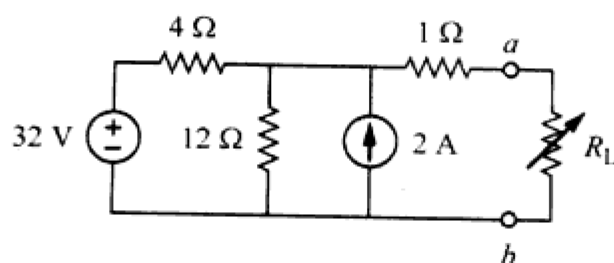


图 4-27 例题 4-8 的电路原理图

解 计算R_{Th}时，关闭32 V电压源（将其短路）和2 A电流源（将其开路），从而得到如图4-28a所示的电路，于是：

$$R_{Th} = 4 \parallel 12 + 1 = \frac{4\times 12}{16} + 1 = 4\ \Omega$$

下面利用图4-28b所示电路计算V_{Th}，对图中两个回路应用网孔分析法，得到：

$$-32 + 4i_1 + 12(i_1 - i_2) = 0, \qquad i_2 = -2\ \text{A}$$

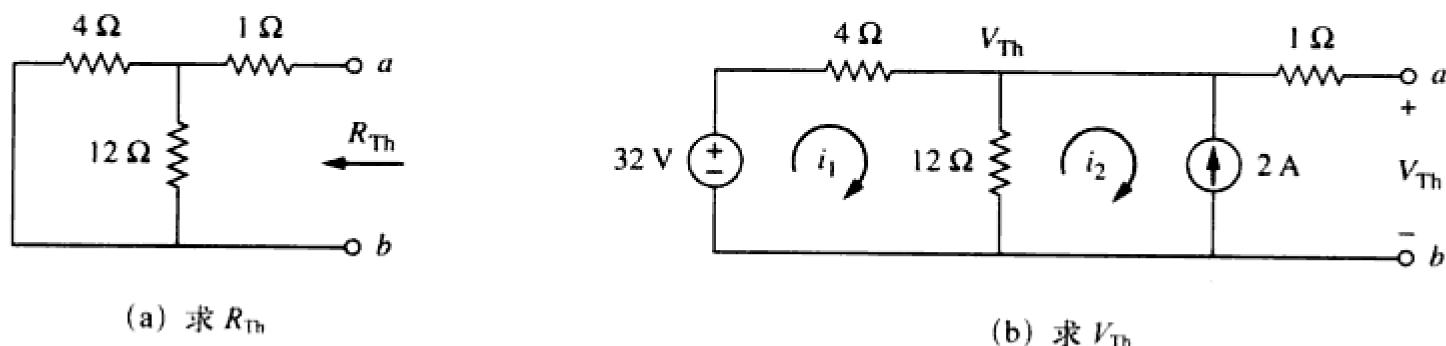


图 4-28 例题 4-8 的电路原理图

求解i_1，得到$i_1=0.5$ A，于是：

$$V_{Th} = 12(i_1 - i_2) = 12(0.5 + 2.0) = 30\ \text{V}$$

另外，采用节点分析法求解更容易，由于没有电流流过1 Ω电阻，因而可以忽略该电阻。对上面的节点应用KCL，可得：

$$\frac{32 - V_{Th}}{4} + 2 = \frac{V_{Th}}{12}$$

即

$$96-3V_{Th}+24=V_{Th} \quad \Rightarrow \quad V_{Th}=30\text{ V}$$

与上述结果相同。还可以采用电源变换的方法求解V_{Th}。

戴维南等效电路如图4-29所示，由此得到流过R_L的电流为：

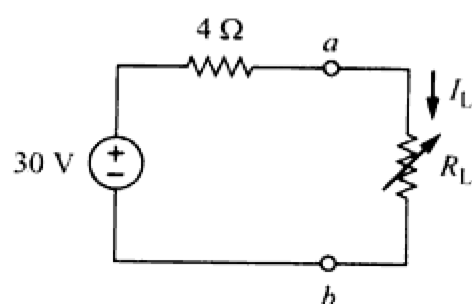


图 4-29 例题 4-8 的戴维南等效电路

$$I_L=\frac{V_{Th}}{R_{Th}+R_L}=\frac{30}{4+R_L}$$

当$R_L=6\ \Omega$时，

$$I_L=\frac{30}{10}=3\text{ A}$$

当$R_L=16\ \Omega$时，

$$I_L=\frac{30}{20}=1.5\text{ A}$$

当$R_L=36\ \Omega$时，

$$I_L=\frac{30}{40}=0.75\text{ A}$$

练习题4-8 试利用戴维南定理确定图4-30所示电路中端口$a-b$左侧的等效电路，之后计算电流I。

答 $V_{Th}=6\text{ V}$，$R_{Th}=3\ \Omega$，$I=1.5\text{ A}$。

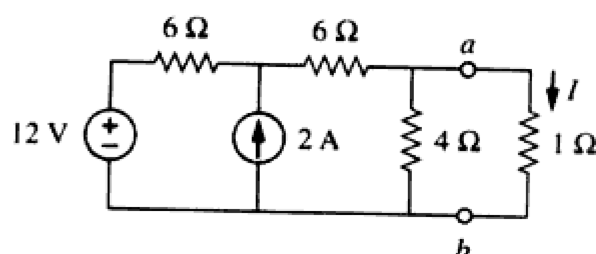


图 4-30 练习题 4-8 的电路原理图

例题4-9 试求图4-31所示电路从端口$a-b$看进去的戴维南等效电路。

解 与上例中的电路不同，本电路中含有一个受控源。为求出R_{Th}，将独立源置为零，但保留受控源不变。然而，由于存在受控源，需在a、b两端接一个电压源v_o来激励电路，如图4-32a所示。为便于计算，可以假定$v_o=1\text{V}$（该电路为线性电路）。目的是要求出流过该端口的电流i_o，从而得到$R_{Th}=1/i_o$（另外，也可以插入一个1 A的电流源，求出相应的电压v_o，从而得到$R_{Th}=v_o/1$）。

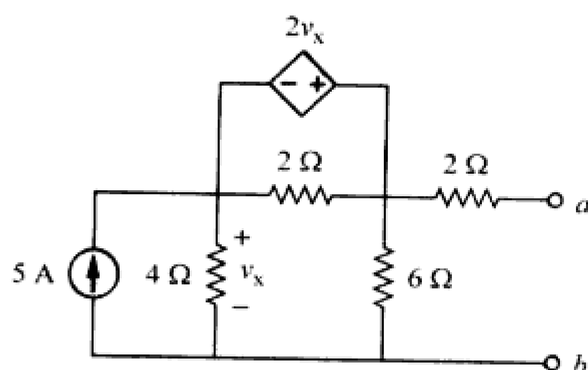


图 4-31 例题 4-9 的电路原理图

对图4-32a所示电路中的回路1应用网孔分析法，得到：

$$-2v_x+2(i_1-i_2)=0，\text{即}\quad v_x=i_1-i_2$$

而$-4i_2=v_x=i_1-i_2$，因此：

$$i_1=-3i_2 \tag{4-9-1}$$

对回路2与回路3应用KVL，得到：

$$4i_2+2(i_2-i_1)+6(i_2-i_3)=0 \tag{4-9-2}$$

$$6(i_3-i_2)+2i_3+1=0 \tag{4-9-3}$$

解之得：

$$i_3=-\frac{1}{6}\text{ A}$$

而$i_o=-i_3=1/6\text{ A}$，因此：

$$R_{Th}=\frac{1\text{ V}}{i_o}=6\ \Omega$$

求V_{Th}就是要求出图4-32b所示电路中的v_{oc}，利用网孔分析法，可得：

$$i_1=5 \tag{4-9-4}$$

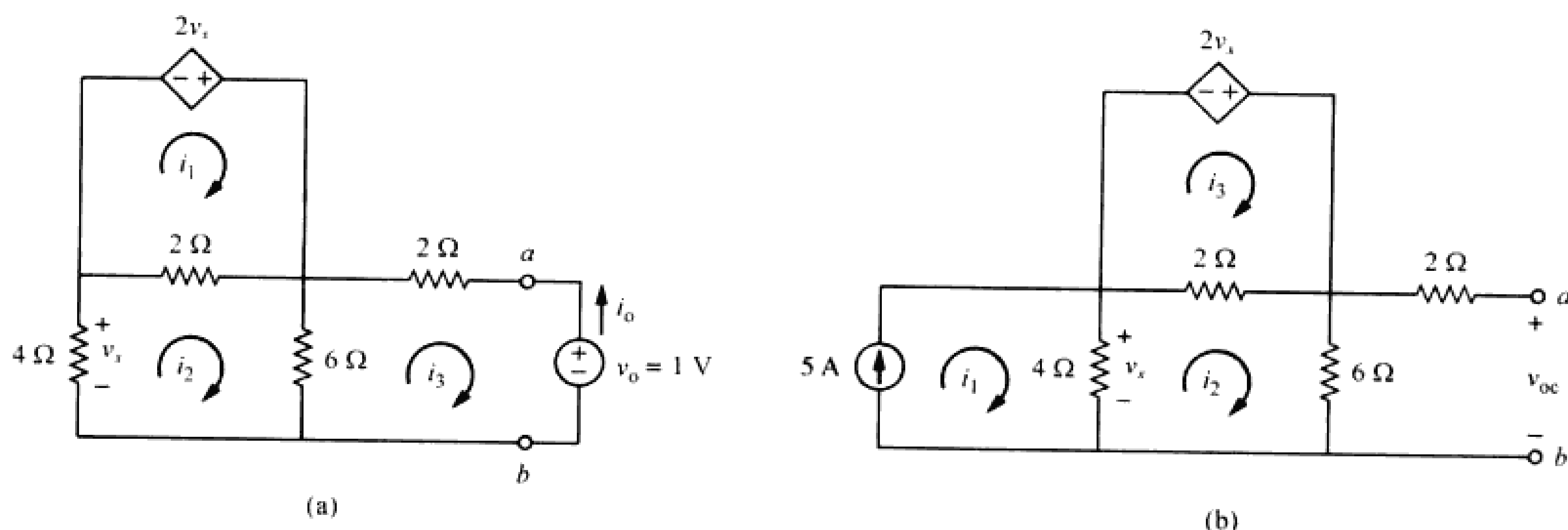


图 4-32 求例题 4-9 中的 R_{Th} 与 V_{Th} 的电路原理图

$$-2v_x + 2(i_3 - i_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_x = i_3 - i_2 \qquad (4\text{-}9\text{-}5)$$

$$4(i_2 - i_1) + 2(i_2 - i_3) + 6i_2 = 0$$

即

$$12i_2 - 4i_1 - 2i_3 = 0 \qquad (4\text{-}9\text{-}6)$$

而且，$4(i_1 - i_2) = v_x$，解上述方程，可得$i_2 = 10/3$，因此：

$$V_{Th} = v_{oc} = 6\ i_2 = 20\ \text{V}$$

最后得出的戴维南等效电路如图4-33所示。

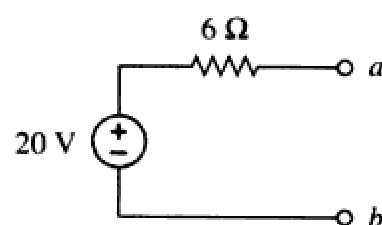


图 4-33 图 4-31 所示电路的戴维南等效电路

练习题4-9 试求图4-34所示电路端口左侧的戴维南等效电路。

答 $V_{Th} = 5.33$ V，$R_{Th} = 0.44\ \Omega$。

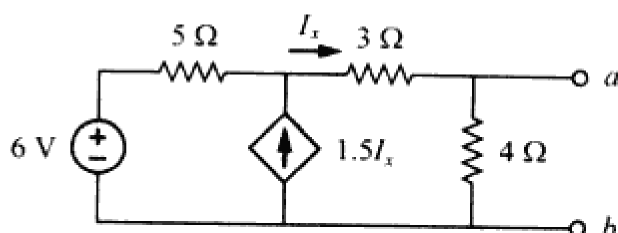


图 4-34 练习题 4-9 的电路原理图

例题4-10 试确定图4-35a所示电路从端口a–b看进去的戴维南等效电路。

解

(1) **明确**问题。本例题所要解决的问题已经很清楚，即要确定图4-35a所示电路的戴维南等效电路。

(2) **表述**对问题的理解。本例电路中包括相互并联的2 Ω电阻和4 Ω电阻，这两个电阻又与受控电流源相并联，求解本题非常重要的一点是，电路中不包含独立电源。

(3) 确定**可选**解。首先要考虑的问题是，由于本例电路中不包括独立电源，因此必须外接电源激励该电路。另外，如果没有独立电源，就无法求出V_{Th}的值，而仅能求解R_{Th}的值。

激励本例电路最简单的方法是利用1 V电压源或者1 A电流源。由于本例最终要求出等效电阻（正电阻或者负电阻），所以最好采用电流源和节点分析法，这样可以在输出端得到等于电阻值的电压（因为流过电路的电流为1 A，所以v_o就等于1乘以等效电阻值）。

另一种方法是，利用1 V电压源激励该电路，并采用网孔分析法求出等效电阻。

(4) **尝试**问题的不同解法。

首先写出图4-35b中节点a处的节点方程，假定$i_o = 1$ A。

$$2i_x + (v_o - 0)/4 + (v_o - 0)/2 + (-1) = 0 \qquad (4\text{-}10\text{-}1)$$

由于要求解的未知变量有两个，但仅有一个方程，因此，需要如下约束方程：

$$i_x = (0 - v_o)/2 = -v_o/2 \qquad (4\text{-}10\text{-}2)$$

将式(4-10-2)代入式(4-10-1)，得到：

$$2(-v_o/2)+(v_o-0)/4+(v_o-0)/2+(-1)=0$$

$$=\left(-1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)v_o-1 \quad 或 \quad v_o=-4\text{ V}$$

由于$v_o = 1\times R_{Th}$，于是$R_{Th} = v_o/1 = \mathbf{-4\ \Omega}$。

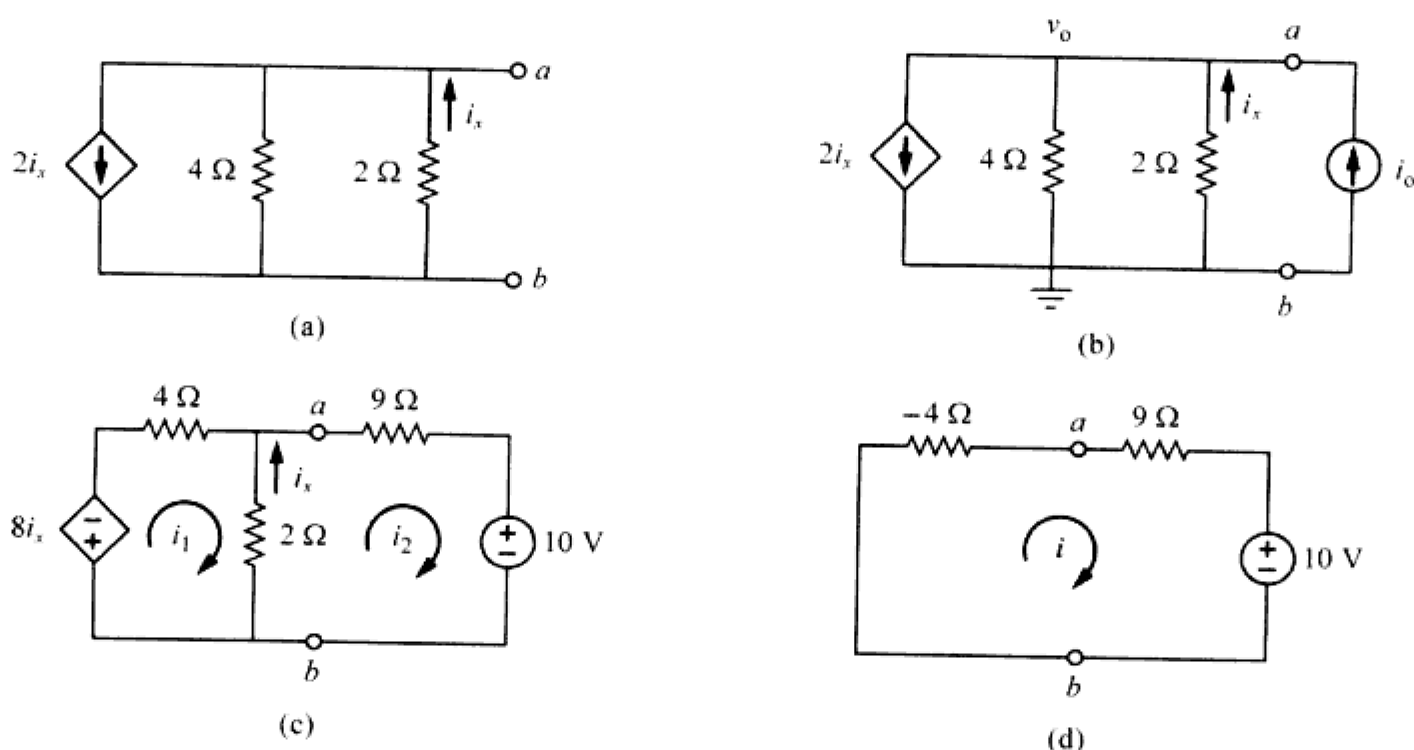


图 4-35　例题 4-10 的电路原理图

等效电阻值为负值表明，按照无源符号规约，图4-35a所示电路是提供功率的。当然，图4-35a中的电阻是不能提供功率的（它们吸收功率），只有受控源是提供功率的，本例题说明了如何利用受控源和电阻来模拟负电阻。

（5）**评价**得到的结果。首先注意到，所求得的等效电阻为负值，在无源电路中是不可能出现这种情况的，但在本例的电路中，确实存在一个有源器件（即受控电流源），因此，等效电路实际上应该是一个可以提供功率的有源电路。

下面必须对答案进行评价。评价的最佳方式是利用另一种不同的求解方法对结果进行验证，看是否能够得到相同的解。假定在原电路输出端串联连接一个9 Ω电阻和一个10 V电压源，并且在戴维南等效电路的输出端也连接同样的器件。为了使电路易于求解，可以利用电源变换的方法将相互并联的受控电流源和4 Ω电阻转换为相互串联的受控电压源和4 Ω电阻，这样就得到如图4-35c所示的电路。

于是，可以写出两个网孔方程：

$$8i_x + 4i_1 + 2(i_1 - i_2) = 0$$

$$2(i_2 - i_1) + 9i_2 + 10 = 0$$

注意，现在仅得到两个方程，但存在三个未知变量，因此，需要一个约束方程，即：

$$i_x = i_2 - i_1$$

这样就可以得到回路1的新方程，简化后可得：

$$(4+2-8)\,i_1 + (-2+8)\,i_2 = 0$$

即

$$-2\,i_1 + 6\,i_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1 = 3\,i_2$$

$$-2\,i_1 + 11\,i_2 = -10$$

将上述第一个方程代入第二个方程可得：

$$-6\,i_2+11\,i_2=-10 \quad 即 \quad i_2=-10/5=\mathbf{-2\,A}$$

由于仅有一个如图4-35d所示的回路，所以利用戴维南等效电路很容易得到：

$$-4\,i+9\,i+10=0 \quad 即 \quad i=-10/5=\mathbf{-2\,A}$$

(6) 对结果是否**满意**？至此已经很清楚地求出了本例题所要求的等效电路，并且验证了答案的有效性（将利用等效电路得到的结果与对原电路增加负载后得到的结果进行比较）。可以将上述求解过程作为本题的答案。

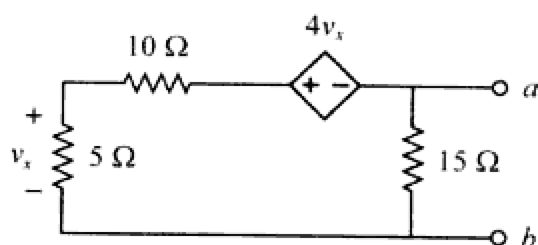


图 4-36 练习题 4-10 的电路原理图

练习题4-10 试求图4-36所示电路的戴维南等效电路。

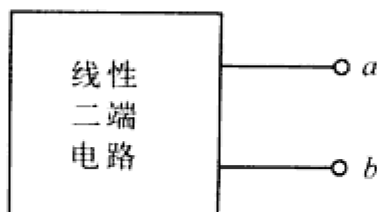
答 $V_{Th}=0\text{ V}$，$R_{Th}=-7.5\Omega$。

4.6 诺顿定理

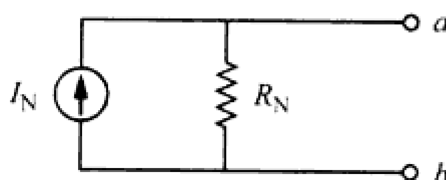
1926年，也就是戴维南公布他的定理43年之后，贝尔电话实验室的美国工程师诺顿(E.L.Norton)也提出了类似的定理——诺顿定理。

诺顿定理：线性二端电路可以用由电流源I_N和与之并联的电阻R_N构成的等效电路所取代，其中I_N为流过端口的短路电流。R_N为独立源关闭时，端口的输入电阻或等效电阻。

于是，图4-37a所示电路可以用图4-37b所示的等效电路来取代。



(a) 原电路



(b) 诺顿等效电路

图 4-37 电路及其诺顿等效电路

诺顿定理的证明将在下一节中给出，本节主要讨论如何确定R_N与I_N。R_N的确定方法与上一节R_{Th}的确定方法基本相同，实际上，由电源变换的关系可知，戴维南等效电阻与诺顿等效电阻是相等的，即：

$$\boxed{R_N=R_{Th}} \tag{4-9}$$

求诺顿等效电流I_N就是要求出图4-37所示两个电路中由端点a流向端点b的短路电流，很明显，图4-37b所示电路的短路电流就是I_N，该电流必定与图4-37a所示电路中从端点a流向端点b的短路电流相同，因为这两个电路是等效的，于是如图4-38所示，有：

$$I_N=i_{sc} \tag{4-10}$$

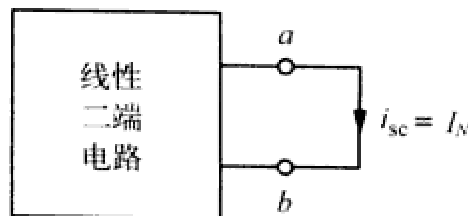


图 4-38 求诺顿等效电流 I_N

在图4-38中，受控源与独立源的处理方法与采用戴维南定理时的处理方法相同。

诺顿定理与戴维南定理的两个基本关系为：$R_N=R_{Th}$，即式(4-9)和

$$\boxed{I_N=\frac{V_{Th}}{R_{Th}}} \tag{4-11}$$

显然，这就是电源变换的基本公式，正因为如此，通常也称电源变换为戴维南–诺顿转换。

戴维南等效电路与诺顿等效电路是通过电源变换联系起来的。

由于式(4-11)将V_{Th}、I_N与R_{Th}三者联系在一起，所以要确定戴维南等效电路或诺顿等效电路，就是要求出：

- a、b两端的开路电压v_{oc}。
- 流过a、b的短路电流i_{sc}。
- 所有独立源关闭时，a、b两端的等效电阻或输入电阻R_{in}。

只要用最简便的方法计算出上述三个参数中的两个，就可以根据欧姆定理求得第三个参数，例题4-11将会对这个问题进行举例说明。另外，因为：

$$V_{Th} = v_{oc} \tag{4-12a}$$

$$I_N = i_{sc} \tag{4-12b}$$

$$R_{Th} = \frac{v_{oc}}{i_{sc}} = R_N \tag{4-12c}$$

所以，通过开路测试和短路测试就足以求出至少包含一个独立源的电路的戴维南等效电路或诺顿等效电路。

例题4-11 试确定图4-39所示电路在端口a–b处的诺顿等效电路。

解 采用与确定戴维南等效电路中电阻R_{Th}一样的方法求R_N，设电路中的独立源为零，从而得到如图4-40a所示的电路，由该电路可以求出R_N，即：

$$R_N = 5 \parallel (8+4+8) = 5 \parallel 20 = \frac{20\times 5}{25} = 4\ \Omega$$

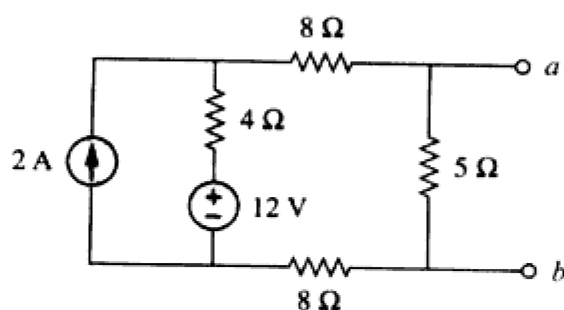
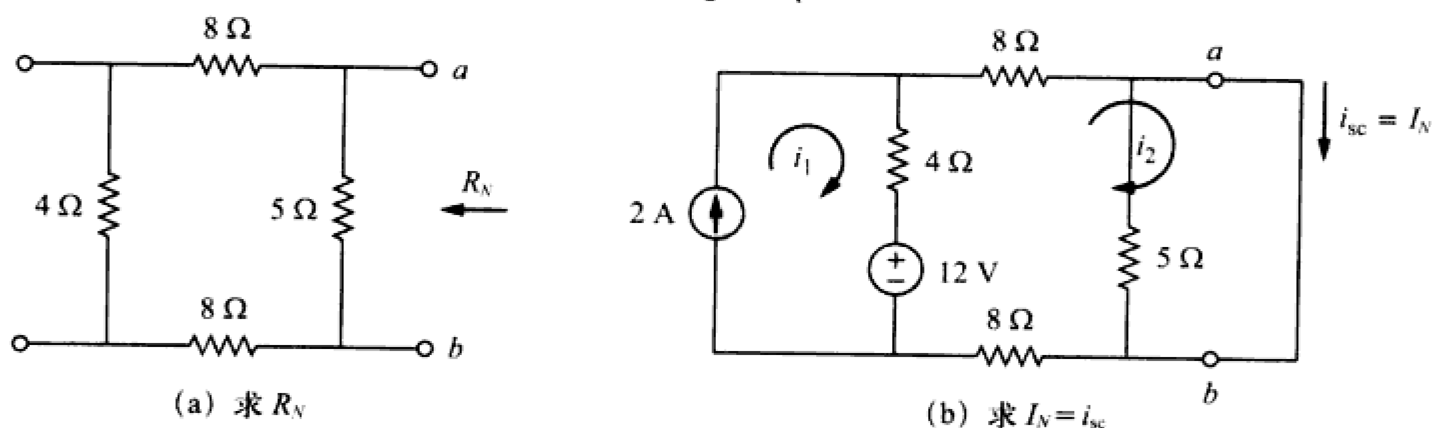
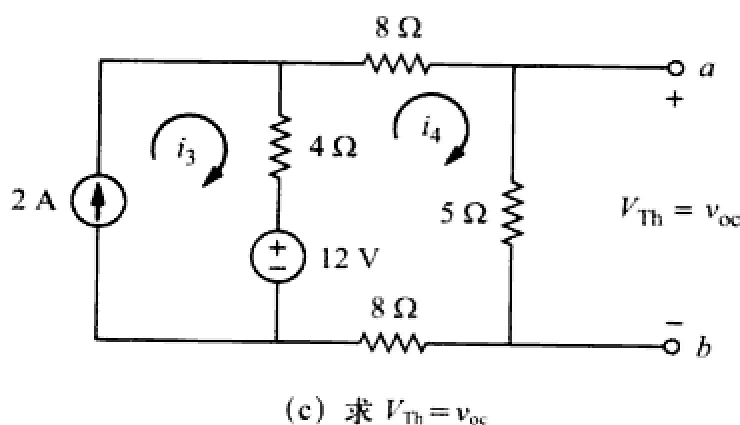


图 4-39 例题 4-11 的电路原理图

求I_N时将a、b两端短路，得到如图4-40b所示的电路。忽略5 Ω电阻，因为它已被短路，利用网孔分析法可得：

$$i_1 = 2\ \text{A}, \qquad 20\,i_2 - 4\,i_1 - 12 = 0$$





(c) 求 $V_{Th} = v_{oc}$

图 4-40 例题 4-11 的电路原理图

由上述方程得到：

$$i_2 = 1\text{ A} = i_{sc} = I_N$$

另外，还可以由V_{Th}/R_{Th}求出I_N，其中V_{Th}为图4-40c所示电路中a、b两端的开路电压。利用网孔分析法，可得：

$$i_3 = 2\text{ A}$$

$$25\, i_4 - 4\, i_3 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_4 = 0.8\text{ A}$$

并且

$$v_{oc} = V_{Th} = 5\, i_4 = 4\text{ V}$$

因此，

$$I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} = \frac{4}{4} = 1\text{A}$$

结果与前面一样，这同时也验证了式(4-12c)，即$R_{Th} = v_{oc}/i_{sc} = 4/1 = 4\ \Omega$。于是诺顿等效电路如图4-41所示。

练习题4-11 试求图4-42所示电路在端口a-b处的诺顿等效电路。

答 $R_N = 3\ \Omega$，$I_N = 4.5\text{ A}$。

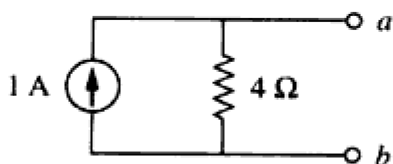


图 4-41 图 4-39 所示电路的诺顿等效电路

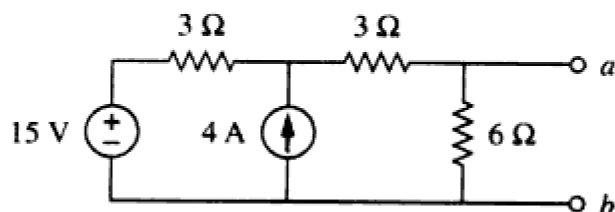


图 4-42 练习题 4-11 的电路原理图

例题4-12 试利用诺顿定理，确定图4-43所示电路中在端口$a-b$处的R_N与I_N。

解 计算R_N时，将独立电压源置为零，端口$a-b$处连接一个电压$v_o = 1\ \text{V}$（或任意电压值v_o）的电压源，得到如图4-44a所示的电路。图中由于4 Ω电阻被短路，故将其忽略不计，同时5 Ω电阻、电压源和受控电流源三者是并联的，因此，$i_x = 0$。在节点a处，有$i_o = \frac{1v}{5\Omega} = 0.2\text{ A}$，并且，

$$R_N = \frac{v_o}{i_o} = \frac{1}{0.2} = 5\Omega$$

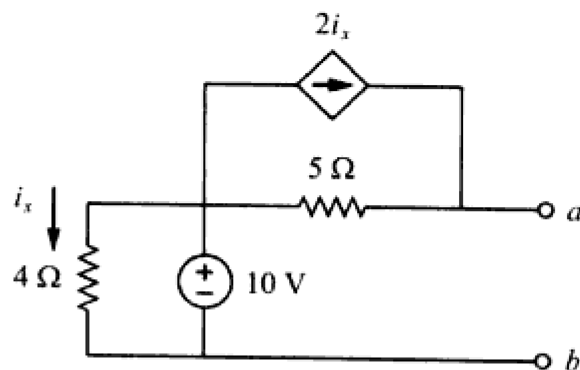


图 4-43 例题 4-12 的电路原理图

计算I_N时，将a、b两端短路，并求出如图4-44b所示电路中的电流i_{sc}。由该图可以看出，4 Ω电阻、10V电压源、5 Ω电阻与受控电流源均为并联连接，因此：

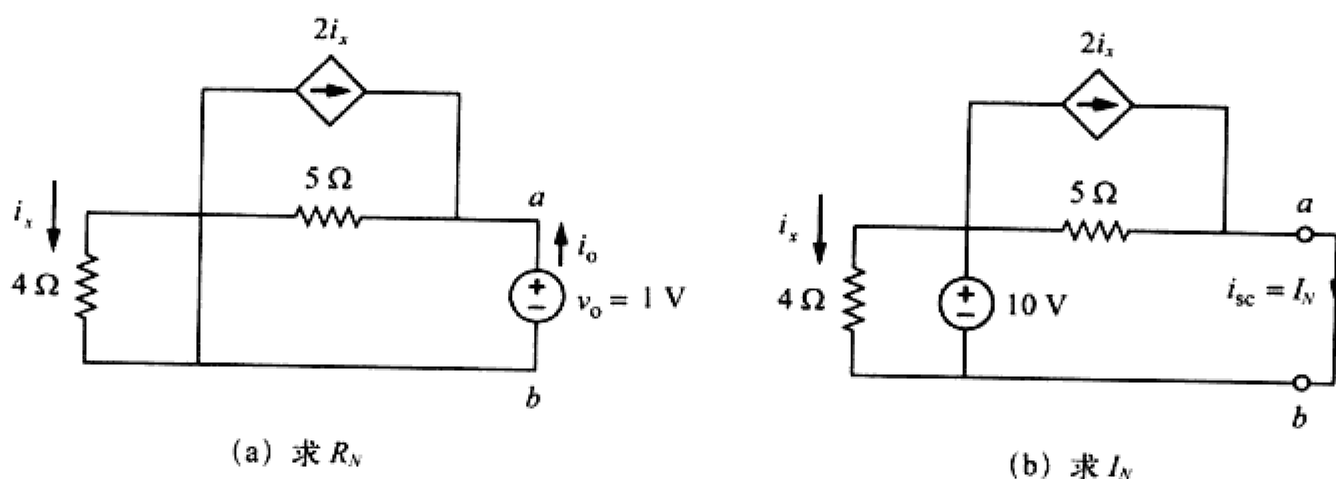
$$i_x = \frac{10}{4} = 2.5\text{ A}$$

在节点a处应用KCL可得：

$$i_{sc} = \frac{10}{5} + 2\, i_x = 2 + 2\,(2.5) = 7\text{ A}$$

于是，

$$I_N = 7\text{ A}$$



(a) 求 R_N　　(b) 求 I_N

图 4-44　例题 4-12 的电路原理图

练习题4-12　试求图4-45所示电路端口$a-b$处的诺顿等效电路。

答　$R_N = 1\,\Omega$，$I_N = 10$ A。

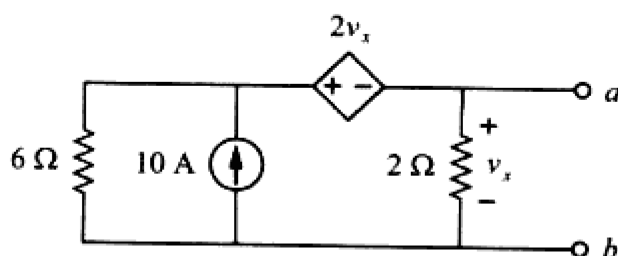
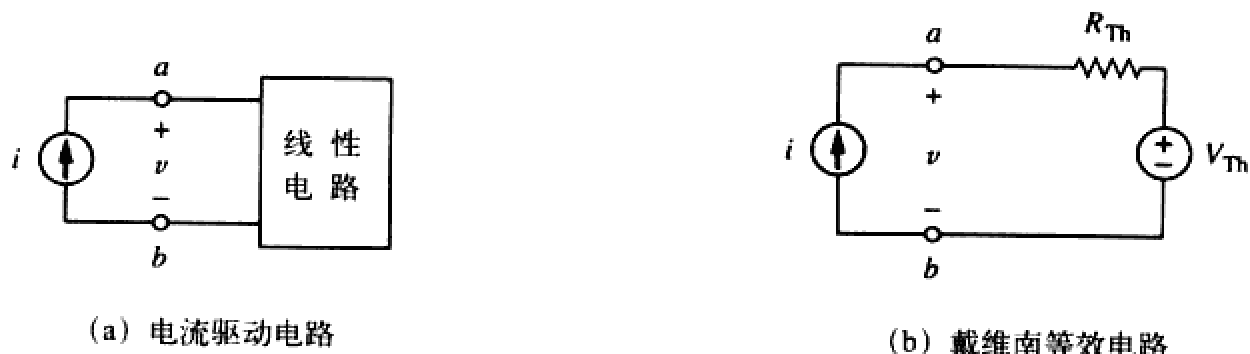


图 4-45　练习题 4-12 的电路原理图

4.7　†戴维南定理与诺顿定理的推导

本节利用叠加原理证明戴维南定理与诺顿定理。



(a) 电流驱动电路　　(b) 戴维南等效电路

图 4-46　戴维南定理的推导

考虑如图4-46a所示的线性电路，假定该电路中包含有电阻、受控源和独立源。外部电源提供的电流通过端口$a-b$进入该电路。现在的目的是要证明图4-46a所示电路在端口$a-b$的电压-电流关系与图4-46b所示的戴维南等效电路在端口$a-b$的电压-电流关系相同。为简单起见，假定图4-46a所示的线性电路中包含两个独立电压源v_{s1}、v_{s2}和两个独立电流源i_{s1}、i_{s2}。利用叠加原理可以得到任意电路变量，如端电压v，也就是说，要考虑包括外部电源i在内的各独立源的贡献。根据叠加原理，端电压v为：

$$v = A_0 i + A_1 v_{s1} + A_2 v_{s2} + A_3 i_{s1} + A_4 i_{s2} \tag{4-13}$$

其中，A_0、A_1、A_2、A_3和A_4均为常数。式(4-13)等号右边各项为相关独立源的贡献，即$A_0\,i$是外部电流源i对v的贡献，$A_1\,v_{s1}$是电压源v_{s1}对v的贡献，依此类推。将表示内部独立源贡献的各项合并为B_0，则式(4-13)成为：

$$v = A_0 i + B_0 \tag{4-14}$$

其中，$B_0 = A_1\,v_{s1} + A_2\,v_{s2} + A_3\,i_{s1} + A_4\,i_{s2}$。下面计算常数$A_0$与$B_0$的值。当$a$、$b$两端开路时，$i = 0$，并且$v$

$=B_0$，因此B_0为开路电压v_{oc}，与V_{Th}相同，于是：

$$B_0 = V_{Th} \tag{4-15}$$

当所有内部电源都关闭时，$B_0=0$，此时电路可以用等效电阻R_{eq}来取代，R_{eq}与R_{Th}相同，于是，式(4-14)成为：

$$v = A_0 i = R_{Th} i \quad \Rightarrow \quad A_0 = R_{Th} \tag{4-16}$$

将A_0与B_0的值代入式(4-14)，得到：

$$v = R_{Th} i + V_{Th} \tag{4-17}$$

即图4-46b所示电路在端口a-b的电压-电流关系。因此，证明了图4-46a与图4-46b两个电路是等效的。



(a) 电压驱动电路　　(b) 诺顿等效电路

图 4-47　诺顿定理的推导

如图4-47a所示，当用电压源v驱动同一线性电路时，流入该电路的电流利用叠加原理可以表示为：

$$i = C_0 v + D_0 \tag{4-18}$$

其中，$C_0\,v$是外部电压源v对电流i的贡献，D_0是所有内部独立源对i的贡献之和。当端口$a-b$被短路时，$v=0$，于是$i=D_0=-i_{sc}$，其中i_{sc}为从端点a流出的短路电流，与诺顿电流I_N相同，即：

$$D_0 = -I_N \tag{4-19}$$

当所有内部独立源均被关闭时，$D_0=0$，电路可以用等效电阻R_{eq}（或等效电导$G_{eq}=1/R_{eq}$）所取代，R_{eq}就是R_{Th}或R_N。于是，式(4-18)变为：

$$i = \frac{v}{R_{Th}} - I_N \tag{4-20}$$

即图4-47b所示电路在端口$a-b$处的电压−电流关系，从而证明了图4-47a与图4-47b两个电路是等效的。

4.8 最大功率传递定理

在许多实际应用场合，所设计的电路用于为负载提供功率。在通信等应用中，希望传递给负载的功率最大。本节在给定系统及其内部损耗的条件下，讨论给负载的最大功率传递问题。应该注意，为负载传递最大功率会造成电路内部损耗大于或等于传递给负载的功率。

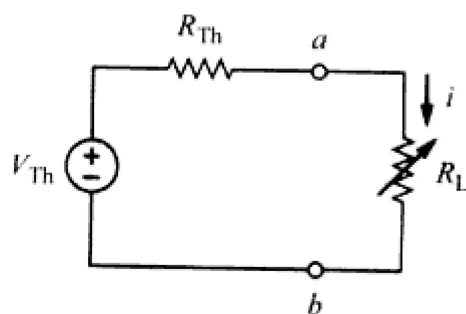


图 4-48　最大功率传递电路

在计算线性电路传递给负载的最大功率时，戴维南等效电路是非常有用的。假定电路的负载R_L可调，如果除负载以外的整个电路用戴维南等效电路取代，如图4-48所示，则传递给负载的功率为：

$$p = i^2 R_L = \left(\frac{V_{Th}}{R_{Th}+R_L}\right)^2 R_L \tag{4-21}$$

对于给定电路，V_{Th}与R_{Th}是固定的。改变负载电阻R_L时，传递给负载的功率变化曲线如图4-49

所示。由图4-49可以看出，当R_L很小或很大时，传递给负载的功率都很小，但当R_L取0～∞之间的某个值时，传递给负载的功率存在最大值。下面证明当$R_L = R_{Th}$时，出现这个功率的最大值，此即最大功率定理（maximum power theorem）。

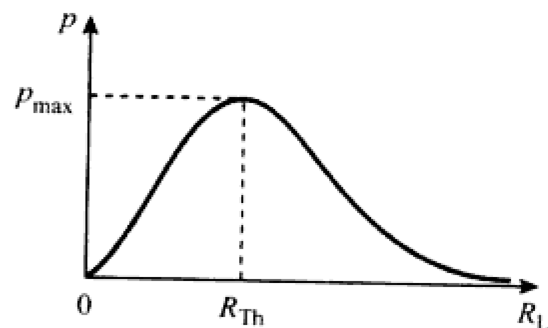


图 4-49 传递给负载的功率与电阻 R_L 之间的函数关系曲线

当负载电阻等于从负载端看进去的戴维南等效电阻（$R_L = R_{Th}$）时，传递给负载的功率最大。

为了证明最大功率传递定理，对式(4-21)中的p关于对R_L求微分，并令微分后的结果等于零，得到：

$$\frac{dp}{dR_L} = V_{Th}^2\left[\frac{(R_{Th}+R_L)^2 - 2R_L(R_{Th}+R_L)}{(R_{Th}+R_L)^4}\right]$$

$$= V_{Th}^2\left[\frac{(R_{Th}+R_L-2R_L)}{(R_{Th}+R_L)^3}\right] = 0$$

即：

$$0 = (R_{Th}+R_L-2R_L) = (R_{Th}-R_L) \tag{4-22}$$

于是得到：

$$\boxed{R_L = R_{Th}} \tag{4-23}$$

式(4-23)说明当负载电阻R_L等于戴维南等效电阻R_{Th}时，实现最大功率传递，只要证明$d^2p/dR_L^2 < 0$，就可以说明满足式(4-23)的条件时，才会实现最大功率传递。

将式(4-23)代入式(4-21)，得到所传递的最大功率为：

$$\boxed{p_{max} = \frac{V_{Th}^2}{4R_{Th}}} \tag{4-24}$$

当$R_L = R_{Th}$时，称电源与负载相匹配。

仅当$R_L = R_{Th}$时式(4-24)成立，当$R_L \neq R_{Th}$时，需利用式(4-21)计算传递给负载的功率。

例题4-13 试求图4-50所示电路中，实现最大功率传递时的负载电阻值R_L，并计算相应的最大功率。

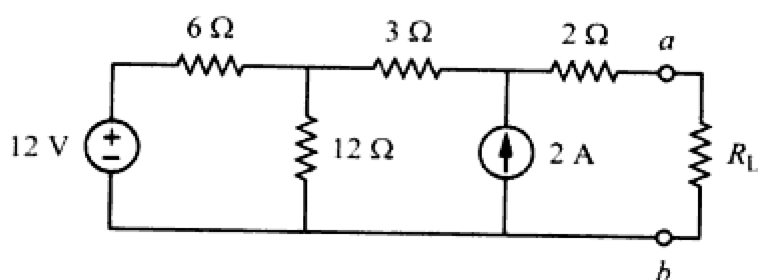


图 4-50 例题 4-13 的电路原理图

解 需求出从端口$a-b$看进去的戴维南电阻R_{Th}以及端口$a-b$的戴维南电压V_{Th}。为求出R_{Th}，利用图4-51a所示电路得到：

$$R_{Th} = 2+3+6 \parallel 12 = 5+\frac{6\times 12}{18} = 9\ \Omega$$

为求出V_{Th}，利用如图4-51b所示的电路，由网孔分析法，得到：

$$-12+18i_1-12i_2=0, \quad i_2=-2\ \text{A}$$

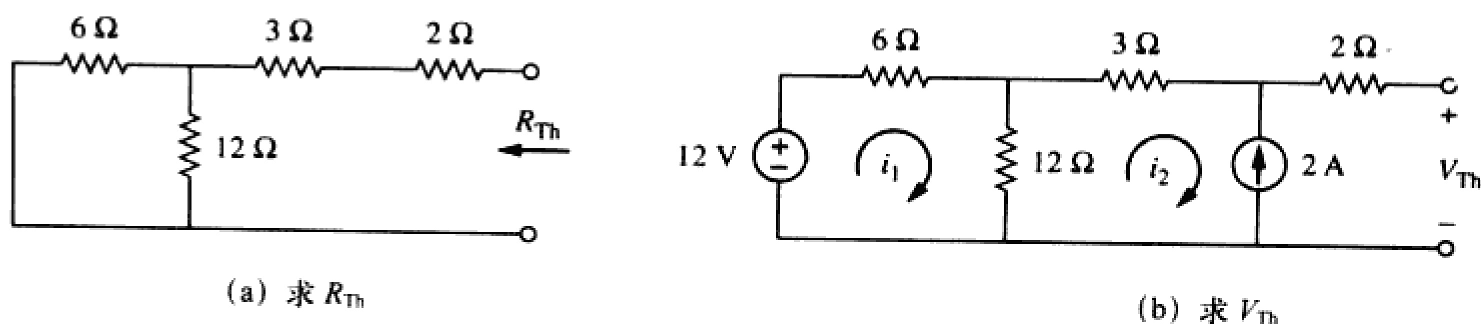


图 4-51　例题 4-13 的电路原理图

解之得$i_1 = -2/3$。对外回路应用KVL计算端口$a-b$的电压V_{Th}，得到：

$$-12 + 6\,i_1 + 3\,i_2 + 2(0) + V_{Th} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{Th} = 22\text{ V}$$

实现最大功率传递时，负载电阻为：

$$R_L = R_{Th} = 9\,\Omega$$

此时，负载获得的最大功率为：

$$p_{max} = \frac{V_{Th}^2}{4R_L} = \frac{22^2}{4 \times 9} = 13.44\text{ W}$$

练习题4-13　试求图4-52所示电路实现最大功率传递时的电阻值R_L，并计算相应的最大功率。

答　4.22 Ω，2.901 W。

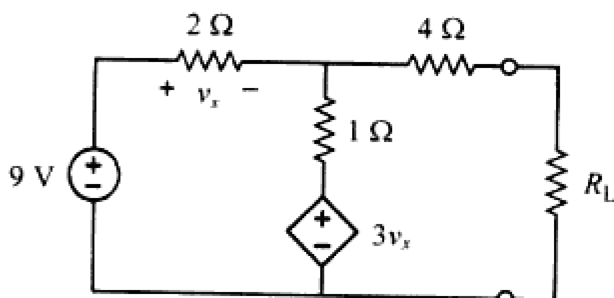


图 4-52　练习题 4-13 的电路原理图

4.9　利用 PSpice 软件验证电路定理

本节学习如何利用PSpice软件验证本章介绍的电路定理。特别是利用该软件的直流扫描（DC Sweep）分析求解电路中任一对节点处的戴维南等效电路和诺顿等效电路及传递给负载的最大功率。

为了利用PSpice确定电路在某开路端口处的戴维南等效电路，首先要用该软件的电路原理图编辑器画出电路原理图，并在端口处插入一个探测用独立电流源Ip。该探测电流源的部件名称必须为ISRC。之后对Ip进行直流扫描。通过Ip的电流的典型变化范围通常在0～1A之间，增量步长为0.1 A。对电路执行保存和模拟操作后，可以利用探测（Probe）程序显示Ip两端的电压与流经Ip的电流之间的关系曲线，该曲线中横坐标零点的截距就是戴维南等效电压，而其斜率即为戴维南等效电阻。

确定诺顿等效电路的步骤也是类似的，不同点只是在端口处应插入探测用独立电压源Vp（部件名称为VSRC），之后后对Vp运行直流扫描程序，并设置Vp以增量步长0.1V在0～1V之间变化。模拟结束后，利用探测菜单得到流经Vp的电流与Vp两端的电压之间的关系曲线，该曲线中横坐标零点的截距即为诺顿等效电流，而其斜率则为诺顿等效电导。

利用PSpice确定传递给负载最大功率时，需对图4-48所示电路中R_L的元件值执行直流参数扫描（DC parametric Sweep）程序，并画出传递给负载的功率与R_L之间的关系曲线。由图4-49可知，当$R_L = R_{Th}$时，传递给负载的功率最大。例题4-15将通过一个实例予以详细的说明。

注意，独立电压流与独立电源流的部件名分别为VSRC与ISRC。

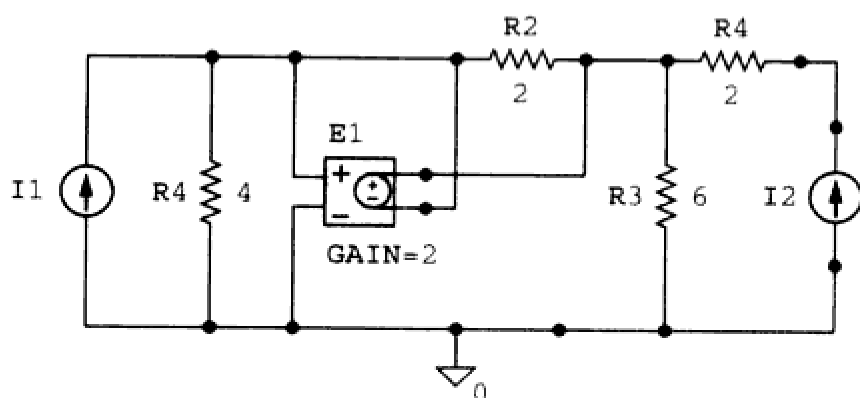
例题4-14　在如图4-31所示电路中（参见例4-9），试利用PSpice确定其戴维南等效电路和诺顿等效电路。

解　(a) 为了确定图4-31所示电路在端口$a-b$处的戴维南电阻R_{Th}与戴维南电压V_{Th}，首先要利用原理图编辑器画出电路原理图，如图4-53a所示，注意，在该电路端口处已插入一个探测用电流源I2。在**Analysis/Setput**菜单下，选择DC Sweep。在DC Sweep对话框中，选择扫描类型（Sweep Type）为线性（Linear），选择扫描参数类型（Sweep Var. Type）为电流源（Current Source），在部件名称（Name）设置框中输入I2，并设置起始值（Start Value）为0，终值（End Value）为1，增量步长（Increment）

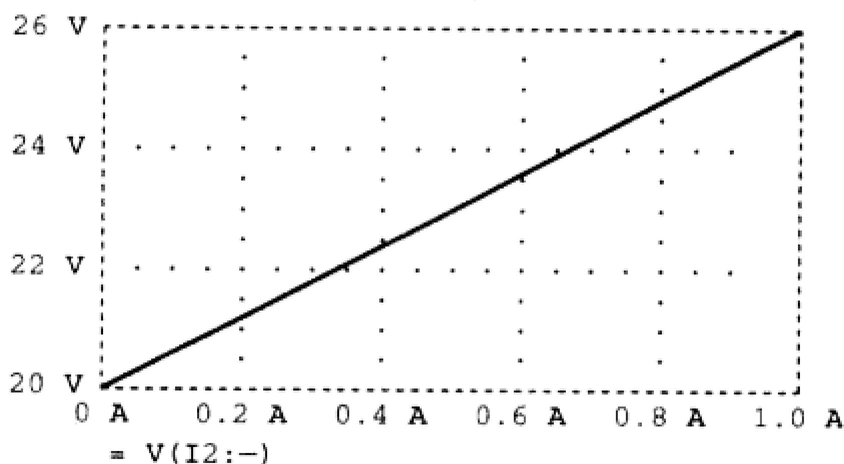
为0.1。运行仿真程序后，在PSpice A/D窗口中增加轨迹曲线V(I2 : -)，即可得到如图4-53b所示的曲线，由该曲线可知：

$$V_{\mathrm{Th}} = \text{零点截距} = 20\ \mathrm{V}, \quad R_{\mathrm{Th}} = \text{斜率} = \frac{26-20}{1} = 6\ \Omega$$

该结果与例题4-9中的理论分析一致。



(a) 电路原理图



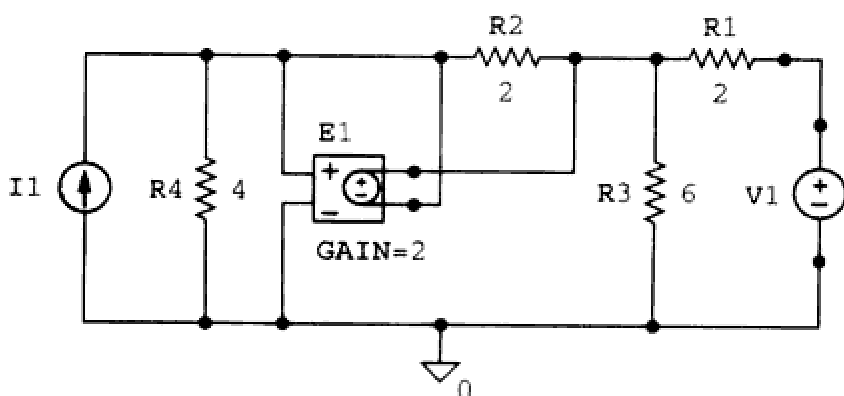
(b) 确定 V_{Th} 与 R_{Th} 的曲线

图 4-53　例题 4-14 的电路原理图

(b) 为了确定诺顿等效电路，需利用探测电压源V1取代图4-53a所示电路中的探测电流源，得到如图4-54a所示的电路。同样，在DC Sweep对话框中，选择扫描类型（Sweep Type）为线性（Linear），选择扫描参数类型（Sweep Var. Type）为电压源（Voltage Source），在部件名称（Name）设置框中输入V1，并设置起始值（Start Value）为0，终值（End Value）为1，增量步长（Increment）为0.1。在PSpice A/D窗口中增加轨迹曲线I(V1)，即可得到如图4-54b所示的曲线，由该曲线可知：

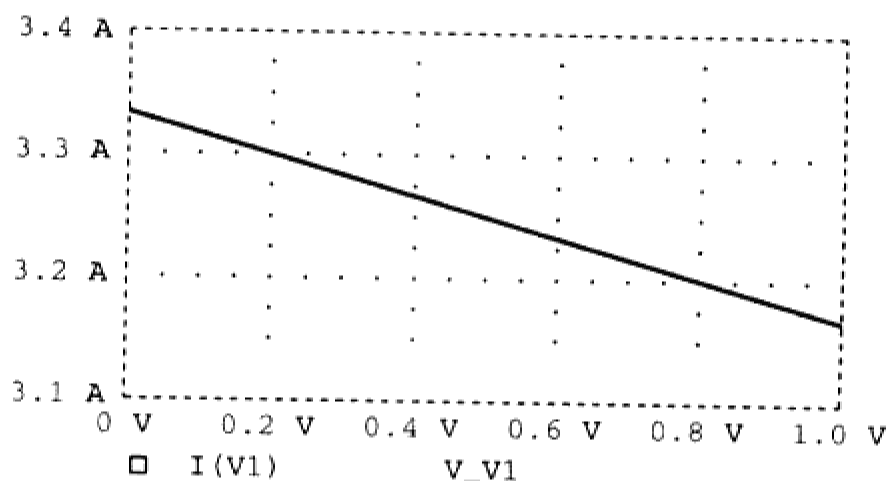
$$I_N = \text{零点截距} = 3.335\ \mathrm{A}$$

$$G_N = \text{斜率} = \frac{3.335-3.165}{1} = 0.17\ \mathrm{S}$$



(a) 电路原理图

图 4-54　例题 4-14 的电路原理图



(b) 确定 I_N 与 G_N 的曲线

图 4-54 (续)

练习题4-14 试利用PSpice重做练习题4-9。

答 $V_{Th}=5.33$ V，$R_{Th}=0.44$ Ω。

例题4-15 在如图4-55所示电路中，试利用PSpice确定传递给R_L的最大功率。

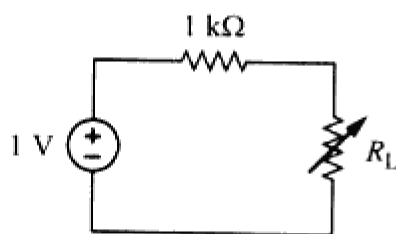


图 4-55 例题 4-15 的电路原理图

解 需对R_L执行直流扫描（DC Sweep）程序来确定传递给它的功率何时为最大值。首先利用原理图编辑器（Schematics）画出如图4-56所示的电路，之后执行如下三个步骤，进一步做好电路进行直流扫描（DC Sweep）的准备工作。

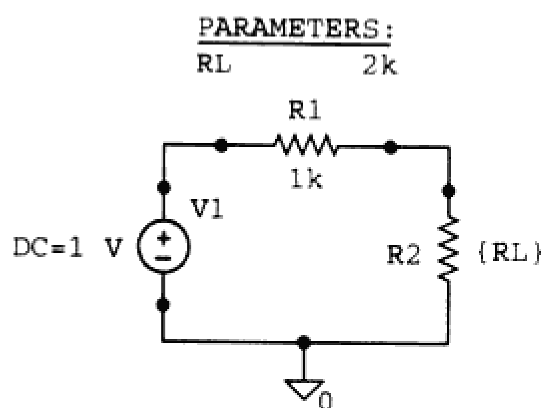


图 4-56 图 4-55 的电路图

第一步是将R_L的阻值定义为参数，因为在之后的电路模拟中要改变其阻值，为此：

（1）双击（DCLICKL）阻值为1 k的电阻R2（该电阻即R_L），打开设置属性值（Set Attribute Value）对话框。

（2）用{R_L}取代1k，点击OK完成这一更改。

注意，大括号是必须的。

第二步是定义参数，为此：

（1）选择Draw/Get New Part/Libraries .../special.slb。

（2）在部件名称（Part Name）对话框中输入PARAM，并点击OK。

（3）将对话框托至电路附近的适当位置。

（4）单击结束放置模式。

（5）双击打开部件名称（Part Name）PARAM对话框。

（6）单击NAME1 =，并在取值（Value）对话框中输入RL（无需大括号），之后单击Save Attr接受这一更改。

（7）单击VALUE1 =，并在取值（Value）对话框中输入2 k，之后单击Save Attr接受这一更改。

（8）单击OK。

第7步中的2k对于偏置点的计算是必须的，不能为空。

第三步是设置直流扫描（DC Sweep），执行参数扫描。

（1）选择**Analysis/Setput**菜单，打开直流扫描（DC Sweep）对话框。

（2）选择扫描类型（Sweep Type）为线性（Linear）（或者当R_L取值范围很大时，选择Octave）。

（3）选择扫描参数类型（Sweep Var. Type）为全局参数（Global Parameter）。

(4) 在部件名称（Name）设置框中输入RL。

(5) 在起始值（Start Value）设置框中输入100。

(6) 在终值（End Value）设置框中输入5 k。

(7) 在增量步长（Increment）设置框中输入100。

(8) 单击OK关闭对话框，表示接受上述设定的参数。

完成上述步骤并保存电路之后，就可以对电路进行模拟了。选择Analysis/Simulate，如果不出现错误，则在PSpice A/D窗口中选择Add Trace，并在轨迹命令（Trace Command）设置框中输入 −V(R2:2) *I(R2)（因为I(R2)是负的，所以负号是必须的）。于是，就可以得到R_L从100 Ω变化到5 kΩ时，传递到负载R_L的功率曲线。在轨迹命令（Trace Command）设置框中输入V(R2:2)*V(R2:2)/RL，同样可以得到负载R_L吸收的功率曲线，如图4-57所示。由图可见，负载电阻吸收的最大功率为250 μW，注意，与理论分析的结果相同，只有当$R_L = 1$ kΩ时，才会出现功率的最大值。

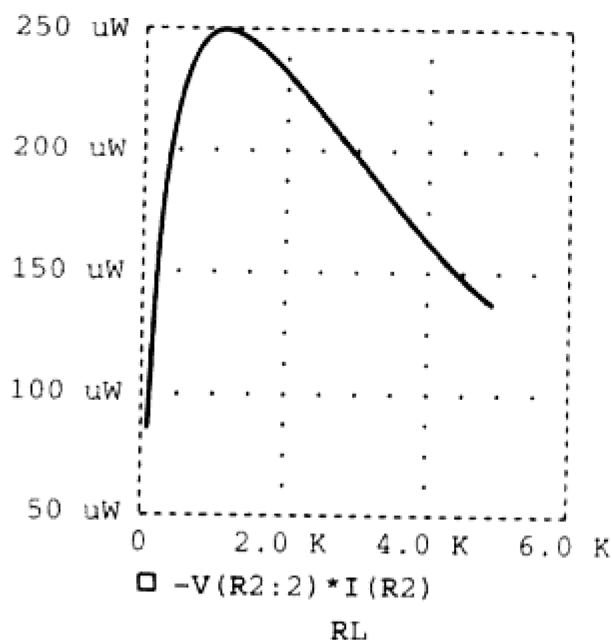


图 4-57 例题 4-15 中功率与负载电阻 R_L 之间的关系曲线

练习题4-15 如果将图4-55所示电路中的1 kΩ电阻替换为2 kΩ电阻，试求传递给R_L的最大功率。

答 125 μW。

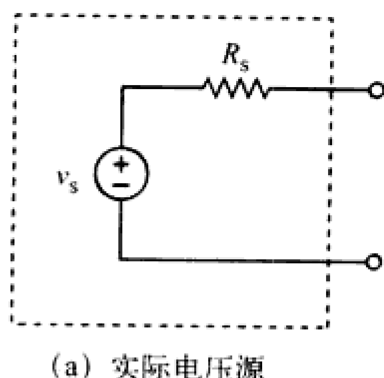
4.10 †应用

这一节讨论两个与本章概念密切相关的实际应用：电源建模与电阻测量。

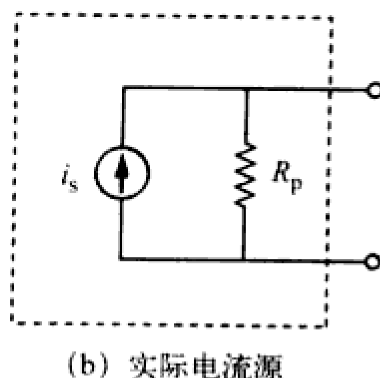
4.10.1 电源建模

电源建模是说明戴维南等效电路和诺顿等效电路有用性的一个实例。诸如电池等有源电源经常用其戴维南等效电路或诺顿等效电路来刻划特征。对于理想电压源，无论负载从它获取多大的电流，电压源总是提供恒定的电流，而对于理想电流源，无论负载电压为多大，电流源总是提供恒定的电流。实际电压源和电流源均非理想电源，因为它们包含内部电阻或源电阻R_s与R_p，如图4-58所示。当$R_s \to 0$，$R_p \to \infty$时，实际电源就会变为理想电源。为了证明该论断的正确性，下面考虑负载对电压源的影响，如图4-59a所示，根据分压原理，负载电压为：

$$v_L = \frac{R_L}{R_s + R_L} v_s \tag{4-25}$$



(a) 实际电压源



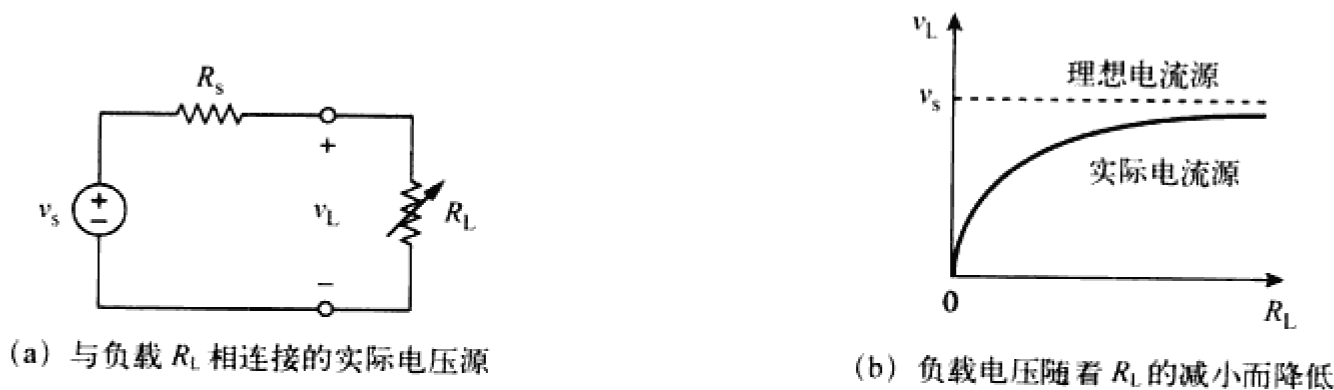
(b) 实际电流源

图 4-58 电压源与电流源

随着R_L的增大，负载电压趋于电源电压v_s，如图4-59b所示。由式(4-25)应该注意到：

（1）如果电源的内部电阻R_s为零，或至少$R_s << R_L$，则负载电压将为常量，换句话说，与R_L相比较，R_s越小，电压源就越接近理想电源。

（2）不接负载（即电源开路，从而$R_L \to \infty$）时，$v_{oc} = v_s$，因此可以将v_s看成是空载源电压（unloaded source）。接上负载就会造成终端电压幅度的下降，这种效应称为负载效应（loading effect）。



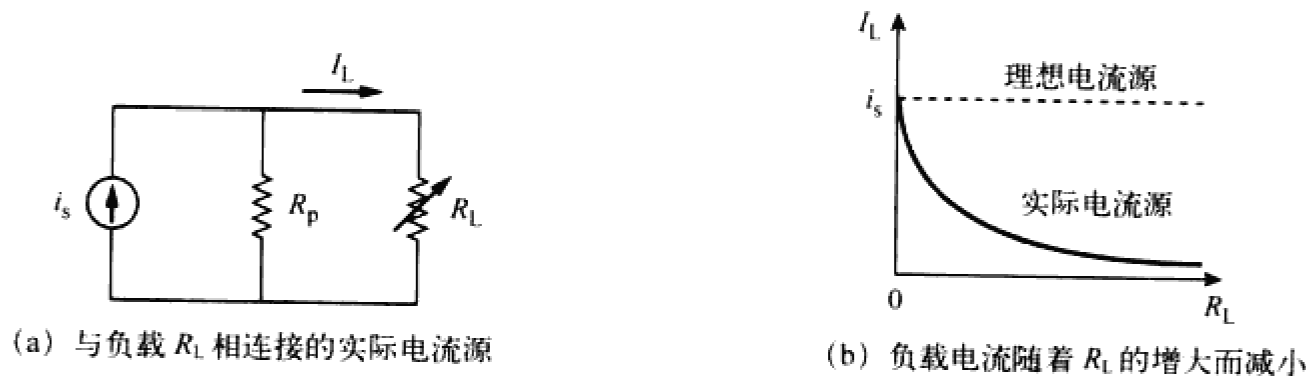
（a）与负载 R_L 相连接的实际电压源　　（b）负载电压随着 R_L 的减小而降低

图 4-59　电压源及负载电压随 R_L 的变化

对于实际电流源，当负载如图4-60a所示连接时，也会得出相同的结论。根据分流原理可得：

$$i_L = \frac{R_p}{R_p + R_L} i_s \tag{4-26}$$

图4-60b给出了负载电流随负载电阻增加的波动曲线。同样可以观察到，由负载引起的电流下降（即负载效应），只有在内部电阻相当大（即$R_p \to \infty$，或者至少$R_p >> R_L$）的情况下，负载电流才是常量（即理想电流源）。



（a）与负载 R_L 相连接的实际电流源　　（b）负载电流随着 R_L 的增大而减小

图 4-60　电压源及负载电流随 R_L 的变化

有时候需要知道电压源的空载源电压v_s及其内阻R_s。求解v_s与R_s时，应按照图4-61所示的步骤进行。首先，测量如图4-61a所示的开路电压v_{oc}，并令：

$$v_s = v_{oc} \tag{4-27}$$

之后，在端口处连接一个可变电阻R_L，如图4-61b所示，改变电阻R_L的阻值直到测得的负载电压恰好等于开路电压的一半为止，即$v_L = v_{oc}/2$。因为此时满足$R_L = R_{Th} = R_s$。断开电阻R_L，并测量R_L的阻值，则有：

$$R_s = R_L \tag{4-28}$$

例如，汽车电池的电压为：$v_s = 12$ V，内阻为$R_s = 0.05\ \Omega$。



（a）测量 v_{oc}　　（b）测量 v_L

图 4-61　测量 v_{OC} 和 v_L

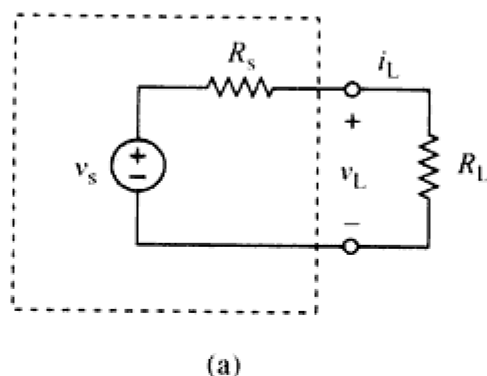
例题4-16　某电压源连接一个2 W负载时的端电压为12 V，当断开该负载时，端电压升高至12.4 V。(a) 试计算该电压源的源电压v_s与内阻R_s；(b) 当该电压源与一8Ω负载相连时，试确定其端电压。

解　(a) 将电压源用其戴维南等效电路取代。断开负载时的端电压就是它的开路电压，即：

$$v_s = v_{oc} = 12.4 \text{ V}$$

接上负载后，如图4-62a所示，$v_L = 12$ V且$p_L = 2$ W。因此，

$$p_L = \frac{v_L^2}{R_L} \quad \Rightarrow \quad R_L = \frac{v_L^2}{p_L} = \frac{12^2}{2} = 72\Omega$$



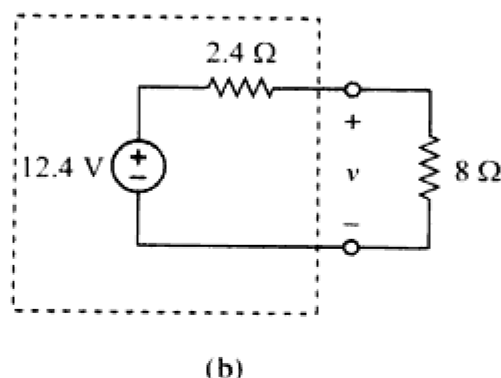


图 4-62　例题 4-16 的电路原理图

负载电流为：

$$i_L = \frac{v_L}{R_L} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}\text{A}$$

电压源内阻R_s两端的电压为源电压v_s与负载电压v_L之差，即：

$$12.4-12 = 0.4 = R_s i_L, \qquad R_s = \frac{0.4}{I_L} = 2.4\ \Omega$$

(b) 现已确定电压源的戴维南等效电路，将8Ω负载连接至该戴维南等效电路两端，如图4-62b所示，根据分压原理可得：

$$v = \frac{8}{8+2.4}(12.4) = 9.538 \text{ V}$$

练习题4-16　某放大器开路时测得的开路电压为9 V，当一个20 Ω的扬声器与该放大器相连时，其电压降至8 V。试计算一个10 Ω的扬声器与该放大器相连时，其端电压为多少？

答　7.2 V。

4.10.2　电阻测量

虽然利用欧姆表是测量电阻值的一种最简单的方法，但利用惠斯登电桥（Wheatstone bridge）测量电阻则会得到更为精确的测量结果。所设计的欧姆表测量可以分为小量程、中量程和大量程，而惠斯登电桥则主要用于测量阻值位于中量程范围内的电阻，即1 Ω～1 MΩ的电阻。阻值极低的电阻可以利用毫欧表（milliohmmeter）测量，而阻值极高的电阻值可以利用兆欧表（Megger tester）测量。

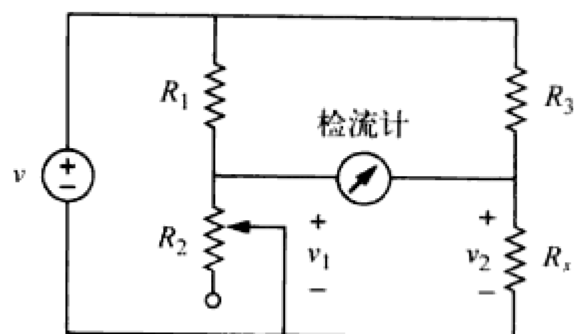


图 4-63　惠斯登桥，R_x为待测电阻

在许多应用场合都采用了惠斯登电桥电路（或称为电阻桥电路），本节介绍如何利用它来测量未知电阻的阻值。未知电阻R_x与电桥的连接方式如图4-63所示，调节可变电阻直至无电流流过检流计为止，检流计实际

上就是一套达松伐尔转动装置，与微安培表类似用作灵敏的电流指示装置。在这种情况下，$v_1=v_2$，称电桥处于平衡（balanced）状态。由于没有电流流过检流计，所以R_1与R_2之间的连接关系如同串联，R_3与R_x也是如此。无电流流过检流计的事实也说明$v_1=v_2$，利用分压原理有：

$$v_1=\frac{R_2}{R_1+R_2}v=v_2=\frac{R_x}{R_3+R_x}v \tag{4-29}$$

因此，满足如下条件时没有电流流过检流计：

$$\frac{R_2}{R_1+R_2}=\frac{R_x}{R_3+R_x} \quad\Rightarrow\quad R_2R_3=R_1R_x$$

即

$$\boxed{R_x=\frac{R_3}{R_1}R_2} \tag{4-30}$$

如果$R_1=R_3$，并且调节R_2直至没有电流流过检流计，则有$R_x=R_2$。

历史事件

惠斯登电桥是由英国教授查尔斯·惠斯登（Charles Wheatstone. 1802—1875）发明的，在美国工程师塞缪尔·摩尔斯（Samuel Morse）独立发明电报的同时，惠斯登也发明了电报。

当惠斯登桥不平衡时，如何确定流过检流计的电流呢？应求出在检流计端口处电桥的戴维南等效电路（即求出V_{Th}与R_{Th}）。如果R_{m}为检流计的电阻，则在非平衡状态下流经检流计的电流为：

$$I=\frac{V_{\mathrm{Th}}}{R_{\mathrm{Th}}+R_{\mathrm{m}}} \tag{4-31}$$

例题4-18将举例说明上述计算过程。

例题4-17 在如图4-63所示电路中，$R_1=500\ \Omega$，$R_3=200\ \Omega$，并且当R_2调到125 Ω时，电桥处于平衡状态，试求未知电阻R_x。

解 利用式(4-30)可得：

$$R_x=\frac{R_3}{R_1}R_2=\frac{200}{500}125=50\Omega$$

练习题4-17 在惠斯登电桥电路中，$R_1=R_3=1\ \mathrm{k\Omega}$，调节$R_2$直至无电流流过检流计，此时$R_2=3.2\ \mathrm{k\Omega}$，试问未知电阻的阻值为多少？

答 3.2 kΩ。

例题4-18 图4-64所示电路为一不平衡电桥，如果检流计的电阻为40 Ω，试求流过该检流计的电流。

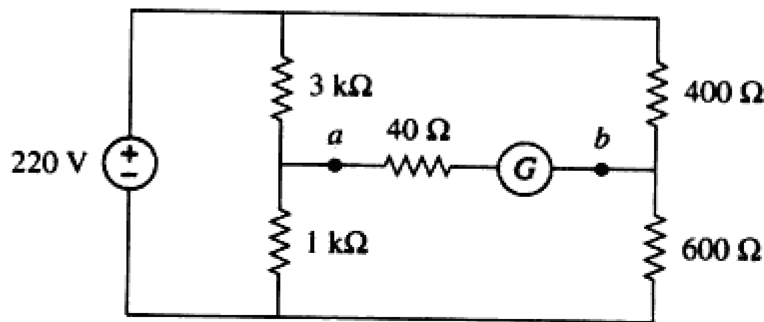


图 4-64 例题 4-18 的不平衡电桥电路

解 首先要利用a、b两端的戴维南等效电路取代原电路，戴维南电阻可以由图4-65a所示电路求得。注意，3 kΩ电阻与1 kΩ电阻为并联关系，同样400 Ω电阻与600 Ω也是并联关系。在a、b两端，两组并联电阻合并后又形成串联关系，因此，

$$\begin{aligned}R_{\mathrm{Th}}&=3\,000\,\|\,1\,000+400\,\|\,600\\&=\frac{3\,000\times1\,000}{3\,000+1\,000}+\frac{400\times600}{400+600}=750+240=990\Omega\end{aligned}$$

为了求出戴维南电压，需考虑如图4-65b所示电路，利用分压原理可得：

$$v_1 = \frac{1\,000}{1\,000+3\,000}(220) = 55\,\text{V}, \qquad v_2 = \frac{600}{600+400}(220) = 132\,\text{V}$$

在回路ab利用KVL得到：

$$-v_1 + V_{\text{Th}} + v_2 = 0 \quad 即 \quad V_{\text{Th}} = v_1 - v_2 = 55 - 132 = -77\,\text{V}$$

确定戴维南等效电路之后，就可以利用图4-65c求出流过检流计的电流为：

$$I_G = \frac{V_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}} + R_m} = \frac{-77}{990+40} = -74.76\,\text{mA}$$

其中负号表示电流的方向与假定方向相反，也就是说电流是由b流向a的。

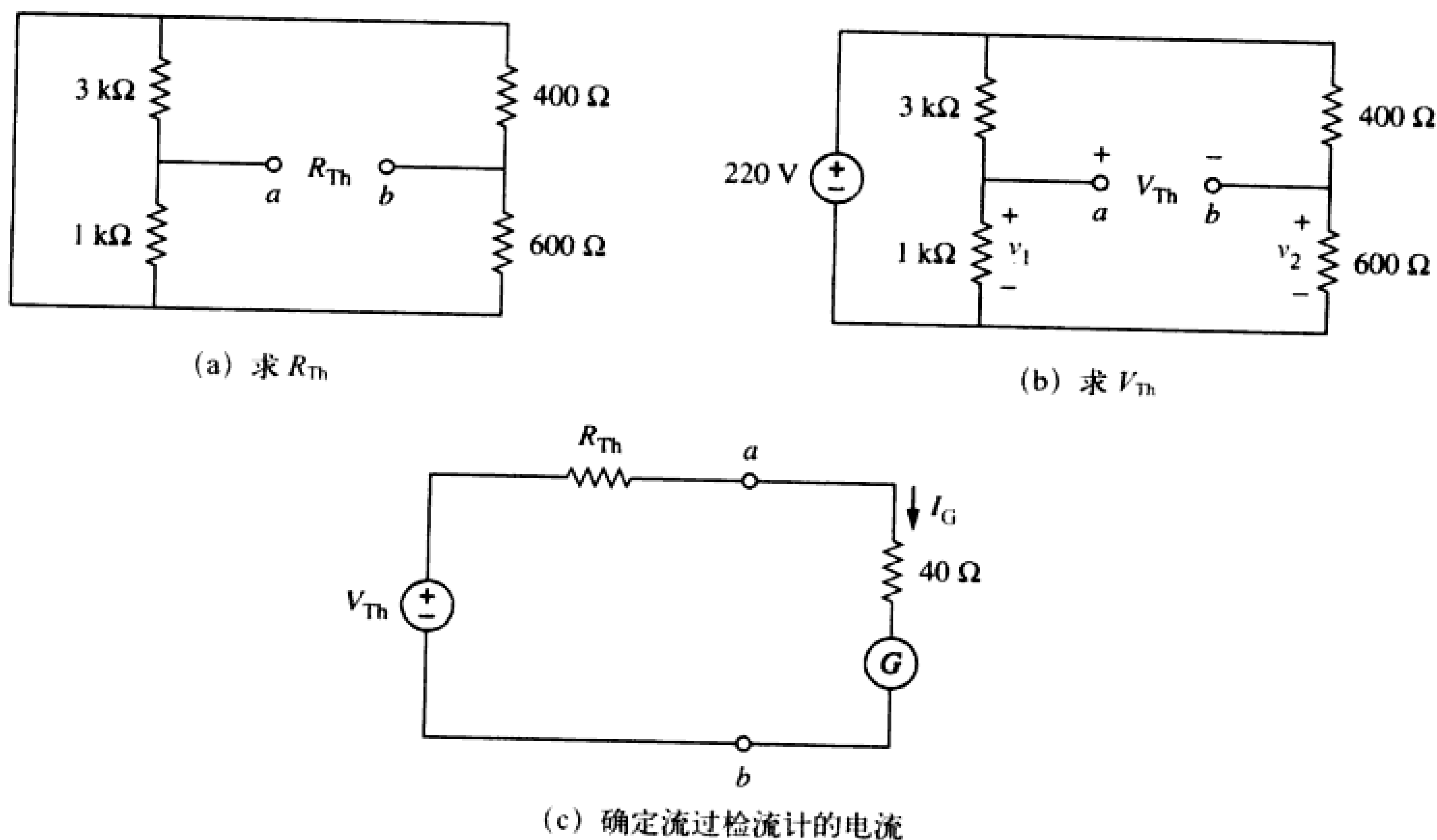


图 4-65 例题 4-18 的电路原理图

练习题4-18 在如图4-66所示的惠斯登电桥中，试求流经阻值为14 Ω的检流计的电流。

答 64 mA。

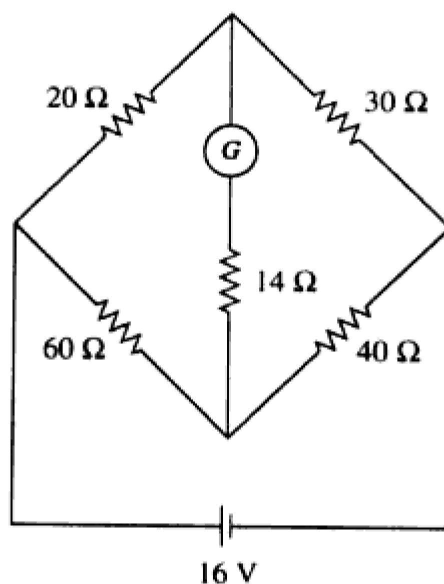


图 4-66 练习题 4-18 的电路原理图

4.11 本章小结

(1) 线性网络由线性元件、线性受控源和线性独立源组成。

(2) 利用网络定理可以将复杂电路简化为简单电路，从而使电路分析更为简单。

(3) 叠加原理是指，在包含多个独立电源的电路中，元件两端的电压（或流经元件的电流）等于各独立电源单独作用时产生的各个电压（或电流）的代数和。

(4) 电源变换是将与电阻串联的电压源转换为与电阻并联的电流源（或者反之）的一种方法。

(5) 戴维南定理与诺顿定理是指，将电路网络中的一部分孤立，而将该网络中的其余部分由一个等效网络来取代。戴维南等效电路由一个电压源V_{Th}和一个与之串联的电阻R_{Th}组成，而诺顿等效电路则由一个电流源V_N和一个与之并联的电阻R_N组成。这两个定理之间的关系可以用电源变换方法联系在一起：

$$R_N = R_{Th}, \qquad I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}}$$

(6) 对于给定的戴维南等效电路，当负载电阻等于戴维南电阻时，即$R_L = R_{Th}$时，可以实现给负载的最大功率传递。

(7) 最大功率传递定理是指，当负载电阻R_L等于该负载端口处的戴维南电阻R_{Th}时，由电源传递给该负载电阻R_L的功率最大。

(8) PSpice软件可以用来验证本章所介绍的电路定理。

(9) 电源建模以及利用惠斯登桥实现电阻测量是戴维南定理的两个应用实例。

复习题

4-1 当某线性网络的输入电压源为10 V时，流过网络中某支路的电流为2 A，如果电压降低至1 V且极性反转，则流过该支路的电流为：
(a) −2 A (b) −0.2 A (c) 0.2 A (d) 2 A (e) 20 A

4-2 利用叠加原理计算电路参数时，并不要求每次仅考虑一个独立源的作用，可以同时考虑任意多个独立源的作用。
(a) 正确 (b) 错误

4-3 叠加原理可用于功率计算。
(a) 正确 (b) 错误

4-4 参见图4-67所示电路，a、b两端的戴维南电阻为：
(a) 25 Ω (b) 20 Ω (c) 5 Ω (d) 4 Ω

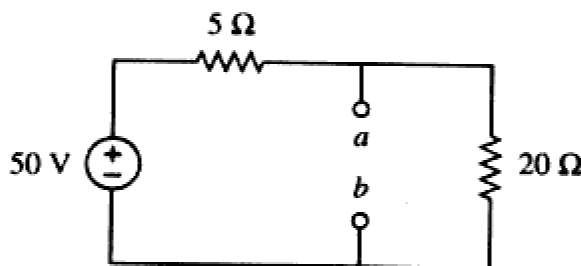


图 4-67 复习题 4-4～复习题 4-6 的电路原理图

4-5 在图4-67所示电路中，a、b两端的戴维南电压为：
(a) 50 V (b) 40 V (c) 20 V (d) 10 V

4-6 在图4-67所示电路中，a、b两端的诺顿电流为：
(a) 10 A (b) 2.5 A (c) 2 A (d) 0 A

4-7 诺顿电阻R_N恰好等于戴维南电阻R_{Th}。
(a) 正确 (b) 错误

4-8 图4-68所示电路中哪一对是等效的？
(a) a与b (b) b与d (c) a与c (d) c与d

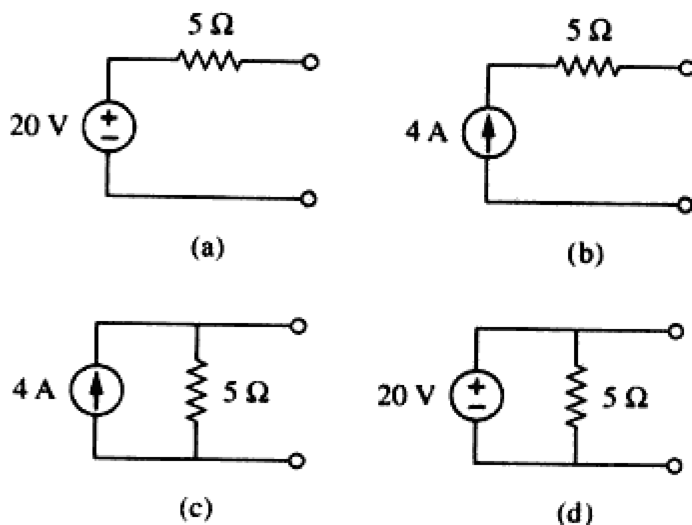


图 4-68 复习题 4-8 的电路原理图

4-9 一负载与某电路网络相连，如果在连接该负载的端口处，$R_{Th}=10\ \Omega$，$V_{Th}=40\ V$，则提供给该负载的最大功率为：

(a) 160 W (b) 80 W (c) 40 W (d) 1 W

4-10 当负载电阻等于电源电阻时，电源向负载提供最大功率。

(a) 正确 (b) 错误

答案 4-1 b；4-2 a；4-3 b；4-4 d；4-5 b；4-6 a；4-7 a；4-8 c；4-9 c；4-10a。

习题

4.2 节

4-1 试计算图4-69所示电路中的电流i_o，当输入电压升高至10 V时，该电流变为多少？

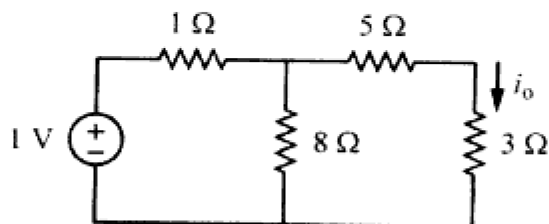


图 4-69 习题 4-1 的电路原理图

4-2 试求图4-70所示电路中的v_o，如果源电流降低至1 μA，v_o变为多少？

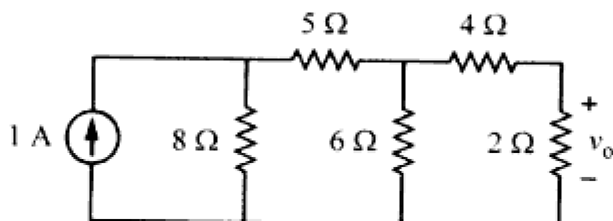


图 4-70 习题 4-2 的电路原理图

4-3 (a) 在如图4-71所示电路中，如果$v_s=1\ V$，试计算v_o与i_o。

(b) 当$v_s=10\ V$时，试计算v_o与i_o。

(c) 如果用10 Ω电阻取代图中各1 Ω电阻，并且$v_s=10\ V$，则v_o与i_o为多少？

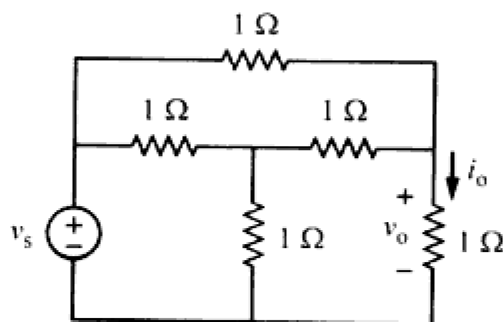


图 4-71 习题 4-3 的电路原理图

4-4 试利用线性性质确定图4-72所示电路中的i_o。

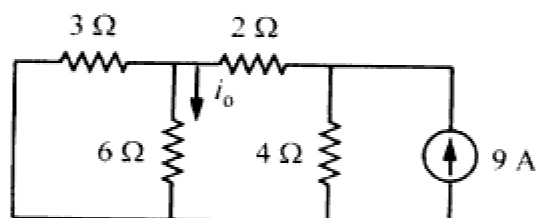


图 4-72 习题 4-4 的电路原理图

4-5 在如图4-73所示电路中，假定$v_o=1\ V$，试利用线性性质计算v_o的实际值。

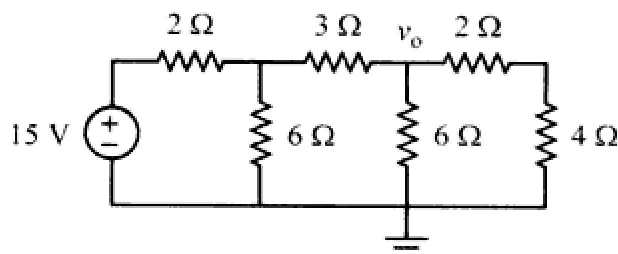


图 4-73 习题 4-5 的电路原理图

4-6 在如图4-74所示电路中，试利用线性性质完成下表。

实验	V_s	V_o
1	12 V	4 V
2		16 V
3	1 V	
4		−2 V



图4-74 习题4-6的电路原理图

4-7 在如图4-75所示电路中，假定$V_o=1\ V$，试利用线性性质计算V_o的实际值。

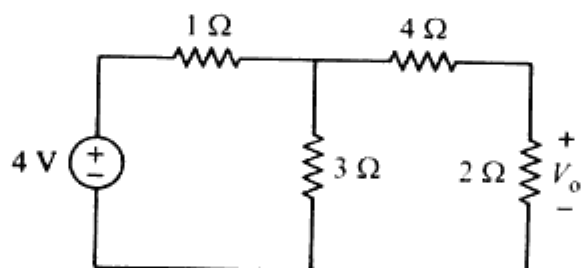


图 4-75 习题 4-7 的电路原理图

4.3 节

4-8 试利用叠加原理计算图4-76所示电路中的V_o，并利用PSpice进行验证。

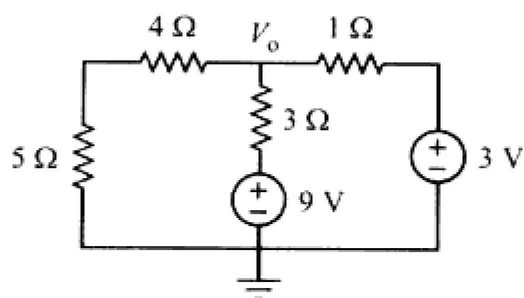


图 4-76 习题 4-8 的电路原理图

4-9 试利用叠加原理计算图4-77所示电路中的v_o。

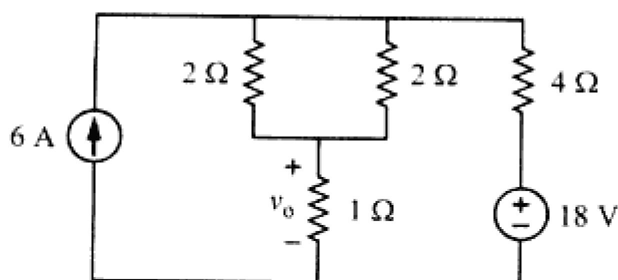


图 4-77 习题 4-9 的电路原理图

4-10 试利用叠加原理计算图4-78所示电路中的端电压V_{ab}。

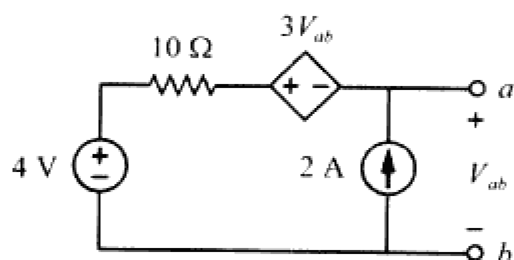


图 4-78 习题 4-10 的电路原理图

4-11 试利用叠加原理确定图4-79所示电路中的i_o与v_o。

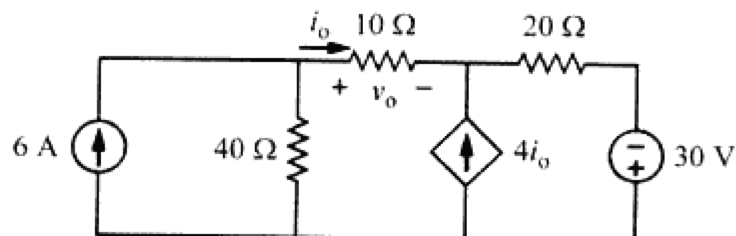


图 4-79 习题 4-11 的电路原理图

4-12 试利用叠加原理确定图4-80所示电路中的v_o。

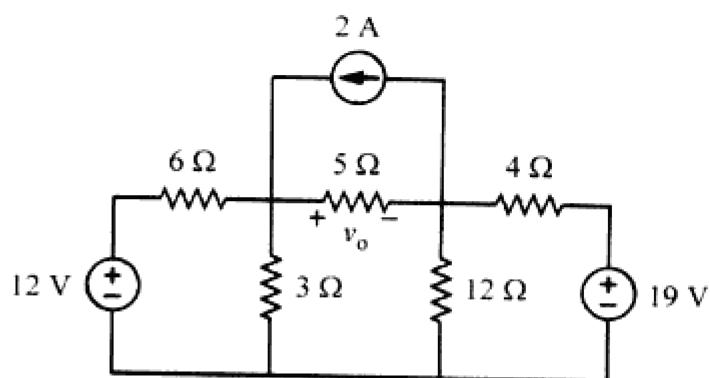


图 4-80 习题 4-12 与习题 4-35 的电路原理图

4-13 试利用叠加原理确定图4-81所示电路中的v_o。

4-14 试利用叠加原理确定图4-82所示电路中的v_o。

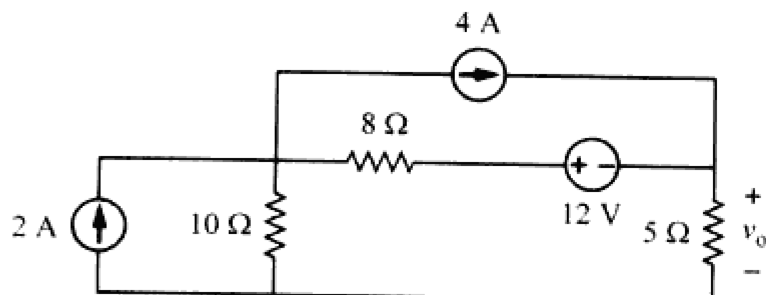


图 4-81 习题 4-13 的电路原理图

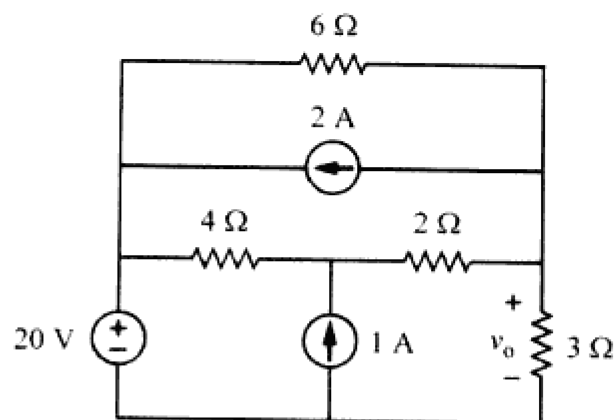


图 4-82 习题 4-14 的电路原理图

4-15 试利用叠加原理确定图4-83所示电路中的i，并计算传递给3 Ω电阻的功率。

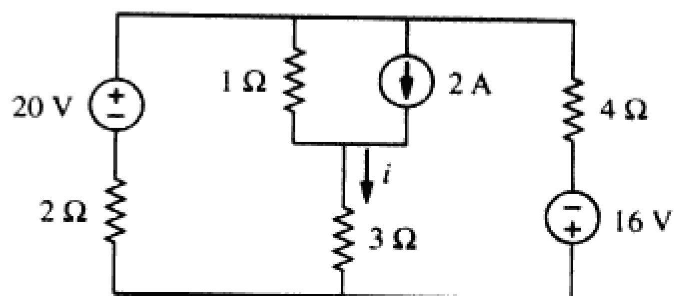


图 4-83 习题 4-15 与习题 4-56 的电路原理图

4-16 试利用叠加原理计算图4-84所示电路中的 i_o。

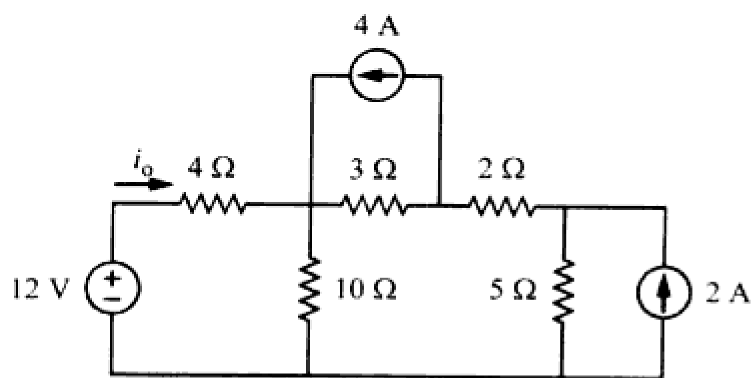


图 4-84 习题 4-16 与习题 4-28 的电路原理图

4-17 试利用叠加原理计算图4-85所示电路中的 v_x，并利用PSpice进行验证。

4-18 试利用叠加原理确定图4-86所示电路中的 V_o。

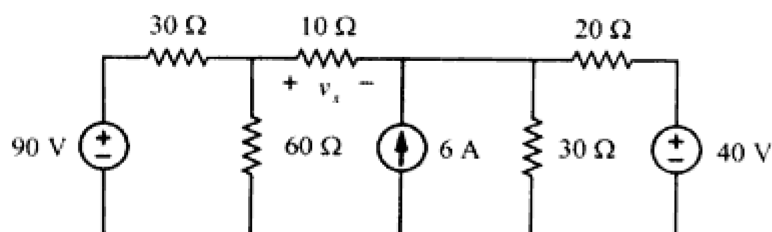


图 4-85 习题 4-17 的电路原理图

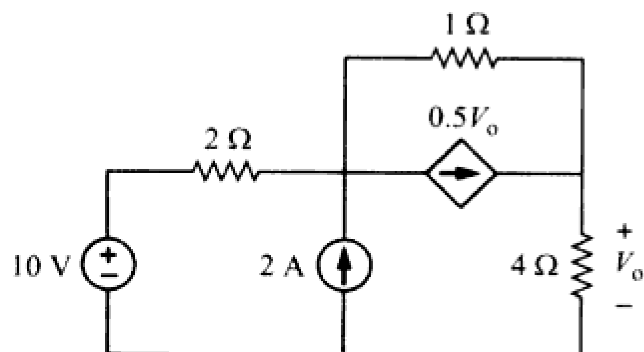


图 4-86 习题 4-18 的电路原理图

4-19 试利用叠加原理确定图4-87所示电路中的 v_x。

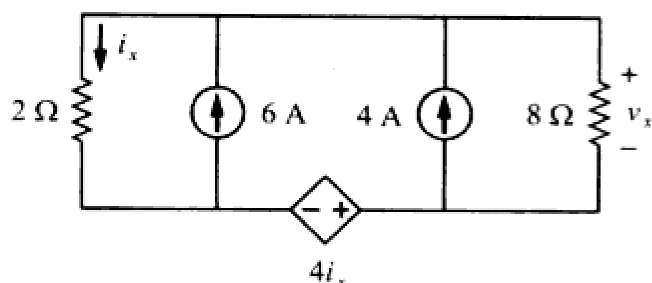


图 4-87 习题 4-19 的电路原理图

4.4 节

4-20 试利用电源变换法将图4-88所示的电路简化为单个电压源与单个电阻串联的形式。

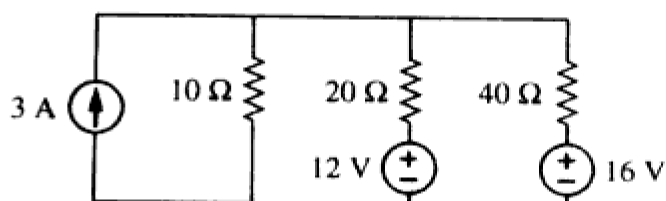


图 4-88 习题 4-20 的电路原理图

4-21 试利用电源变换的方法确定图4-89所示电路中的 v_o 与 i_o。

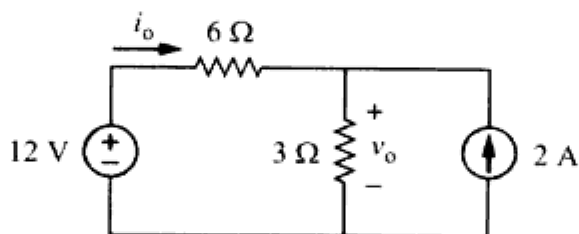


图 4-89 习题 4-21 的电路原理图

4-22 试利用电源变换的方法确定图4-90所示电路中的 i。

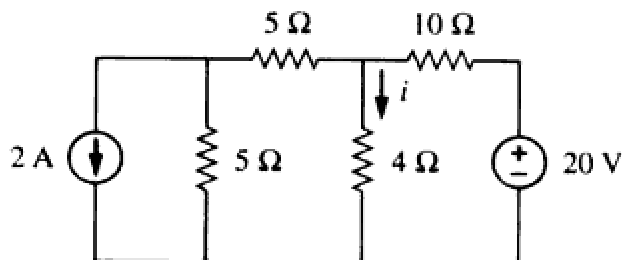


图 4-90 习题 4-22 的电路原理图

4-23 对于图4-91所示的电路，试利用电源变换的方法确定流过图中8 Ω电阻的电流及其消耗的功率。

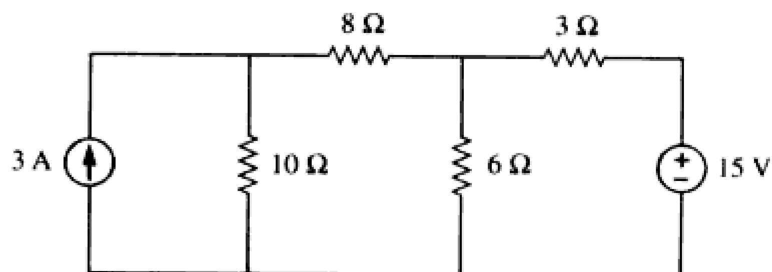


图 4-91 习题 4-23 的电路原理图

4-24 试利用电源变换的方法确定图4-92所示电路中的 V_x。

4-25 试利用电源变换的方法计算图4-93所示电路中的 v_o。

4-26 试利用电源变换的方法计算图4-94所示电路中的 i_o。

4-27 试利用电源变换的方法计算图4-95所示电

路中的v_x。

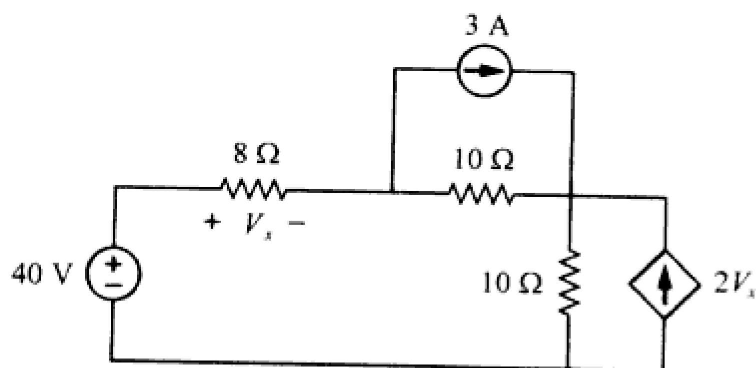


图 4-92 习题 4-24 的电路原理图

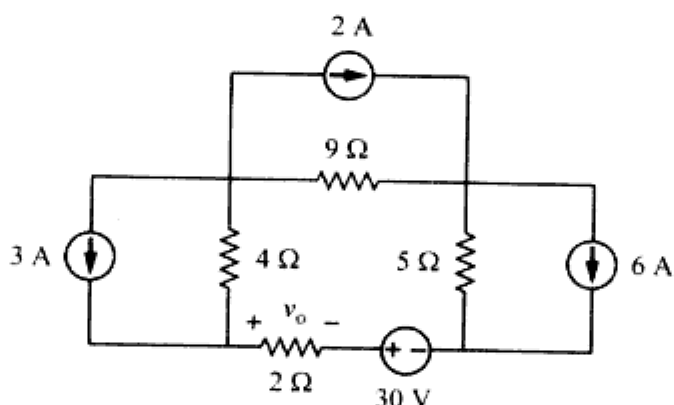


图 4-93 习题 4-25 的电路原理图

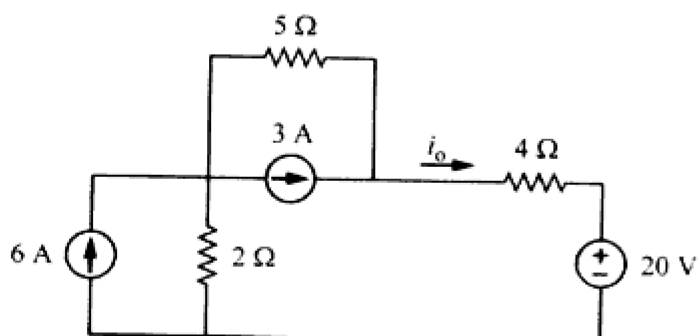


图 4-94 习题 4-26 的电路原理图

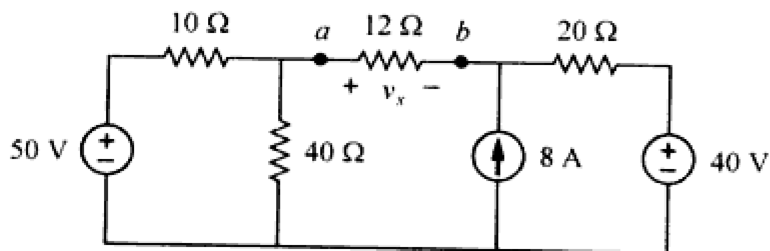


图 4-95 习题 4-27 与习题 4-40 的电路原理图

4-28 试利用电源变换的方法计算图4-96所示电路中的I_o。

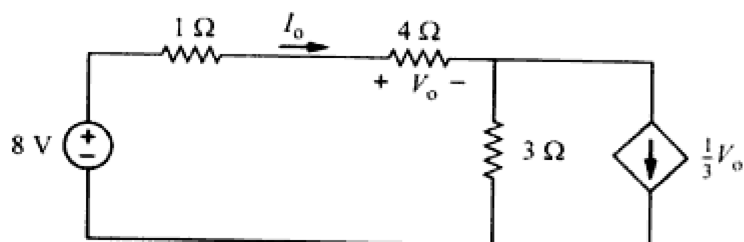


图 4-96 习题 4-28 的电路原理图

4-29 试利用电源变换的方法计算图4-97所示电路中的v_o。

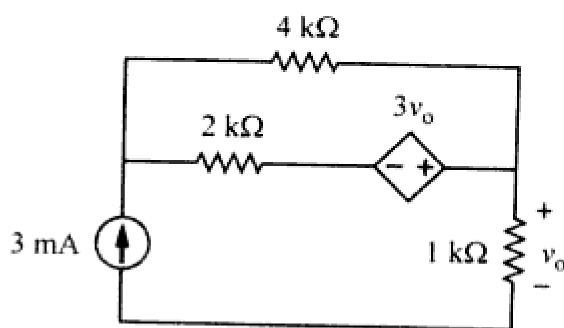


图 4-97 习题 4-29 的电路原理图

4-30 试利用电源变换的方法计算图4-98所示电路中的i_x。

4-31 试利用电源变换的方法计算图4-99所示电路中的v_x。

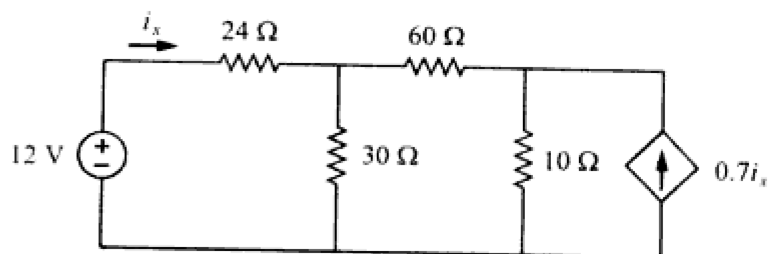


图 4-98 习题 4-30 的电路原理图

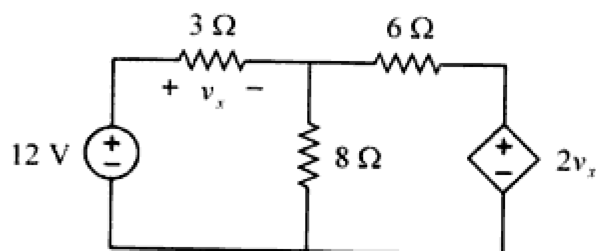


图 4-99 习题 4-31 的电路原理图

4-32 试利用电源变换的方法计算图4-100所示电路中的i_x。

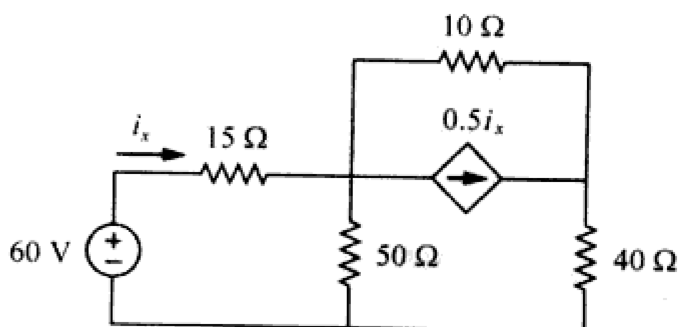


图 4-100 习题 4-32 的电路原理图

4.5 节与 4.6 节

4-33 试求图4-101所示各电路中端口1-2两端的R_{Th}与V_{Th}。

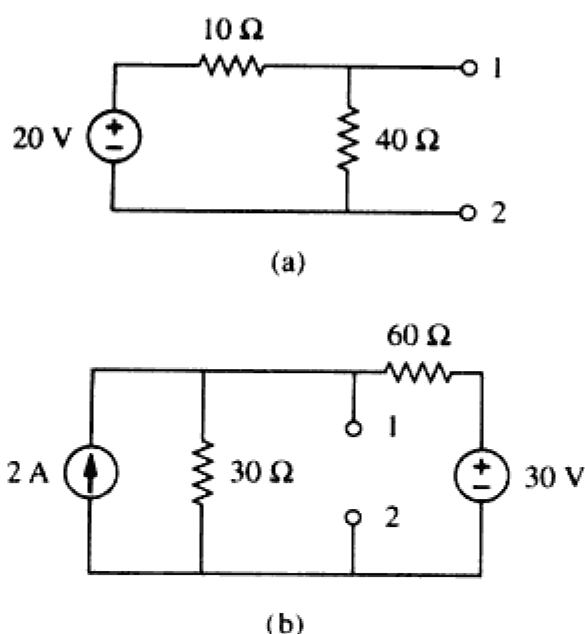


图 4-101 习题 4-33 与习题 4-46 的电路原理图

4-34 试求图4-102所示电路在端口$a-b$处的戴维南等效电路。

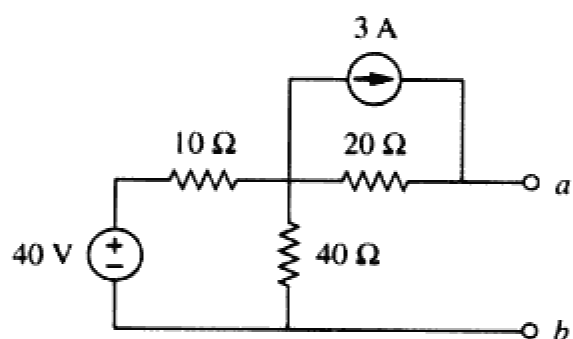


图 4-102 习题 4-34 与习题 4-49 的电路原理图

4-35 试利用戴维南定理确定习题4-12中的v_o。

4-36 试利用戴维南定理确定图4-103所示电路中的电流i（提示：需求出12 Ω电阻两端的戴维南等效电路）。

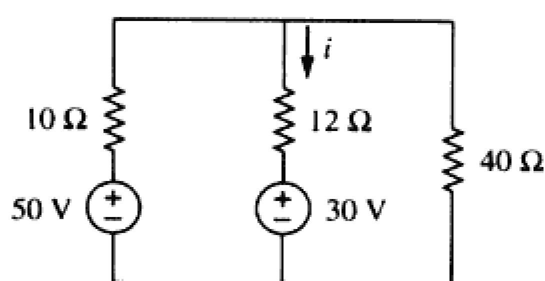


图 4-103 习题 4-36 的电路原理图

4-37 试求图4-104所示电路在端口$a-b$处的诺顿等效电路。

4-38 试利用戴维南定理确定图4-105所示电路中的V_o。

4-39 试求图4-106所示电路在端口$a-b$处的戴维南等效电路。

4-40 试求图4-107所示电路在端口$a-b$处的戴维南等效电路。

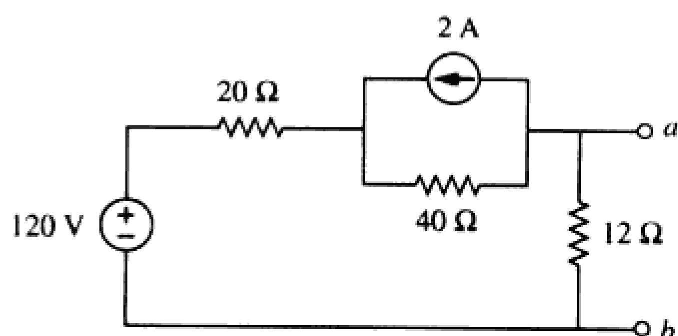


图 4-104 习题 4-37 的电路原理图

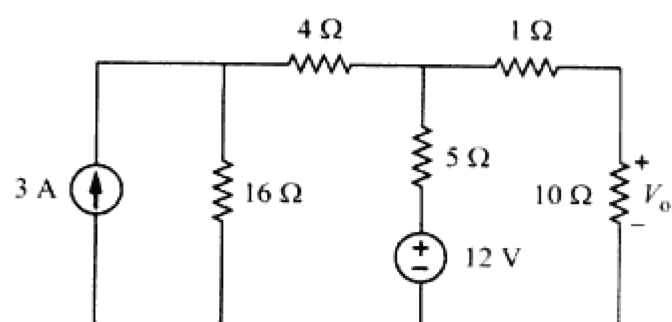


图 4-105 习题 4-38 的电路原理图

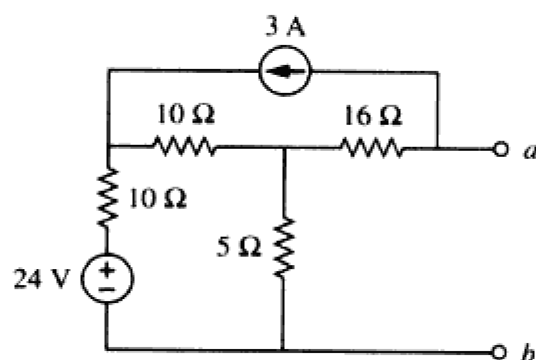


图 4-106 习题 4-39 的电路原理图

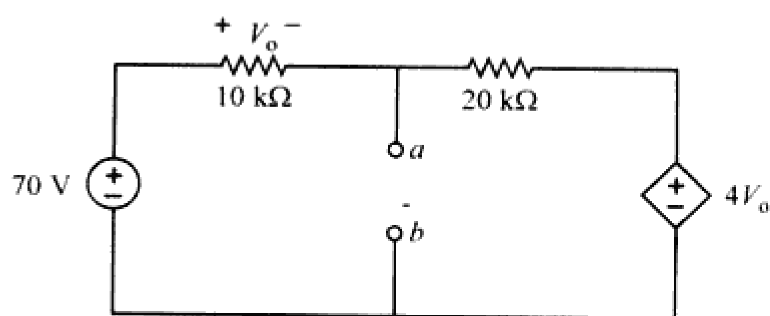


图 4-107 习题 4-40 的电路原理图

4-41 试求图4-108所示电路在端口$a-b$处的戴维南等效电路与诺顿等效电路。

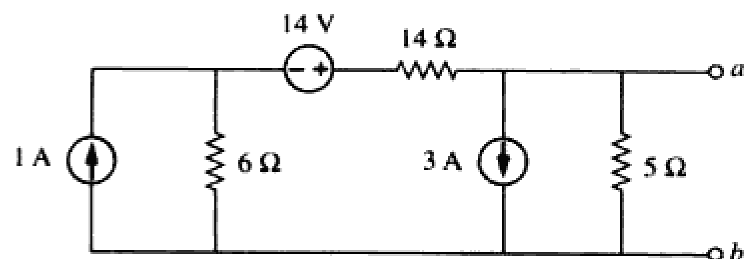


图 4-108 习题 4-41 的电路原理图

*4-42 试求图4-109所示电路在端点a、b之间的戴维南等效电路。

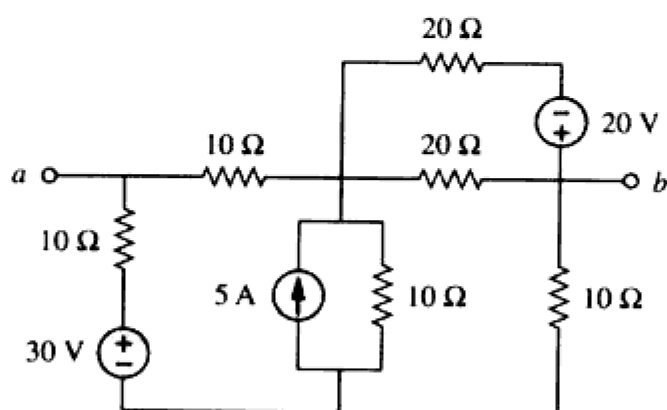


图 4-109 习题 4-42 的电路原理图

4-43 试求图4-110所示电路从端口$a-b$看进去的戴维南等效电路，并计算电流i_x。

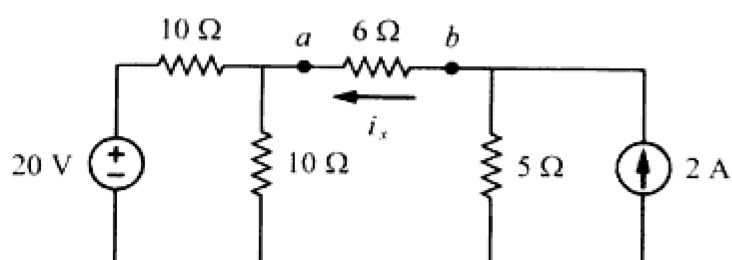


图 4-110 习题 4-43 的电路原理图

4-44 在如图4-111所示电路中，试确定从如下端口看进去的戴维南等效电路：
(a) $a-b$ (b) $b-c$

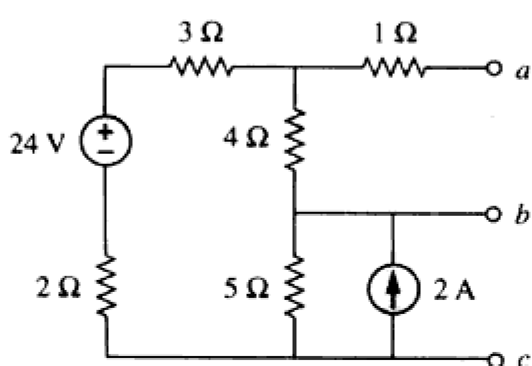


图 4-111 习题 4-44 的电路原理图

4-45 试求图4-112所示电路的诺顿等效电路。

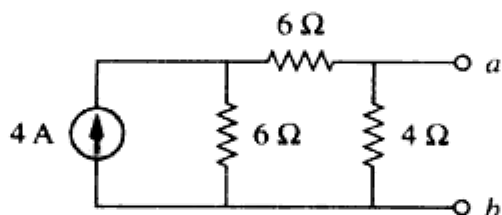


图 4-112 习题 4-45 的电路原理图

4-46 试求图4-113所示电路在端口$a-b$处的诺顿等效电路。

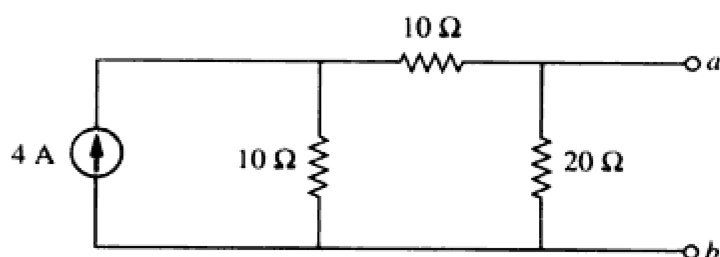


图 4-113 习题 4-46 的电路原理图

4-47 试求图4-114所示电路在端口$a-b$处的戴维南等效电路与诺顿等效电路。

4-48 试求图4-115所示电路在端口$a-b$处的诺顿等效电路。

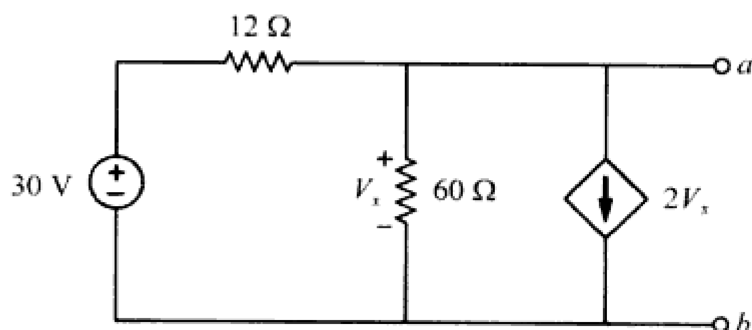


图 4-114 习题 4-47 的电路原理图

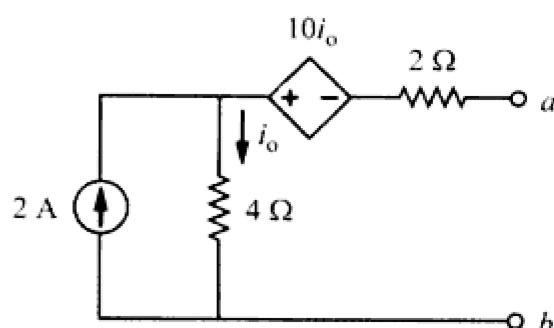


图 4-115 习题 4-48 的电路原理图

4-49 试求图4-102所示电路从端口$a-b$看进去的诺顿等效电路。

4-50 试求图4-116所示电路在端口$a-b$左侧的诺顿等效电路，并利用所得结果计算电流i。

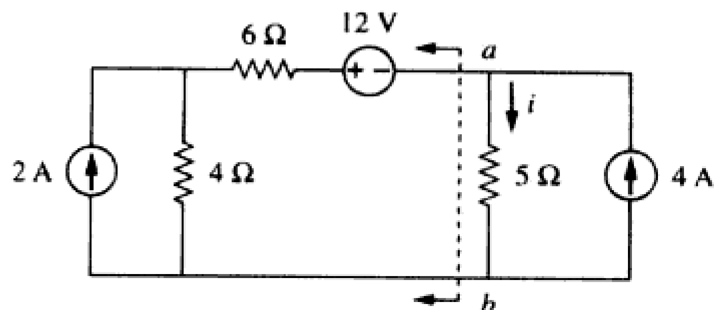


图 4-116 习题 4-50 的电路原理图

4-51 在如图4-117所示电路中，试确定从如下端口看进去的诺顿等效电路：

(a) $a-b$ (b) $c-d$

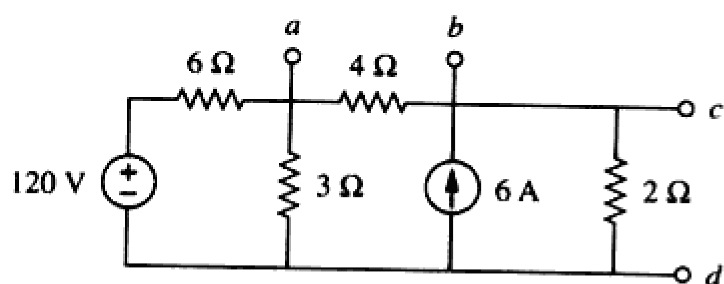


图 4-117 习题 4-51 的电路原理图

4-52 在如图4-118所示的晶体管模型中，试确定从端口$a-b$看进去的戴维南等效电路：

4-53 试求图4-119所示电路在端口$a-b$处的诺顿等效电路。

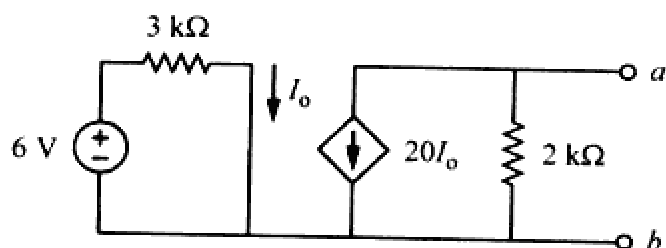


图 4-118 习题 4-52 的电路原理图

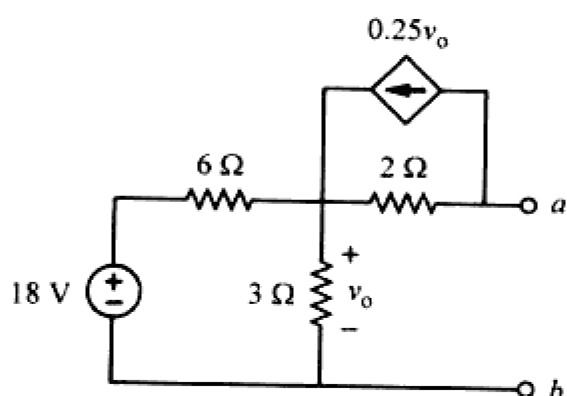


图 4-119 习题 4-53 的电路原理图

4-54 试求图4-120所示电路在端口$a-b$处的戴维南等效电路。

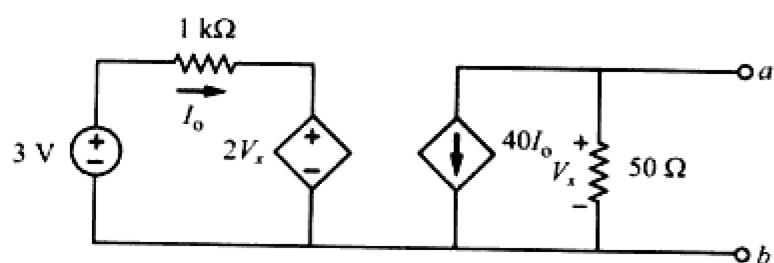


图 4-120 习题 4-54 的电路原理图

*4-55 试求图4-121所示电路在端口$a-b$处的诺顿等效电路。

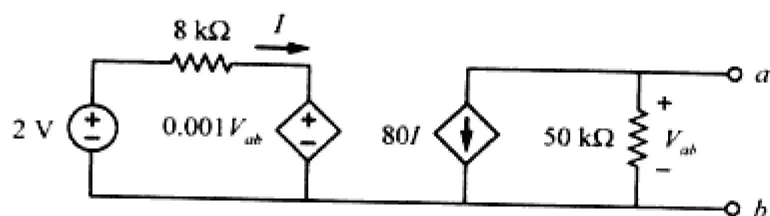


图 4-121 习题 4-55 的电路原理图

4-56 试利用诺顿定理计算图4-122所示电路中的V_o。

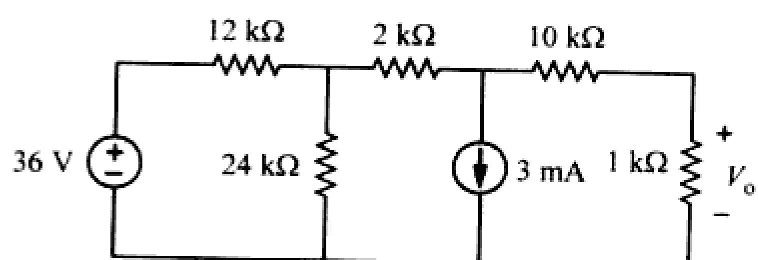


图 4-122 习题 4-56 的电路原理图

4-57 试求图4-123所示电路在端口$a-b$处的戴维南等效电路与诺顿等效电路。

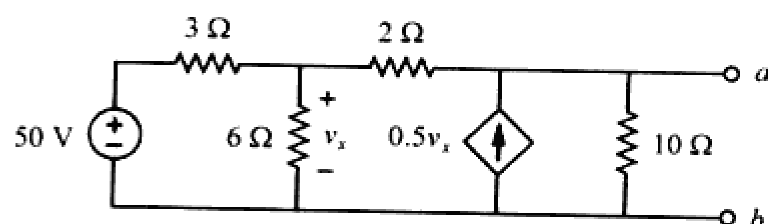


图 4-123 习题 4-57 与习题 4-79 的电路原理图

4-58 图4-124所示电路网络为与负载相连的双极型晶体管共射极放大器模型，试求从负载端看进去的戴维南电阻。

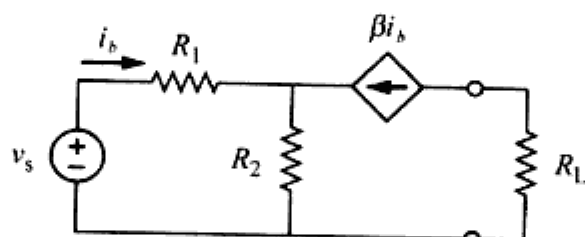


图 4-124 习题 4-58 的电路原理图

4-59 试求图4-125所示电路在端口$a-b$处的戴维南等效电路与诺顿等效电路。

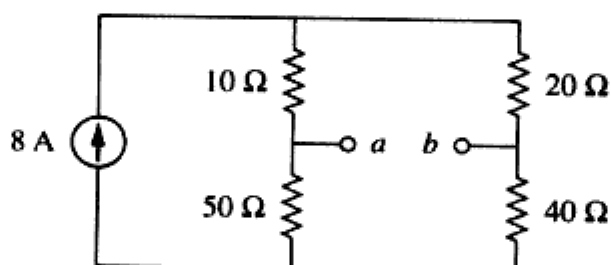


图 4-125 习题 4-59 与习题 4-80 的电路原理图

*4-60 试求图4-126所示电路在端口$a-b$处的戴维南等效电路与诺顿等效电路。

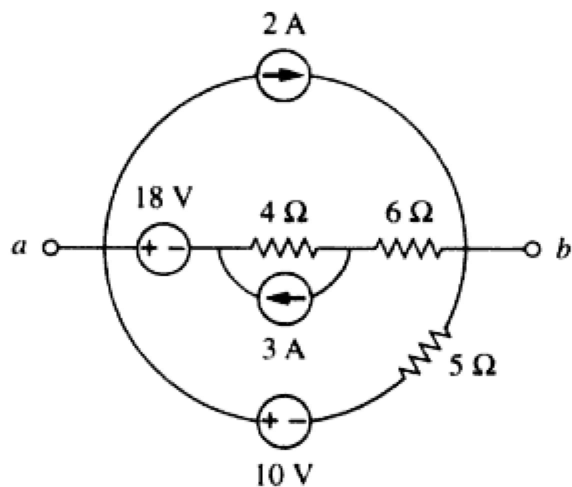


图 4-126 习题 4-60 与习题 4-81 的电路原理图

*4-61 ML 试求图4-127所示电路在端口$a-b$处的戴维南等效电路与诺顿等效电路。

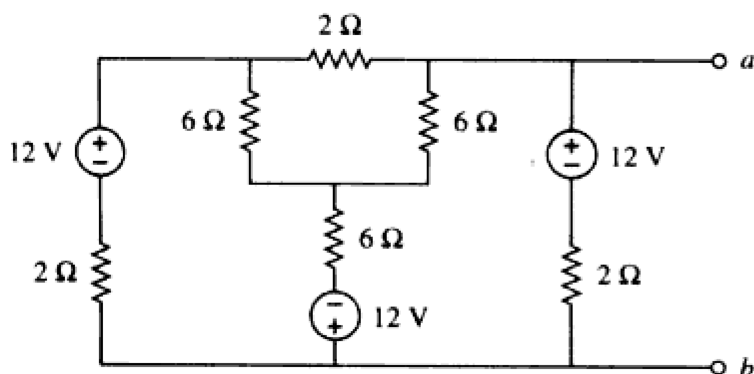


图 4-127 习题 4-61 的电路原理图

*4-62 ML 试求图4-128所示电路的戴维南等效电路。

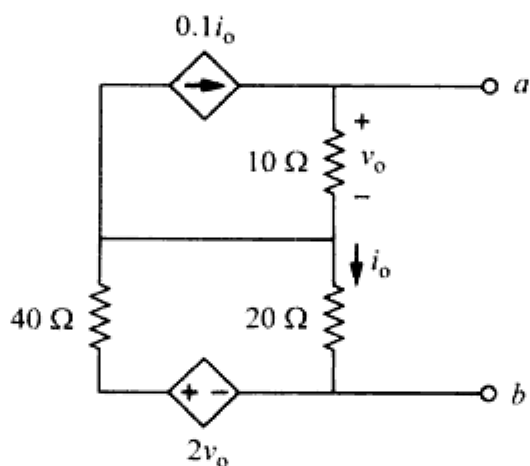


图 4-128 习题 4-62 的电路原理图

4-63 试求图4-129所示电路的诺顿等效电路。

4-64 试求图4-130所示电路从端口$a-b$看进去的戴维南等效电路。

4-65 在如图4-131所示电路中，试确定V_o与I_o之间的关系。

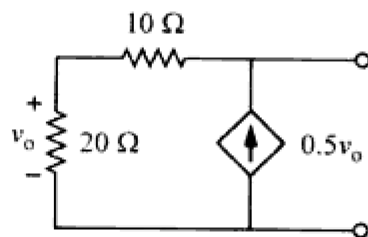


图 4-129 习题 4-63 的电路原理图

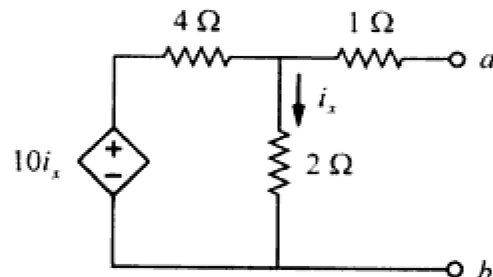


图 4-130 习题 4-64 的电路原理图

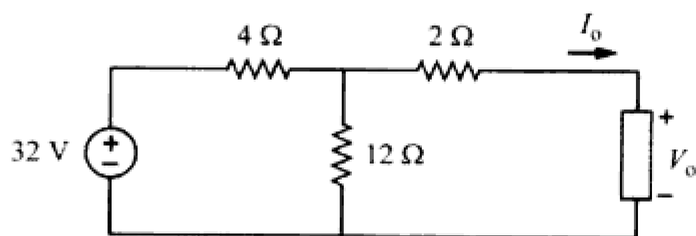


图 4-131 习题 4-65 的电路原理图

4.8 节

4-66 在如图4-132所示电路中，试求传递给电阻R上的最大功率。

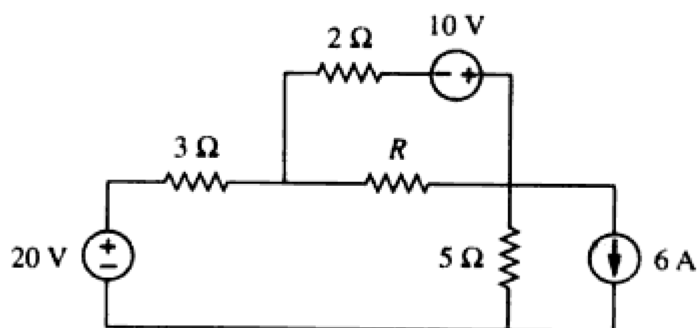


图 4-132 习题 4-66 的电路原理图

4-67 在如图4-133所示电路中，调节可变电阻R，直至其从电路中吸收最大功率。

(a) 试计算吸收最大功率时电阻R的阻值。

(b) 确定R吸收的最大功率的值。

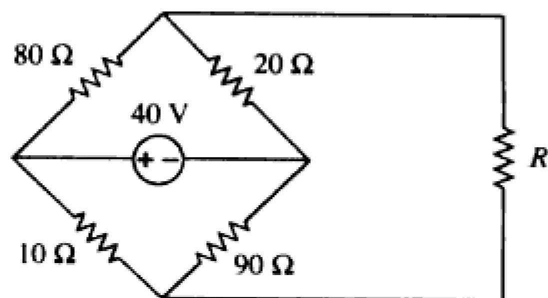


图 4-133 习题 4-67 的电路原理图

*4-68 在如图4-134所示电路中，要使传递给10 Ω电阻的功率最大，试计算电阻R的阻值，并求出相应的最大功率。

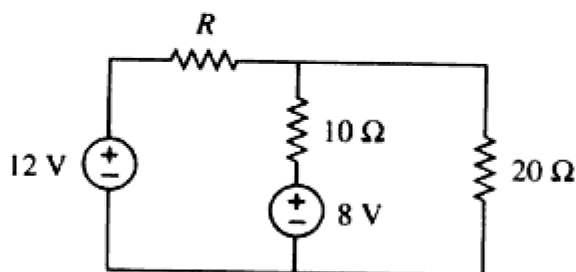


图 4-134 习题 4-68 的电路原理图

4-69 在如图4-135所示电路中，试求传递给电阻R的最大功率。

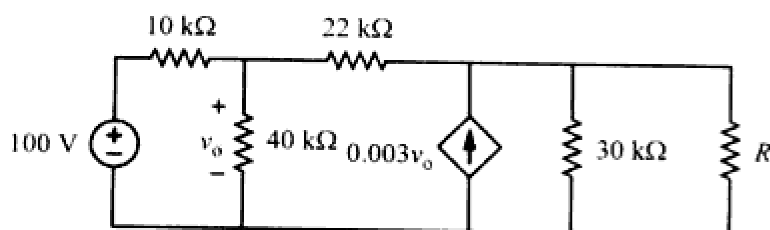


图 4-135 习题 4-69 的电路原理图

4-70 在如图4-136所示电路中，试求传递给可变电阻R的最大功率。

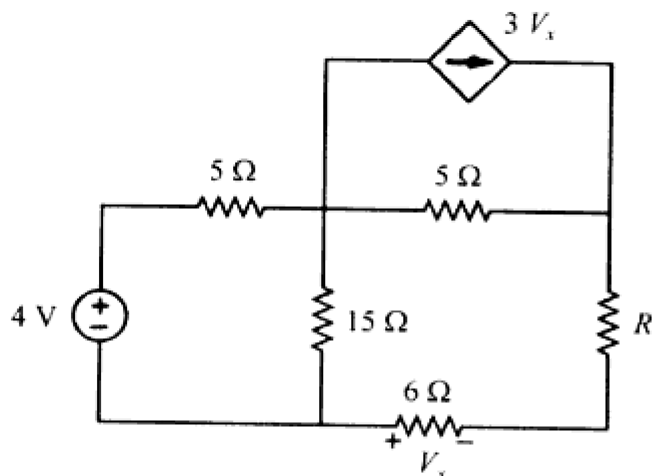


图 4-136 习题 4-70 的电路原理图

4-71 在如图4-137所示电路中，端口$a-b$两端连接多大的电阻时才能从电路中吸收最大功率？该最大功率为多少？

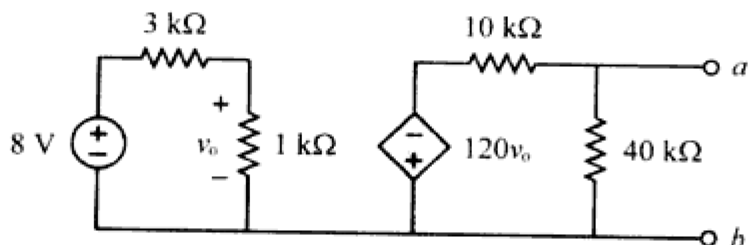


图 4-137 习题 4-71 的电路原理图

4-72 (a) 试求图4-138所示电路在端口$a-b$处的戴维南等效电路。

(b) 试计算流过电阻$R_L = 8\ \Omega$的电流；

(c) 试求满足最大功率传递时的电阻R_L的阻值；

(d) 试计算该最大功率；

4-73 在如图4-139所示电路中，试确定传递给可变电阻R的最大功率。

4-74 在如图4-140所示的桥式电路中，试求满足最大功率传递时的负载电阻R_L及其吸收的最大功率。

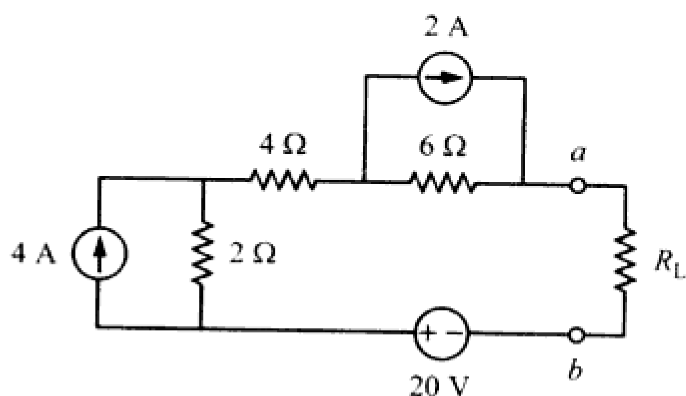


图 4-138 习题 4-72 的电路原理图

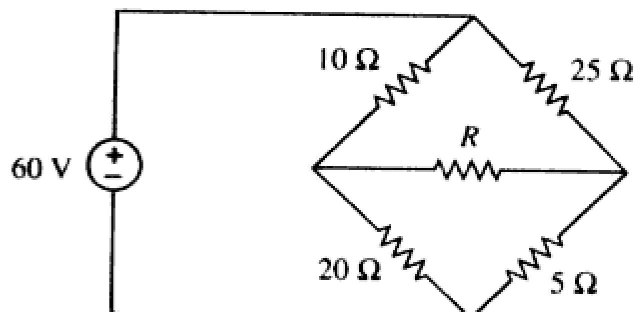


图 4-139 习题 4-73 的电路原理图

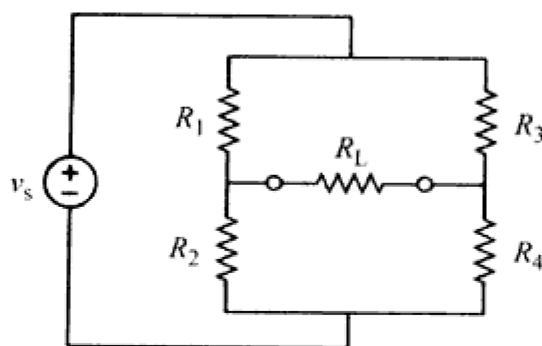


图 4-140 习题 4-74 的电路原理图

4-75 在如图4-141所示电路中，试确定传递给负载的最大功率为3 mW时的电阻R的阻值。

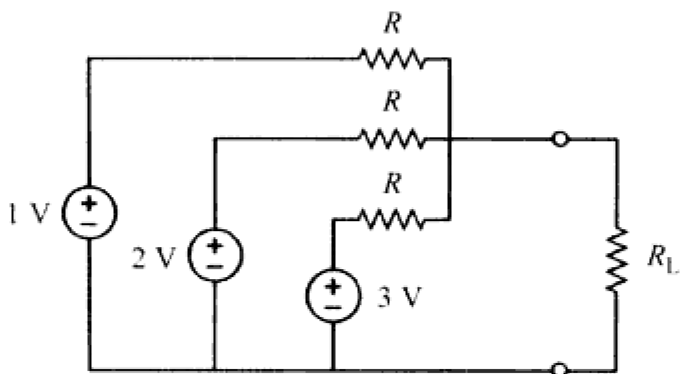


图 4-141　习题 4-75 的电路原理图

4.9 节

ps

4-76　试利用PSpice求解习题4-34。

4-77　试利用PSpice求解习题4-44。

4-78　试利用PSpice求解习题4-52。

4-79　试利用PSpice确定图4-123所示电路的戴维南等效电路。

4-80　试利用PSpice确定图4-125所示电路在端口$a-b$处的戴维南等效电路。

4-81　试利用PSpice确定图4-126所示电路在端口$a-b$处的戴维南等效电路。

4.10 节

4-82　某电池的短路电流为20 A，开路电压为12 V，如果该电池与一个阻值为2 Ω的灯泡相连接，试计算灯泡所消耗的功率。

4-83　在某电阻网络的两个端点之间测得的数据如下：

终端电压	12 V	0 V
终端电流	0 A	1.5 A

试求该网络的戴维南等效电路。

4-84　某电池与一个4 Ω电阻相连接时的端电压为10.8 V，但其开路电压为12 V，试求该电池的戴维南等效电路。

4-85　图4-142所示线性网络在端口$a-b$处的戴维南等效电路需通过测量确定，当端口$a-b$连接10 kΩ电阻时，测量得到的电压V_{ab}为6 V，当该端口连接30 kΩ电阻时，测量得到的电压V_{ab}为12V。试确定：(a) 端口$a-b$处的戴维南等效电路；(b) 当端口$a-b$连接20 kΩ电阻时的电压V_{ab}。

4-86　某装有电路的黑匣子与一可变电阻相连接，利用理想安培表（内部电阻为零）和理想的伏特表（内部电阻为无穷大）测量该黑匣子的电流与电压，如图4-143所示。所得到的结果如下表所示：

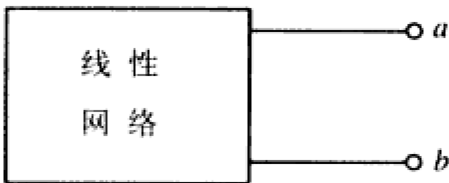


图 4-142　习题 4-85 的电路原理图

$R(\Omega)$	$V(\mathrm{V})$	$i(\mathrm{A})$
2	3	1.5
8	8	1.0
14	10.5	0.75

(a) 试求$R=4\ \Omega$时的i；

(b) 试确定从黑匣子获取的最大功率。

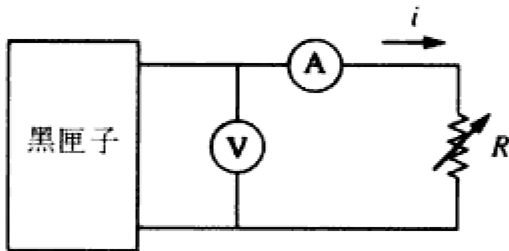


图 4-143　习题 4-86 的电路原理图

4-87　某变换器可以建模为一个电流源I_s与一个电阻R_s的并联，利用一个内阻为20 Ω的安培表测量得到的电流源端口电流为9.975 mA。

e⊘d

(a) 如果在电流源两端增加一个2 kΩ电阻，使得安培表的读数降至9.876 mA，试计算I_s与R_s；

(b) 如果将电流源两端的电阻变为4 kΩ，试求安培表的读数为多少？

4-88　在图4-144所示电路中，将内阻为R_i的安培表连接到A与B之间用于测量I_o，当 (a) $R_i=500\ \Omega$，(b) $R_i=0\ \Omega$时，试确定安培表的读数（提示：需求出端口$a-b$处的戴维南等效电路）。

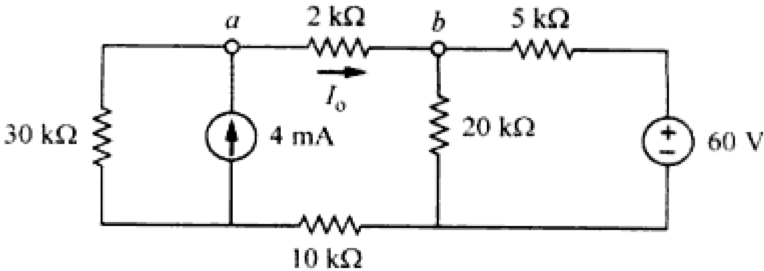


图 4-144　习题 4-88 的电路原理图

4-89 在图4-145所示电路中，(a) 用内阻为0的安培表取代电阻R_L，并确定该安培表的读数；(b) 为证明互易定理，将该安培表与12 V电压源的位置互换，再次确定该安培表的读数。

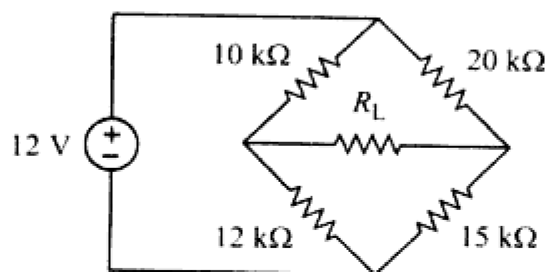


图 4-145 习题 4-89 的电路原理图

4-90 ed 利用如图4-146所示的惠斯登电桥电路测量应变仪的电阻值，线性抽头可调电阻的最大阻值为100 Ω。如果测量得到的应变仪的电阻为42.6 Ω，试问当电桥平衡时，滑动抽头在整个可调电阻上滑动了几分之几？

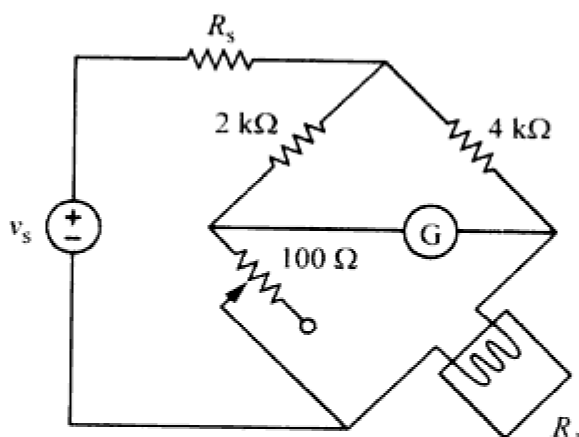


图 4-146 习题 4-90 的电路原理图

4-91 e2d (a) 在如图4-147所示的惠斯登电桥电路中，试选择R_1与R_3使得该电桥可以测量的R_x的取值范围为0～10 Ω。

(b) 如果该电桥可以测量的阻值范围为0～100 Ω，试重新选择R_1与R_3。

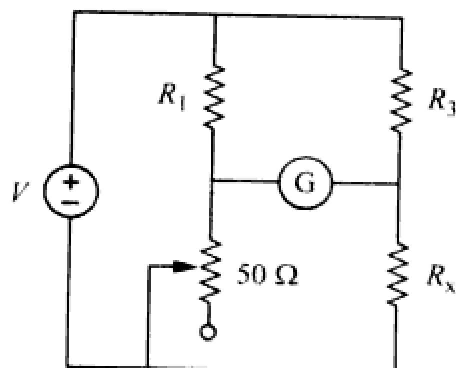


图 4-147 习题 4-91 的电路原理图

*4-92 e2d 在如图4-148所示的电桥电路中，试问该电桥是否平衡？如果用18 kΩ电阻取代10 kΩ电阻，试问端口$a-b$两端连接多大的电阻才能使该电阻吸收的功率最大？该最大功率为多少？

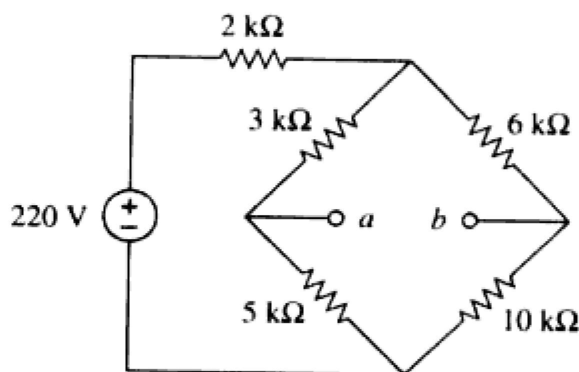


图 4-148 习题 4-92 的电路原理图

综合题

4-93 图4-149所示电路为共射极晶体管放大器的一个模型，试利用电源变换的方法确定i_x。

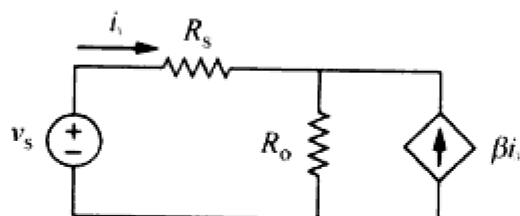


图 4-149 习题 4-93 的电路原理图

4-94 e2d 衰减器是一种用于降低电平但不改变输出电阻的接口电路。

(a) 试通过确定图4-150所示接口电路中的R_s与R_p，设计一个满足如下要求的衰减器：

$$\frac{V_o}{V_g}=0.125,\quad R_{eq}=R_{Th}=R_g=100\Omega$$

(b) 利用 (a) 中设计的接口电路，试计算当$V_g=12$ V时，流过负载$R_L=50$ Ω的电流。

*4-95 e2d 利用一个灵敏度为20 kΩ/V的直流伏特表确定某线性网络的戴维南等效电路，两个量程下的读数如下：

(a) 在0~10V量程下读数为：4 V；

(b) 在0~50 V量程下读数为：5 V，试确定该网络的戴维南电压与戴维南电阻。

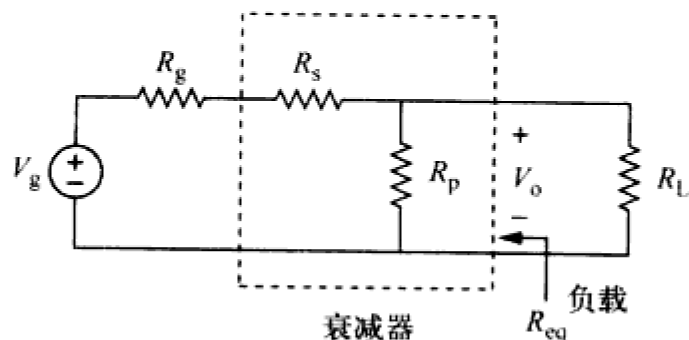


图 4-150　习题 4-94 的电路原理图

*4-96　某电阻列阵与一负载电阻R和一9 V电池相连接，如图4-151所示。

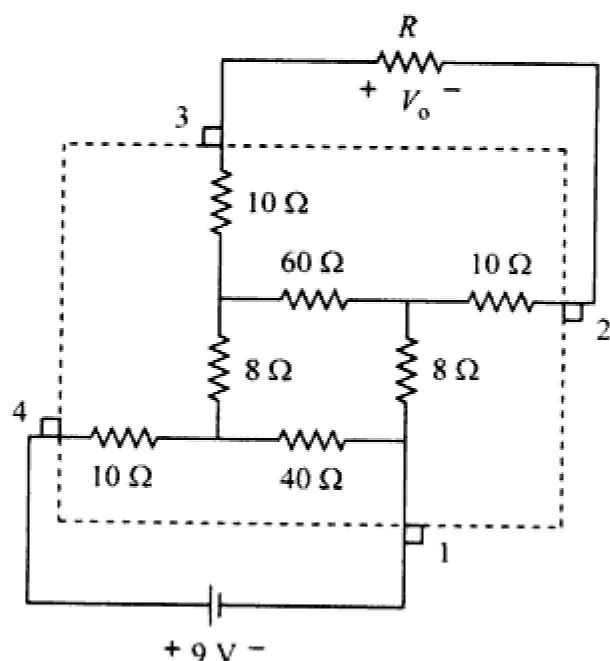


图 4-151　习题 4-96 的电路原理图

(a) 试求使的$V_o = 1.8$ V时的电阻R；

(b) 试计算吸收最大电流时的电阻R，该最大电流为多少？

4-97　共射极放大器电路如图4-152所示，试确定B、E左侧的戴维南等效电路。

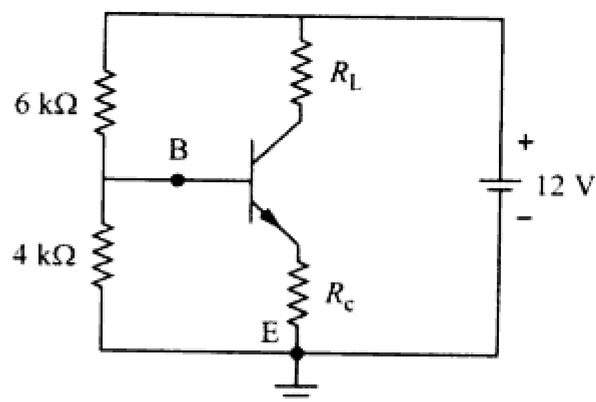


图 4-152　习题 4-97 的电路原理图

*4-98　试确定练习题4-18中流过40 Ω电阻的电流以及该电阻消耗的功率。

第5章 运算放大器

愚昧的人惊叹于奇异的事物，明智的人则惊叹于平常的事物。世上最伟大的奇观莫过于平常的自然规律。

——G. D. Boardman

拓展事业领域

电子仪器学科

工程学利用物理原理设计各种不同的设备造福人类。但是，不通过测量就不能很好地理解物理原理。物理学家常说，物理学实际上是度量现实世界的科学。正如度量是了解客观世界的工具，仪器是度量的工具。本章介绍的运算放大器是现代电子仪器的重要组成模块。因此，掌握运算放大器的基本知识是应用电路的首要任务。


用于医学研究中的电子仪器

在科学与工程技术的各个领域中都会用到电子仪器。电子仪器的应用在科学技术领域迅猛普及并已达到相当高的程度，在理工科教育中不接触电子仪器简直是不可思议的事情。例如，物理学家、生理学家、化学家和生物学家都必须学会使用电子仪器。特别是作为电气工程专业的学生，操作数字和模拟电子仪器的技能是非常关键的，这类仪器包括安培表、伏特表、欧姆表、示波器、频谱分析仪和信号发生器等。

除了不断提高操作仪器的技能以外，电气工程师还要专门学习电子仪器的设计与制造，他们可以从仪器设计中获得满足感，许多人都有所发明并申请了专利。电子仪器专业的专门人才，在医学院、医院、研究所、航空工业和许多日常使用电子仪器的工业部门中都能找到合适的工作，施展他们的聪明才智。

5.1 引言

通过前面章节已经学习了电路分析的基本定律和定理，本章学习一类非常重要的有源电路元件：运算放大器（operational amplifier），或简称为运放（op amp）。运算放大器是一个通用的电路构造模块。

运算放大器是一个特性与电压控制电压源类似的电子元件。

运算放大器这一术语是John Ragazzini及其同事在第二次世界大战之后为美国国防研究委员会（National Defense Research Council）研制模拟计算机的过程中于1947年提出的。第一支运算放大器采用的是真空管而不是晶体管。

运算放大器也可看作是增益非常高的电压放大器。

运算放大器也可用于构成电压控制电流源或电流控制电流源，它还可以对信号进行相加、放大、积分和微分等运算。正是因为它具有这些数学运算的能力，故称为运算放大器，也因此被广泛用于模拟电路的设计中。运算放大器是一种用途广泛、价格低廉、使用方便而有趣的电子器件，因此在实际电路设计中应用非常普遍。

本章首先讨论理想运算放大器，之后介绍非理想运算放大器。下面利用节点分析法作为工具，

分析诸如反相器、电压跟随器、相加器和差分放大器等若干理想运算放大器电路。同时，利用PSpice软件对运放电路进行分析。最后学习如何在数–模转换器和仪器放大器中如何使用运算放大器。

5.2 运算放大器

如果将电阻、电容等外部元器件连接到运算放大器的引脚上，运算放大器就能够执行某些数学运算。

运算放大器是一个用于执行加、减、乘、除、微分与积分等数学运算的有源电路器件。

运算放大器是一种由电阻、晶体管、电容和二极管等构成的复杂有源电路元件，有关运放内部电路的全面讨论已经超出本书的范围，本书仅将运算放大器看作是一个电路组成模块，并学习其引脚处的电性能。

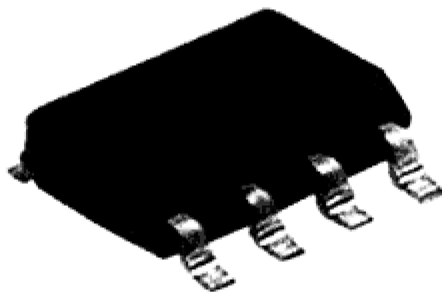


图 5-1 典型的运算放大器

商用运算放大器集成电路具有多种封装形式，图5-1所示为一种典型的运算放大器封装。典型的八引脚双列直插封装（即DIP）如图5-2a所示，引脚8是不用的，引脚1与引脚5一般不外接元件。5个重要的引脚分别为：

（1）反相输入端，引脚2；

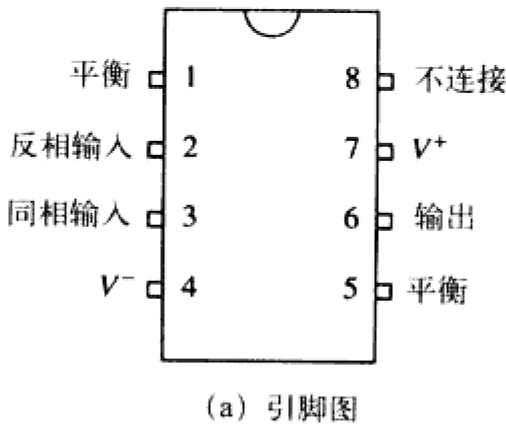
（2）同相输入端，引脚3；

（3）输出端，引脚6；

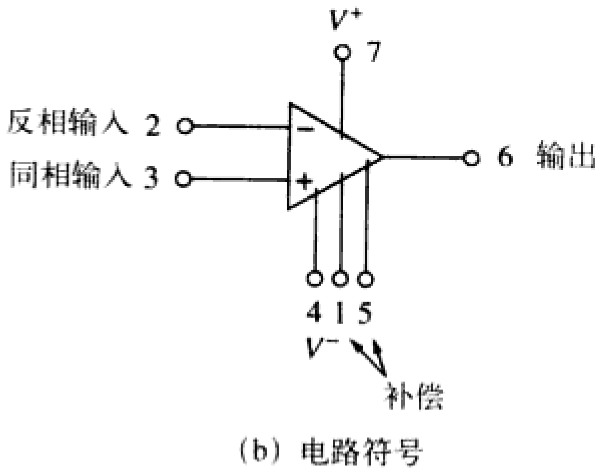
（4）正电源端V^+，引脚7；

（5）负电源端V^-，引脚4；

图5-2a所示的引脚图对应于仙童半导体公司（Fairchild Semiconductor）生产的741通用运算放大器。



（a）引脚图



（b）电路符号

图 5-2 典型的运算放大器

运算放大器的电路符号是如图5-2b所示的三角形，有两个输入和一个输出，两个输入以负（−）和正（+）标记，分别指的是反相和同相输入。若输入加到同相端则输出与其相同极性的信号，而若加到反相端，则输出与输入极性相反。

作为一个有源元件，运算放大器必须有电压源赋以动力，如图5-3所示。在电路图中，为简单起见，常常不画出运放的电源，不过电源电流不应该被忽视。根据KCL，有：

$$i_o = i_1 + i_2 + i_+ + i_- \tag{5-1}$$

运算放大器的等效电路模型如图5-4所示。其输出部分由一个受控电压源和与之串联的输出电阻R_o组成。显然，由图5-4可见，输入电阻R_i是从输入端看进去的戴维南等效电阻，而输出电阻R_o是由输出端看进去的戴维南等效电阻。差分输入电压v_d为：

$$v_d = v_2 - v_1 \tag{5-2}$$

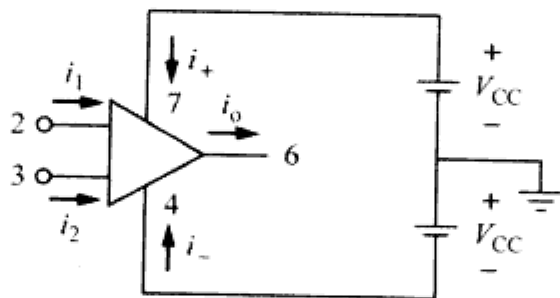


图 5-3 运算放大器的供电电路

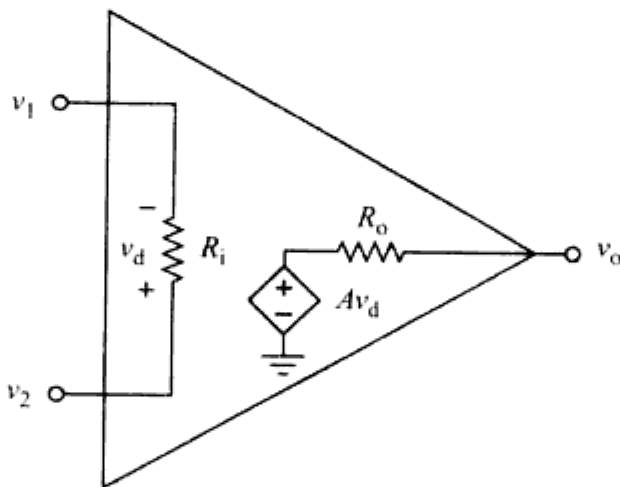


图 5-4 非理想运算放大器的等效电路

其中，v_1为反相输入端与地之间的电压，v_2为同相输入端与地之间的电压。运算放大器检测两输入端之间的差分电压响应，乘以增益A后，将所得到的电压输出至输出端。因此，输出电压v_o为：

$$v_o = Av_d = A(v_2 - v_1) \tag{5-3}$$

A称为开环电压增益（open-loop voltage gain），因为该增益是没有任何从输出到输入的外部反馈时运算放大器的增益。表5-1给出了电压增益A，输入电阻R_i，输出电阻R_o以及电源电压V_{CC}的一些典型值。

电压增益有时以分贝（dB）为单位表示，参见第14章的讨论。

$$AdB = 20\log_{10}A$$

表 5-1 运算放大器参数的典型取值范围

参　数	范　围	理　想　值
开环增益 A	$10^5 \sim 10^8$	∞
输入电阻 R_i	$10^5 \sim 10^{13}\ \Omega$	$\infty\ \Omega$
输出电阻 R_o	$10 \sim 100\ \Omega$	$0\ \Omega$
电源电压 V_{CC}	$5 \sim 24$ V	

反馈的概念对于理解运算放大器电路是非常重要的。当输出反馈至运算放大器的反相输入端时，即构成负反馈，如例题5-1所示，如果存在由输出到输入的反馈路径，那么输出电压与输入电压之比则称为闭环增益（closed-loop gain）。对于负反馈而言，可以证明闭环增益与运算放大器的开环增益基本无关，所以，运算放大器总是用于带反馈的电路中。

运算放大器的一个实际限制是，其输出电压不能超过$|V_{CC}|$。换句话说，运算放大器的输出电压取决于并受限于电源电压。图5-5说明，根据差分输入电压v_d的不同，运算放大器可以工作在如下三种模式下：

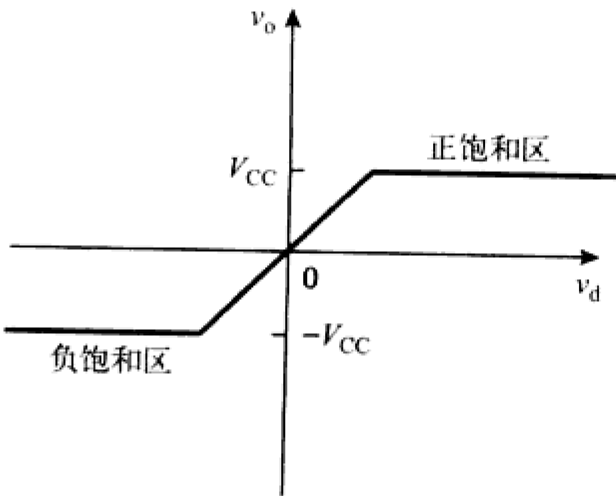


图 5-5 运算放大器输出电压 v_o 与差分输入电压 v_d 之间的函数关系

（1）正饱和区，$v_o = V_{CC}$。

（2）线性区，$-V_{CC} \leqslant v_o = Av_d \leqslant V_{CC}$。

（3）负饱和区，$v_o = -V_{CC}$。

如果v_d超出线性范围，运算放大器进入饱和模式，其输出$v_o = V_{CC}$或$v_o = -V_{CC}$。本书假定运算放大器工作在线性模式下，即其输出电压被限制在如下范围内：

$$-V_{CC} \leqslant v_o \leqslant V_{CC} \tag{5-4}$$

虽然我们总是在线性区应用运算放大器，但在设计运算放大器电路时，仍然要注意其可能进入饱和状态，以避免所设计的运算放大器电路在实验中不能正常工作。

全书假定运算放大器工作在线性区域，在这种工作模式下，必须注意运算放大器的电压限制。

例题5-1 某741运算放大器的开环电压增益为2×10^5，输入电阻为2 MΩ，输出电阻为50 Ω。将该运放用于图5-6a所示的电路，试求其闭环增益v_o/v_s，并确定当$v_s = 2$ V时的电流i。

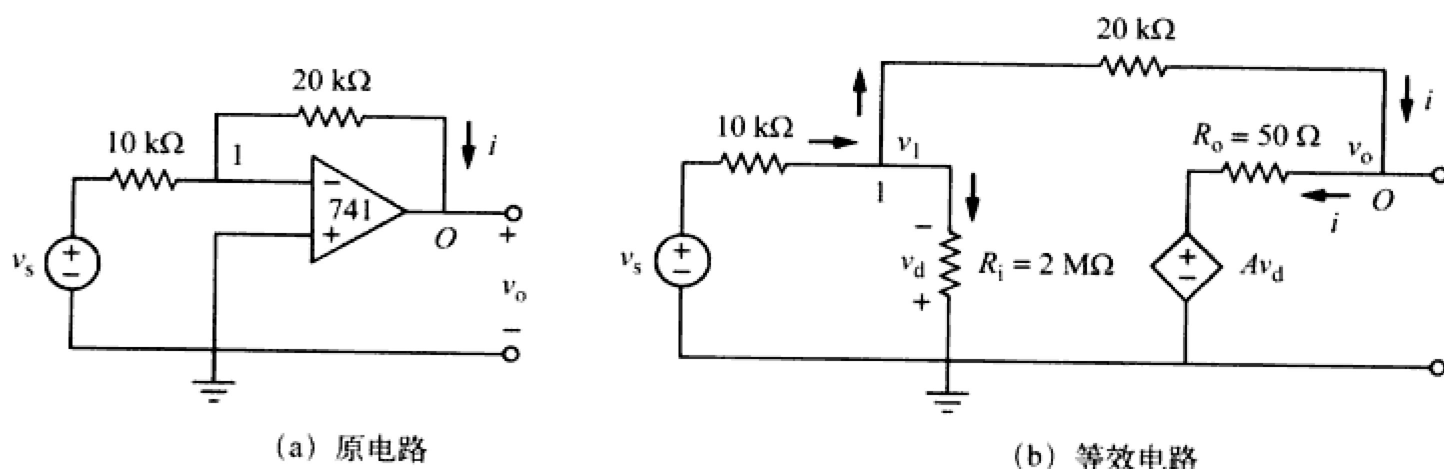


图 5-6 例题 5-1 的电路原理图

解 利用图5-4所示的运算放大器模型，可以得到图5-6a所示电路的等效电路，如图5-6b所示。下面利用节点分析法求解图5-6b所示的电路。在节点1处，应用KCL可得：

$$\frac{v_s - v_1}{10 \times 10^3} = \frac{v_1}{2\,000 \times 10^3} + \frac{v_1 - v_o}{20 \times 10^3}$$

两边同乘以$2\,000 \times 10^3$，得到：

$$200 v_s = 301\ v_1 - 100\ v_o$$

即

$$2v_s \simeq 3v_1 - v_o \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{2v_s + v_o}{3} \tag{5-1-1}$$

在节点O处：

$$\frac{v_1 - v_o}{20 \times 10^3} = \frac{v_o - Av_d}{50}$$

但是$v_d = -v_1$且$A = 200\,000$，于是有：

$$v_1 - v_o = 400\,(v_o + 200\,000 v_1) \tag{5-1-2}$$

将式(5-1-1)中的v_1代入式(5-1-2)，得到：

$$0 \simeq 26\,667\,067 v_o + 53\,333\,333 v_s \quad \Rightarrow \quad \frac{v_o}{v_s} = -1.999\,969\,9$$

这就是闭环增益，因为20 kΩ的反馈电阻将输出端与输入端之间封闭起来。当$v_s = 2$ V时，$v_o = -3.999\,939\,8$ V，由式(5-1-1)得到$v_1 = 20.066\,667$ μV，因此，

$$i = \frac{v_1 - v_o}{20 \times 10^3} = 0.199\,99\,\text{mA}$$

显然，计算非理想运算放大器是非常繁琐的，因为计算过程中需要处理很大的数。

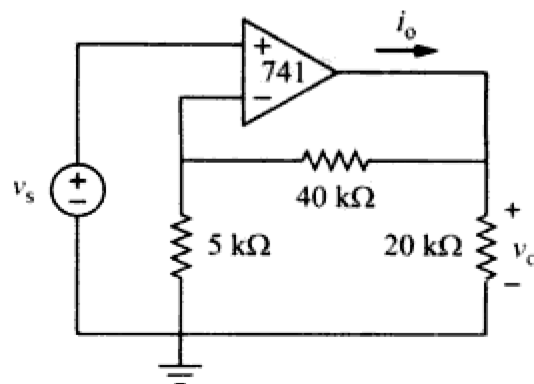


图 5-7 练习题 5-1 的电路原理图

练习题5-1 如果将例题5-1中同样的741运算放大器用于图5-7

所示的电路中，试计算其闭环增益v_o/v_s，并求出当$v_s = 1$ V时的i_o。

答 9.000 41，0.657 mA。

5.3 理想运算放大器

为便于理解运算放大器电路，假定所讨论的运算放大器均为理想运放。通常将具有以下特征的运算放大器，称为理想运算放大器：

（1）开环增益无穷大，$A \simeq \infty$；

（2）输入电阻无穷大，$R_i \simeq \infty$；

（3）输出电阻为零，$R_o \simeq 0$。

理想运算放大器是指开环增益为无穷大、输入电阻为无穷大、输出电阻为零的运算放大器。

虽然由理想运算放大器的假定仅会得到电路的近似分析，但目前绝大多数运算放大器都具有相当大的增益和输入电阻，因此这种近似分析是符合实际的。除特别说明以外，本书从此之后的章节均假定运算放大器是理想的。

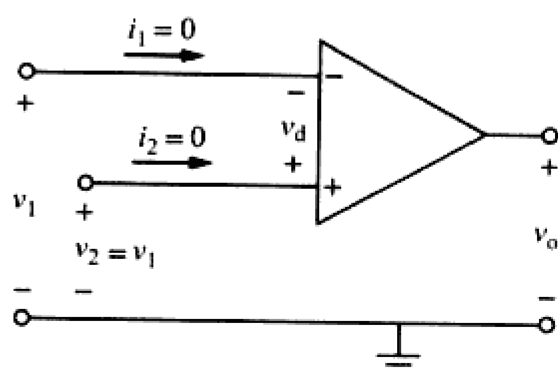


图 5-8 理想运算放大器模型

理想运算放大器的电路分析模型如图5-8所示，它是由图5-4所示的非理想运算放大器推导出来的。理想运算放大器具有两个重要特性：

（1）流入两个输入端的电流均为零：

$$i_1 = 0, \qquad i_2 = 0 \tag{5-5}$$

这是因为其输入电阻为无穷大，这也意味着输入端之间是开路的，没有电流流入运算放大器。但是，由式(5-1)可知，运算放大器的输出电流未必为零。

（2）两个输入端之间的电压等于零，即：

$$v_d = v_2 - v_1 = 0 \tag{5-6}$$

或者

$$v_1 = v_2 \tag{5-7}$$

因此，没有电流进入理想运算放大器的两个输入端，并且两个输入端之间的电压为零。式(5-5)与式(5-7)所描述的特性极为重要，应该说是分析运算放大器电路的关键。

这两项特性可以这样用：计算电压时，输入端表现为短路，而计算电流时，输入端表现为开路。

例题5-2 试利用理想运算放大器模型，重新计算练习题5-1。

解 与例题5-1一样，可以将图5-7中的运算放大器替换为图5-9所示的等效模型，但实际并不需要这样做，仅需在分析图5-7所示电路时，记住式(5-5)与式(5-7)，于是图5-7所示电路可表示为图5-9。我们注意到，

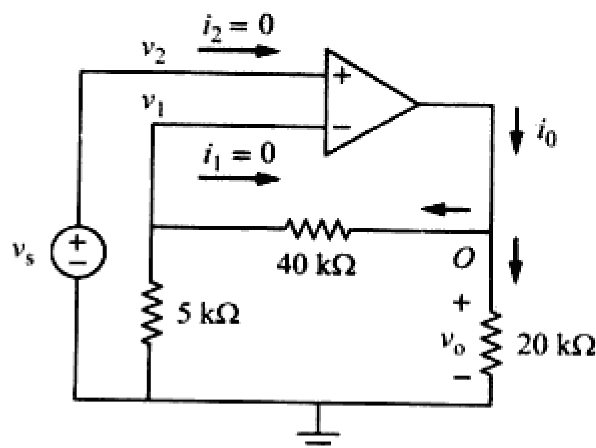


图 5-9 例题 5-2 的电路原理图

$$v_2 = v_s \tag{5-2-1}$$

因为$i_1=0$，40 kΩ电阻与5 kΩ电阻相串联，所以流过两电阻的电流相同。v_1为5 kΩ电阻两端的电压，于是由分压原理可以得到，

$$v_1 = \frac{5}{5+40}v_o = \frac{v_o}{9} \tag{5-2-2}$$

根据式(5-7)可知，

$$v_2 = v_1 \tag{5-2-3}$$

将式(5-2-1)与式(5-2-2)代入式(5-2-3)，得到闭环增益为：

$$v_s = \frac{v_o}{9} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_o}{v_s} = 9 \tag{5-2-4}$$

与练习题5-1中采用非理想模型计算得到的闭环增益9.00041非常接近。这表明由理想运算放大器的假设所带来的误差是可以忽略不计的。

在节点O处，有：

$$i_o = \frac{v_o}{40+5} + \frac{v_o}{20}\text{mA} \tag{5-2-5}$$

由式(5-2-4)可知，当$v_s=1$ V时，$v_o=9$ V，将$v_o=9$ V代入式(5-2-5)，得到：

$$i_o = 0.2 + 0.45 = 0.65 \text{ mA}$$

这与练习题5-1中采用非理想模型计算得到的输出电流0.657又是非常接近的。

练习题5-2 试利用理想运算放大器模型重新计算例题5-1。

答 −2，0.2 mA。

5.4 反相放大器

本节和以后几节讨论一些实用的运算放大器电路，这些电路通常是设计复杂电路时需要采用的功能模块。其中一种运算放大器电路即图5-10所示的反相放大器。在该电路中，同相端接地，v_i通过电阻R_1接至反相输入端，反馈电阻R_f接在反相输入端与输出端之间。我们的目标是要找出输入电压v_i与输出电压v_o之间的关系。对节点1应用KCL可以得到：

$$i_1 = i_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_i - v_1}{R_1} = \frac{v_1 - v_o}{R_f} \tag{5-8}$$

反相放大器的关键特点是输入信号与反馈信号都作用在运算放大器的反相输入端上。

但是，对于理想运算放大器而言，由于其同相端接地，所以$v_1=v_2=0$，因此，

$$\frac{v_i}{R_1} = -\frac{v_o}{R_f}$$

即

$$\boxed{v_o = -\frac{R_f}{R_1}v_i} \tag{5-9}$$

于是，电压增益为$A_v=v_o/v_i=-R_f/R_1$。图5-10所示电路之所以被命名为“反相器（inverter）”就是因为增益的这个负号。因此，反相放大器在对输入信号进行放大的同时又反转其极性。

注意，运算放大器有两种类型的增益，其中一种就是这里所说的运算放大器电路的闭环电压增益A_v，而另一种则是运算放大器本身的开环电压增益A。

应该注意到，这里闭环增益的大小即反馈电阻除以输入电阻，表明该增益仅取决于与运算放大器相连的外部电路元件。由式(5-9)可知，反相放大器的等效电路如图5-11所示。反相放大器可用在

电流－电压转换器的电路中。

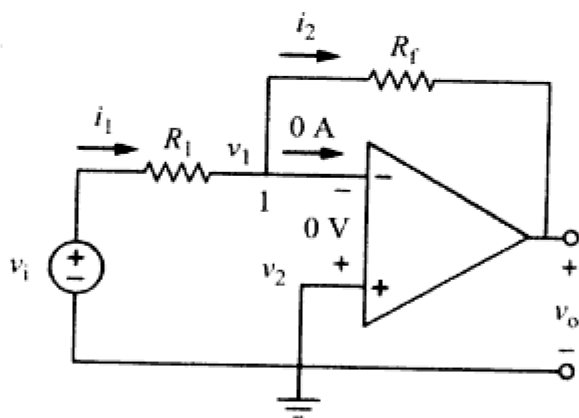


图 5-10　反相放大器

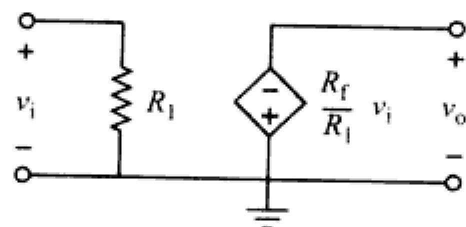


图 5-11　图 5-10 所示反相器的等效电路

例题5-3　在如图5-12所示的运算放大器中，如果$v_i = 0.5$ V，试计算：(a) 输出电压v_o；(b) 10 kΩ电阻中的电流。

解　(a) 利用式(5-9)可得：

$$\frac{v_o}{v_i} = -\frac{R_f}{R_1} = -\frac{25}{10} = -2.5$$

$$v_o = -2.5v_i = -2.5(0.5) = -1.25\,\text{V}$$

(b) 流过10 kΩ电阻的电流为：

$$i = \frac{v_i - 0}{R_1} = \frac{0.5 - 0}{10 \times 10^3} = 50\mu\text{A}$$

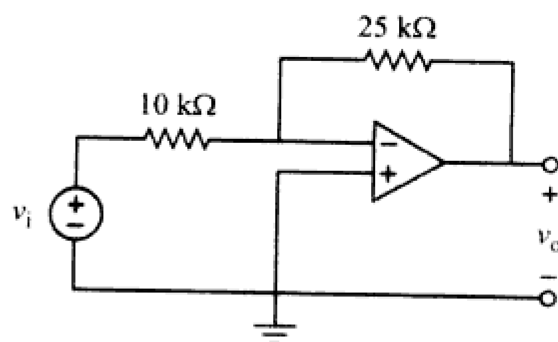


图 5-12　例题 5-3 的电路原理图

练习题5-3　试求图5-13所示运算放大器电路的输出，并计算通过反馈电阻的电流。

答　－120 mA，8 μA。

例题5-4　试求图5-14所示运算放大器电路中的v_o。

解

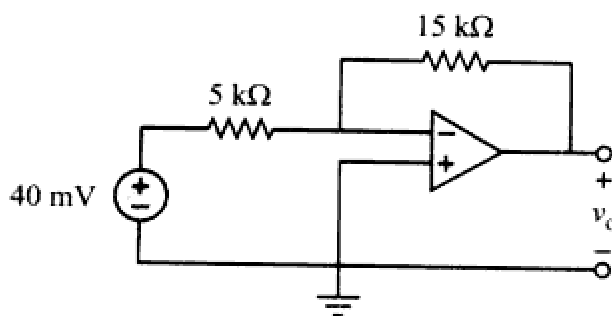


图 5-13　练习题 5-3 的电路原理图

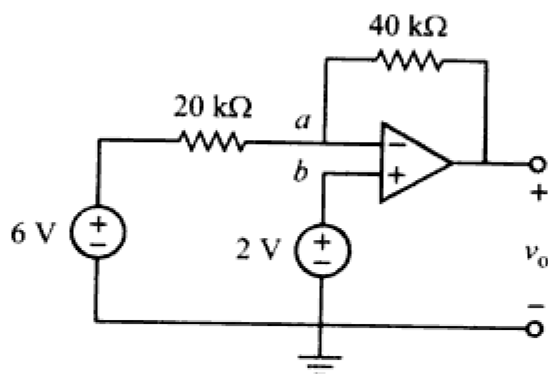


图 5-14　例题 5-4 的电路原理图

对节点a应用KCL可得：

$$\frac{v_a - v_o}{40\text{k}\Omega} = \frac{6 - v_a}{20\text{k}\Omega}$$

$$v_a - v_o = 12 - 2v_a \quad \Rightarrow \quad v_o = 3v_a - 12$$

但是由于理想运算放大器两输入端之间的压降为零，所以$v_a = v_b = 2$ V，于是，

$$v_o = 6 - 12 = -6\text{ V}$$

可以看出，如果$v_b = 0 = v_a$，则$v_o = -12$ V，与由式(5-9)得到的结果相同。

练习题5-4　如图5-15所示为两类电流-电压转换器［也称为跨阻放大器（transresistance amplifier）］。

(a) 试证明对于图5-15a所示转换器，有：

$$\frac{v_o}{i_s}=-R$$

(b) 试证明对于图5-15b所示转换器，有：

$$\frac{v_o}{i_s}=-R_1\left(1+\frac{R_3}{R_1}+\frac{R_3}{R_2}\right)$$

答 请证明。

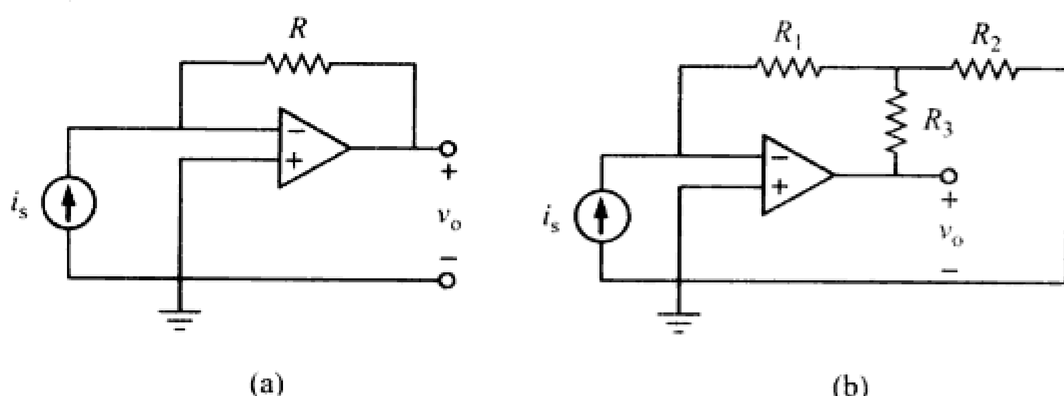


图 5-15 练习题 5-4 的电路原理图

5.5 同相放大器

运算放大器的另一个重要应用即如图5-16所示的同相放大器。在这种情况下，输入电压v_i直接接至同相输入端，电阻R_1接在反相输入端与地之间，下面计算其输出电压和电压增益。在反相输入端应用KCL可得：

$$i_1=i_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{0-v_1}{R_1}=\frac{v_1-v_o}{R_f} \tag{5-10}$$

但$v_1=v_2=v_i$，于是式（5-10）变为：

$$\frac{-v_i}{R_1}=\frac{v_i-v_o}{R_f}$$

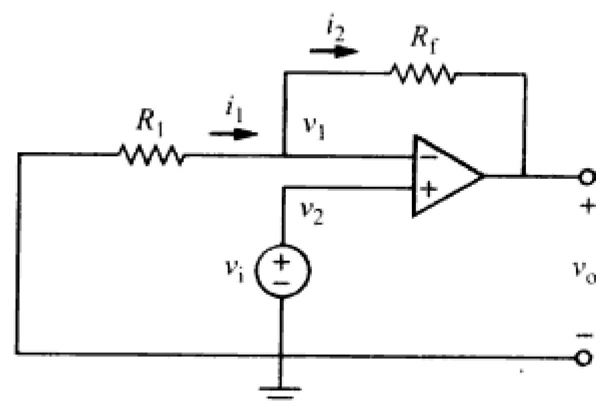


图 5-16 同相放大器

即

$$\boxed{v_o=\left(1+\frac{R_f}{R_1}\right)v_i} \tag{5-11}$$

电压增益为$A_v=v_o/v_i=1+R_f/R_1$，没有负号，因此输出与输入具有相同的极性。

同相放大器是提供正电压增益的运算放大器电路。

这里又一次看到，运算放大器的电压增益仅依赖于外部电阻。

注意，如果反馈电阻$R_f=0$（短路）或$R_1=\infty$（开路）或者同时满足$R_f=0$且$R_1=\infty$则增益变为1。在这些条件（$R_f=0$且$R_1=\infty$）下，图5-16所示的电路就变成如图5-17所示的电路，因为其输出与输入一样，故称该电路为电压跟随器（voltage follower）[或单位增益放大器（unit gain amplifier）]。于是，对于电压跟随器有：

$$\boxed{v_o=v_i} \tag{5-12}$$

电压跟随器具有非常高的输入阻抗，因此可以用作中间级放大器（即缓冲放大器），将一个电路与另一个电路隔离开，如图5-18所示。电压跟随器使两级之间的相互影响最小，同时消除了级间负载。

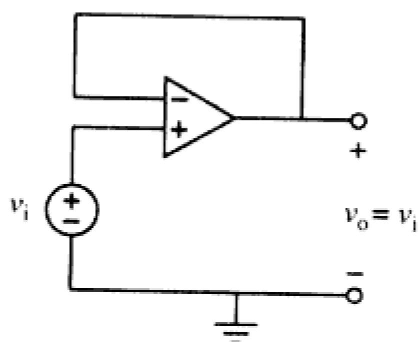


图 5-17 电压跟随器

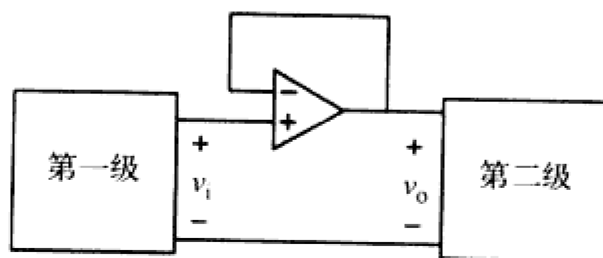


图 5-18 用于隔离相互串联的两级电路的电压跟随器

例题5-5 对于图5-19所示的运放电路，试计算其输出电压v_o。

解 可以采用如下两种方法计算，即叠加原理法和节点分析法。

方法1：采用叠加原理，令：

$$v_o = v_{o1} + v_{o2}$$

其中，v_{o1}为由6 V电压源产生的输出，v_{o2}为由4 V电压源产生的输出。为了求出v_{o1}，需将4 V电压源设为零，此时电路成为一个反相器，于是由式(5-9)可得：

$$v_{o1} = -\frac{10}{4}(6) = -15\text{V}$$

为了求出v_{o2}，需将6 V电压源设为零，此时电路成为同相放大器，于是由式(5-11)可得：

$$v_{o2} = \left(1 + \frac{10}{4}\right)4 = 14\text{V}$$

因此，

$$v_o = v_{o1} + v_{o2} = -15 + 14 = -1\text{V}$$

方法2：在节点a处，应用KCL可得：

$$\frac{6 - v_a}{4} = \frac{v_a - v_o}{10}$$

而$v_a = v_b = 4$，所以，

$$\frac{6-4}{4} = \frac{4 - v_o}{10} \quad \Rightarrow \quad 5 = 4 - v_o$$

即$v_o = 1$ V，与方法1的计算结果相同。

练习题5-5 试计算图5-20所示电路中的v_o。

答 7 V。

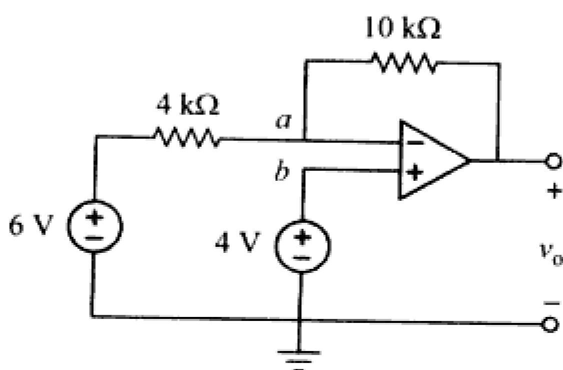


图 5-19 例题 5-9 的电路原理图

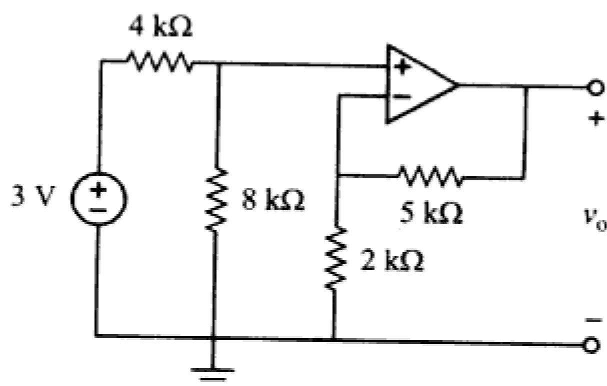


图 5-20 练习题 5-5 的电路原理图

5.6 加法放大器

除了放大功能外，运算放大器还可以执行加减运算。加法运算可以由本节介绍的加法放大器实

现，减法运算则可以由下一节介绍的差分放大器实现。

加法放大器是将若干个输入合并，并且在输出端产生这些输入的加权和的运算放大器。

图5-21所示的加法放大器是反相放大器的一种变体，这种电路形式充分利用了反相放大器能够同时处理多个输入信号的优点。对图中节点a应用KCL，同时考虑到流入运算放大器各个输入端的电流为零，可以得到：

$$i = i_1 + i_2 + i_3 \tag{5-13}$$

而

$$i_1 = \frac{v_1 - v_a}{R_1},\quad i_2 = \frac{v_2 - v_a}{R_2},\quad i_3 = \frac{v_3 - v_a}{R_3},\quad i = \frac{v_a - v_o}{R_f} \tag{5-14}$$

我们注意到$v_a = 0$，并且将式(5-14)代入式(5-13)，得到：

$$\boxed{v_o = -\left(\frac{R_f}{R_1}v_1 + \frac{R_f}{R_2}v_2 + \frac{R_f}{R_3}v_3\right)} \tag{5-15}$$

上式表明，输出电压为各个输入电压的加权和，因此将图5-21所示电路称为加法器（summer）。当然，加法器可以有三个以上的输入。

例题5-6 试计算图5-22所示运算放大器电路中的v_o与i_o。

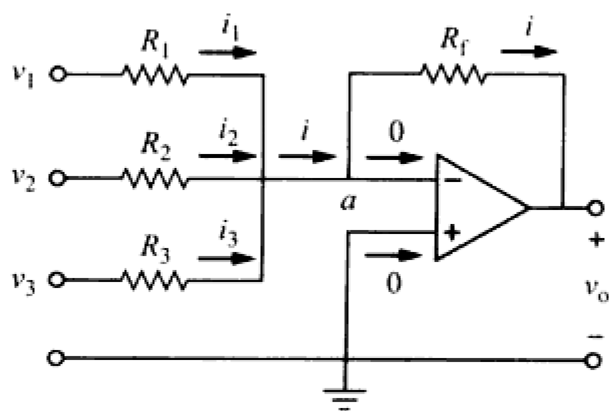


图 5-21 加法放大器

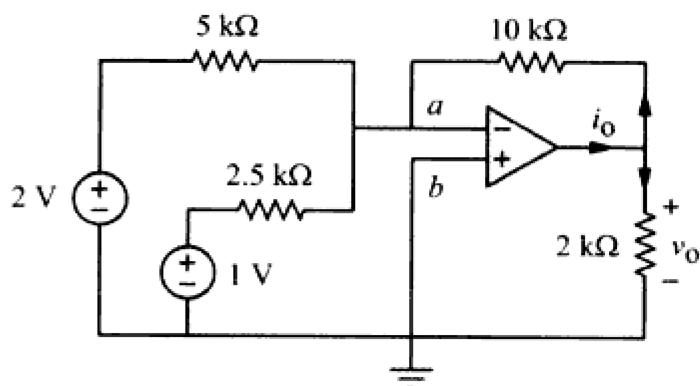


图 5-22 例题 5-6 的电路原理图

解 该加法器具有两个输入端，由式(5-15)可得：

$$v_o = -\left[\frac{10}{5}(2) + \frac{10}{2.5}(1)\right] = -(4+4) = -8\,\text{V}$$

电流i_o是流经10 kΩ和2 kΩ电阻的电流之和，由于$v_a = v_b = 0$，所以这两个电阻两端的电压均为$v_o = -8$ V。因此，

$$i_o = \frac{v_o - 0}{10} + \frac{v_o - 0}{2}\,\text{mA} = -0.8 - 4 = -4.8\,\text{mA}$$

练习题5-6 试求图5-23所示运算放大器电路中的v_o与i_o。

答 −3.8 V，−1.425 mA。

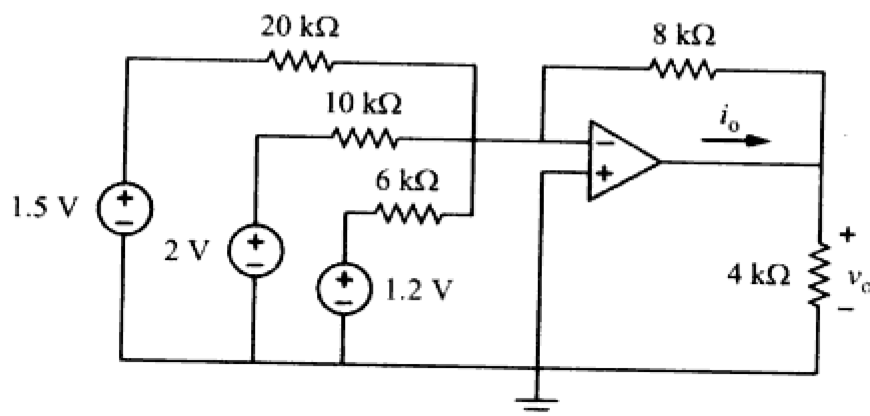


图 5-23　练习题 5-6 的电路原理图

5.7　差分放大器

差分（或差动）放大器被广泛应用于需要放大两个输入信号之差的各种场合。差分放大器与应用最为普遍的仪器放大器（instrumentation amplifier）属于同一类放大器，后者将在5.10节中讨论。

差分放大器是放大两个输入信号之差而抑制两个输入的共模信号的器件。

差分放大器也称为减法器，其原因稍后叙述。

考虑如图5-24所示的运算放大器电路。在节点a处应用KCL，并且知道流入运算放大器输入端的电流为零，则有：

$$\frac{v_1 - v_a}{R_1} = \frac{v_a - v_o}{R_2}$$

即

$$v_o = \left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right) v_a - \frac{R_2}{R_1} v_1 \tag{5-16}$$

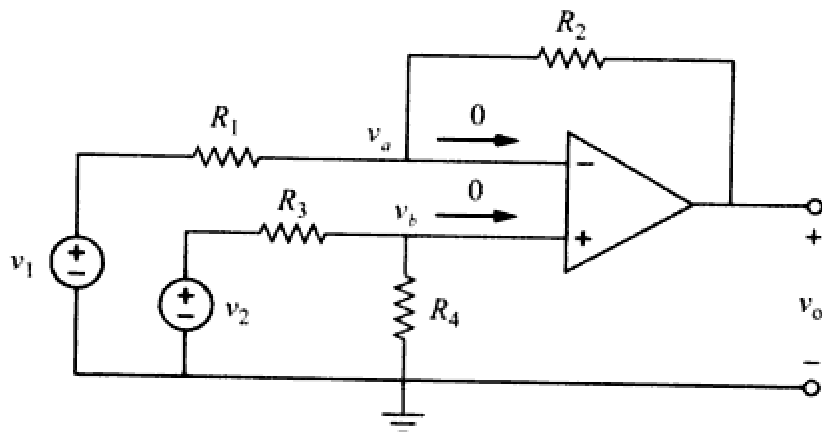


图 5-24　差分放大器

在节点b处，应用KCL可得：

$$\frac{v_2 - v_b}{R_3} = \frac{v_b - 0}{R_4}$$

即

$$v_b = \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_2 \tag{5-17}$$

但是，$v_a = v_b$，将式(5-17)代入式(5-16)，得到：

$$v_o = \left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right) \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_2 - \frac{R_2}{R_1} v_1$$

即

$$v_o = \frac{R_2(1+R_1/R_2)}{R_1(1+R_3/R_4)}v_2 - \frac{R_2}{R_1}v_1 \tag{5-18}$$

由于差分放大器必须抑制两个输入的共模信号，所以当$v_1 = v_2$时，放大器的输出必为$v_o = 0$。即满足如下条件时，该性质成立：

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \tag{5-19}$$

因此，当图5-24所示运算放大器电路为差分放大器时，式(5-18)变为：

$$v_o = \frac{R_2}{R_1}(v_2 - v_1) \tag{5-20}$$

如果$R_2 = R_1$且$R_3 = R_4$，差分放大器则成为一个减法器（subtractor），其输出为：

$$v_o = v_2 - v_1 \tag{5-21}$$

例题5-7 试设计一个输入为v_1、v_2的运算放大器电路，使其输出为$v_o = -5\,v_1 + 3\,v_2$。

解 要求所设计的电路满足：

$$v_o = 3v_2 - 5v_1 \tag{5-7-1}$$

可以采用如下两种设计方法实现该电路。

方法1：如果仅采用一个运算放大器，则可以利用如图5-24所示的运算放大器电路。比较式(5-7-1)与式(5-18)可以看出，

$$\frac{R_2}{R_1} = 5 \quad \Rightarrow \quad R_2 = 5R_1 \tag{5-7-2}$$

而且，

$$5\frac{(1+R_1/R_2)}{(1+R_3/R_4)} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{6}{5}}{1+R_3/R_4} = \frac{3}{5}$$

即，

$$2 = 1 + \frac{R_3}{R_4} \quad \Rightarrow \quad R_3 = R_4 \tag{5-7-3}$$

如果选择$R_1 = 10\ \text{k}\Omega$且$R_3 = 20\ \text{k}\Omega$，则$R_2 = 50\ \text{k}\Omega$且$R_4 = 20\ \text{k}\Omega$。

方法2：如果采用不止一个运算放大器，则可以将一个反相放大器与一个两输入反相加法器相串连，得到如图5-25所示所示电路。对于加法器而言，

$$v_o = -v_a - 5v_1 \tag{5-7-4}$$

对于反相器而言，

$$v_a = -3v_2 \tag{5-7-5}$$

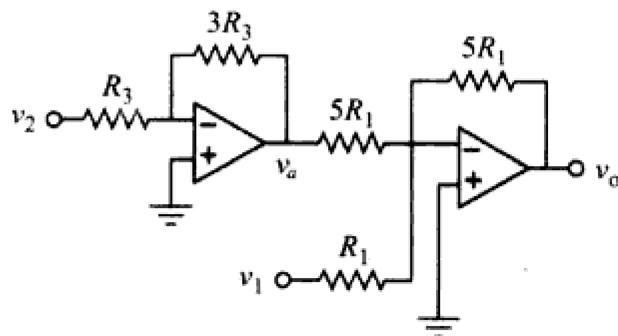


图 5-25 例题 5-7 的电路原理图

将式(5-7-4)与式(5-7-5)合并，得到：

$$v_o = 3v_2 - 5v_1$$

即所要求的设计结果。在图5-25所示电路中，可以选取$R_1 = 10\ \text{k}\Omega$且$R_3 = 20\ \text{k}\Omega$，或者选取$R_1 = R_3 = 10\ \text{k}\Omega$。

练习题5-7 试设计一个增益为4的差分放大器。

答 典型值：$R_1 = R_3 = 10\ \text{k}\Omega$，$R_2 = R_4 = 40\ \text{k}\Omega$。

例题5-8 图5-26所示的仪器放大器，用于在过程控制或测量仪器中对低电平信号进行放大，该放大器的商业级产品具有单片封装的形式。试证明：

$$v_o=\frac{R_2}{R_1}\left(1+\frac{2R_3}{R_4}\right)(v_2-v_1)$$

解 由图5-26可知，A_3是一个差分放大器，于是由式（5-20）可得：

$$v_o=\frac{R_2}{R_1}(v_{o2}-v_{o1}) \tag{5-8-1}$$

由于运算放大器A_1与A_2不提取电流，所以电流i流经三个电阻，如同三者串联一样，因此，

$$v_{o1}-v_{o2}=i(R_3+R_4+R_3)=i(2R_3+R_4) \tag{5-8-2}$$

但是，

$$i=\frac{v_a-v_b}{R_4}$$

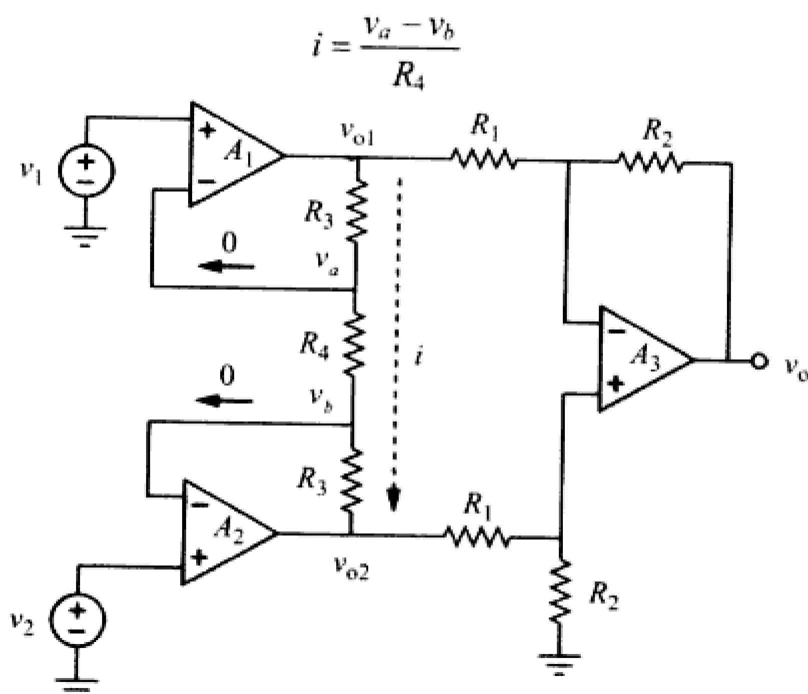


图 5-26 例题 5-8 中的仪器放大器

且$v_a=v_1$，$v_b=v_2$，所以，

$$i=\frac{v_1-v_2}{R_4} \tag{5-8-3}$$

将式(5-8-2)与式(5-8-3)代入式（5-8-1），可以得到：

$$v_o=\frac{R_2}{R_1}\left(1+\frac{2R_3}{R_4}\right)(v_2-v_1)$$

即是要求证明的结果。5.10节将对仪器放大器进行详细的讨论。

练习题5-8 试求图5-27所示仪器放大器电路中的i_o。

答 2 μA。

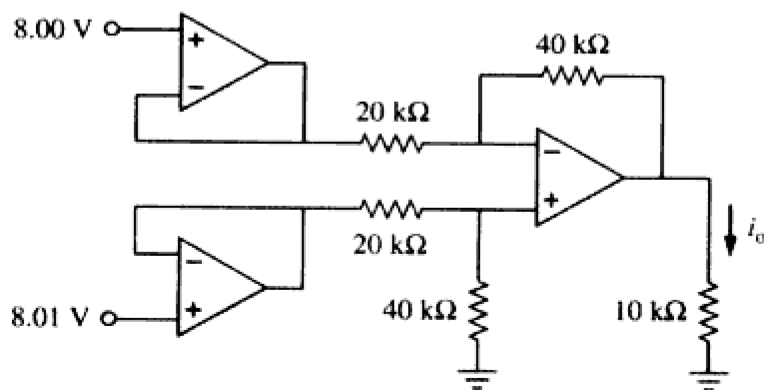


图 5-27 练习题 5-8 中的仪器放大器

5.8 级联运算放大器电路

众所周知，运算放大器是设计复杂电路的功能模块，在实际应用中，通常将运算放大器级联（即首尾相连）起来以获得较大的总增益。一般而言，两个电路首尾顺序连接，称为级联。

级联是指两个或多个运算放大器电路首尾顺序相连，使得前者的输出为下一级的输入。

若干个运算放大器电路相互级联时，其中每一个电路都称为一级（stage），原输入信号经各级运算放大器放大。运算放大器的优势在于它们的级联并不改变各自的输入–输出关系，这是因为（理想）运算放大器电路的输入电阻为无穷大，输出电阻为零。图5-28给出了三个运算放大器电路级联的方框图表示，前一级的输出是下一级的输入，所以级联运算放大器电路的总增益为各个运算放大器电路增益的乘积，即

$$A = A_1A_2A_3 \tag{5-22}$$

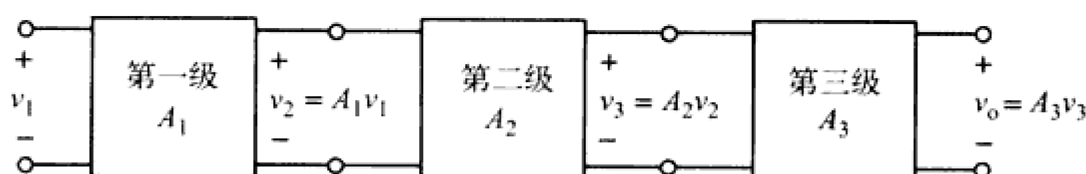


图 5-28 三级级联的运算放大器电路方框图

虽然运算放大器的级联不影响其输入–输出关系，但是在设计实际的运算放大器电路时，必须确保级联电路中下一级产生的负载不会使运算放大器总的输出处于饱和。

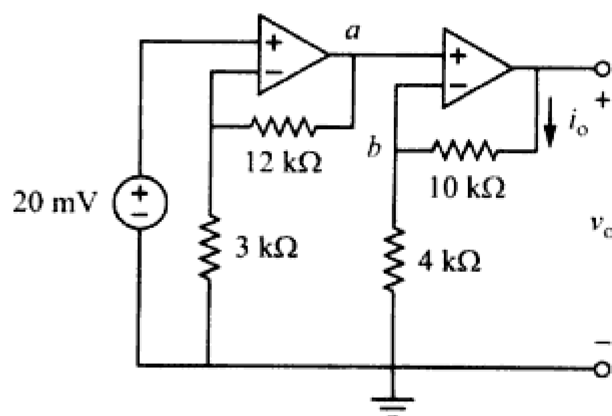


图 5-29 例题 5-9 的电路原理图

例题5-9 试求图5-29所示电路中的v_o与i_o。

解 该电路由两个同相放大器的级联组成。在第一级运算放大器的输出端：

$$v_a = \left(1+\frac{12}{3}\right)(20) = 100\,\text{mV}$$

在第二级运算放大器的输出端：

$$v_o = \left(1+\frac{10}{4}\right)v_a = (1+2.5)100 = 350\,\text{mA}$$

所要求解的电流i_o是流经10 kΩ电阻的电流，

$$i_o = \frac{v_o - v_b}{10}\,\text{mA}$$

但由于$v_b = v_a = 100$ mV，所以，

$$i_o = \frac{(350-100)\times 10^{-3}}{10\times 10^3} = 25\mu\text{A}$$

练习题5-9 试求图5-30所示运算放大器电路中的v_o与i_o。

答 10 V，1 mA。

例题5-10 在如图5-31所示的运算放大器电路中，如果$v_1 = 1$ V且$v_2 = 2$ V，试求v_o。

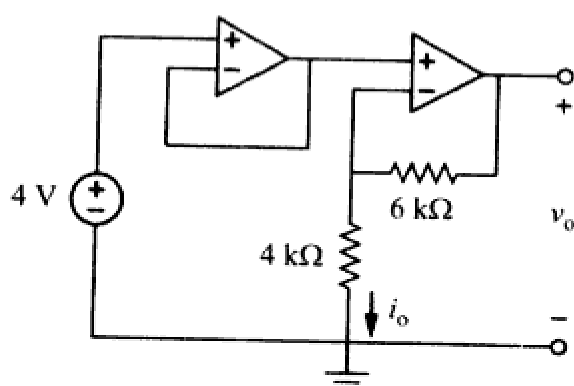


图 5-30 练习题 5-30 的电路原理图

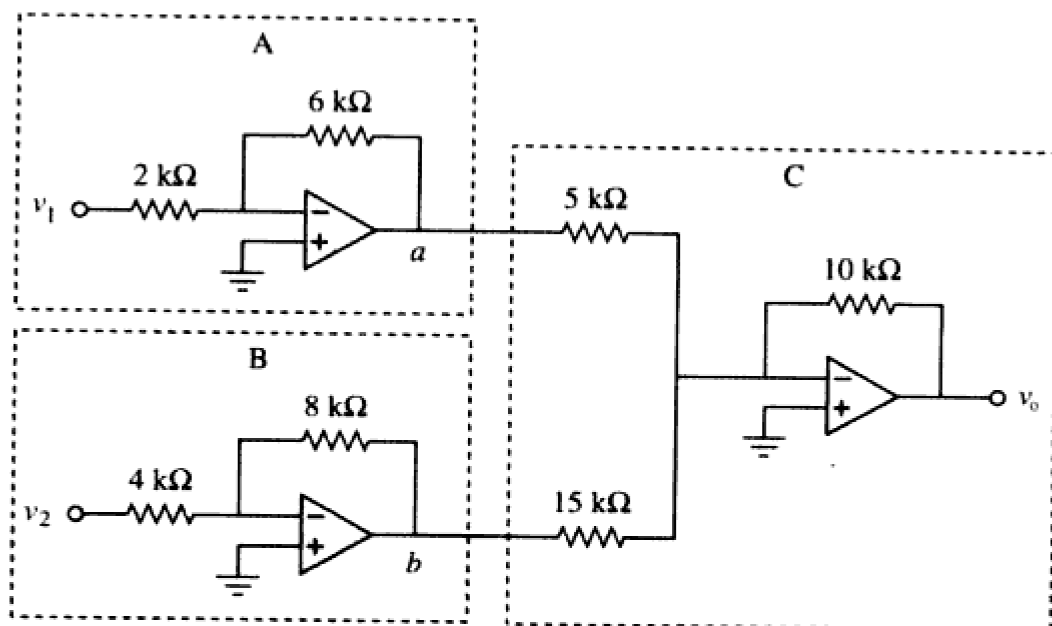


图 5-31 例题 5-10 的电路原理图

解 （1）明确问题。本例题所要解决的问题非常清楚。

（2）**表述**对问题的理解。当输入v_1为1 V，v_2为2 V时，确定图5-31所示电路的输出电压，该运算放大器电路实际上由三个电路组成，第一个电路是输入为v_1，增益为$-3(-6\ k\Omega/2\ k\Omega)$的放大器，第二个电路是输入为$v_2$，增益为$-2(-8\ k\Omega/4\ k\Omega)$的放大器，第三个电路是对另外两个电路的输出以不同增益放大后进行求和的加法器。

（3）确定**可选**解。可以采用不同的方法求解该电路，由于采用了理想运算放大器，故纯数学的解法将十分容易。第二种方法是利用PSpice来验证采用纯数学方法所得到的结果。

（4）**尝试**问题的求解。

令第一个运算放大器的输出为v_{11}，第二个运算放大器的输出为v_{22}，于是得到：

$$v_{11} = -3v_1 = -3\times 1 = -3\,\text{V},$$
$$v_{22} = -2v_2 = -2\times 2 = -4\,\text{V}$$

因此，第三个运算放大器的输出为：

$$\begin{aligned} v_o &= -(10\text{k}\Omega/5\text{k}\Omega)v_{11} + [-(10\text{k}\Omega/15\text{k}\Omega)v_{22}] \\ &= -2(-3)-(2/3)(-4) \\ &= 6+2.667 = \mathbf{8.667V} \end{aligned}$$

（5）**评价**得到的结果，为了正确评价所得到的结果，需确定合理的校验方法，本题采用PSpice可以很容易地完成检验。下面就可以利用PSpice进行电路模拟，得到如图5-32所示的仿真结果。

由此可见采用两种完全不同的方法（第一种方法将运算放大器电路看成是增益处理和加法器，第二种方法是采用PSpice进行电路分析）可以得到相同的结果，这是验证答案正确性的一种非常好

的办法。

（6）对结果是否满意？我们对所得到的结果是满意的，可以将上述求解过程作为该问题的正确答案。

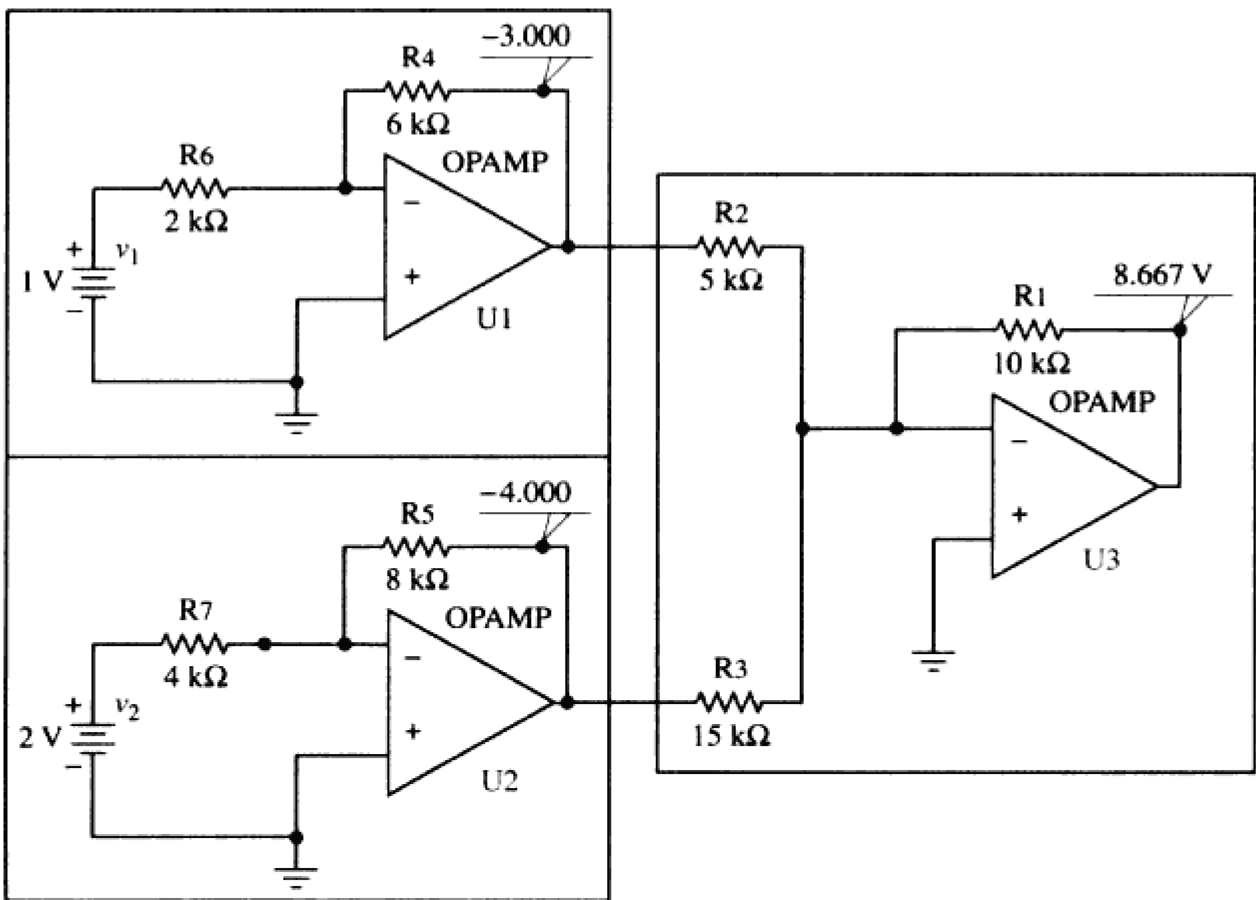


图 5-32　例题 5-10 的电路原理图

练习题5-10　在图5-32所示的运算放大器电路中，如果$v_1=2\text{V}$且$v_2=1.5\ \text{V}$，试求v_o。

答　9 V。

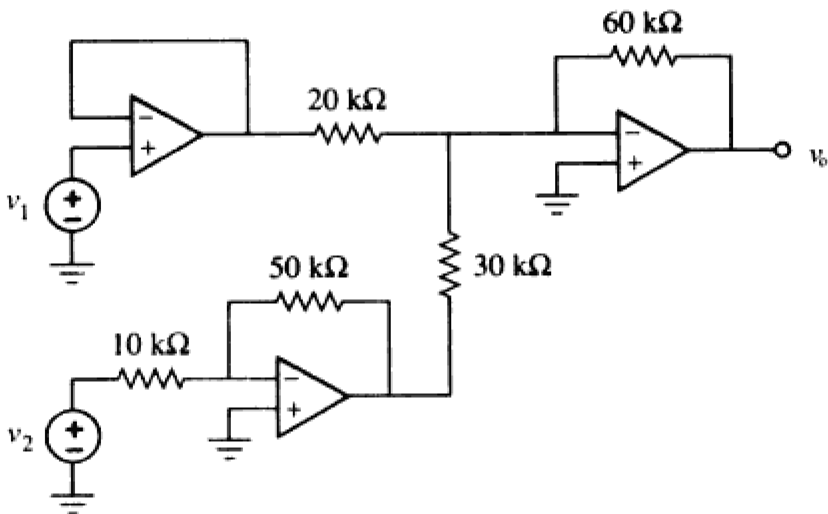
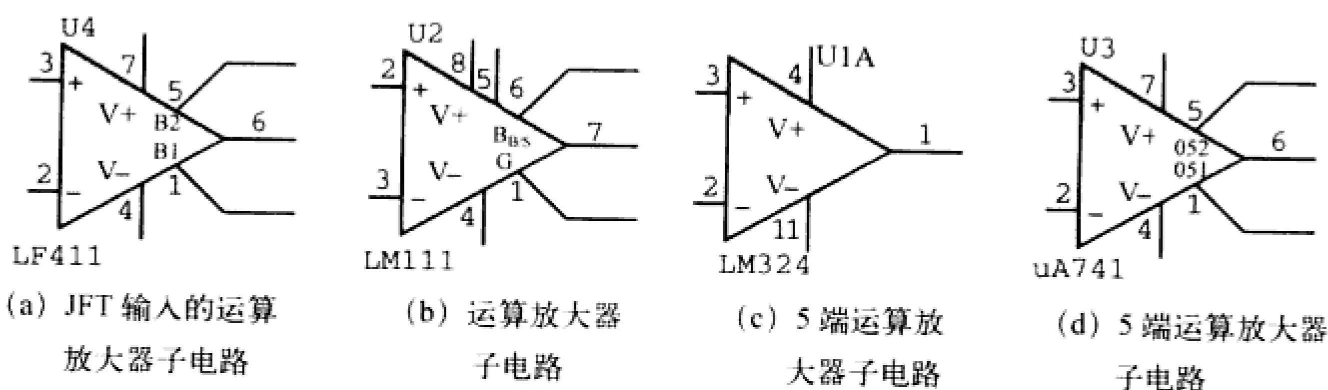


图 5-33　练习题 5-10 的电路原理图

5.9　利用 PSpice 软件分析运算放大器电路

虽然Windows版本的PSpice软件可以利用工具（Tools）菜单中的创建子电路（Create Subcircuit）命令创建理想运算放大器作为一个子电路，但该软件中却没有理想运算放大器的模型。除通过上述方法创建理想运算放大器外，还可以利用PSpice库文件eval.lib中提供的四个非理想商用运算放大器

之一进行电路模拟。这些运算放大器模型的部件名称分别为LF411、LM111、LM324和uA741，如图5-34所示，其中各运算放大器模型可以通过点击PSpice菜单**Draw/Get New Part/libraries.../eval.1ib**得到，也可以简单地选择**Draw/Get New Part**，并在部件名称（PartName）对话框中键入部件名称得到。注意，每个运算放大器模型都要求直流供电，否则运算放大器将无法正常工作，直流电源的连接方式如图5-3所示。



(a) JFT输入的运算放大器子电路 (b) 运算放大器子电路 (c) 5端运算放大器子电路 (d) 5端运算放大器子电路

图 5-34 PSpice中的非理想运算放大器模型

例题5-11 试利用PSpice求解例题5-1的运算放大器电路。

解 利用PSpice的原理图编辑器将图5-6a所示电路图画在图5-34中。注意，图中电压源v_s的正端通过一个10 kΩ的电阻与运算放大器的反相输入端（引脚2）相连，而运算放大器的同相输入端（引脚3）接地，以符合图5-6a所示电路的要求。同时，要注意运算放大器的供电方式，电源正极V＋（引脚7）与一个15V直流电压源相连接，而电源负极V－（引脚4）与一个－15V直流电压源相连接。由于运算放大器引脚1与引脚5用于零偏置调整，本章暂不考虑，故将二者悬空。除在图5-6a所示的原电路中增加了直流电源外，电路图中还分别在引脚6处增加了用于测量输出电压v_o的伪元件VIEWPOINT以及用于测量流经20 kΩ电阻的电流i_o的伪元件IPROBE。

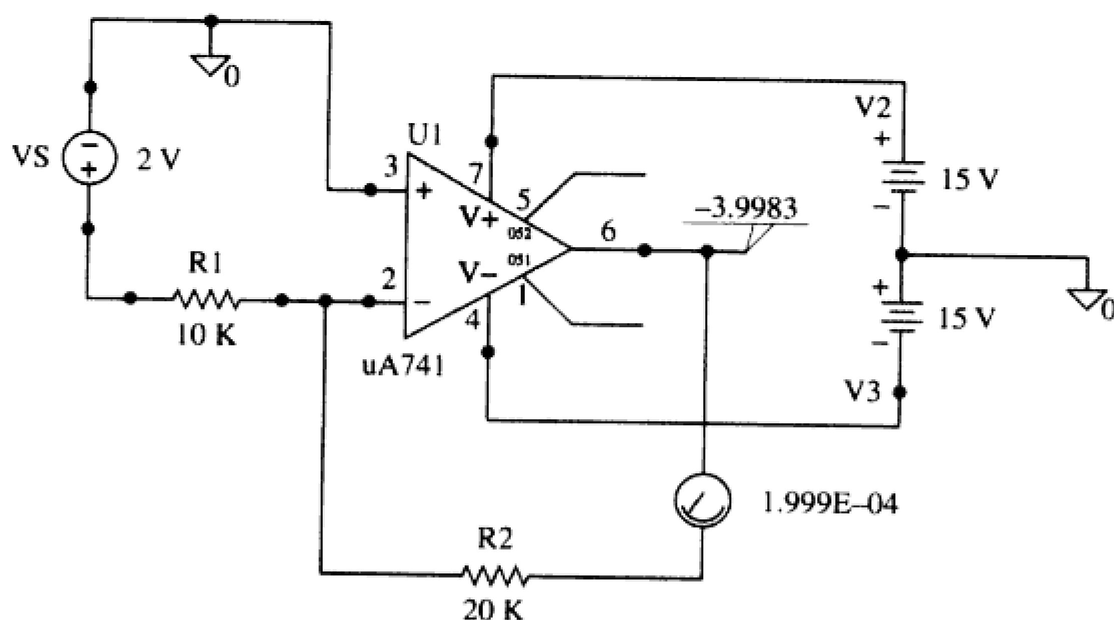


图 5-35 例题5-11的PSpice电路原理图

保存电路图后，就可以运行**Analysis/Simulate**命令对电路进行模拟，其结果显示在VIEWPOINT和PROBE上。由所显示的结果可以得到闭环增益为：

$$\frac{v_o}{v_s}=\frac{-3.9983}{2}=-1.99915$$

且$i=0.1999$ mA，与例题5-1分析得到的结果相同。

练习题5-11 试利用PSpice重做练习题5-1。

答 9.0027，0.6502 mA。

5.10 †应用

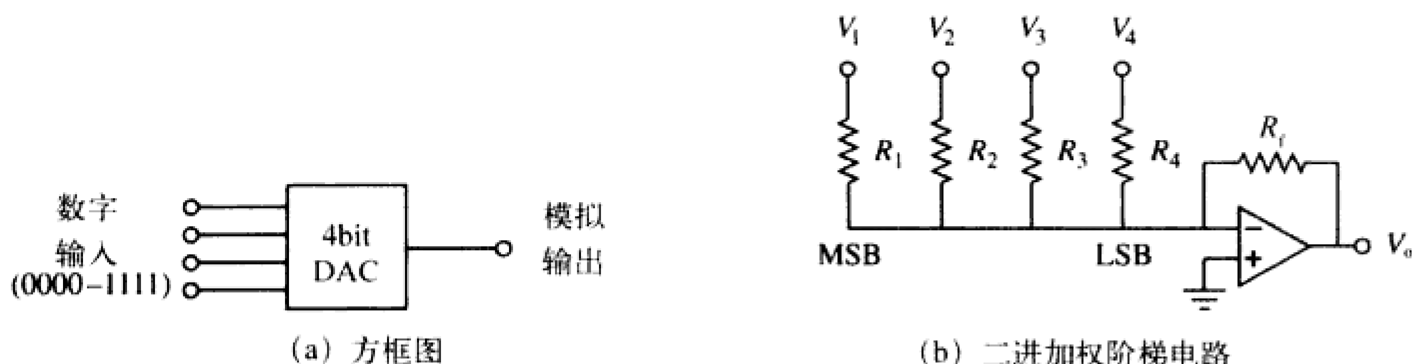
运算放大器是现代电子仪器中最重要的功能模块，与电阻以及其他无源元件一样，被广泛应用于许多设备中，其典型应用包括仪器放大器、数-模转换器、模拟计算机、电平移位器、滤波器、校验电路、反相器、加法器、积分器、微分器、减法器、对数放大器、比较器、回转器、振荡器、检波器、调节器、电压-电流转换器、电流-电压转换器以及斩波器等。前面已经讨论过其中的一些电路，本节再讨论两个应用电路：数-模转换器和仪器放大器。

5.10.1 数－模转换器

数-模转换器（DAC）将数字信号转换为模拟信号形式。图5-35a给出了一个典型的四比特数-模转换器。四比特DAC电路可以由多种方法实现，其中一种简单的实现方法是*二进加权阶梯电路*（binary weighted ladder），如图5-35b所示。各比特就是根据其所处位置的值确定的权重，以R_f/R_n递减，从而使得较低比特的权重为其相邻较高比特权重的一半。显然，这是一个反相加法放大器，其输出与输入之间的关系如式(5-15)所示，因此，

$$-V_o = \frac{R_f}{R_1}V_1 + \frac{R_f}{R_2}V_2 + \frac{R_f}{R_3}V_3 + \frac{R_f}{R_4}V_4 \tag{5-23}$$

输入V_1称为*最高有效位*（most significant bit，MSB），而输入V_4称为*最低有效位*（least significant bit，LSB）。可以假定四个二进制输入V_1，…，V_4仅有两种电平：0 V或1 V，只要适当选取输入电阻和反馈电阻，该DAC就能够给出一个与输入成正比的输出信号。



（a）方框图　　（b）二进加权阶梯电路

图 5-36　4bit DAC

在实际应用中，输入电平的典型值为0 V或±5 V。

例题5-12　在图5-35b所示的运算放大器电路中，令$R_f = 10\text{ k}\Omega$，$R_1 = 10\text{ k}\Omega$，$R_2 = 20\text{ k}\Omega$，$R_3 = 40\text{ k}\Omega$且$R_4 = 80\text{ k}\Omega$，试确定二进制输入为[0000]，[0001]，[0010]，…，[1111]时的模拟输出。

解　将给定的输入电阻值与反馈电阻值代入式（5-23）得到：

$$\begin{aligned}-V_o &= \frac{R_f}{R_1}V_1 + \frac{R_f}{R_2}V_2 + \frac{R_f}{R_3}V_3 + \frac{R_f}{R_4}V_4 \\ &= V_1 + 0.5V_2 + 0.25V_3 + 0.125V_4\end{aligned}$$

利用该方程，当数字输入$[V_1V_2V_3V_4] = [0000]$时，模拟输出为$-V_o = 0\text{V}$，$[V_1V_2V_3V_4] = [0001]$时，模拟输出$-V_o = 0.125\text{ V}$，同理，

$$[V_1V_2V_3V_4] = [0010] \quad \Rightarrow \quad -V_o = 0.25\text{V}$$

$$[V_1V_2V_3V_4] = [0011] \quad \Rightarrow \quad -V_o = 0.25 + 0.125 = 0.375\text{V}$$

$$[V_1V_2V_3V_4] = [0100] \quad \Rightarrow \quad -V_o = 0.5\text{V}$$

$$\vdots$$

$$[V_1V_2V_3V_4] = [1111] \quad \Rightarrow \quad -V_o = 1 + 0.5 + 0.25 + 0.125 = 1.875\text{V}$$

表5-2总结了数-模转换的结果。我们注意到，已经假定每个比特的值为0.125 V。因此，在该系统中，无法表示出1.000与1.125之间电压值，这种分辨率的不足正是数-模转换器的主要局限性。为了获得更高的精度，就要求采用由大量比特位组成的字来表示数字量，即便如此，由数字量表示模拟电压总是不会非常精确。尽管存在这种数字表示不精确的问题，采用数字化仪器已经制成了诸如音频CD、数字摄影等大量产品。

表 5-2 4bit DAC 的输入与输出值

二进制输入 $[V_1V_2V_3V_4]$	十进位数	输出 $-V_o$
0000	0	0
0001	1	0.125
0010	2	0.25
0011	3	0.375
0100	4	0.5
0101	5	0.625
0110	6	0.75
0111	7	0.875
1000	8	1.0
1001	9	1.125
1010	10	1.25
1011	11	1.375
1100	12	1.5
1101	13	1.625
1110	14	1.75
1111	15	1.875

练习题5-12 一个3bit DAC如图5-37所示。

(a) 试确定$[V_1V_2V_3]=[010]$时的$|V_o|$；

(b) 试确定$[V_1V_2V_3]=[110]$时的$|V_o|$；

(c) 如果要求$|V_o|=1.25$ V，$[V_1V_2V_3]$应为多少？

(d) 如果要求$|V_o|=1.75$ V，$[V_1V_2V_3]$应为多少？

答 0.5 V，1.5 V，[101]，[111]。

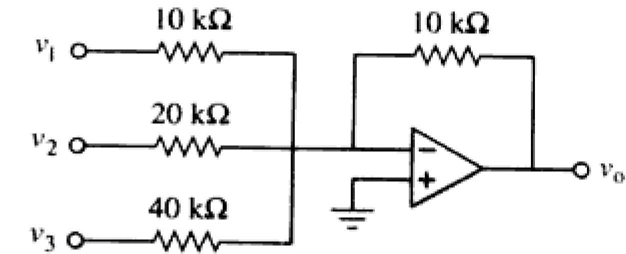


图 5-37 练习题 5-12 的 3bit DAC 电路原理图

5.10.2 仪器放大器

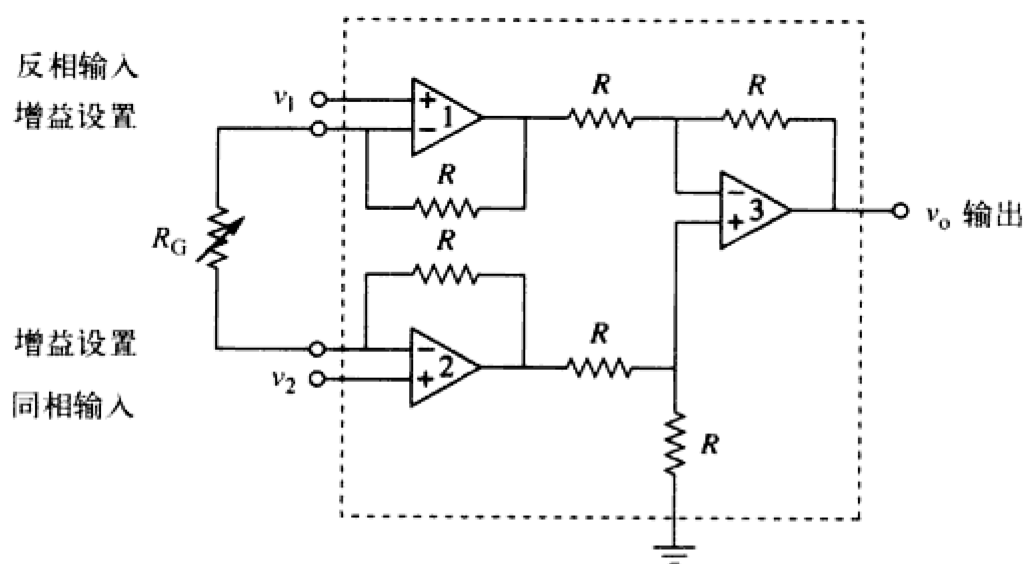
在精密测量与过程控制方面，最有用的一类运算放大器电路即仪器放大器（instrumentation amplifier，IA），之所以称之为仪器放大器就是因为它被广泛应用于测量系统中。IA的典型应用包括隔离放大器、热电偶放大器和数据采集系统等。

仪器放大器也属于差分放大器的范畴，因为它所放大的是两个输入信号之差。如图5-26（参见例题5-8）所示，仪器放大器通常由3个运算放大器和7个电阻构成。为分析方便起见，现将该放大器电路重画于图5-38a，图中除连接在增益设置端之间的外接电阻R_G外，其他电阻都相等。图5-38b给出了IA的电路原理图符号。由例题5-8可知：

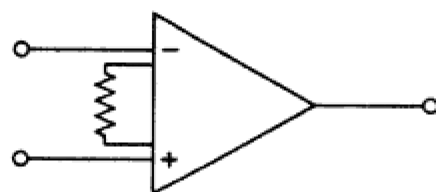
$$v_o = A_v\,(v_2 - v_1) \tag{5-24}$$

其中电压增益为：

$$A_v = 1 + \frac{2R}{R_G} \tag{5-25}$$



(a) 带外接增益调节电阻的仪器放大器



(b) 电路原理图符号

图 5-38

如图5-39所示，仪器放大器可以放大叠加在较大共模电压上的差分小信号电压，因为共模电压是相等的，可以彼此抵消。

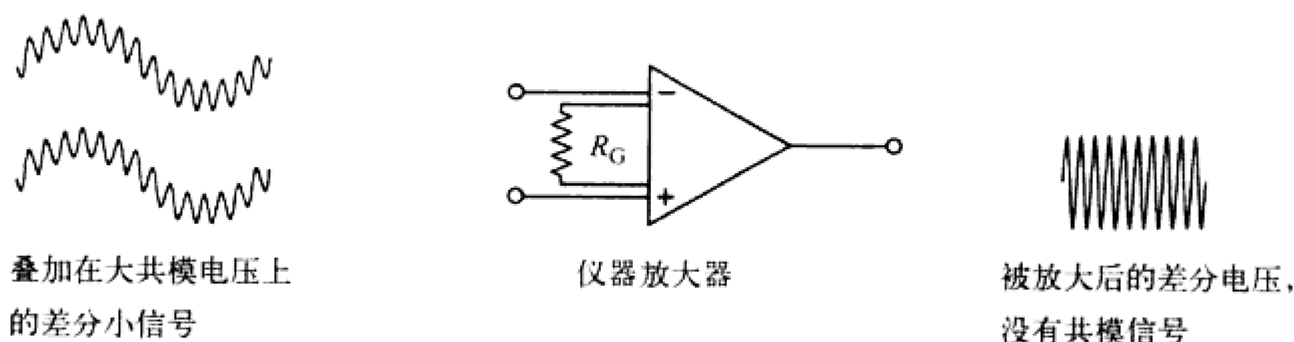


图 5-39 IA 抑制共模电压但放大小信号电压

来源：T.L.Floyd，*Electronic Devices*，*2nd ed.*，Englewood Cliffs，NJ：Prentice Hall，1996，p.795

仪器放大器具有三个主要特性：

(1) 电压增益通过一个外接电阻R_G来调整；

(2) 两个输入端之间的输入阻抗非常大，不随增益的变化而变化；

(3) 输出v_o取决于两个输入v_1与v_2之间的差值，而不取决于其公共电压（即共模电压）。

因为仪器放大器的应用非常广泛，制造商已经开发生产了许多单片封装的放大器单元。典型的例子是美国国家半导体公司（National Semiconductor）研制生产的LH0036，通过外接100 Ω～10 kΩ的电阻，其相应的增益变化范围在1～1000之间。

例题5-13 在图5-38中，设$R = 10\ \text{k}\Omega$，$v_1 = 2.011\ \text{V}$，$v_2 = 2.017\ \text{V}$。如果将R_G调节到500 Ω，试确定：(a) 电压增益；(b) 输出电压v_o。

解 (a) 电压增益为：

$$A_v = 1 + \frac{2R}{R_G} = 1 + \frac{2 \times 10\,000}{500} = 41$$

(b) 输出电压为：

$$v_o = A_v(v_2 - v_1) = 41(2.017 - 2.011) = 41(6)\ \text{mV} = 246\ \text{mV}$$

练习题5-13　在如图5-38所示IA电路中，如果$R = 25\ \text{k}\Omega$，试确定增益为142时该仪器放大器所需的外接电阻R_G的阻值。

答　354.6Ω。

5.11　本章小结

（1）运算放大器是一种输入电阻很大、输出电阻很小的高增益放大器。

（2）表5-3总结了本章介绍的运算放大器电路。一般来说，无论其输入是直流、交流还是时变信号，表中所列各放大器的增益表达式都是成立的。

表 5-3　基本运算放大器电路的总结

运算放大器电路	名称/输入输出关系
	反相放大器 $v_o = -\frac{R_2}{R_1} v_i$
	同相放大器 $v_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_i$
	电压跟随器 $v_o = v_i$
	相加器 $v_o = -\left(\frac{R_f}{R_1} v_1 + \frac{R_f}{R_2} v_2 + \frac{R_f}{R_3} v_3\right)$
	差分放大器 $v_o = \frac{R_2}{R_1}(v_2 - v_1)$

（3）理想运算放大器输入电阻为无穷大，输出电阻为零，增益为无穷大。

（4）对于理想运算放大器，流入其两个输入端的电流均为零，而且两个输入端之间的电压非常小，可以忽略不计。

（5）在反相放大器中，输出电压与输入电压之间呈负倍数关系。

（6）在同相放大器中，输出电压与输入电压之间呈正倍数关系。

（7）电压跟随器的输出电压等于（跟随）输入电压。

（8）加法放大器的输出为输入的加权和。

（9）差分放大器的输出正比于两个输入信号之差。

（10）运算放大器电路可以级联，而且不改变各自的输入－输出关系。

（11）可以利用PSpice软件来分析运算放大器电路。

（12）本章介绍的运算放大器的典型应用包括数–模转换器和仪器放大器。

复习题

5-1 运算放大器两个输入端的标记为：
（a）高与低 （b）正与负
（c）同相端与反相端 （d）差分端与非差分端

5-2 对于理想运算放大器而言，以下说法不正确的是：
（a）输入端之间的差分电压为零
（b）流入输入端的电流为零
（c）输出端的电流为零
（d）输入电阻为零
（e）输出电阻为零

5-3 图5-40所示电路中的电压v_o是：
（a）−6 V （b）−5 V
（c）−1.2 V （d）−0.2 V

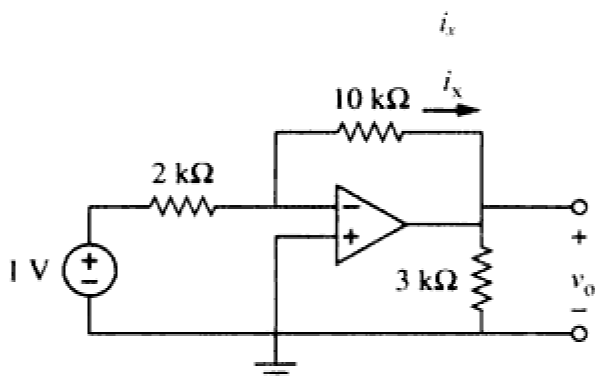


图 5-40 复习题 5-3 与复习题 5-4 的电路原理图

5-4 图5-40所示电路中的电流i_x是：
（a）0.6 mA （b）0.5 mA
（c）0.2 mA （d）1/12 mA

5-5 如果图5-41所示电路中的$v_s = 0$，则电流i_o为：
（a）−10 mA （b）−2.5 mA
（c）10/12 mA （d）10/14 mA

5-6 如果图5-41所示电路中的$v_s = 8$ mV，则输出电压为：
（a）−44 mV （b）−8 mV
（c）4 mV （d）7 mV

5-7 参见图5-41，如果$v_s = 8$ mV，则电压v_o等于：
（a）−8 mV （b）0 mV
（c）10/3 mV （d）8 mV

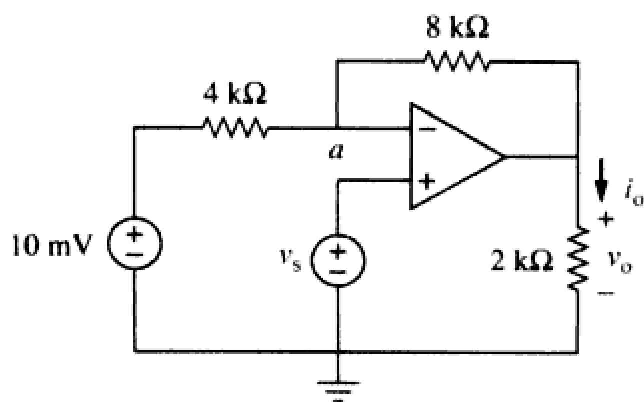


图 5-41 复习题 5-5～复习题 5-7 的电路原理图

5-8 在图5-42所示电路中，4 kΩ电阻吸收的功率为：
（a）9 mW （b）4 mW
（c）2 mW （d）1 mW

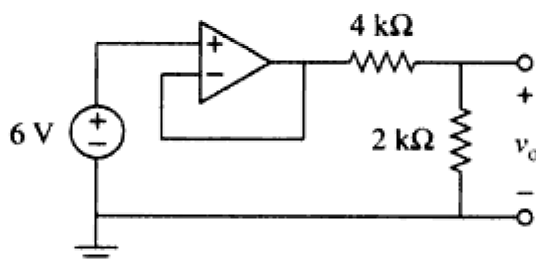


图 5-42 复习题 5-8 的电路原理图

5-9 以下哪个放大器可用于数–模转换器中？
（a）同相器 （b）电压跟随器
（c）加法器 （d）差分放大器

5-10 差分放大器可用于：
（a）仪器放大器 （b）电压跟随器
（c）电压调节器 （d）缓冲器
（e）加法放大器 （f）减法放大器

答案 5-1 c；5-2 c，d；5-3 b；5-4 b；5-5 a；5-6 c；5-7 d；5-8 b；5-9 c；5-10 a，f。

习题

5.2节

5-1　某运算放大器的等效模型如图5-43所示，试确定：

(a) 输入电阻　(b) 输出电阻

(c) 单位为dB的电压增益

5-2　某运算放大器的开环增益为100 000，试计算当反相输入端施加 +10 μV电压且同相输入端施加 +20 μV电压时的输出电压。

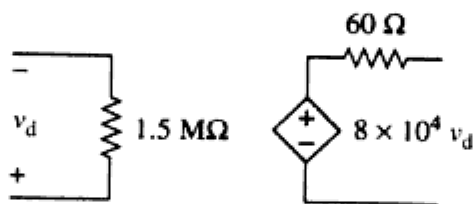


图 5-43　习题 5-1 的电路原理图

5-3　假定某运算放大器的开环增益为200 000，试计算当反相输入端施加 −20 μV电压且同相输入端施加 +30 μV电压时的输出电压。

5-4　当同相端输入为1 mV时，运算放大器的输出电压为 −4V，如果该运算放大器的开环增益为2×10^6，试问其反相端的输入为多少？

5-5　对于图5-44所示的运算放大器电路，其开环增益为100 000，输入电阻为10 kΩ，输出电阻为100 Ω，试利用运算放大器的非理想模型计算其电压增益v_o/v_i。

5-6　试利用例题5-1中给出的741运算放大器参数，计算图5-45所示运算放大器电路中的v_o。

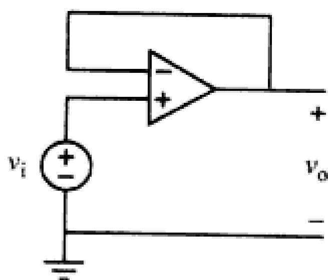


图 5-44　习题 5-5 的电路原理图

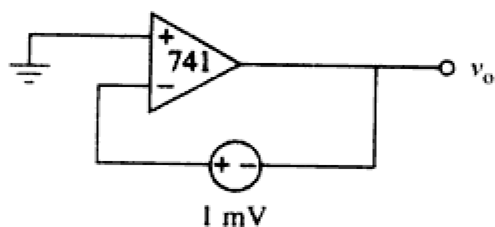


图 5-45　习题 5-6 的电路原理图

5-7　如图5-46中的运算放大器，$R_i = 100$ kΩ，$R_o = 100$ Ω，$A = 100\ 000$，试求其差分电压v_d与输出电压v_o。

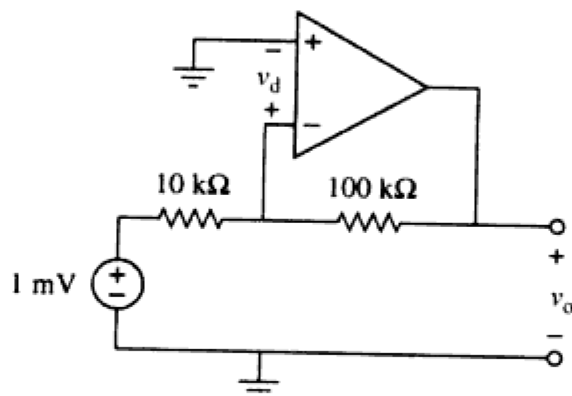


图 5-46　习题 5-7 的电路原理图

5.3 节

5-8　试求图5-47所示运算放大器电路中的v_o。

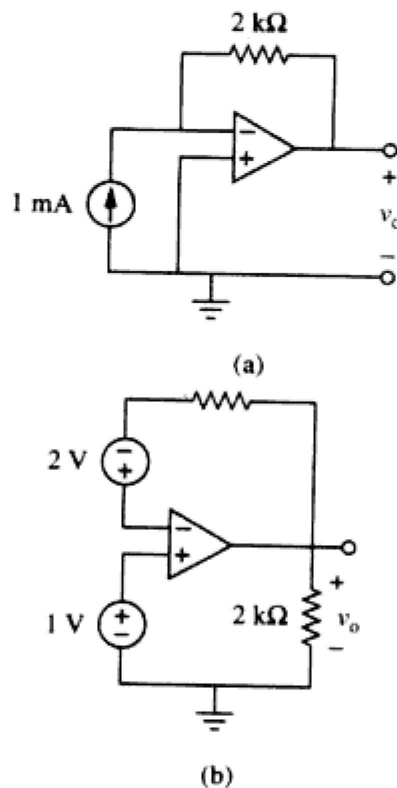


图 5-47　习题 5-8 的电路原理图

5-9　试求图5-48所示各运算放大器电路中的v_o。

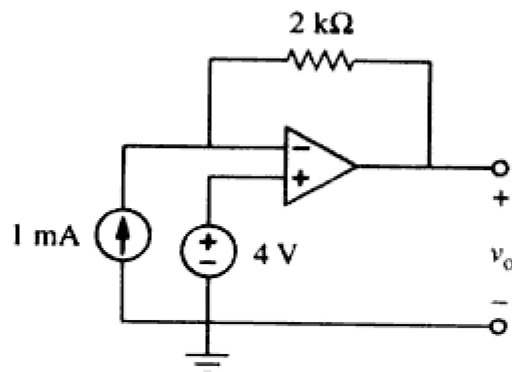


图 5-48　习题 5-9 的电路原理图

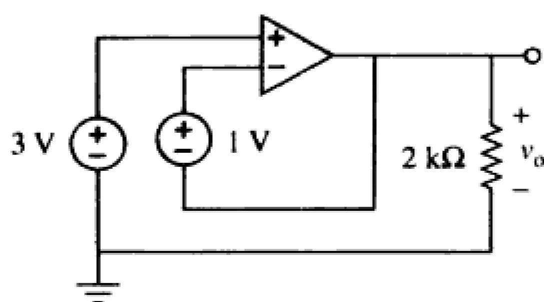


图 5-48 （续）

5-10 试求图5-49所示电路中的增益v_o/v_s。

5-11 试求图5-50所示电路中的v_o与i_o。

5-12 试计算图5-51所示运算放大器电路中的电压比v_o/v_s，假定该运算放大器为理想的。

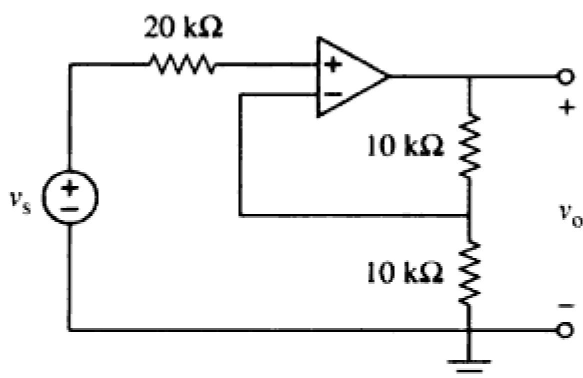


图 5-49 习题 5-10 的电路原理图

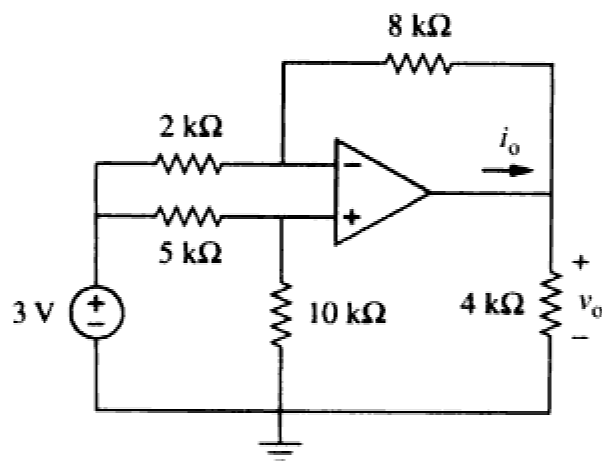


图 5-50 习题 5-11 的电路原理图

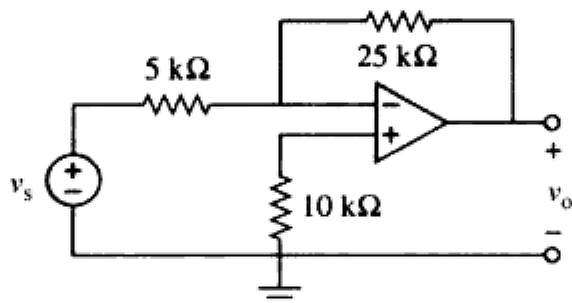


图 5-51 习题 5-12 的电路原理图

5-13 试求图5-52所示电路中的v_o与i_o。

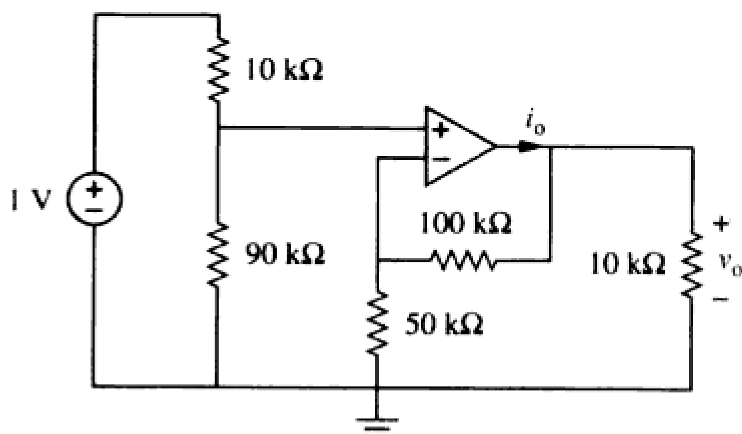


图 5-52 习题 5-13 的电路原理图

5-14 试求图5-53所示电路中的输出电压v_o。

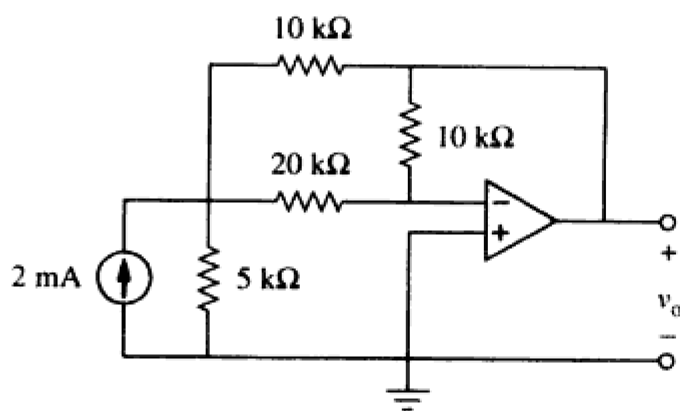


图 5-53 习题 5-14 的电路原理图

5.4 节

5-15 （a）试确定图5-54所示运算放大器电路中的比值v_o/i_s；

（b）当$R_1=20\ \text{k}\Omega$，$R_2=25\ \text{k}\Omega$，$R_3=40\ \text{k}\Omega$时，试计算该比值。

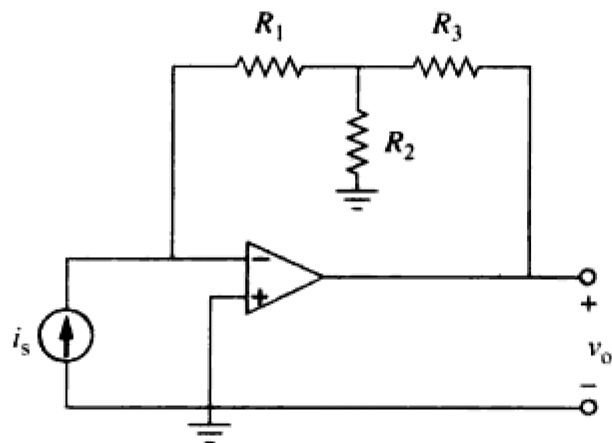


图 5-54 习题 5-15 的电路原理图

5-16 试确定图5-55所示运算放大器电路中的i_x与i_y。

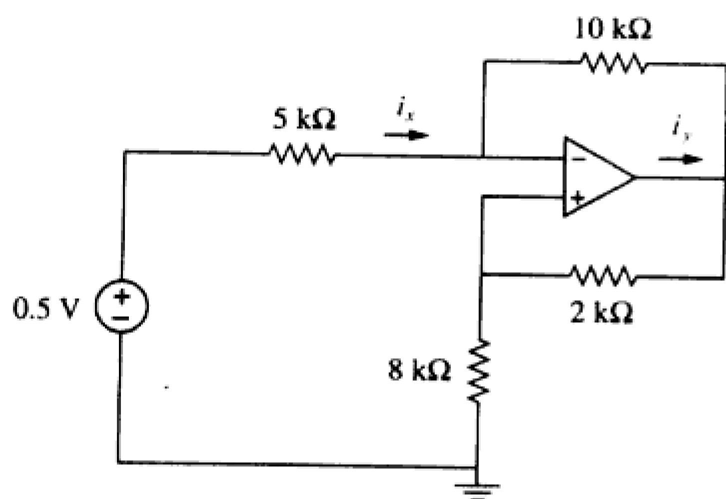


图 5-55 习题 5-16 的电路原理图

5-17 试计算图5-56所示电路当开关位于如下位置时的增益v_o/v_i：

(a) 位置1；(b) 位置2；(c) 位置3。

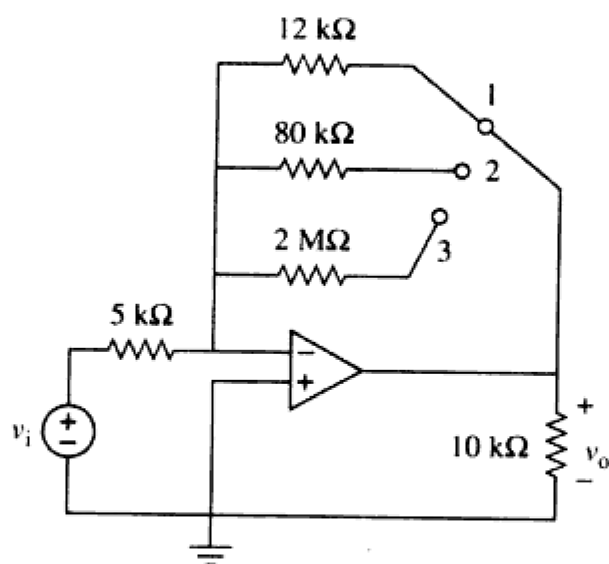


图 5-56 习题 5-17 的电路原理图

*5-18 对于图5-57所示电路，试求从端口a-b看进去的戴维南等效电路，之后计算20 kΩ电阻所吸收的功率，假定运算放大器为理想的。

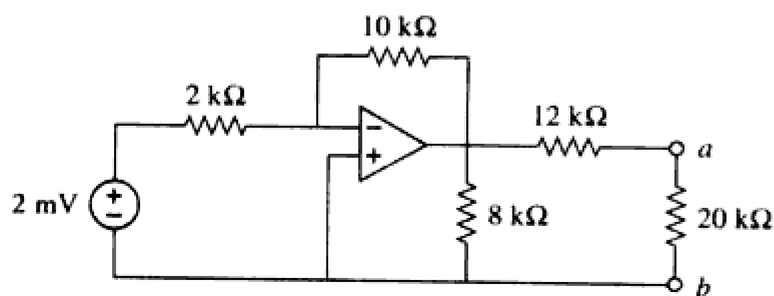


图 5-57 习题 5-18 的电路原理图

5-19 试确定图5-58所示电路中的i_o。

5-20 在图5-59所示电路中，试计算$v_s=0$时的v_o。

5-21 试计算图5-60所示运算放大器电路中的v_o。

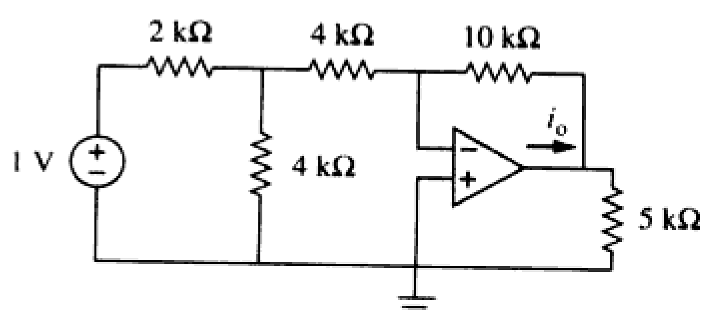


图 5-58 习题 5-19 的电路原理图

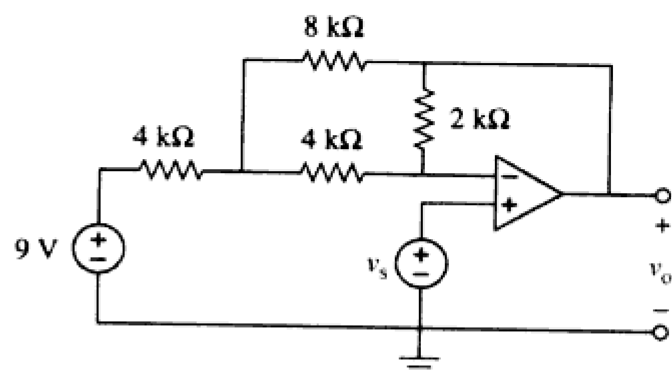


图 5-59 习题 5-20 的电路原理图

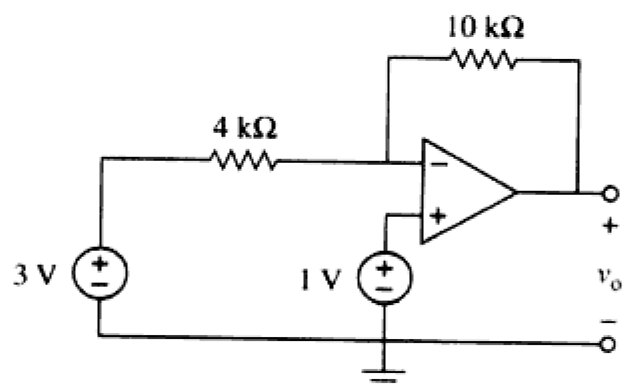


图 5-60 习题 5-21 的电路原理图

5-22 试设计一个增益为－15的反相放大器。
e2d

5-23 在图5-61所示的运算放大器电路中，试求电压增益v_o/v_s。

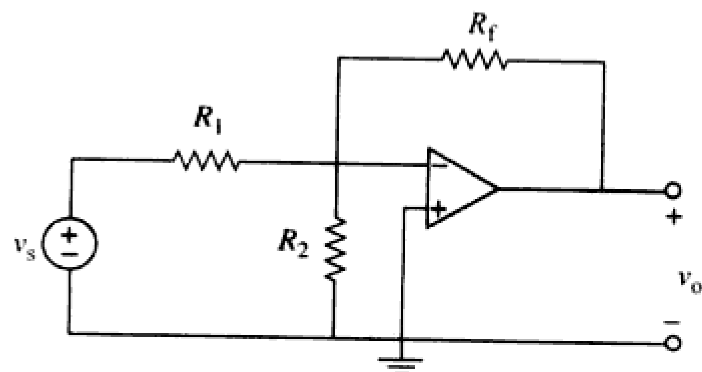


图 5-61 习题 5-23 的电路原理图

5-24 在图5-62所示电路中，试求电压传递函数$v_o=kv_s$中的k。

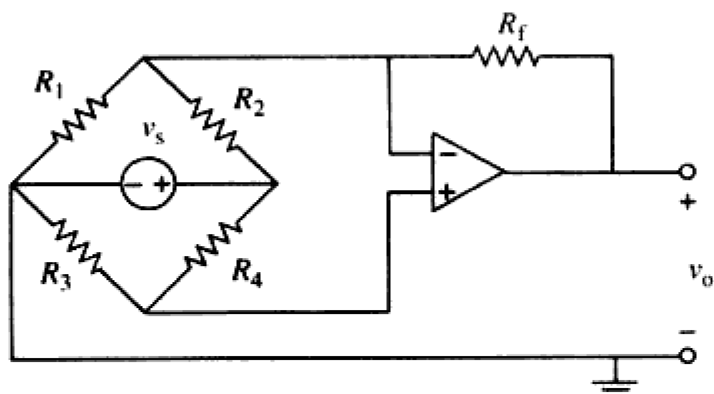


图 5-62 习题 5-24 的电路原理图

5.5 节

5-25 试计算图5-63所示运算放大器电路中的v_o。

5-26 试求图5-64所示电路中的i_o。

5-27 试求图5-65所示运算放大器电路中的v_o。

5-28 试求图5-66所示运算放大器电路中的i_o。

5-29 试确定图5-67所示运算放大器电路中的电压增益v_o/v_i。

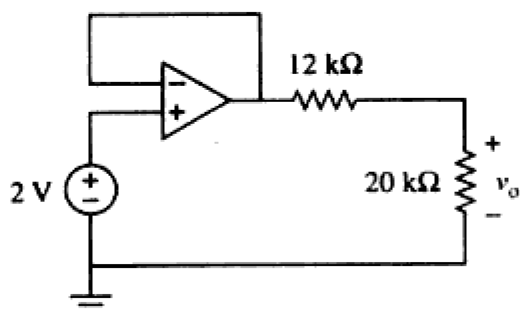


图 5-63 习题 5-25 的电路原理图

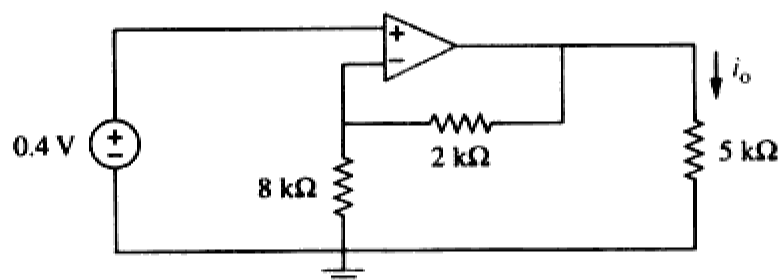


图 5-64 习题 5-26 的电路原理图

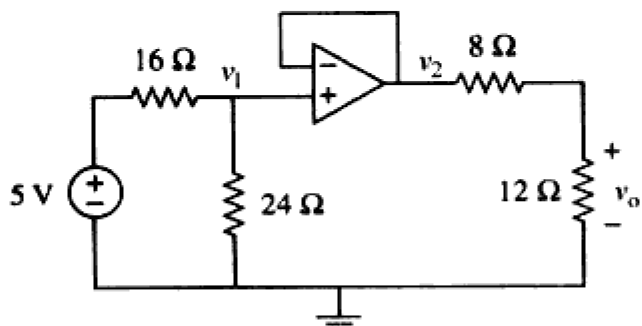


图 5-65 习题 5-27 的电路原理图

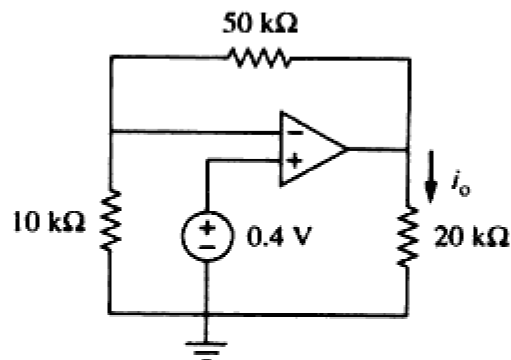


图 5-66 习题 5-28 的电路原理图

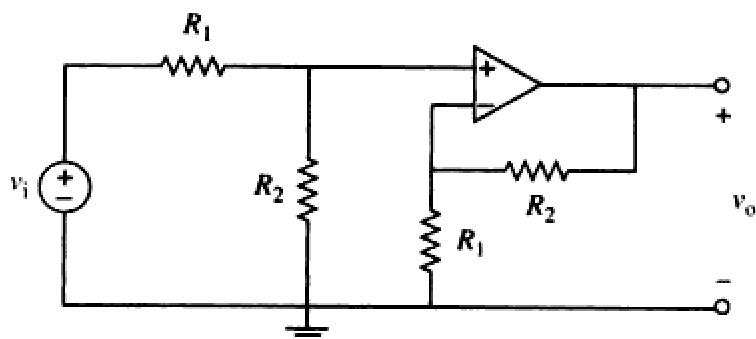


图 5-67 习题 5-29 的电路原理图

5-30 在图5-68所示的电路中，试求i_x以及20 kΩ电阻所吸收的功率。

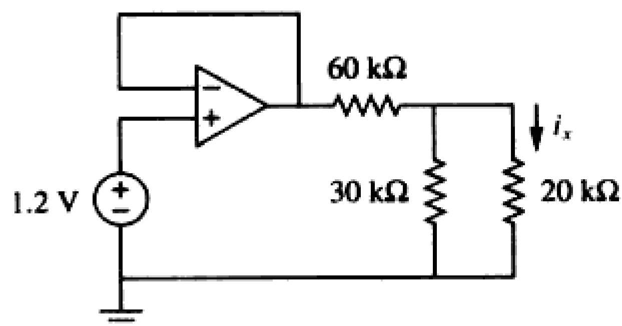


图 5-68 习题 5-30 的电路原理图

5-31 在图5-69所示的电路中，试求i_x。

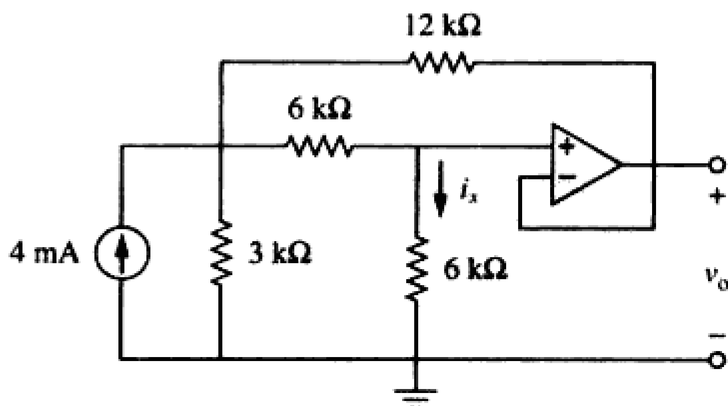


图 5-69 习题 5-31 的电路原理图

5-32 试计算图5-70所示电路中的i_x与v_o，并求60 kΩ电阻所消耗的功率。

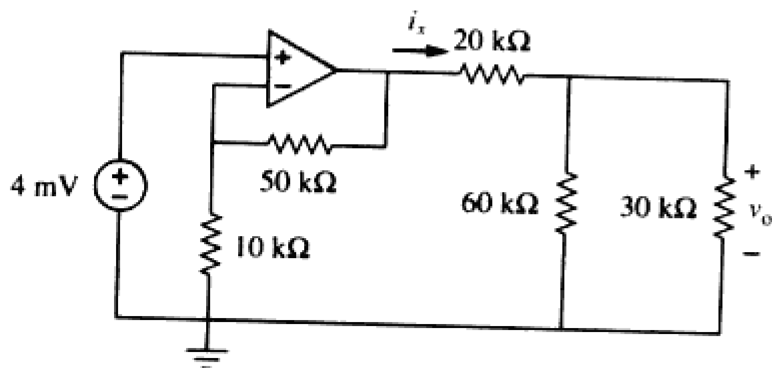


图 5-70　习题 5-32 的电路原理图

5-33　在图5-71所示的运算放大器电路中，试计算i_x以及3 kΩ电阻所消耗的功率。

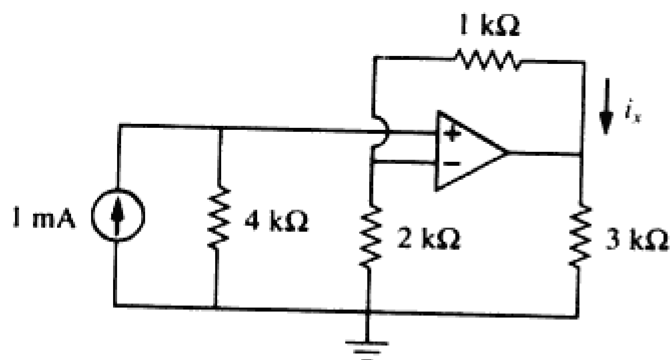


图 5-71　习题 5-33 的电路原理图

5-34　已知运算放大器电路如图5-72所示，试利用v_1与v_2表示v_o。

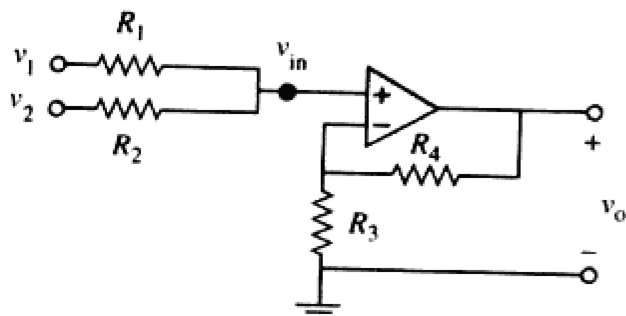


图 5-72　习题 5-34 的电路原理图

5-35　试设计一个增益为10的同相放大器。

5-36　对于图5-73所示的电路，试求从端口a-b看进去的戴维南等效电路（提示：为了求出R_{Th}，需施加电流源i_o并计算v_o）。

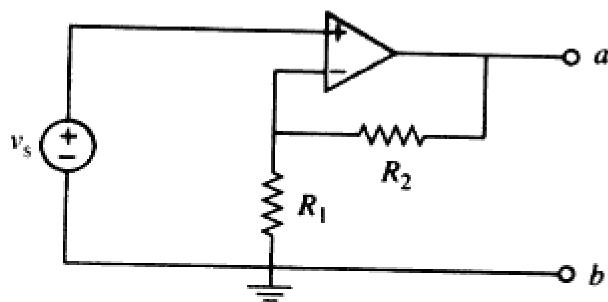


图 5-73　习题 5-36 的电路原理图

5.6 节

5-37　试确定图5-74所示加法放大器的输出电压。

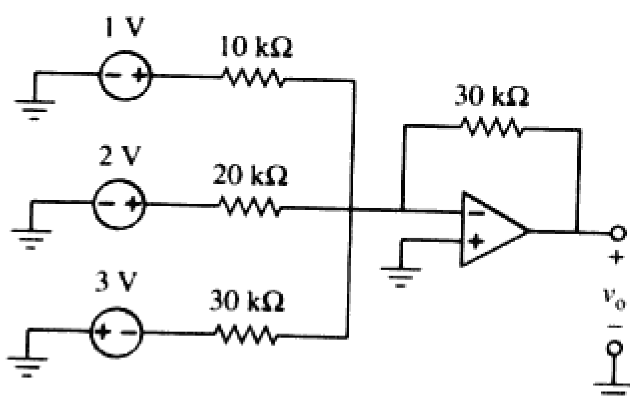


图 5-74　习题 5-37 的电路原理图

5-38　试计算图5-75所示加法放大器的输出电压。

5-39　对于图5-76所示的运算放大器电路，试确定使得$v_o = -16.5$ V的v_2的值。

5-40　在图5-77所示电路中，试写出利用v_1、v_2与v_3表示的v_o表达式。

5-41　均值放大器（averaging amplifier）是输出等于输入平均值的一种加法器。采用适当的输入电阻和反馈电阻，可以得到

$$-v_{out} = \frac{1}{4}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4)$$

试采用10 kΩ反馈电阻设计一个四输入均值放大器。

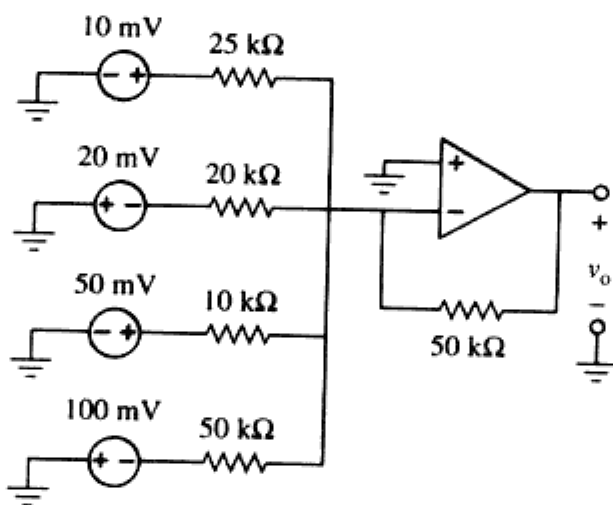


图 5-75　习题 5-38 的电路原理图

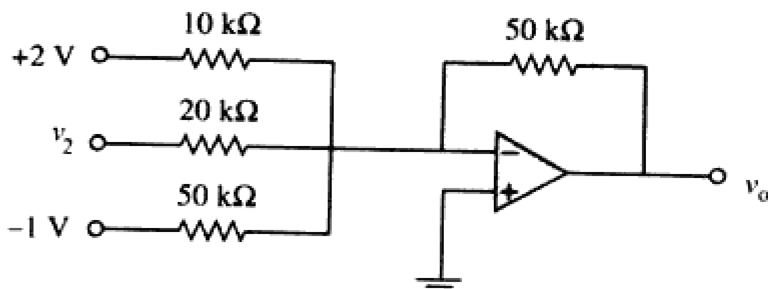


图 5-76　习题 5-39 的电路原理图

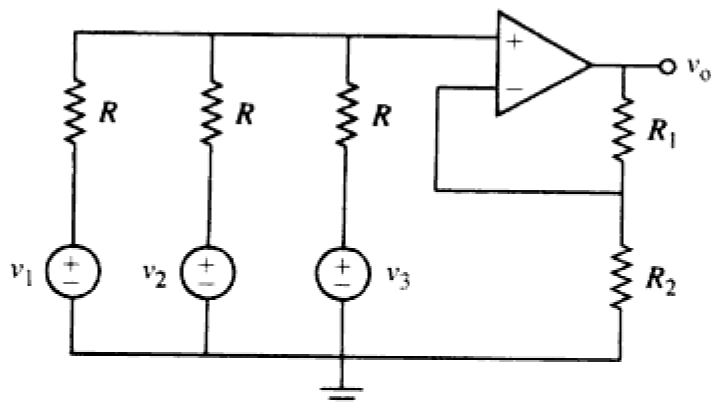


图 5-77 习题 5-40 的电路原理图

5-42 三输入加法放大器的输入电阻为$R_1 = R_2 = R_3 = 30\ \text{k}\Omega$，为使其实现均值放大器的功能，所需的反馈电阻应为多大？

5-43 四输入加法放大器的输入电阻$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 12\ \text{k}\Omega$，为使其实现均值放大器的功能，所需的反馈电阻应为多大？

5-44 试证明图5-78所示电路中的输出电压v_o为：

$$v_o = \frac{(R_3 + R_4)}{R_3(R_1 + R_2)}(R_2 v_1 + R_1 v_2)$$

5-45 试设计一个执行如下运算的运算放大器电路：

e2d

$$v_o = 3\ v_1 - 2\ v_2$$

电路中所有电阻必需≤100 kΩ。

5-46 仅利用两个运算放大器，设计一个执行如下运算的电路：

e2d

$$-v_{out} = \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_3}{2}$$

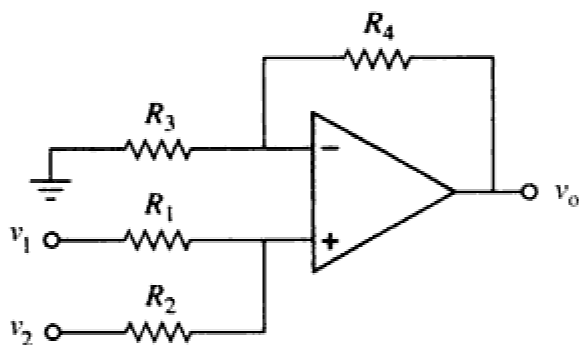


图 5-78 习题 5-44 的电路原理图

5.7 节

5-47 图5-79所示电路为一个差分放大器，已知$v_1 = 1\ \text{V}$且$v_2 = 2\ \text{V}$，试求v_o。

5-48 图5-80所示电路是一个由电桥驱动的差分放大器，试求v_o。

5-49 试设计一个增益为2，各个输入端的共模输入电阻为10 kΩ的差分放大器。

e2d

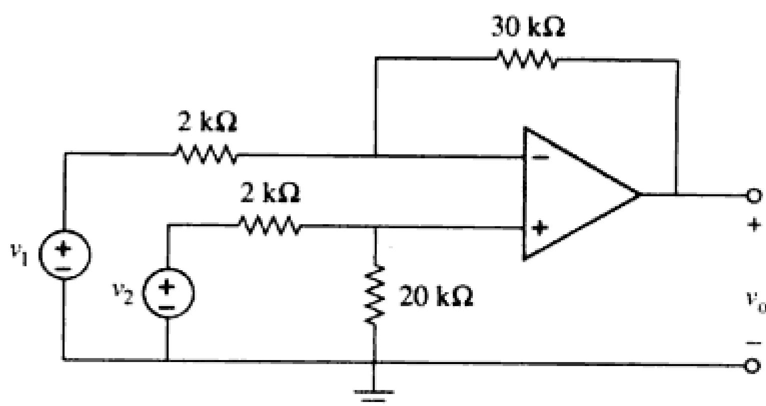


图 5-79 习题 5-47 的电路原理图

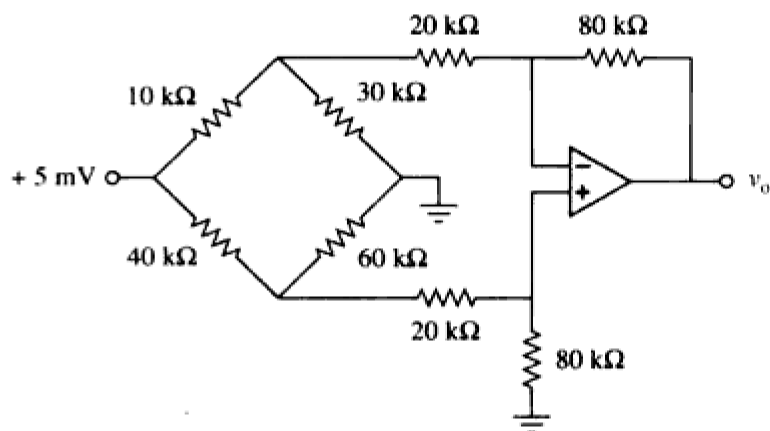


图 5-80 习题 5-48 的电路原理图

5-50 试设计一个将两输入信号之差放大两倍的电路：

e2d

(a) 仅利用一个运算放大器；

(b) 利用两个运算放大器。

5-51 试利用两个运算放大器设计一个减法器。

e2d

*5-52 试设计一个运算放大器电路，使得

e2d

$$v_o = -2v_1 + 4v_2 - 5v_3 - v_4$$

要求所有电阻均位于5 kΩ～100 kΩ范围内。

*5-53 增益固定的普通差分放大器如图5-81a所示，该放大器简单而可靠，除非增益可变。使得该差分放大器增益可调又不失其简单性与精确性的一种方法是采用图5-81b所示的电路，另一种方法是采用图5-81c所示的电路，试证明：

(a) 对于图5-81a所示电路，有：

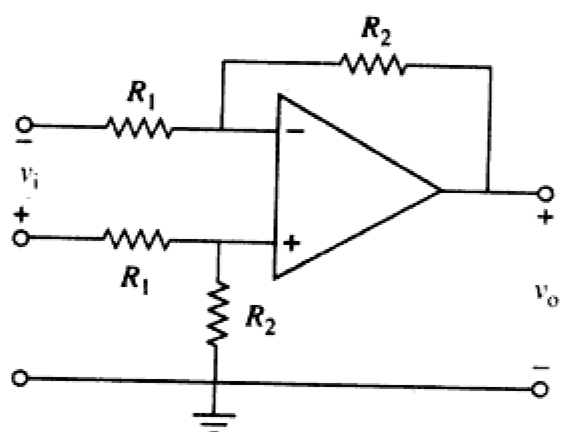
$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{R_2}{R_1}$$

(b) 对于图5-81b所示电路，有：

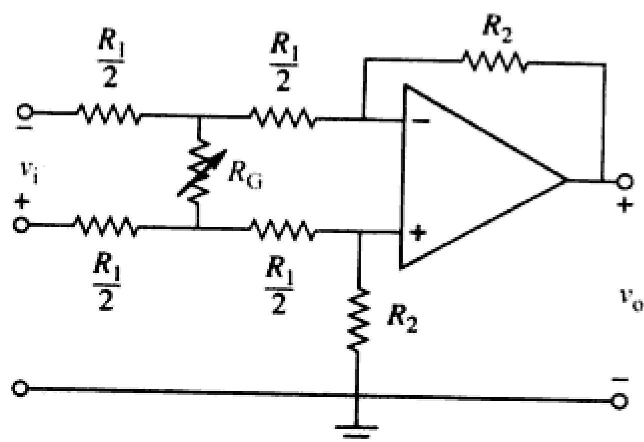
$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1 + \dfrac{R_1}{2R_G}}$$

(c) 对于图5-81c所示电路，有：

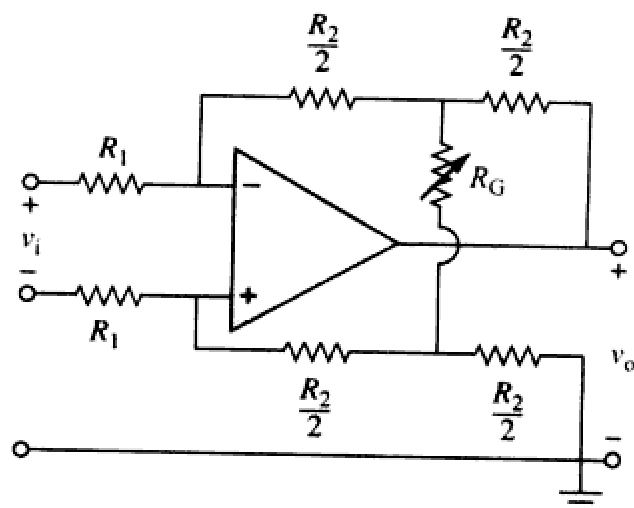
$$\frac{v_o}{v_i}=\frac{R_2}{R_1}\left(1+\frac{R_2}{2R_G}\right)$$



(a)



(b)



(c)

图 5-81　习题 5-53 的电路原理图

5.8 节

5-54　试确定图5-82所示运算放大器电路的电压传输比v_o/v_s，其中$R=10\ \text{k}\Omega$。

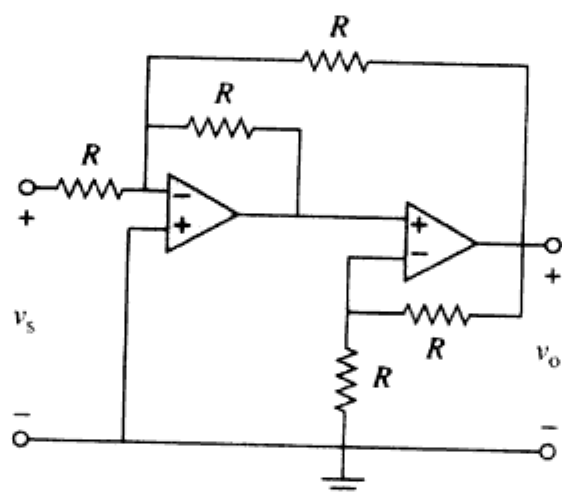


图 5-82　习题 5-54 的电路原理图

5-55　在某电子设备中，需要一个总增益为42dB的三级放大器。其中前两级的电压增益彼此相等，而第三级的增益是前一级增益的四分之一。试计算每一级的电压增益。

5-56　试计算图5-83所示运算放大器电路的增益。

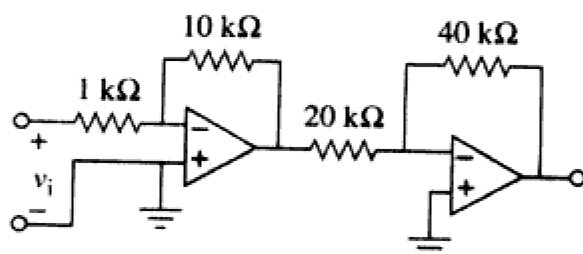


图 5-83　习题 5-56 的电路原理图

5-57　试求图5-84所示运算放大器电路中的v_o。

5-58　试计算图5-85所示运算放大器电路中的i_o。

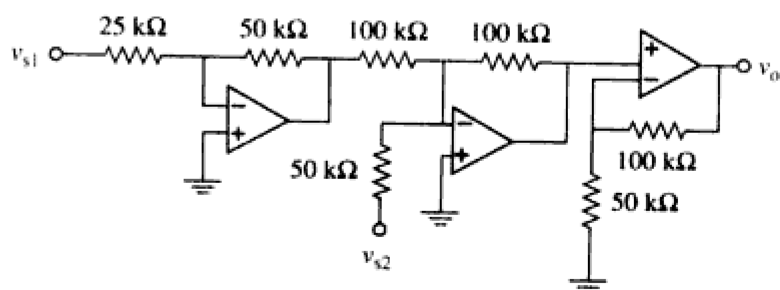


图 5-84　习题 5-57 的电路原理图

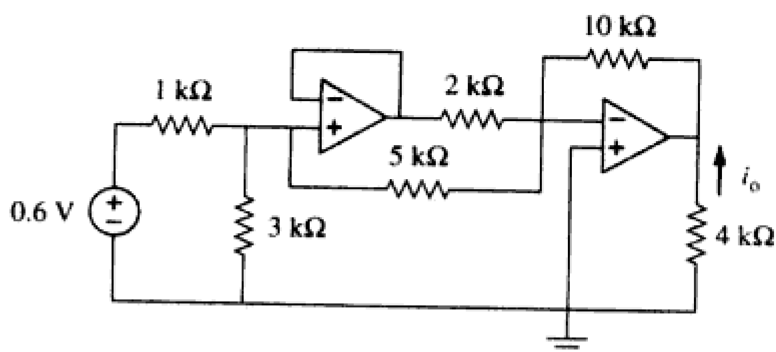


图 5-85　习题 5-58 的电路原理图

5-59 在图5-86所示运算放大器电路中，试确定电压增益v_o/v_s。取$R=10\ \text{k}\Omega$。

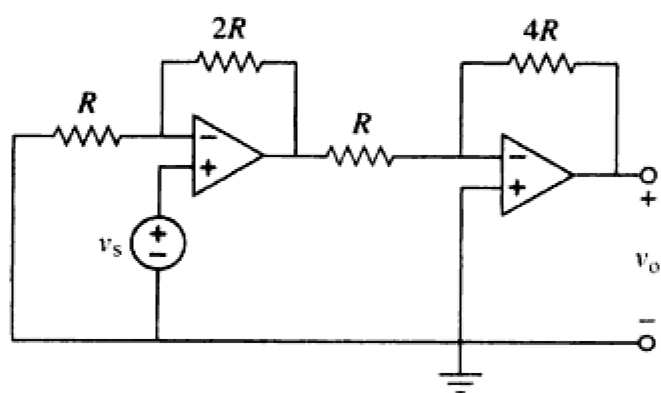


图 5-86 习题 5-59 的电路原理图

5-60 试计算图5-87所示运算放大器电路中的v_o/v_i。

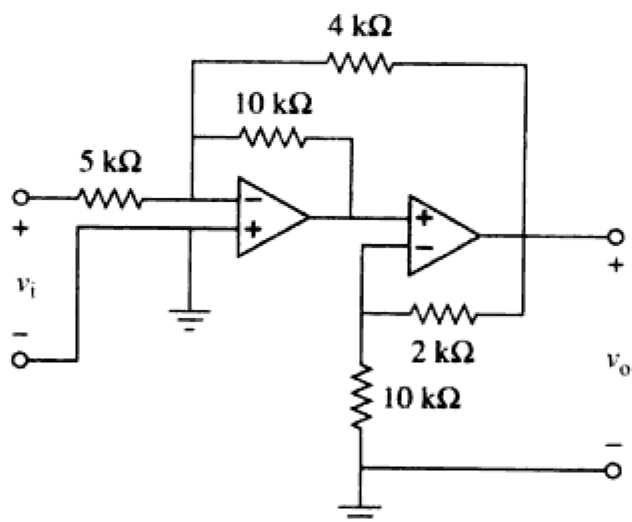


图 5-87 习题 5-60 的电路原理图

5-61 试确定图5-88所示电路中的v_o。

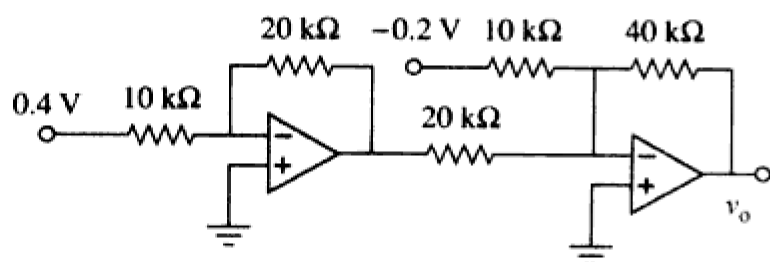


图 5-88 习题 5-61 的电路原理图

5-62 试确定图5-89所示电路中的闭环电压增益v_o/v_i。

5-63 试确定图5-90所示电路中的增益v_o/v_i。

5-64 对于图5-91所示的运算放大器电路，试求v_o/v_s。

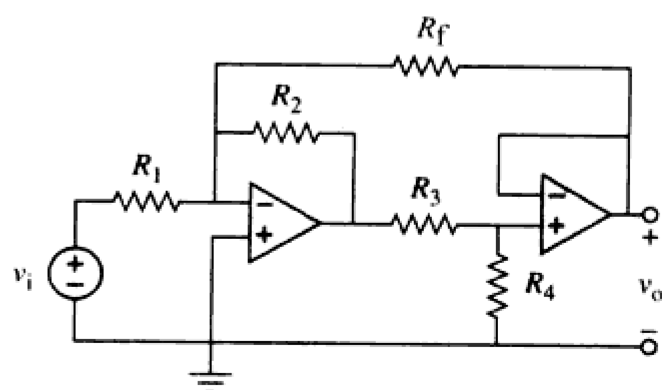


图 5-89 习题 5-62 的电路原理图

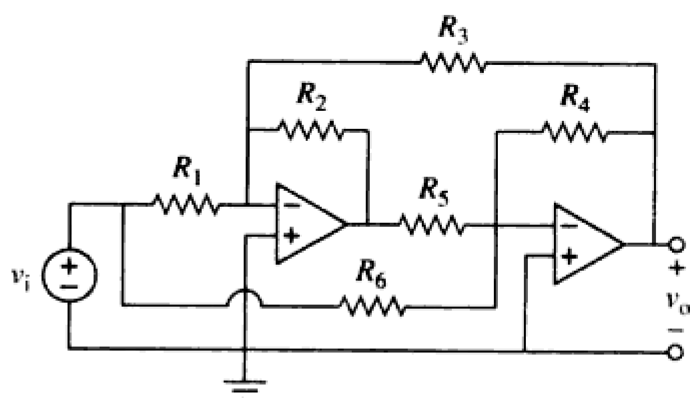


图 5-90 习题 5-63 的电路原理图

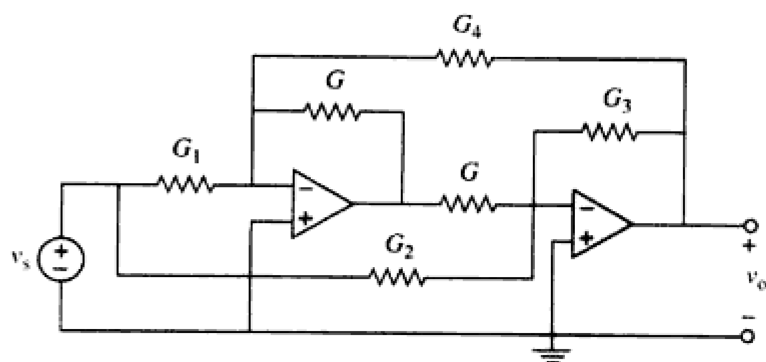


图 5-91 习题 5-64 的电路原理图

5-65 试确定图5-92所示运算放大器电路中的v_o。

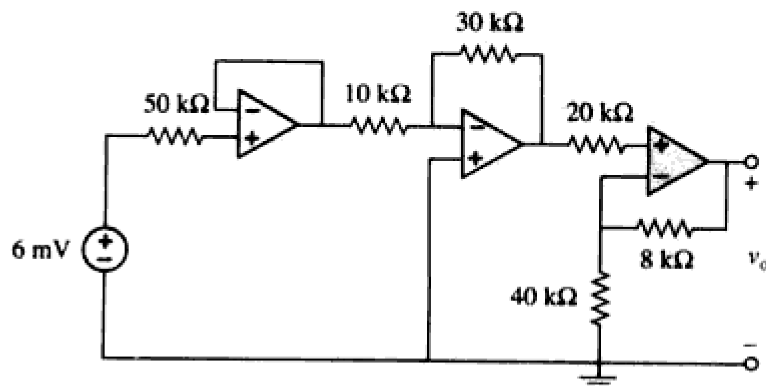


图 5-92 习题 5-65 的电路原理图

5-66 对于图5-93所示的电路，试求v_o。

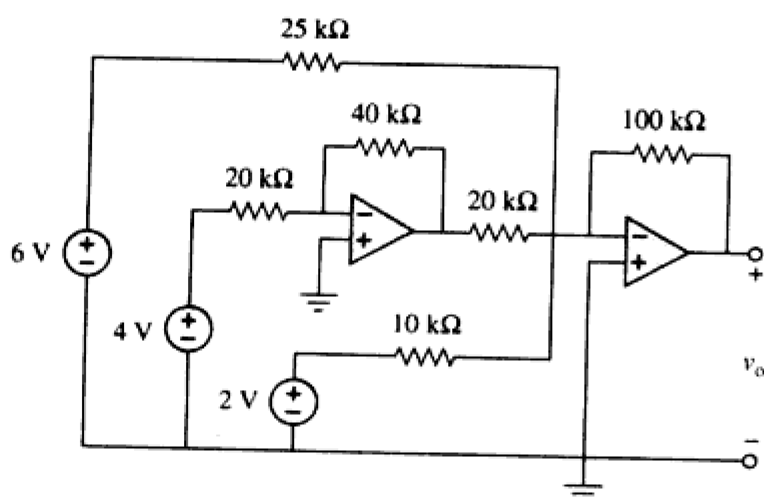


图 5-93 习题 5-66 的电路原理图

5-67 试确定图5-94所示电路的输出v_o。

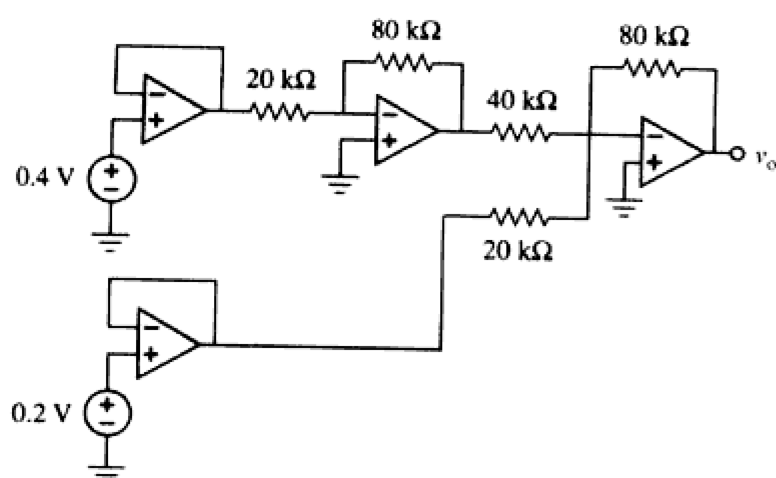


图 5-94 习题 5-67 的电路原理图

5-68 试求图5-95所示电路中的v_o，假定$R_f=\infty$（开路）。

5-69 如果$R_f=10\ \mathrm{k}\Omega$，重做上题。

5-70 试确定图5-96所示运算放大器电路中的v_o。

5-71 试确定图5-97所示运算放大器电路中的v_o。

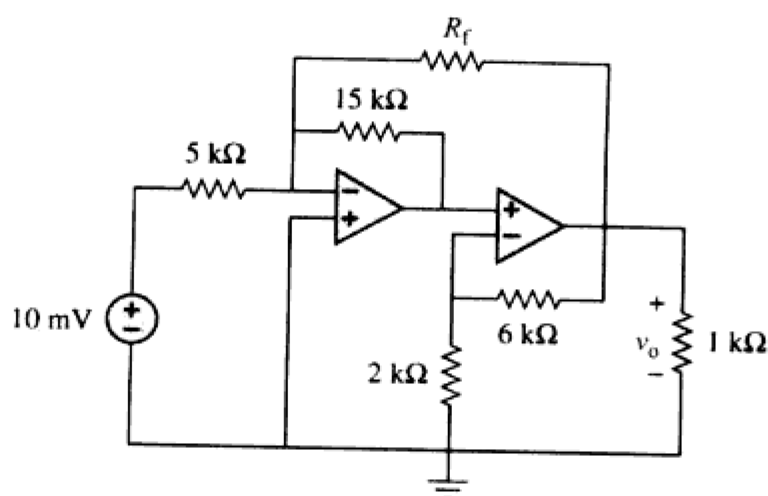


图 5-95 习题 5-68 的电路原理图

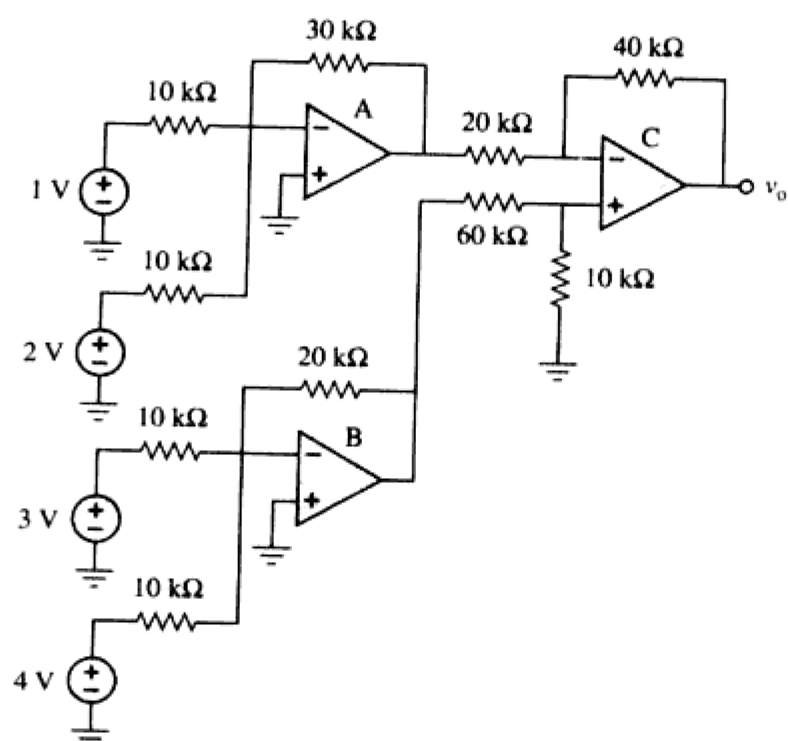


图 5-96 习题 5-70 的电路原理图

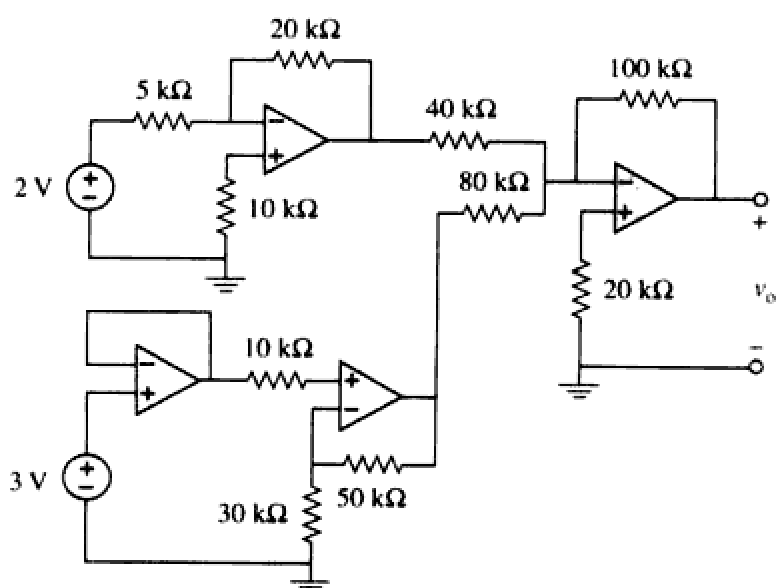


图 5-97 习题 5-71 的电路原理图

5-72 试求图5-98所示电路中的负载电压v_L。

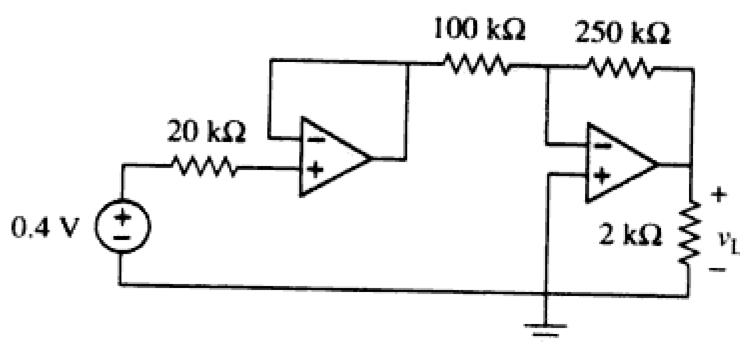


图 5-98 习题 5-72 的电路原理图

5-73 试求图5-99所示电路中的负载电压v_L。

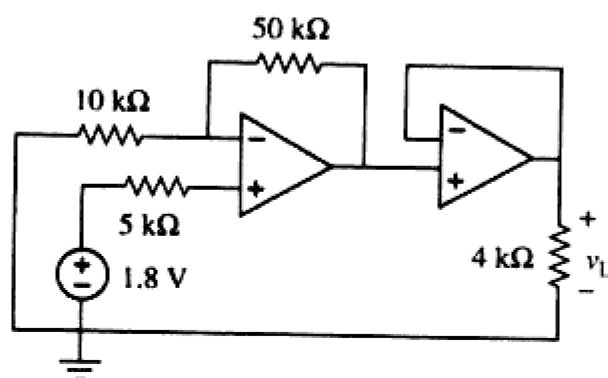


图 5-99 习题 5-73 的电路原理图

5-74 试求图5-100所示电路中的i_o。

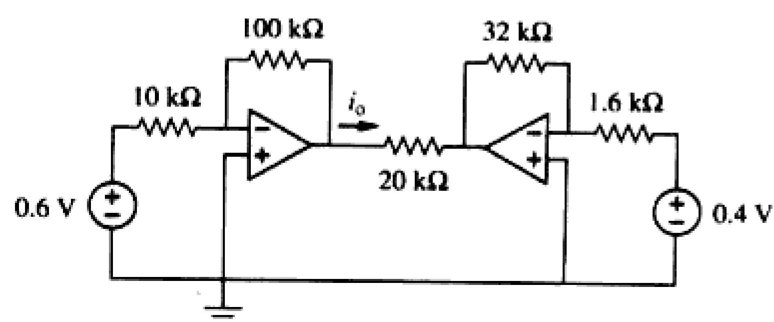


图 5-100 习题 5-74 的电路原理图

5.9 节



5-75 采用非理想运算放大器LM324取uA741，重做例题5-11。

5-76 利用PSpice和运算放大器uA741求解习题5-19。

5-77 利用PSpice和运算放大器LM324求解习题5-48。

5-78 利用PSpice求解图5-101所示电路中的v_o。

5-79 利用PSpice确定图5-102所示运算放大器电路中的输出v_o。

5-80 利用PSpice求解习题5-70。

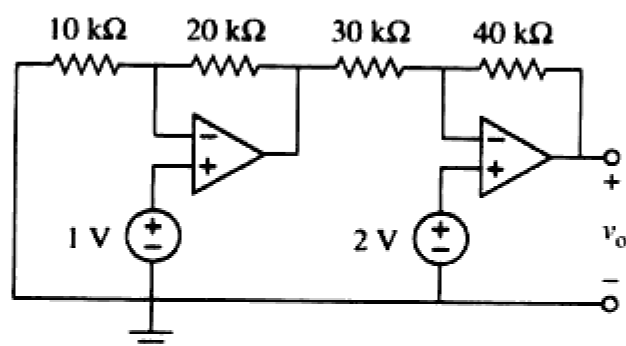


图 5-101 习题 5-78 的电路原理图

5-81 利用PSpice验证例题5-9的结果，假定非理想运算放大器为LM324。

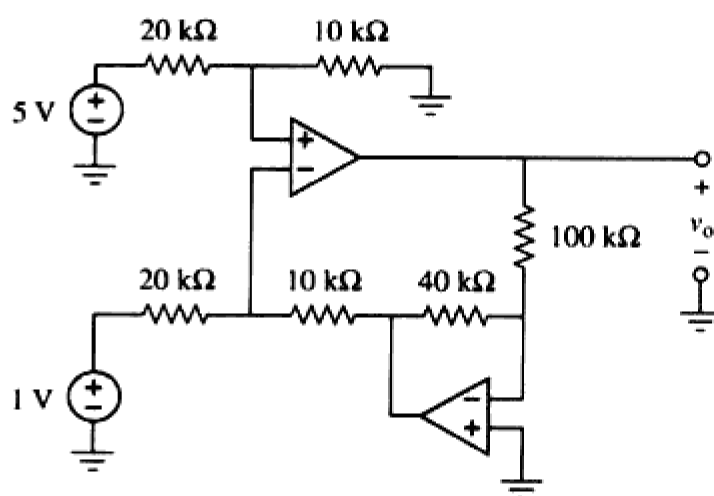


图 5-102 习题 5-79 的电路原理图

5.10 节

5-82 某5bit DAC的输出电压范围是0～7.75 V，试计算每位表示多大的电压。

5-83 试设计一个6bit 数-模转换器。

(a) 如果要求$|V_o| = 1.1875$ V，$[V_1V_2V_3V_4V_5V_6]$应该是什么？

(b) 如果$[V_1V_2V_3V_4V_5V_6]=[011011]$，试计算$|V_o|$；

(c) $|V_o|$的最大值为多少？

*5-84 某4bit $R-2R$数-模转换器如图5-103所示。

(a) 试证明其输出电压为：

$$-v_o = R_f\left(\frac{V_1}{2R}+\frac{V_2}{4R}+\frac{V_3}{8R}+\frac{V_4}{16R}\right)$$

(b) 如果$R_f = 12$ kΩ，$R = 10$ kΩ，试求$[V_1V_2V_3V_4] = [1011]$和$[V_1V_2V_3V_4] = [0101]$时的$|V_o|$。

5-85 在如图5-104所示的运算放大器电路中，试求使得10 kΩ所吸收的功率为10 mW的电阻值R。取$v_s = 2$ V。

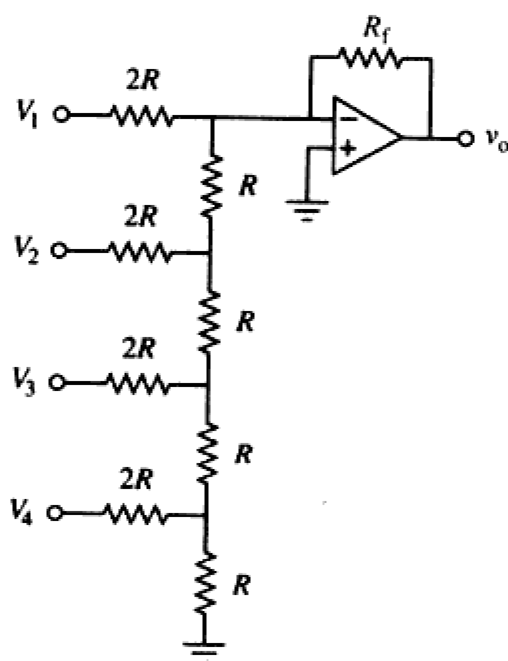


图 5-103 习题 5-84 的电路原理图

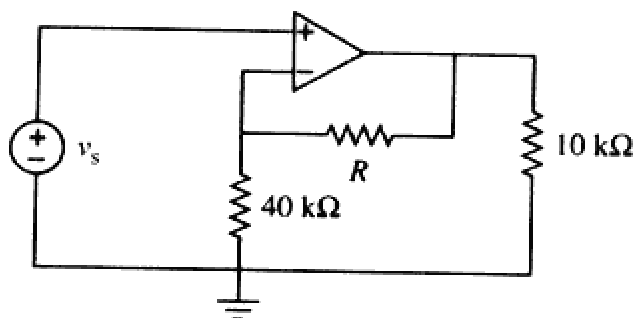


图 5-104 习题 5-85 的电路原理图

5-86 假定某IA的增益为200，试求其在如下输入时的输出电压：

(a) $v_1 = 0.402$ V和$v_2 = 0.386$ V；

(b) $v_1 = 1.002$ V和$v_2 = 1.011$ V。

5-87 图5-105给出了一个双运放仪器放大器，试推导用v_1，v_2表示的v_o的解析表达式。如何将该放大器用作减法器？

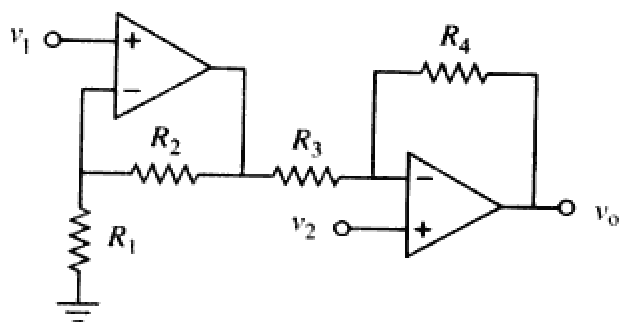


图 5-105 习题 5-87 的电路原理图

*5-88 图5-106给出了一个由电桥驱动的仪器放大器，试确定该放大器的增益v_o/v_i。

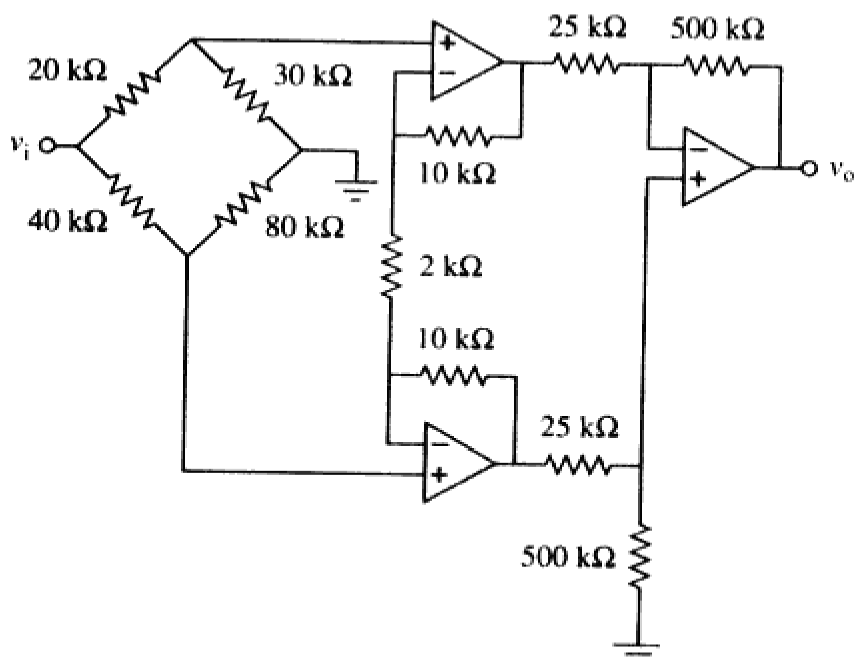


图 5-106 习题 5-88 的电路原理图

综合题

5-89 试设计一个输出电压v_o与输入电压v_s之间的关系为$v_o = 12v_s - 10$的电路，可用器件包括两个运算放大器、一个6 V电池和若干电阻。

5-90 图5-107所示的运算放大器电路是一个电流放大器（current amplifier），试求该放大器的电流增益i_o/i_s。

5-91 某同相电流放大器如图 5-108 所示，试计算增益 i_o/i_s。取 R1 = 8 kΩ，$R_2 = 1$ kΩ。

5-92 试确定图5-109所示桥式放大器（bridge amplifier）的电压增益v_o/v_i。

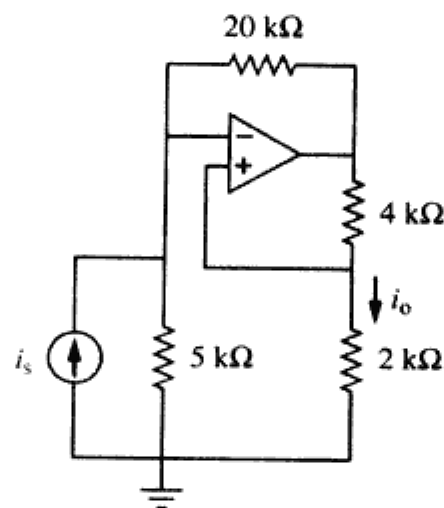


图 5-107 习题 5-90 的电路原理图

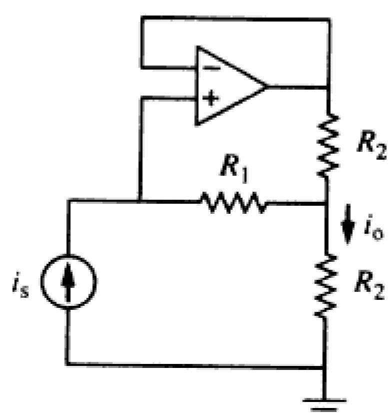


图 5-108 习题 5-91 的电路原理图

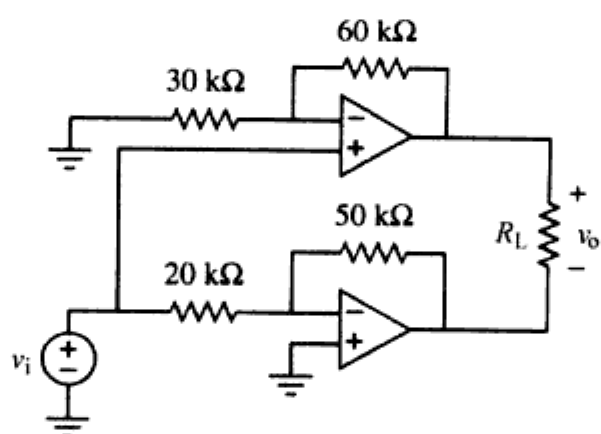


图 5-109 习题 5-92 的电路原理图

*5-93 某电压－电流转换器如图5-110所示，如果$R_1R_2=R_3R_4$，则有$i_L=Av_i$，试求常数A。

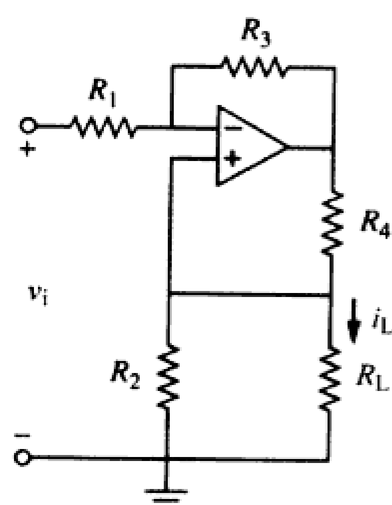


图 5-110 习题 5-93 的电路原理图

第6章 电容器与电感器

拿破仑曾经说过，从不犯错误的人永远也不会发起战争。满足于挑剔、指责他人在争斗中所犯的错误的人，实际上恰恰是在让自己铸成大错。吹毛求疵是最容易不过的事情了，发牢骚、抱怨是不需要任何才能、自我克制、头脑和品德的。

——罗伯特·维斯特

增强技能，拓展职业生涯

ABET EC 2000标准(3.C)设计满足要求的系统、元件或过程的能力

“设计满足要求的系统、元件或过程的能力”是工程师被雇用的原因，也是成为工程师最重要的技能的原因。有趣的是，工程师的成功与其交际能力成正比，但工程师的设计能力是其被雇用的首要原因。



当你面临寻找最终方案的所谓不确定问题时，设计就开始了。本书仅研究某些设计要素，遵循我们介绍的解决问题的所有步骤，你就可以学到设计过程中最为重要的若干要素。

显然，设计中最重要的一步就是系统、元件、过程和问题的定义，工程师几乎不会拿到定义相当明确的任务，因此，作为学生，可以通过向自己、向同学、向教授提问的方式培养并提高自己明确问题定义的技能。

研究问题的不同解是设计过程中另一个重要组成部分，学生可以通过求解所遇到的所有问题来实践这一设计过程。

评价所得到的解对于任何工程任务都是非常重要的，学生同样可以通过求解你所遇到的所有问题来培养这方面的能力。

6.1 引言

到目前为止，我们所学习的内容都局限于电阻电路。本章将介绍两个新的、重要的无源线性电路元件，电容器与电感器。与消耗能量的电阻不同，电容器与电感器不消耗能量，而是储存能量，供以后使用。因此，也将电容器与电感器称为储能（storage）元件。

电阻电路的应用非常有限，本章引入电容和电感元件后，我们就可以分析更为重要、更为实用的电路了。第3章与第4章介绍的电路分析方法同样适用于包括电容器和电感器的电路。

本章首先介绍电容器以及如何以串并联方式组合电容，之后介绍电感器。在典型应用中，讨论电容器如何与运算放大器构成积分器、微分器以及模拟计算机等问题。

与不可逆耗能的电阻相比，所不同的是电感或电容能够储存或释放能量（即具有记忆功能）。

6.2 电容器

电容器是一种能够在其电场中储存能量的无源元件。除了电阻外，电容器也是最为常用的电子元件。电容器被广泛用于电子学、通信、计算机以及电力系统，例如，收音机中的调谐电路，计算机系统的动态记忆元件都用到电容器。

电容器的典型结构如图6-1所示。

电容器由被绝缘体（即电介质）隔开的两个导电金属极板组成。

在许多实际应用中，金属板可以是铝箔，而介质可以是空气、陶瓷、纸或云母。

当电压源v连接至电容器上时，如图6-2所示，电源会将正电荷q储存在一个金属极板上，而将负电荷$-q$储存在另一个极板上，此时称该电容器存储了电荷。所存储的电荷量用q表示，与施加在电容器上的电压v成正比，即：

$$q = Cv \tag{6-1}$$

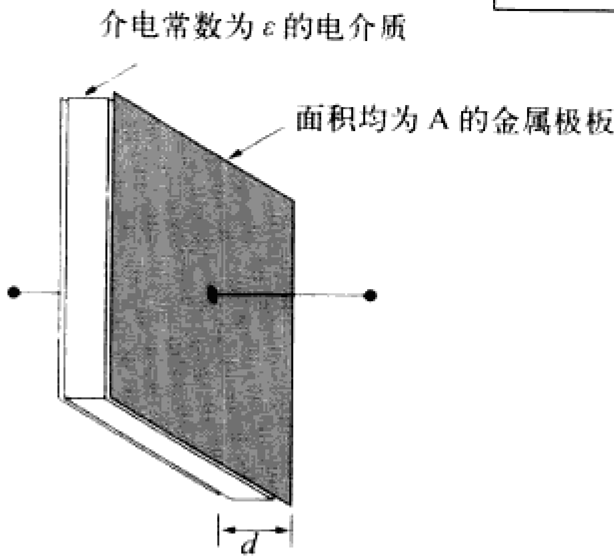


图 6-1 典型电容器

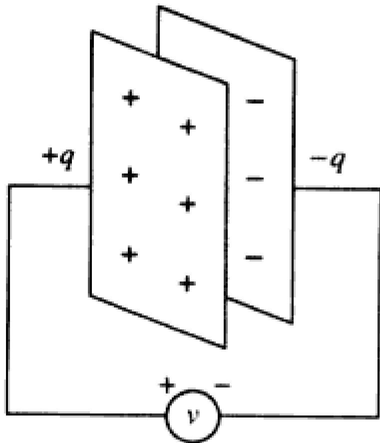


图 6-2 施加有电压 v 的电容器

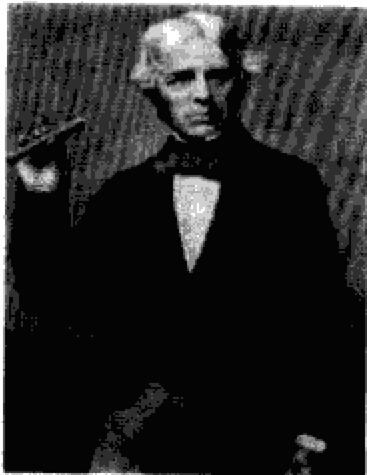
其中，C为比例常数，称为电容器的电容（capacitance），电容的单位是法拉（farad，F），是为纪念英国物理学家迈克尔·法拉第（Michael Faraday，1791—1867）而命名的。由式(6-1)可以推导出电容的如下定义：

电容是电容器一个金属极板上的电荷与其两个金属极板之间的电压差之比，单位为法拉（F）。

换句话说，电容是指电容器在单位电压差下，各金属极板上所存储的电荷量。

由式(6-1)可知，1法拉＝1库仑/伏特。

历史人物



迈克尔·法拉第（Michael Faraday，1791—1867），英国化学家和物理学家，是当时最伟大的实验科学家。

法拉第出生在伦敦附近，在英国皇家研究院与伟大的化学家Sir Hamphry Davy一起工作，实现了他童年时代的梦想，他在皇家研究院整整工作了54年。他在物理科学的各个领域都有所建树，并创造了诸如电解、阳极、阴极等科学术语。他于1831年发现的电磁感应现象提供了一种发电方法，是工程领域的一项重大突破。电动机和发电机就是在这个原理基础上发明的。电容的单位，法拉，就是为纪念他而以其名字命名的。

虽然电容器的电容量等于每个金属极板上的电荷q与所施加的电压v之比，但电容量并不取决于q或v，而是取决于电容器的物理因素。例如，在图6-1所示的平行极板电容器中，其电容为：

$$C = \frac{\varepsilon A}{d} \tag{6-2}$$

其中，A为各极板的表面积，d为两极板之间的距离，ε为两极板之间电介质材料的介电常数。虽然式(6-2)仅适用于平行极板电容器，但由此可以推断，电容量通常由如下三个因素决定：

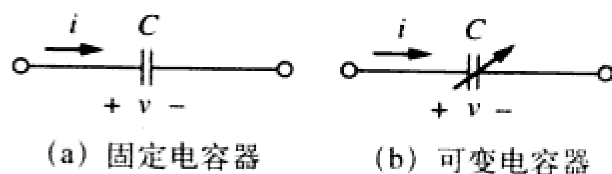
(1) 极板的表面积——面积越大，电容量越大。

(2) 两极板之间的间隔——间隔越小，电容量越大。

(3) 材料的介电常数——介电常数越大，电容量越大。

由式(6-1)与式(6-2)的关系可知，电容器电压的额定值通常与电容量成反比，当d较小、V较高时，可能出现电弧放电。

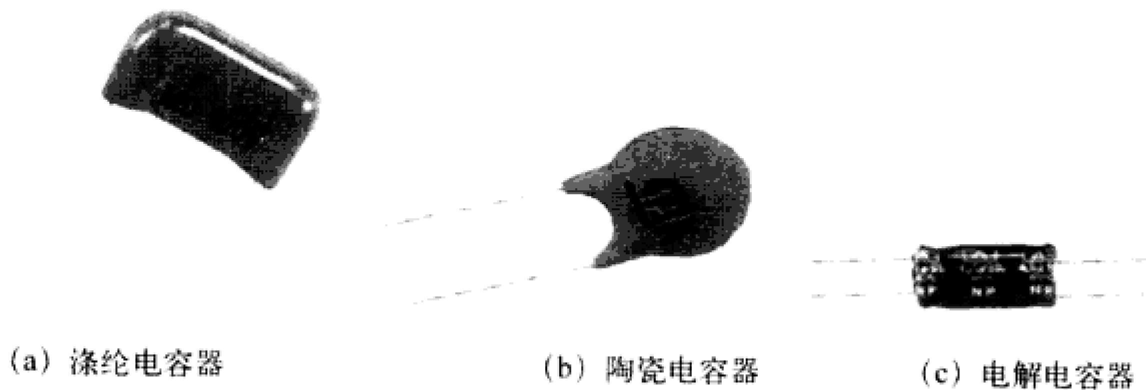
商用电容器有不同容量值和不同类型之分。电容器典型的容量通常在皮法（pF）到微法（μF）范围内，可以用其电介质材料或容量固定还是可变来描述电容器。图6-3给出了固定电容器与可变电容器的电路符号表示。根据无源符号规约，当$v>0$且$i>0$或者$v<0$且$i<0$时，电容器被充电；而当$v\cdot i<0$时，电容器放电。



(a) 固定电容器 (b) 可变电容器

图 6-3 电容器的电路符号

图6-4给出了固定电容器的几种常用类型，涤纶电容器重量轻、容量稳定，其随温度的变化是可预测的。除采用涤纶介质外，还可以采用云母、聚苯乙稀等电介质材料。薄膜电容器是制成卷状的，包在金属或塑料薄膜中。电解电容器的容量非常大。图6-5给出了两种最常见的可变电容器。调谐电容器（微调电容器）通常另一个电容器并联连接，从而使其等效电容可以微调。可变空气电容器（网状极板）的电容通过转动杆来调节。可变电容器在收音机中用于调节收音频道。另外，电容器还可以用于隔直流、通过交流、移相、存储能量、启动电机和抑制噪声等。



(a) 涤纶电容器 (b) 陶瓷电容器 (c) 电解电容器

图 6-4 固定电容器



(a) 调谐电容器 (b) 薄膜调谐电容器

图 6-5 可变电容器

为了得到电容器的电流—电压关系，需对式(6-1)两边取微分。由于：

$$i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{6-3}$$

于是，式(6-1)两边取微分得到：

$$\boxed{i=C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}} \tag{6-4}$$

此即无源符号规约下的电容器的电流—电压关系式，该关系如图6-6所示，图中电容器的容量与电压无关。满足式(6-4)的电容器称为线性电容器。对非线性电容器（nonlinear capacitor）而言，其电流—电压关系曲线不是一条直线。虽然某些电容器是非线性的，但绝大多数电容器是线性的。本书仅讨论线性电容器。

根据式(6-4)可知，要使电容器承载电流，其电压必须随时间而变化，因此，对于恒定电压而言，$i=0$。

对式(6-4)两边取积分可以得到电容器的电压—电流关系：

$$v=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\mathrm{d}t \tag{6-5}$$

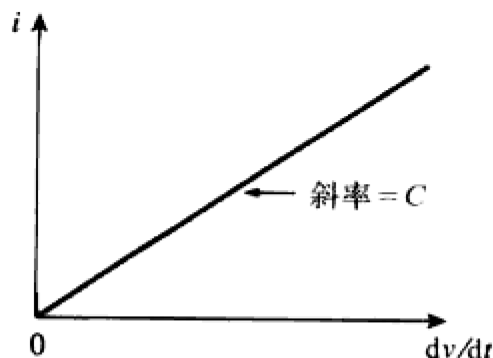


图 6-6　电容器的电流—电压关系曲线

即：

$$\boxed{v=\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,\mathrm{d}t+v(t_0)} \tag{6-6}$$

其中，$v(t_0)=q(t_0)/C$为t_0时刻电容器两端的电压。式(6-6)表明，电容器的电压与流经电容器电流的历史值有关。因此，电容器具有记忆性——一项经常使用的性质。

传递给电容器的瞬时功率为：

$$p=vi=Cv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{6-7}$$

所以电容器存储的能量为：

$$w=\int_{-\infty}^{t} p\,\mathrm{d}t=C\int_{-\infty}^{t} v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=C\int_{-\infty}^{t} v\mathrm{d}v=\frac{1}{2}Cv^2\Big|_{t=-\infty}^{t} \tag{6-8}$$

我们注意到，因为$t=-\infty$时，电容器未被充电，所以$v(-\infty)=0$，于是：

$$w=\frac{1}{2}Cv^2 \tag{6-9}$$

利用式(6-1)可将式(6-9)重新写为：

$$w=\frac{q^2}{2C} \tag{6-10}$$

式(6-9)或式(6-10)给出了电容器两极板之间电场中存储的能量。由于理想电容器不消耗能量，所以该能量可以被提取使用。实际上，电容器这一术语是由元件具有在电场中存储能量的能力而演变出来的。

应该掌握电容器的如下重要性质：

(1) 由式(6-4)可知，当电容器两端的电压不随时间改变（即直流电压）时，流经电容器的电流为零。因此，

电容器对直流电而言是开路的。

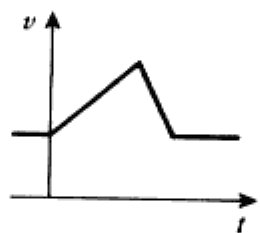
但是，如果将电池（直流电压）连接在电容器两端，电容器就会充电。

(2) 电容器上的电压必须是连续的。

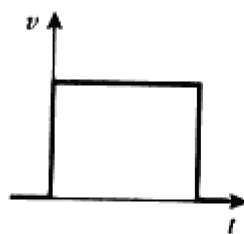
电容器上的电压不能突变。

理解这一问题的另一种方法是利用式(6-9)，该式表明能量与电压的平方呈正比，而注入或提取能量只能通过一段有限的时间才能完成，因此电容器两端的电压不能有突变。

电容器阻止其两端电压发生突变。按照式(6-4)，电压的不连续变化要求出现无穷大的电流，这在物理上是不可能的。例如，电容器两端的电压可以具有图6-7a的形式，但不可能具有图6-7b的形式，因为其中存在突变。相反，流经电容器的电流可以瞬时发生变化。



(a) 允许的电压形式



(b) 不允许的电压形式，因为电压突变是不可能的

图 6-7 电容器两端的电压

(3) 理想电容器不消耗能量。当在其电场中存储能量时，电容器可以从电路中吸收功率，当需要给电路传递功率时，它又会释放之前所存储的能量。

(4) 实际的非理想电容器包括一个并联的泄漏电阻，如图6-8所示。泄漏电阻可高达100 MΩ，对绝大多时实际应用而言是可以忽略不计的，因此本书假定电容器均为理想的。

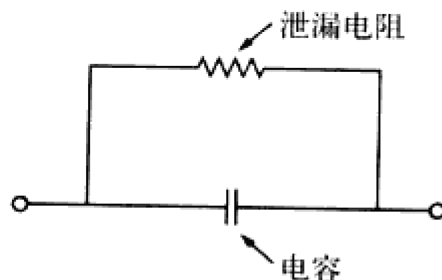


图 6-8 非理想电容器的电路模型

例题6-1 (a) 试计算3 pF电容器两端接20 V电压时所存储的电荷量；(b) 试求该电容器存储的能量。

解 (a) 由$q=Cv$可得：

$$q = 3\times 10^{-12}\times 20=60\ \text{pC}$$

(b) 该电容器存储的能量为：

$$w=\frac{1}{2}Cv^2=\frac{1}{2}\times 3\times 10^{-12}\times 400=600\,\text{pJ}$$

练习题6-1 如果某3 μF的电容器一个金属极板上存储的电荷为0.12 mC，试问该电容器两端的电压为多少？所存储的能量为多少？

答 40 V，2.4 mJ。

例题6-2 如果某5 μF电容器两端的电压为：

$$v(t)=10\cos 6\,000t\ \text{V}$$

试计算流过该电容器的电流。

解 由定义可知，流过该电容器的电流为：

$$\begin{aligned} i(t) &= C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=5\times 10^{-6}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(10\cos 6\,000t) \\ &= -5\times 10^{-6}\times 6\,000\times 10\sin 6\,000t=-0.3\sin 6\,000t\ \text{A} \end{aligned}$$

练习题6-2 如果某10 μF的电容器两端连接的电压源为：

$$v(t)=50\sin 2\,000t\ \text{V}$$

试确定流过该电容器的电流。

答 cos 2000t A。

例题6-3 如果流经某2 μF电容器的电流为：

$$i(t)=6\mathrm{e}^{-3\,000t}\ \text{mA}$$

试求该电容器两端的电压。假定该电容器两端的初始电压为零。

解 由于$v=\frac{1}{C}\int_0^t i\,\mathrm{d}t+v(0)$并且$v(0)=0$，

$$v=\frac{1}{2\times10^{-6}}\int_0^t 6\mathrm{e}^{-3\,000t}\mathrm{d}t\cdot10^{-3}$$
$$=\frac{3\times10^{3}}{-3\,000}\mathrm{e}^{-3\,000t}\Big|_0^t=(1-\mathrm{e}^{-3\,000t})\,\mathrm{V}$$

练习题6-3 流经某100 μF电容器的电流为$i(t)=50\sin 120\pi t$ mA，试计算$t=1$ ms与$t=5$ ms时该电容器两端的电压，设$v(0)=0$。

答 −93.14 mV，−1.736 V。

例题6-4 某200 μF电容器两端的电压如图6-9所示，试确定流经该电容器的电流。

解 电容器两端的电压波形的数学表达式为：

$$v(t)=\begin{cases}50t\,\mathrm{V} & 0<t<1\\ 100-50t\,\mathrm{V} & 1<t<3\\ -200+50t\,\mathrm{V} & 3<t<4\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

由于$i=C\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，且$C=200$ μF，所以对v求微分，得到：

$$i(t)=200\times10^{-6}\times\begin{cases}50 & 0<t<1\\ -50 & 1<t<3\\ 50 & 3<t<4\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}10\,\mathrm{mA} & 0<t<1\\ -10\,\mathrm{mA} & 1<t<3\\ 10\,\mathrm{mA} & 3<t<4\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

于是，流经该电容器的电流波形如图6-10所示。

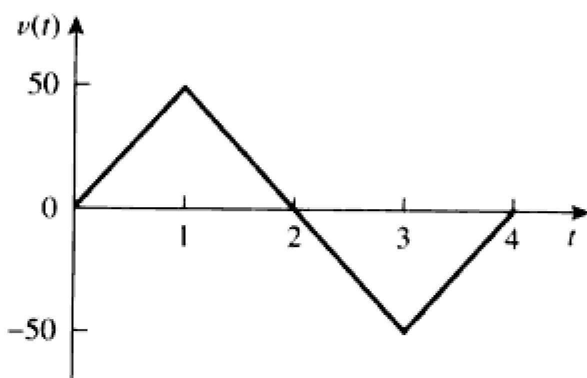


图 6-9 例题 6-4 的波形图

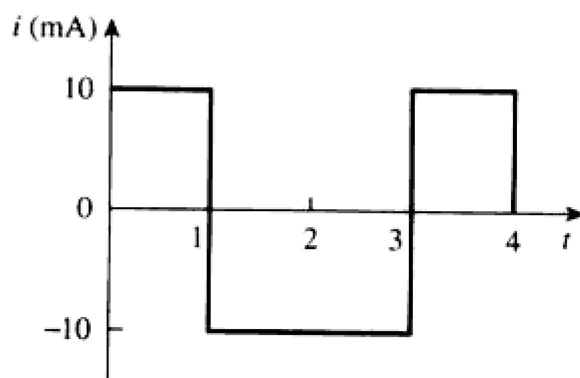


图 6-10 例题 6-4 的波形图

练习题6-4 流经某初始未充电的1 mF电容器的电流如图6-11所示，试计算在$t=2$ ms与$t=5$ ms时该电容器两端的电压。

答 100 mV，400 mV。

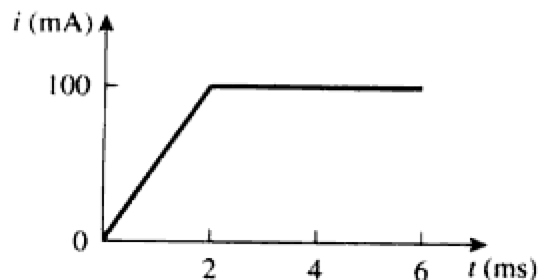


图 6-11 练习题 6-4 的图

例题6-5 试确定图6-12a所示各电容器在直流条件下所储存的能量。

解 在直流条件下，将各电容器用开路取代，得到如图6-12b所示的电路。根据分流原理可以计算出流经2 kΩ与4 kΩ串联支路的电流为：

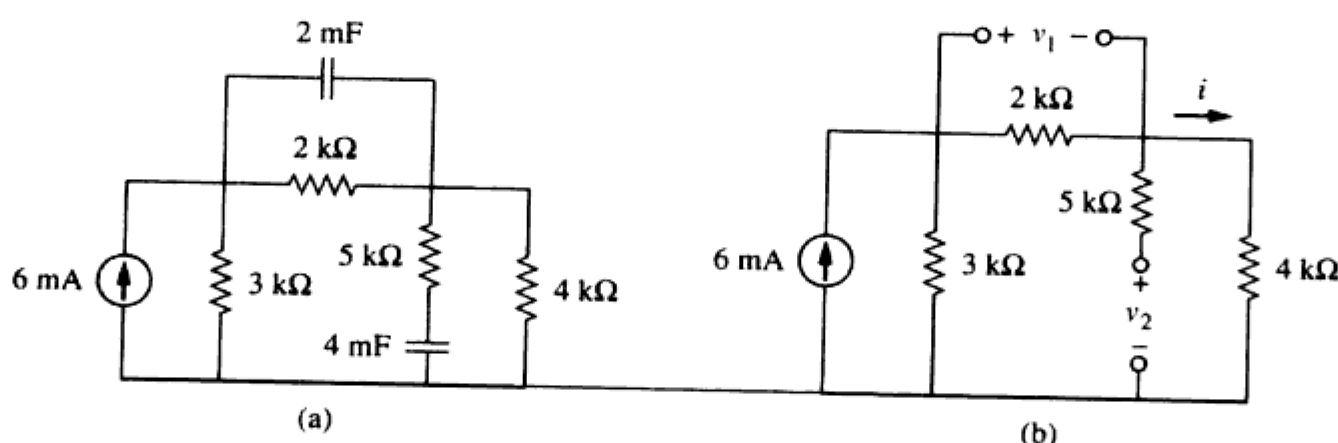


图 6-12 例题 6-5 的电路原理图

$$i=\frac{3}{3+2+4}(6\,\text{mA})=2\,\text{mA}$$

因此，电容器两端的电压v_1、v_2分别为：

$$v_1=2\,000\,i=4\text{ V}\qquad v_2=4\,000\,i=8\text{ V}$$

电容器储存的能量分别为：

$$w_1=\frac{1}{2}C_1v_1^2=\frac{1}{2}(2\times10^{-3})(4)^2=16\,\text{mJ}$$

$$w_2=\frac{1}{2}C_2v_2^2=\frac{1}{2}(4\times10^{-3})(8)^2=128\,\text{mJ}$$

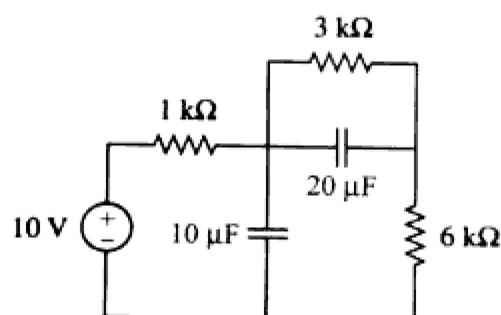


图 6-13 练习题 6-5 的电路原理图

练习题6-5 试求图6-13所示电容器在直流条件下储存的能量。

答 405 μJ，90 μJ。

6.3 电容器的串联与并联

通过对电阻电路的学习，我们知道电阻的串-并联合并是简化电路的一个有力工具。串-并联合并的方法也可以扩展到在电路分析中经常会遇到的电容器的串-并联合并上，即用一个等效电容C_{eq}取代若干个电容的串联或并联。

为了确定N个并联电容的等效电容C_{eq}，考虑如图6-14a所示的电路，其等效电路如图6-14b所示。注意到各电容器两端具有相同的电压v，对图6-14a所示电路应用KCL得到：

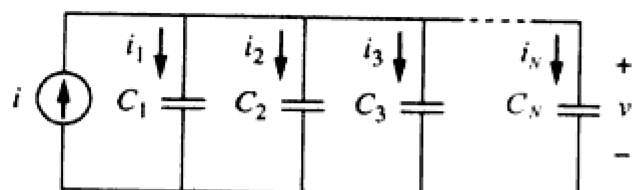
$$i=i_1+i_2+i_3+\cdots+i_N \tag{6-11}$$

而$i_k=C_k\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，因此，

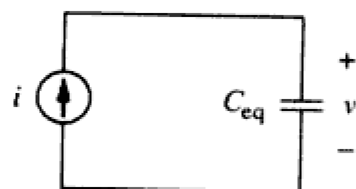
$$\begin{aligned}i&=C_1\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+C_2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+C_3\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\cdots+C_N\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\\&=\left(\sum_{k=1}^{N}C_k\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=C_{eq}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\end{aligned} \tag{6-12}$$

其中，

$$\boxed{C_{eq}=C_1+C_2+C_3+\cdots+C_N} \tag{6-13}$$



(a) 并联连接的 N 个电容器



(b) 并联电容器的等效电路

图 6-14 电容器的并联

N个并联连接的电容器的等效电容等于各电容器的电容之和。

由此可见，并联电容器的合并方式与串联电阻的合并方式相同。

下面通过比较图6-15a所示电路及其等效电路图6-15b，来确定N个串联电容器的等效电容C_{eq}。注意到流经各电容器的电流是相同的i（因而存储有相同的电荷），对图6-15a中的回路应用KVL得到：

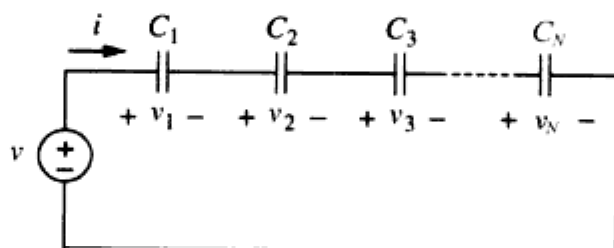
$$v = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_N \tag{6-14}$$

而$v_k = \dfrac{1}{C_k}\int_{t_0}^{t} i(t)\,\mathrm{d}t + v_k(t_0)$，因此，

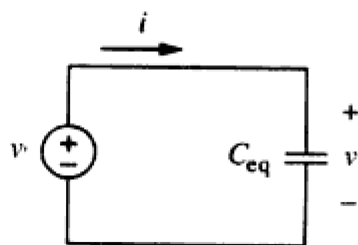
$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} i(t)\mathrm{d}t + v_1(t_0) + \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} i(t)\mathrm{d}t + v_2(t_0) + \cdots + \frac{1}{C_N}\int_{t_0}^{t} i(t)\mathrm{d}t + v_N(t_0) \\ &= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N}\right)\int_{t_0}^{t} i(t)\mathrm{d}t + v_1(t_0) + v_2(t_0) + \cdots + v_N(t_0) \\ &= \frac{1}{C_{eq}}\int_{t_0}^{t} i(t)\mathrm{d}t + v(t_0) \end{aligned} \tag{6-15}$$

其中，

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_N}} \tag{6-16}$$



（a）N 个电容的串联



（b）串联电容的等效电路

图 6-15 电容器的串联

根据KVL，C_{eq}两端的初始电压$v(t_0)$应该等于t_0时刻各电容两端的电压之和，或者按照式(6-15)，有：

$$v(t_0) = v_1(t_0) + v_2(t_0) + \cdots + v_N(t_0)$$

串联电容器的等效电容等于各个电容器电容倒数之和的倒数。

由此可见，串联电容器的合并方式与并联电阻的合并方式相同。当$N=2$（即两个电容器相串联）时，式(6-16)变为：

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

即

$$\boxed{C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} \tag{6-17}$$

例题6-6 试求从图6-16所示电路中a、b两端看进去的等效电容。

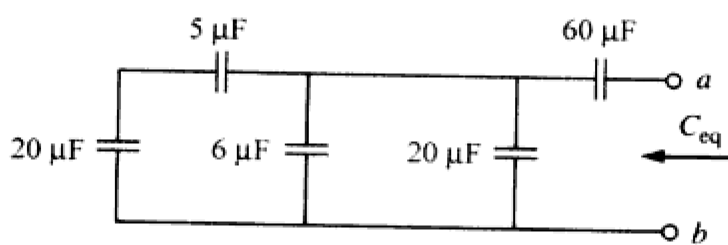


图 6-16　例题 6-6 的电路原理图

解　20 μF电容器与5 μF电容器相串联，其等效电容为：

$$\frac{20\times 5}{20+5}=4\ \mu\text{F}$$

这个4 μF电容器又与6 μF电容器和20 μF电容器相并联，合并后的等效电容为：

$$4+6+20=30\ \mu\text{F}$$

这个30 μF电容器又与60 μF电容器相串联。因此，整个电路的等效电容为：

$$C_{eq}=\frac{30\times 60}{30+60}=20\ \mu\text{F}$$

练习题6-6　试求从图6-17所示电路端口看进去的等效电容。

答　40 μF。

例题6-7　试求图6-18所示电路中各电容器两端的电压。

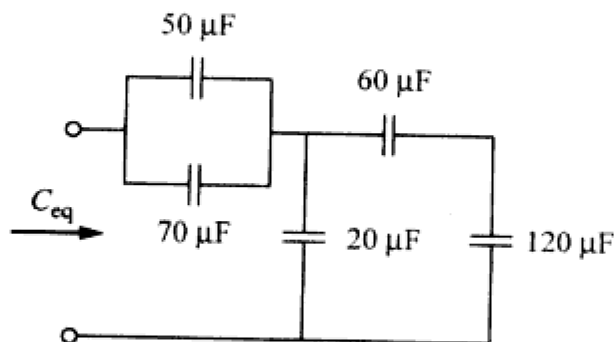


图 6-17　练习题 6-6 的电路原理图

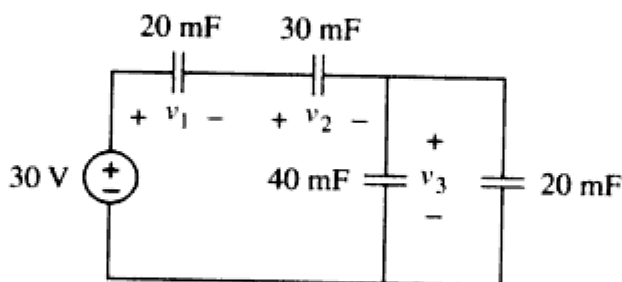


图 6-18　例题 6-7 的电路原理图

解　首先求出如图6-19所示的等效电容C_{eq}。图6-18中两个并联的电容器可以合并为40 + 20 = 60 mF，该60 mF电容器又与20 mF电容器和30 mF电容器相串联，因此，

$$C_{eq}=\frac{1}{\frac{1}{60}+\frac{1}{30}+\frac{1}{20}}\text{mF}=10\,\text{mF}$$

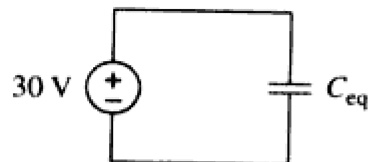


图 6-19　图 6-18 所示电路的等效电路

总电荷量为：

$$q=C_{eq}v=10\times 10^{-3}\times 30=0.3\ \text{C}$$

这是20 mF与30 mF两个电容器上的电荷，因为二者与30 V电源是串联的（理解这一结论的一种简单方法是将电荷比作电流，因为$i=\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$），因此，

$$v_1=\frac{q}{C_1}=\frac{0.3}{20\times 10^{-3}}=15\,\text{V}\qquad v_2=\frac{q}{C_2}=\frac{0.3}{30\times 10^{-3}}=10\,\text{V}$$

确定v_1与v_2后，再利用KVL就可以确定v_3为：

$$v_3=30-v_1-v_2=5\ \text{V}$$

另外，由于40 mF与20 mF两个电容器是并联的，所

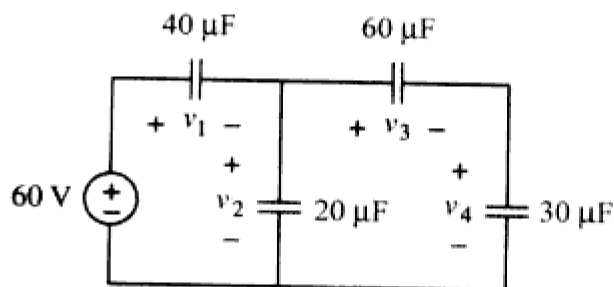


图 6-20　练习题 6-7 的电路原理图

以它们两端的电压相同，均为v_3，而且合并后的电容为40 + 20 = 60 mF。这一合并后的电容又与20 mF和30 mF两个电容器相串联，因而具有相同的电荷，所以，

$$v_3 = \frac{q}{60\,\text{mF}} = \frac{0.3}{60\times10^{-3}} = 5\,\text{V}$$

练习题6-7 试求图6-20所示电路中各电容器两端的电压。

答 $v_1 = 30$ V，$v_2 = 30$ V，$v_3 = 10$ V，$v_4 = 20$ V。

6.4 电感器

电感器是一种在其磁场中储存能量的无源电路元件。电感器在电子与电力系统中有许多应用，例如它可以用于供电电源、变压器、收音机、电视机、雷达以及电动机中。

任何电流导体都具有电磁感应特性，可以看作一个电感器。但是为了增强其电磁效应，实际的电感器通常由许多圈导线绕成的圆柱状线圈组成，如图6-21所示。

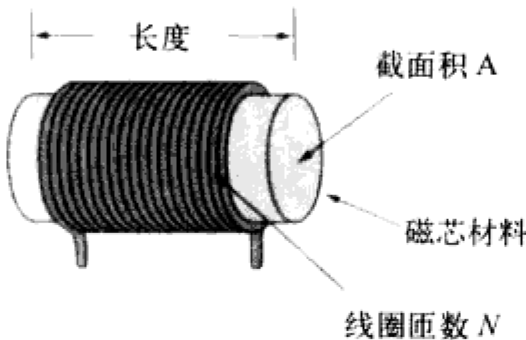


图 6-21 电感器的典型形式

电感器由导线线圈组成。

如果有电流通过电感器，则电感器两端的电压与电流随时间的变化率呈正比。根据无源符号规约，有：

$$\boxed{v = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}} \tag{6-18}$$

其中，L为比例常数，称之为电感器的电感（inductance）。电感的单位是亨利（henry，H），是为纪念美国发明家约瑟夫·亨利（1797—1878）而以他的名字命名的。由式(6-18)可知，1亨利等于1伏特·秒/安培。

由式(6-18)可以看出，电感器两端要有电压，其电流必须随时间而变化，因此，通过电感器的电流恒定（即直流）时，其电压$v = 0$。

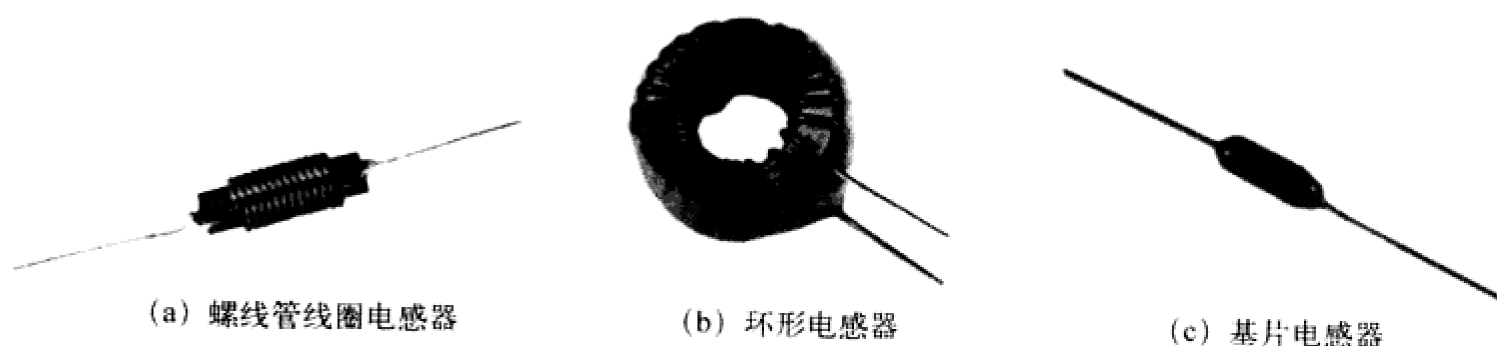
电感反映的是电感器阻碍流经它的电流变化的属性，单位为亨利（H）。

电感器的电感取决于它的物理尺寸与结构。由电磁场理论可以推导出不同形状电感器的电感量计算公式，也可以从电子工程手册中查阅。例如，对于图6-21所示的电感器（螺线管线圈电感器），其电感量为：

$$L = \frac{N^2\mu A}{\ell} \tag{6-19}$$

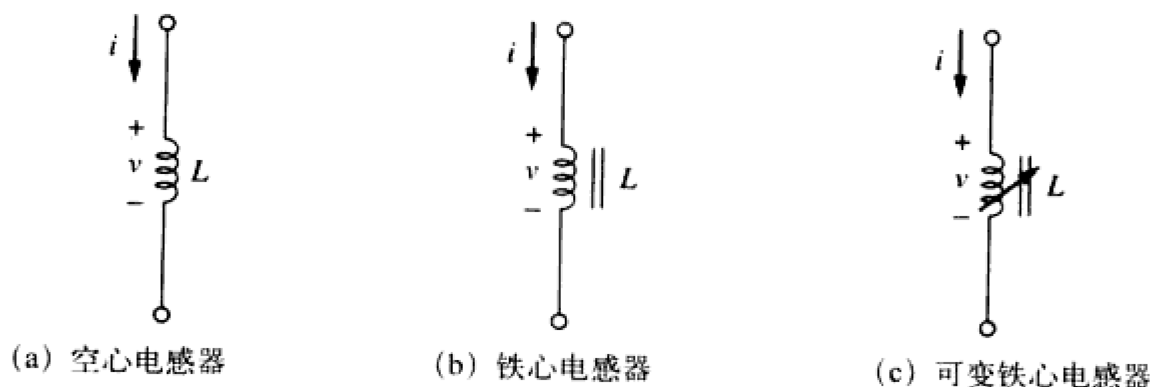
其中，N为线圈匝数，ℓ为螺线管的长度，A为横截面积，μ为磁芯的导磁率。由式(6-19)可见，增加线圈匝数、选用高导磁率的材料作为磁芯、扩大螺线管的横截面积、缩短线圈长度都能够增加电感量。

与电容器类似，商用电感器也有不同电感量和不同类型之分。实际电感器的典型电感量通常从几微亨（μH）到几十亨利（H），前者用于通信系统中，后者则用于电力系统中。电感器也有固定电感和可变电感，其磁芯材料有铁、钢、塑料或空气。电感器也可以称为电感线圈（coil）或扼流圈（choke）。常见的电感器如图6-22所示，符合无源符号规约的电感器的电路符号如图6-23所示。



(a) 螺线管线圈电感器　(b) 环形电感器　(c) 基片电感器

图 6-22　不同类别的电感器



(a) 空心电感器　(b) 铁心电感器　(c) 可变铁心电感器

图 6-23　电感器的电路符号

历史人物



约瑟夫·亨利(Joseph Henry, 1797—1878)，美国物理学家、发现了电感并研制出电动机。

亨利生于纽约州的奥尔巴尼。他毕业于奥尔巴尼研究院，于1832~1846 年在普林斯顿大学任教，讲授哲学，并且是史密森学会（Smithsonian Institution）的第一任会长。他在电磁学方面做了很多实验，研制出具有强大电磁力的能够举起数千磅重物的电磁体。有趣的是，约瑟夫·亨利在法拉第之前就发现了电磁感应现象，但却没有发表他的成果。电感的单位——亨利就是以他的名字命名的。

式(6-18)为电感器的电压-电流关系，图6-24给出了电感量与电流无关的电感器的电压-电流关系曲线。满足上述关系的电感器称为线性电感器（linear inductor）。对于非线性电感器（nonlinear inductor）而言，由于其电感量随电流而改变，所以式(6-18)的曲线不再是一条直线。除非特别说明，本书所讨论的电感器均为线性电感器。

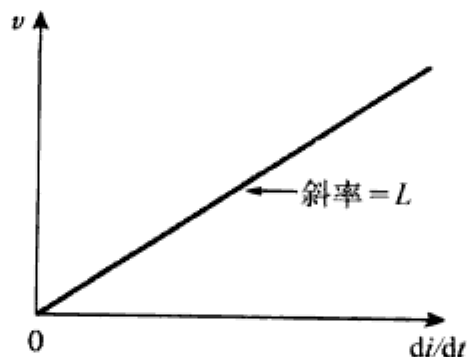


图 6-24　电感器的电压-电流关系曲线

由式(6-18)得出的电感器的电流-电压关系为：

$$di = \frac{1}{L} v\, dt$$

两边积分得到：

$$i = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(t)dt \tag{6-20}$$

即，

$$\boxed{i=\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}v(t)dt+i(t_0)} \tag{6-21}$$

其中，$i(t_0)$为$-\infty<t<t_0$的总电流，并且$i(-\infty)=0$。因为电感器在之前某个时刻必然没有电流通过，所以$i(-\infty)=0$是符合实际的，也是合理的。

电感器是其磁场中存储能量的器件，由式(6-18)可以确定电感器所存储的能量。传递给电感器的功率为：

$$p=vi=\left(L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)i \tag{6-22}$$

所存储的能量为：

$$\begin{aligned}w&=\int_{-\infty}^{t}p\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{t}\left(L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)i\,\mathrm{d}t\\&=L\int_{-\infty}^{t}i\,\mathrm{d}i=\frac{1}{2}Li^2(t)-\frac{1}{2}Li^2(-\infty)\end{aligned} \tag{6-23}$$

由于$i(-\infty)=0$，所以，

$$\boxed{w=\frac{1}{2}Li^2} \tag{6-24}$$

应该掌握电感器的如下重要性质：

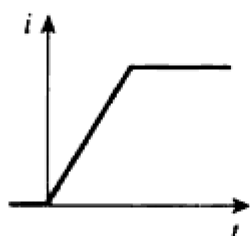
（1）由式(6-18)可知，当电流恒定时，电感器两端的电压为零，因此，

电感器对直流电而言是短路的。

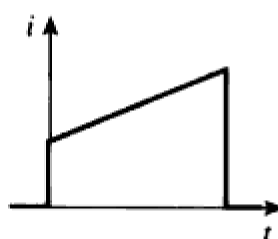
（2）电感器的一个重要特性是阻止流经它的电流的变化。

流经电感器的电流是不能突变的。

根据式(6-18)，流经电感器电流的不连续变化要求有无穷大的电压，这在物理上是不可能的，因此，电感器会阻止流经它的电流发生突变。例如，流经电感器的电流可以具有如图6-25a所示的形式，但现实中不能具有如图6-25b所示的不连续形式。然而，电感器两端的电压是可以突变的。



(a) 允许的电流形式



(b) 不允许的电流形式，因为电流突变是不可能的

图 6-25 流经电感器的电流

（3）与理想电容器一样，理想电感器也不消耗能量。电感器中所储存的能量可供以后提取使用。当在其磁场中存储能量时，电感器从电路中吸收功率，当需要释放之前所存储的能量时，电感器又会给电路传递功率。

（4）实际的非理想电感器包含一个非常重要的电阻元件，如图6-26所示，这是因为电感器通常由诸如铜等导电材料制成，而导电材料总会表现出电阻的特性。电感器的电阻称为绕线电阻（winding resistance）R_w，它与电感相串联。R_w的存在使电感器既是一个储能元件又是一个耗能元件。不过R_w通常很小，在绝大多数情况下可以忽略不计。由于导线线圈之间存在容性

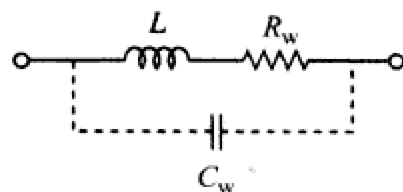


图 6-26 实际电感器的电路模型

耦合，所以非理想电感器还存在一个匝间绕线电容（winding capacitance）C_w，除高频情况外，C_w通常很小，在大多数情况下可以忽略不计。本书假定电感器均为理想的。

由于电感通常由良导体制成，所以其电阻非常小。

例题6-8　流经某0.1 H电感的电流为$i(t)=10te^{-5t}$ A，试求该电感器两端的电压以及它所储存的能量。

解　由于$v=L\,di/dt$并且$L=0.1$ H，所以，

$$v=0.1\frac{d}{dt}(10te^{-5t})=e^{-5t}+t(-5)e^{-5t}=e^{-5t}(1-5t)\,V$$

该电感器所储存的能量为：

$$w=\frac{1}{2}Li^2=\frac{1}{2}(0.1)100t^2e^{-10t}=5t^2e^{-10t}\,J$$

练习题6-8　如果流经某1 mH电感的电流为$i(t)=20\cos 100t$ mA，试求该电感器两端的电压以及它所储存的能量。

答　$-2\sin 100t$ mV，$0.2\cos^2 100t$ μJ。

例题6-9　如果某5 H电感两端的电压为：

$$v(t)=\begin{cases}30t^2, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

试求流经它的电流以及在$t=5$ s时所存储的能量。假定$i(v)>0$。

解　由于$i=\dfrac{1}{L}\int_0^t v(t)\,dt+i(t_0)$并且$L=5$ H，所以，

$$i=\frac{1}{5}\int_0^t 30t^2dt+0=6\times\frac{t^3}{3}=2t^3 A$$

功率$p=vi=60\,t^5$，于是所存储的能量为：

$$w=\int p\,dt=\int_0^5 60t^5dt=60\frac{t^6}{6}\Bigg|_0^5=156.25\,kJ$$

另外，也可以利用式(6-24)来确定电感器所存储的能量，即：

$$w\big|_0^5=\frac{1}{2}Li^2(5)-\frac{1}{2}Li(0)=\frac{1}{2}(5)(2\times5^3)^2-0=156.25\,kJ$$

与上述结果相同。

练习题6-9　某2 H电感的端电压为$v=10(1-t)$ V，试求在$t=4$ s时，流经它的电流以及在$t=4$ s时所存储的能量，假定$i(0)=2$ A。

答　-18 A，320 J。

例题6-10　考虑如图6-27a所示的电路。在直流条件下，试求：(a) i、v_C与i_L；(b) 在电容器和电感器中所存储的能量。

解　(a) 在直流条件下，用开路取代电容，用短路取代电感，得到如图6-27b所示的电路。由图6-27b可知，

$$i=i_L=\frac{12}{1+5}=2\,A$$

电压v_C与5 Ω电阻两端的电压相同，因此，

$$v_C=5\,i=10\,V$$

(b) 电容器中所存储的能量为：

$$w_C = \frac{1}{2}Cv_C^2 = \frac{1}{2}(1)(10^2) = 50\,\text{J}$$

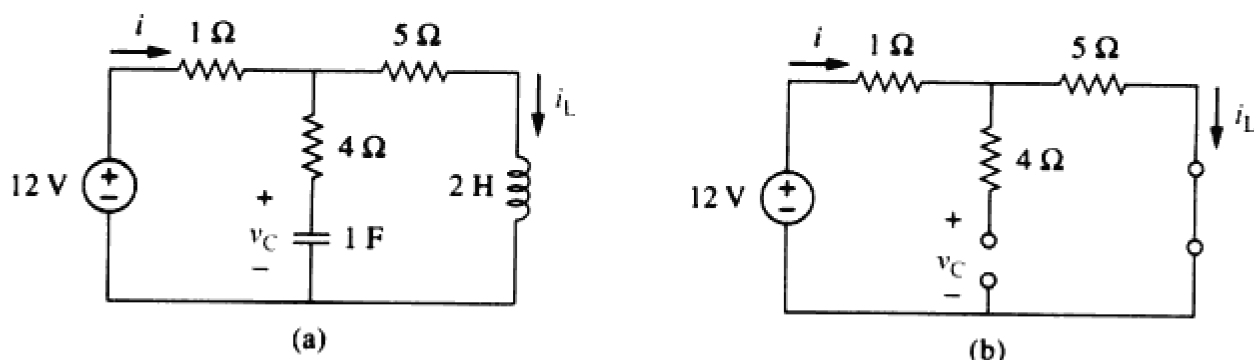


图 6-27 例题 6-10 的电路原理图

电感器中所存储的能量为：

$$w_L = \frac{1}{2}Li_L^2 = \frac{1}{2}(2)(2^2) = 4\,\text{J}$$

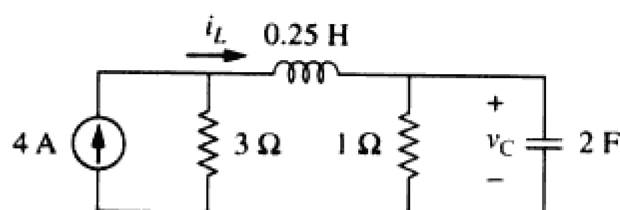


图 6-28 练习题 6-10 的电路原理图

练习题6-10 试确定图6-28所示电路在直流条件下的v_C、i_L以及电容器和电感器中所存储的能量。

答 3 V，3 A，9 J，1.125 J。

6.5 电感器的串联与并联

既然已经将电感器加入无源元件的行列，下面就需要将串-并联合并这一工具扩展到电感器上，这就要求我们知道如何求出实际电路中一组电感器串联或并联时的等效电感。

首先考虑N个电感器串联的情况，如图6-29a所示，其等效电路如图6-29b所示。流过这些电感的电流是相同的，于是对图中回路应用KVL可得：

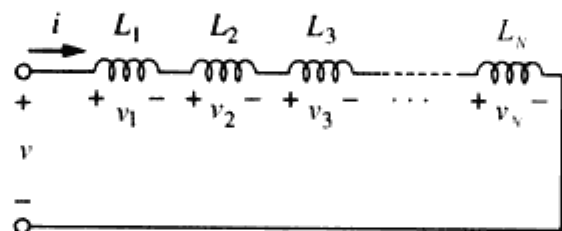
$$v = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_N \tag{6-25}$$

将$v_k = L_k\dfrac{di}{dt}$代入后得到：

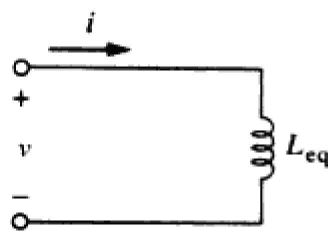
$$\begin{aligned} v &= L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + L_3\frac{di}{dt} + \cdots + L_N\frac{di}{dt} \\ &= (L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_N)\frac{di}{dt} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{N} L_k\right)\frac{di}{dt} = L_{eq}\frac{di}{dt} \end{aligned} \tag{6-26}$$

其中，

$$\boxed{L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_N} \tag{6-27}$$



(a) N 个电感器相串联



(b) 串联电感器的等效电路

图 6-29 电感器的串联

因此，

多个串联电感器的等效电感等于各个电感量之和。

由此可见，串联电感器的合并方式与串联电阻的合并方式完全相同。

下面考虑N个电感并联的情况，如图6-30a所示，其等效电路如图6-30b所示。各电感器两端具有相同的电压，应用KCL可得：

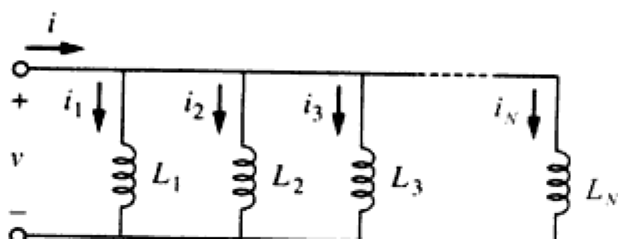
$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_N \tag{6-28}$$

而$i_k = \dfrac{1}{L_k}\displaystyle\int_{t_0}^{t} v\,\mathrm{d}t + i_k(t_0)$，因此

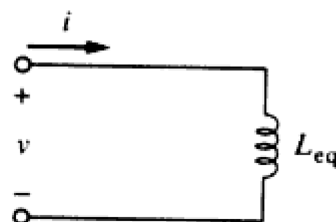
$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{L_1}\int_{t_0}^{t} v\,\mathrm{d}t + i_1(t_0) + \frac{1}{L_2}\int_{t_0}^{t} v\,\mathrm{d}t + i_2(t_0) + \cdots + \frac{1}{L_N}\int_{t_0}^{t} v\,\mathrm{d}t + i_N(t_0) \\ &= \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_N}\right)\int_{t_0}^{t} v\,\mathrm{d}t + i_1(t_0) + i_2(t_0) + \cdots + i_N(t_0) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{L_k}\right)\int_{t_0}^{t} v\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{N} i_k(t_0) = \frac{1}{L_{eq}}\int_{t_0}^{t} v\,\mathrm{d}t + i(t_0) \end{aligned} \tag{6-29}$$

其中，

$$\boxed{\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \cdots + \frac{1}{L_N}} \tag{6-30}$$



(a) N个电感器相并联



(b) 并联电感器的等效电路

图 6-30　电感器的并联

根据KCL，在$t = t_0$时刻流经L_{eq}的初始电流$i(t_0)$应该等于t_0时刻流经各电感器的电流之和，因此，按照式(6-29)，有：

$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + \cdots + i_N(t_0)$$

根据式(6-30)可知，

并联电感器的等效电感等于各个电感量倒数之和的倒数。

由此可见，并联电感的合并方式与并联电阻的合并方式相同。若

对于两个相互并联的电感（$N = 2$）而言，式(6-30)变为：

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \qquad 或 \qquad L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \tag{6-31}$$

只要元件类型相同，2.7节讨论的电阻的Δ−Y转换就可以扩展至电容器和电感器。

至此，我们可以将已经学过的三个基本电路元件最重要的特性总结在表6-1中。

表 6-1 三个基本元件的重要特性[①]

关 系	电阻（R）	电容（C）	电感（L）
$v-i$	$v=iR$	$v=\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt+v(t_0)$	$v=L\frac{di}{dt}$
$i-v$	$i=v/R$	$i=C\frac{dv}{dt}$	$i=\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt+i(t_0)$
p 或 w	$p=i^2R=\frac{v^2}{R}$	$w=\frac{1}{2}Cv^2$	$w=\frac{1}{2}Li^2$
串联	$R_{eq}=R_1+R_2$	$C_{eq}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$	$L_{eq}=L_1+L_2$
并联	$R_{eq}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$	$C_{eq}=C_1+C_2$	$L_{eq}=\frac{L_1L_2}{L_1+L_2}$
直流条件下	相同	开路	短路
不能突变的电路变量	不适用	v	i

2.7节讨论的电阻的Y－Δ转换也可以扩展至电容器和电感器。

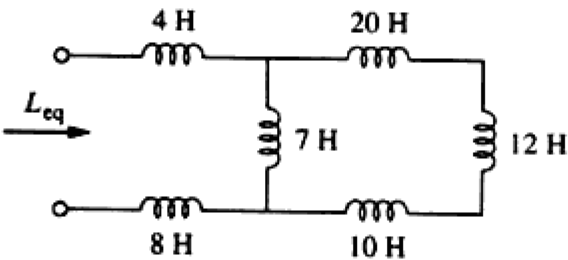


图 6-31 例题 6-11 的电路原理图

例题6-11 试求图6-31所示电路的等效电感。

解 10 H、12 H和20 H三个电感器是串联的，因此可将它们合并为一个42 H的电感。该42 H电感器与7 H电感器又是并联的，合并后的电感为：

$$\frac{7\times 42}{7+42}=6\text{H}$$

而该6 H电感器又与4 H和8 H电感器相串联，所以，

$$L_{eq}=4+6+8=18\text{ H}$$

练习题6-11 试计算图6-32所示电感阶梯网络的等效电感。

答 25 mH。

例题6-12 在如图6-33所示电路中，$i(t)=4(2-e^{-10t})$ mA，如果$i_2(0)=-1$ mA，试求：(a) $i_1(0)$；(b) $v(t)$、$v_1(t)$与$v_2(t)$；(c) $i_1(t)$与$i_2(t)$。

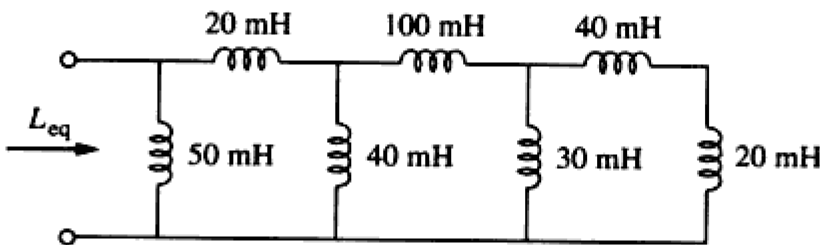


图 6-32 练习题 6-11 的电路原理图

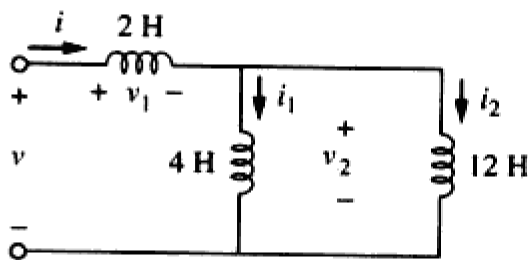


图 6-33 例题 6-12 的电路原理图

解 (a) 由$i(t)=4(2-e^{-10t})$ mA可得$i(0)=4(2-1)=4$ mA。由于$i=i_1+i_2$，所以，

$$i_1(0)=i(0)-i_2(0)=4-(-1)=5\text{ mA}$$

(b) 等效电感为：

$$L_{eq}=2+4\,\|\,12=2+3=5\text{ H}$$

① 假定在无源符号规约条件下。

因此，

$$v(t)=L_{eq}\frac{di}{dt}=5(4)(-1)(-10)e^{-10t}\ \text{mV}=200e^{-10t}\ \text{mV}$$

且

$$v_1(t)=2\frac{di}{dt}=2(-4)(-10)e^{-10t}\ \text{mV}=80e^{-10t}\ \text{mV}$$

因为$v=v_1+v_2$，所以，

$$v_2(t)=v(t)-v_1(t)=120\ e^{-10t}\ \text{mV}$$

（c）电流i_1为：

$$i_1(t)=\frac{1}{4}\int_0^t v_2\ dt+i_1(0)=\frac{120}{4}\int_0^t e^{-10t}dt+5\,\text{mA}$$

$$=-3e^{-10t}\Big|_0^t+5\,\text{mA}=-3e^{-10t}+3+5=8-3e^{-10t}\,\text{mA}$$

同理，

$$i_2(t)=\frac{1}{12}\int_0^t v_2\ dt+i_2(0)=\frac{120}{12}\int_0^t e^{-10t}dt-1\,\text{mA}$$

$$=-e^{-10t}\Big|_0^t-1\,\text{mA}=-e^{-10t}+1-1=-e^{-10t}\ \text{mA}$$

由此可见$i_1(t)+i_2(t)=i(t)$。

练习题6-12 在如图6-34所示电路中，$i_1(t)=0.6\ e^{-2t}$ A，如果$i(0)=1.4$ A，试求：（a）$i_2(0)$；（b）$i_2(t)$与$i(t)$；（c）$v(t)$，$v_1(t)$与$v_2(t)$。

答 (a) 0.8 V，(b) $(-0.4+1.2e^{-2t})$ A，$(-0.4+1.8e^{-2t})$ A，(c) $-36e^{-2t}$ V，$-7.2e^{-2t}$ V，$-28.8e^{-2t}$ V

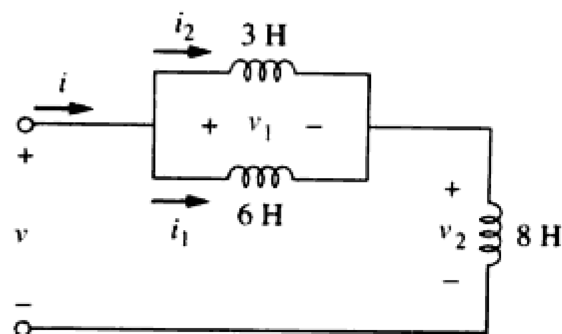


图 6-34 练习题 6-12 的电路原理图

6.6 †应用

诸如电阻器和电容器等电路元件的商业级产品既有分立元件的形式又有集成电路（IC）的形式，与电容器和电阻器不同，大容量电感器很难集成在IC基片上。因此，电感器（电感线圈）通常都是分立元件，而且体积大、价格高。正是这一原因使得电感器不像电容器和电阻器那样种类繁多，而且也限制了电感的应用。然而，在某些应用场合还无法取代电感器，例如在继电器、延迟线、传感器、拾音头、电话电路、收音机、电视接收机、供电电源、电动机、麦克风、扬声器等中都会用到电感器。

电容器和电感器的如下三个特殊属性使其在电子电路中非常有用。

（1）它们所具有的存储能量的能力，可以使其作为临时电压源或电流源来用。因此，在短时间内产生大的电流或电压的应用场合就可以使用电容器和电感器。

（2）电容器阻止电压的突变，电感器阻止电流的突变。因此电感器可以用于遏止电火花或电弧，并且可以将脉动的直流电压转换为相对平滑的直流电压。

（3）电容器和电感器对频率是敏感的，所以可用于频率鉴别的场合。

前两个属性适用于直流电路中，而第三个属性则会在交流电路中体现其优势。我们将在后续的章节了解上述属性的用处。本节介绍电容器与运算放大器结合的三个应用：积分器、微分器和模拟计算机。

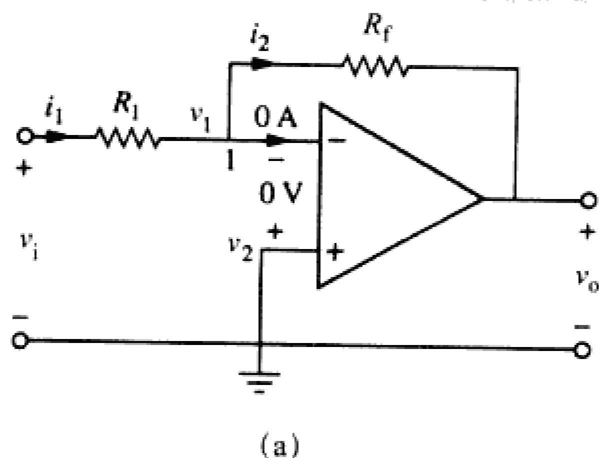
6.6.1 积分器

积分器和微分器是采用储能元件构成的两种重要的运算放大器电路，这类运算放大器电路中通

常会包括电阻器和电容器。电感器（电感线圈）因其体积大、价格贵而较少采用。

运放积分器的应用非常广泛，特别是在模拟计算机中应用最多，有关模拟计算机的讨论见第6.6.3节。

积分器是一种输出信号与输入信号的积分呈正比的运算放大器电路。



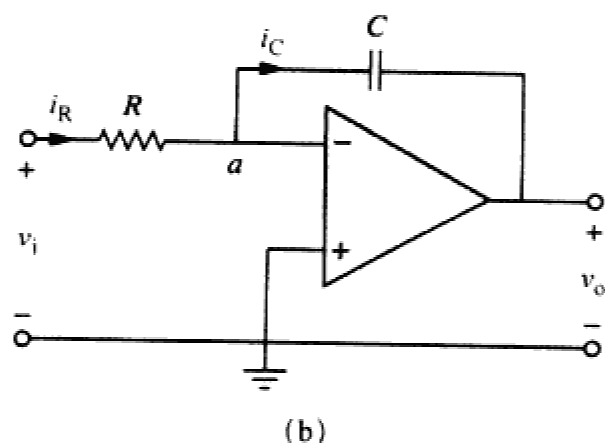


图 6-35 将（a）中反相放大器的反馈电阻用电容取代后得到（b）中的积分器

如果用一个电容器取代我们熟悉的图6-35a所示的反相放大器电路中的反馈电阻R_f，就可以得到如图6-35b所示的理想积分器。这样取代后，就可以得出积分关系的数学表达式。在图6-35b所示电路的节点a处，

$$i_R = i_C \tag{6-32}$$

但是，

$$i_R = \frac{v_i}{R}, \quad i_C = -C\frac{dv_o}{dt}$$

将其代入式(6-32)可以得到：

$$\frac{v_i}{R} = -C\frac{dv_o}{dt} \tag{6-33a}$$

$$dv_o = -\frac{1}{RC}v_i\, dt \tag{6-33b}$$

两边取积分得到：

$$v_o(t) - v_o(0) = -\frac{1}{RC}\int_0^t v_i(t)dt \tag{6-34}$$

为了确保$v_o(0)=0$，要求在施加输入信号之前，必须先对积分器的电容器放电。假定$v_o(0)=0$，则有：

$$\boxed{v_o = -\frac{1}{RC}\int_0^t v_i(t)dt} \tag{6-35}$$

上式表明，图6-35b所示电路的输出电压与输入信号的积分呈正比。实际上，运放积分器需要反馈电阻来降低其直流增益，同时避免其处于饱和状态，因此运算放大器必须工作在线性区域内，这样才能避免其饱和。

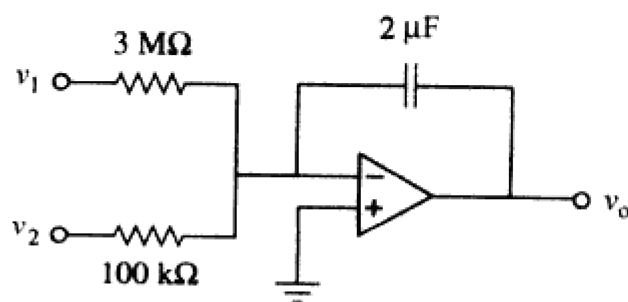


图 6-36 例题 6-13 的电路原理图

例题6-13 如果$v_1 = 10\cos 2t$ mV，$v_2 = 0.5\,t$ mV，试求图6-36所示的运算放大器电路中的v_o。假定电容器两端的初始电压为零。

解 这是一个加法积分器，于是：

$$v_o = -\frac{1}{R_1C}\int v_1 dt - \frac{1}{R_2C}\int v_2 dt$$
$$= -\frac{1}{3\times10^6\times2\times10^{-6}}\int_0^t 10\cos 2t\, dt - \frac{1}{100\times10^3\times2\times10^{-6}}\int_0^t 0.5t\, dt$$
$$= -\frac{1}{6}\frac{10}{2}\sin 2t - \frac{1}{0.2}\frac{0.5t^2}{2} = -0.833\sin 2t - 1.25t^2\,\text{mV}$$

练习题6-13 在图6-35所示的积分器中$R = 25\ \text{k}\Omega$，$C = 10\ \mu\text{F}$，试确定在$t = 0$时刻施加一个10 mV直流电压的输出电压。假定运算放大器的初始状态为零。

答 $-40t$ mV。

6.6.2 微分器

微分器是一种输出信号与输入信号的变化率呈正比的运算放大器电路。

在图6-35a所示电路中，如果将输入电阻器替换为一个电容器，则得到如图6-37所示的微分器电路。在节点a处应用KCL，可得：

$$i_R = i_C \qquad (6\text{-}36)$$

而

$$i_R = -\frac{v_o}{R}, \qquad i_C = C\frac{dv_i}{dt}$$

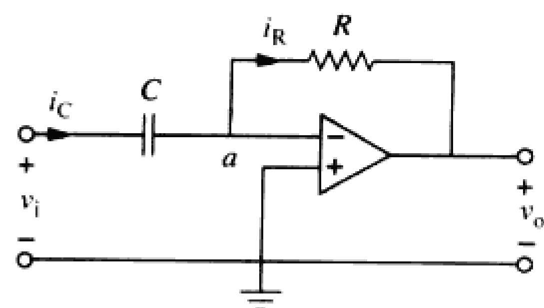


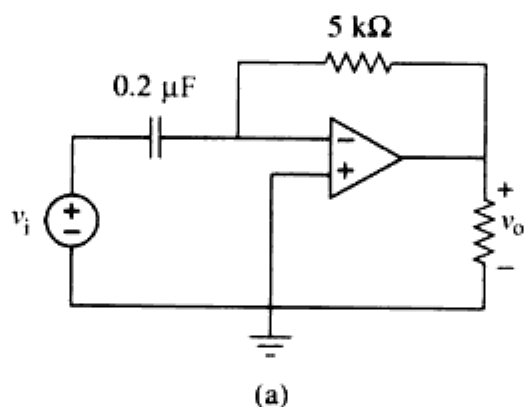
图 6-37 运放微分电路

将其代入式(6-36)得到：

$$\boxed{v_o = -RC\frac{dv_i}{dt}} \qquad (6\text{-}37)$$

上式表明输出是输入的微分。这种微分电路是不稳定的，因为电路中的电子噪声会被该微分器放大。因此，图6-37所示的微分器电路不像积分器那么有用，在实际中很少使用。

例题6-14 已知输入电压如图6-38b所示，试画出图6-38a所示电路的输出电压波形图，假定$t = 0$时，$v_o = 0$。



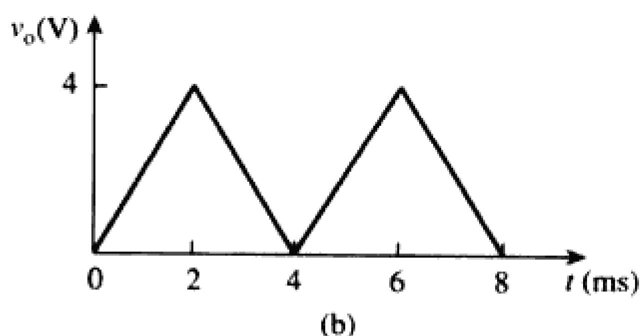


图 6-38 例题 6-14 的电路原理图与波形图

解 这是一个微分器，

$$RC = 5\times10^3\times0.2\times10^{-6} = 10^{-3}\ \text{s}$$

当$0 < t < 4$ ms时，图6-38b所示的输入电压可以表示为：

$$v_i = \begin{cases} 2\,000t & 0 < t < 2\text{ms} \\ 8 - 2\,000t & 2 < t < 4\text{ms} \end{cases}$$

在$4 < t < 8$ ms期间，输入电压表达式相同。利用式(6-37)可得输出为：

$$v_o = -RC\frac{dv_i}{dt} = \begin{cases} -2\,\text{V} & 0 < t < 2\,\text{ms} \\ 2\,\text{V} & 2 < t < 4\,\text{ms} \end{cases}$$

于是，得到输出波形图如图6-39所示。

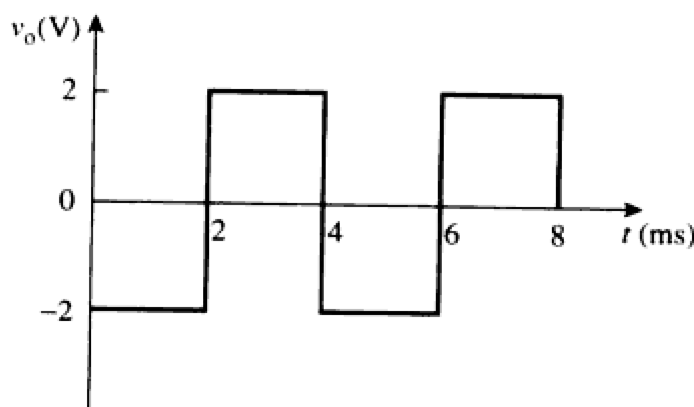


图 6-39　图 6-38a 所示电路的输出电压波形

练习题6-14　在图6-37所示的微分器中，$R = 10\ \text{k}\Omega$，$C = 2\ \mu\text{F}$，如果输入$v_i = 3t$ V。试确定输出v_o。

答　-60 mV。

6.6.3　模拟计算机

运算放大器最初是为制造模拟电子计算机而研制的。对模拟计算机进行编程就可以求解机械和电子系统的数学模型，这些数学模型通常要以微分方程的形式表示。

利用模拟计算机求解简单的微分方程时，要求如下三种类型的运算放大器电路相级联：积分器电路、加法放大器、负/正刻度的反相/同相放大器。说明模拟计算机如何求解微分方程的最佳方法是通过一道例题来演示。

假定要求解如下方程中的$x(t)$：

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = f(t), \qquad t > 0 \tag{6-38}$$

其中，a、b、c均为常数，$f(t)$为任意正弦函数。求解该方程时首先要求出最高阶微分项，求解d^2x/dt^2得到：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{f(t)}{a} - \frac{b}{a}\frac{dx}{dt} - \frac{c}{d}x \tag{6-39}$$

对d^2x/dt^2项积分并反相，就可以求出dx/dt，最后，对dx/dt项积分并反相，就可以得到$x(t)$。在适当的时刻输入正弦函数，将必要的加法器、反相器和积分器连接起来就可以实现用于求解方程(6-38)的模拟计算机。将绘图仪或示波器接入系统相应的观察位置，就可以看到输出x、dx/dt或d^2x/dt^2的波形。

虽然上面这个例子只是求解一个二阶微分方程，但是由积分器、反相器、反相加法器等组成的模拟计算机可以模拟任意微分方程的求解。当然，一定要注意电阻和电容的选取，以确保在求解时间间隔内运算放大器不会进入饱和状态。

采用真空电子管的模拟计算机出现在二十世纪五六十年代，最近已经很少使用，并且已被现代数字计算机所取代。但是，目前仍然学习模拟计算机的原因有二：首先，采用积分运算放大器使得模拟计算机构建成为可能，并且价格变得便宜；其次，了解模拟计算机有助于数字计算机的应用。

例题6-15　试设计一个模拟计算机电路求解如下微分方程：

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} + 2\frac{dv_o}{dt} + v_o = 10\sin 4t, \qquad t > 0$$

且初始条件为$v_o(0) = -4$，$v_o'(0) = 1$（符号′表示对时间的微分）。

解

（1）**明确**问题。问题的定义与所期望的解已经非常清楚。这里需要提醒学生的是，在很多情况下，问题的定义不会像本例这样明确，因此需要学生下更多的功夫做好这部分工作。如果出现这种情形，就要花相当的时间明确问题的定义，这样才能减少以后不必要的麻烦，也才有可能避免求解过程的失败。

（2）**表述**对问题的理解。显然，利用6.6.3节介绍的器件就可以构建所要求解的模拟计算机电路。这里需要积分器电路（可能同时兼有加法器的功能）以及一个或多个反相器电路。

（3）确定**可选**解。求解该问题的方法非常简单，只需选取正确的电阻值和电容值就可以实现所要表示的微分方程，该电路的输出即所求的答案。

（4）**尝试**问题的求解。电阻器与电容器的取值有无穷多种可能，其中很多取值都会得到正确的结果。电阻器与电容器的极值可能会得到不正确的输出，例如，电阻值过小会使电子电路过载，电阻值过大又会导致运算放大器不能按理想器件正常工作。这些限制取决于实际运算放大器的特性。

首先求解二阶微分：

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} = 10\sin 4t - 2\frac{dv_o}{dt} - v_o \tag{6-15-1}$$

求解上式需要包括相加、比例、积分在内的数学运算。式(6-15-1)两边取积分，可得：

$$\frac{dv_o}{dt} = -\int_0^t\left(-10\sin 4t + 2\frac{dv_o}{dt} + v_o\right)dt + v_o'(0) \tag{6-15-2}$$

其中，$v_o'(0)=1$。利用图6-40a所示的加法积分器就可以实现式(6-15-2)，选择适当的电阻值和电容值，使得 $-\frac{1}{RC}\int_0^t v_o\,dt$ 项中的$RC=1$。相应地也可以实现式(6-15-2)加法积分器中的其他项。将一个1 V电池与一个开关连在电容器两端，如图6-40a所示，就可以实现初始条件$dv_o(0)/dt=1$。

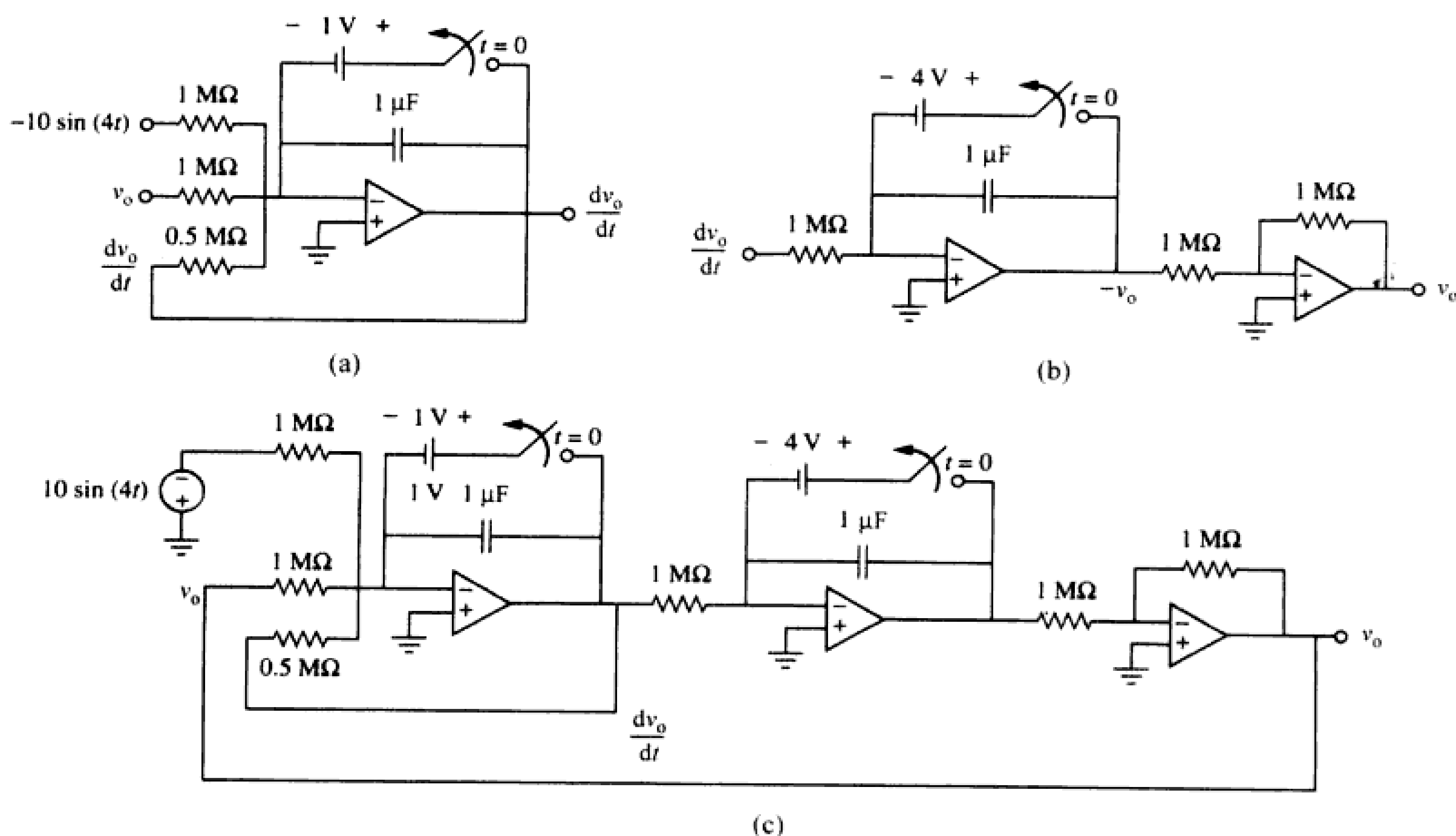


图 6-40 例题 6-15 的电路原理图

下一步是对$\mathrm{d}v_o/\mathrm{d}t$取积分并反相来确定$v_o$：

$$v_o = -\int_0^t \left(-\frac{\mathrm{d}v_o}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t + v(0) \tag{6-15-3}$$

上述关系可以由图6-40b所示的电路来实现，图中用一个电池确定了－4 V的初始条件。现在就可以将图6-40a与图6-40b合并起来得到如图6-40c所示的完整电路。当施加输入信号10 sin 4t，并在$t=0$时刻打开开关，就可以用示波器观察输出波形v_o。

（5）**评价**得到的结果，上述答案看上去是正确的，但事实是否如此呢？要得到v_o的实际解，最好的办法是利用PSpice软件对该电路进行模拟从而得到正确的解，同时可以将该结果与采用MATLAB求解微分方程的功能得到的结果进行比较。

由于我们所要做的只是检验该电路，并确定其正确地表示了微分方程，所以可以采用比较容易的方法，即仅检查该电路看其是否产生所期望的微分方程。

然而，仍然需要我们做出选择，可以从左到右检查电路，但这样就要对结果进行微分才能得到原微分方程。更容易的方法是从右到左检查电路，下面就采用这种方法检验答案。

输出v_o左侧的运算放大器就是一个增益为1的反相器，这表明中间电路的输出为$-v_o$。以下是中间电路的运算：

$$\begin{aligned} -v_o &= -\left(\int_0^t \frac{\mathrm{d}v_o}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t + v_o(0) \right) = -\left(v_o\Big|_0^t + v_o(0) \right) \\ &= -(v_o(t) - v_o(0) + v_o(0)) \end{aligned}$$

其中，$v_o(0) = -4$为电容器两端的初始电压。

对左侧电路进行同样的检验，

$$\frac{\mathrm{d}v_o}{\mathrm{d}t} = -\left(\int_0^t -\frac{\mathrm{d}^2 v_o}{\mathrm{d}t^2} \mathrm{d}t - v_o'(0) \right) = -\left(-\frac{\mathrm{d}v_o}{\mathrm{d}t} + v_o'(0) - v_o'(0) \right)$$

下面需要验证的就是第一级运算放大器的输入是否为$-\mathrm{d}^2 v_o/\mathrm{d}t^2$。

考察第一级运算放大器的输入可以看出它等于：

$$-10\sin(4t) + v_o + \frac{1/10^{-6}}{0.5\mathrm{M}\Omega} \frac{\mathrm{d}v_o}{\mathrm{d}t} = -10\sin(4t) + v_o + 2\frac{\mathrm{d}v_o}{\mathrm{d}t}$$

的确是由原方程得到的$-\mathrm{d}^2 v_o/\mathrm{d}t^2$。

（6）对结果是否**满意**？我们对所得到的结果是满意的，可以将上述求解过程作为该问题的正确答案。

练习题6-15 试设计一个求解如下微分方程的模拟计算机电路：

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_o}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}v_o}{\mathrm{d}t} + 2v_o = 4\cos 10t, \quad t > 0$$

且初始条件为$v_o(0) = 2$，$v_o'(0) = 0$

答 参见图6-41，其中$RC = 1$ s。

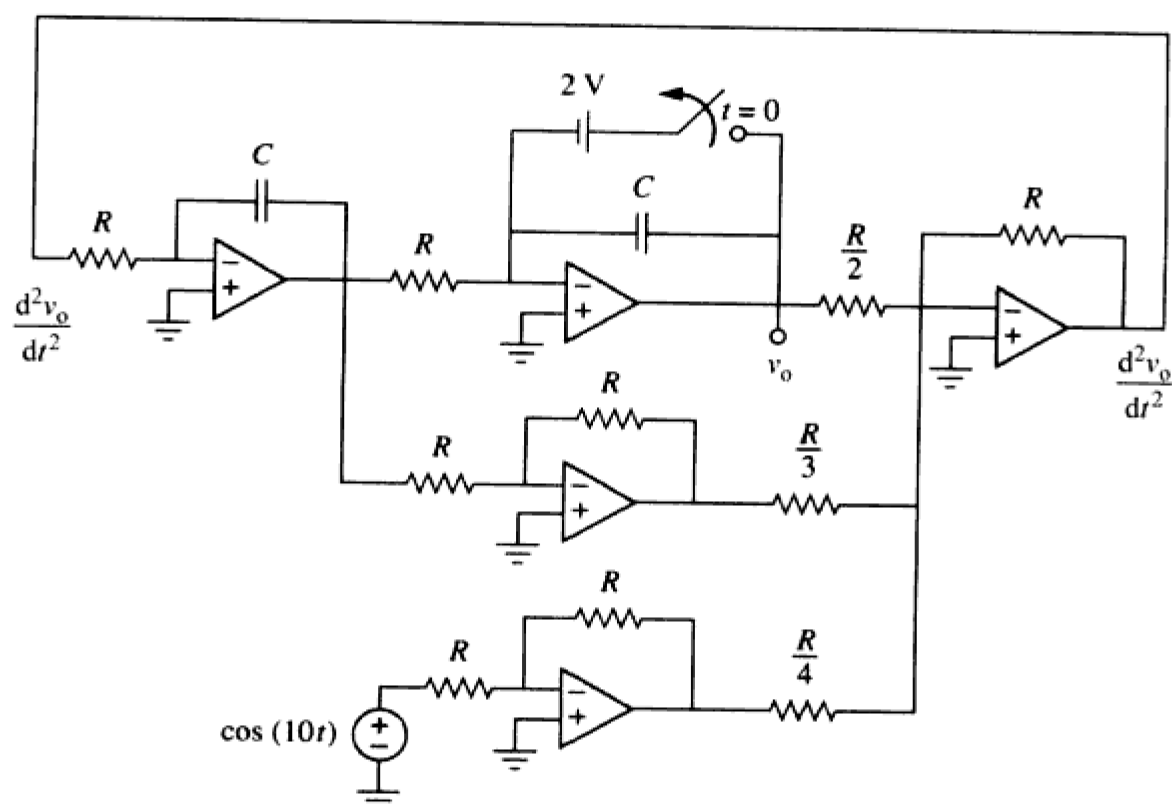


图 6-41 练习题 6-15 的电路原理图

6.7 本章小结

(1) 流经电容器的电流与其两端电压随时间的变化率成正比：

$$i = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

除非电压随时间而改变，否则流过电容器的电流为零，因此，电容器对于直流电源表现为开路。

(2) 电容两端的电压与流过它的电流对时间的积分成正比：

$$v = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,\mathrm{d}t = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,\mathrm{d}t + v(t_0)$$

电容器两端的电压不能突变。

(3) 串联与并联电容器的合并方式与电导的串并联合并方式相同。

(4) 电感器两端的电压与流过它的电流随时间的变化率成正比：

$$v = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

除非电流随时间而改变，否则电感器两端的电压为零，因此，电感器对于直流电源而言相当于短路。

(5) 流过电感器的电流与其两端电压对时间的积分成正比：

$$i = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v\,\mathrm{d}t = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,\mathrm{d}t + i(t_0)$$

流过电感器的电流不能突变。

(6) 串联与并联多电感器的合并方式与电阻的串并联合并方式相同。

(7) 任一给定时刻t，存储在电容器中的能量为$\frac{1}{2}Cv^2$，而存储在电感器中的能量为$\frac{1}{2}Li^2$。

(8) 三个应用电路——积分器、微分器和模拟计算机可以用电阻、电容和运算放大器实现。

复习题

6-1 当某5 F电容器两端连接120V电源时，其电荷为多少？
(a) 600 C (b) 300 C
(c) 24 C (d) 12 C

6-2 电容的度量单位是：
(a) 库仑 (b) 焦耳
(c) 亨利 (d) 法拉

6-3 当电容器内的总电荷量加倍时，其储存的能量：
(a) 保持不变 (b) 减半
(c) 加倍 (d) 为原来的4倍

6-4 如图6-42所示的电压波形是实际电容器的电压波形吗？
(a) 是 (b) 否

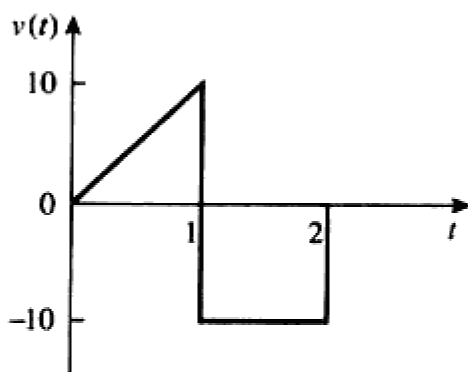


图 6-42 复习题 6-4 的波形图

6-5 两个40mF串联电容器与一个4mF电容器并联后的总电容量为：
(a) 3.8 mF (b) 5 mF (c) 24 mF
(d) 44 mF (e) 84 mF

6-6 在图6-43所示电路中，如果$i=\cos 4t$并且$v=\sin 4t$，则该元件为一个：
(a) 电阻器
(b) 电容器
(c) 电感器

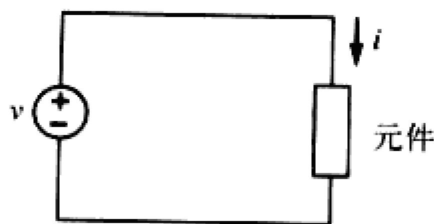


图 6-43 复习题 6-6 的电路原理图

6-7 某5H电感器在0.2s时间内的电流变化量为3 A，则在该电感器两端产生的电压为：
(a) 75 V (b) 8.888 V
(c) 3 V (d) 1.2 V

6-8 如果流经某10mH电感器的电流由0增加到2A，试问该电感器中存储的能量为多少？
(a) 40 mJ (b) 20 mJ
(c) 10 mJ (d) 5 mJ

6-9 并联电感的合并方式与并联电阻的合并方式相同。
(a) 正确 (b) 错误

6-10 对于图6-44所示电路，其分压器公式为：

(a) $v_1=\dfrac{L_1+L_2}{L_1}v_s$ (b) $v_1=\dfrac{L_1+L_2}{L_2}v_s$

(c) $v_1=\dfrac{L_2}{L_1+L_2}v_s$ (d) $v_1=\dfrac{L_1}{L_1+L_2}v_s$

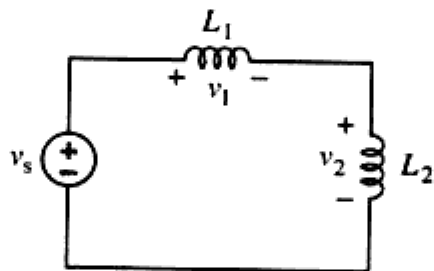


图 6-44 复习题 6-10 的电路原理图

答案 6-1 a；6-2 d；6-3 d；6-4 b；6-5 c；6-6 b；6-7 a；6-8 b；6-9 a；6-10 d。

习题

6.2 节

6-1 如果某5 F电容器两端的电压为$2\,te^{-3t}$ V，试求其电流与功率。

6-2 某20 μF电容器的能量为$w(t)=10\cos^2 377t$ J，试确定流过该电容器的电流。

6-3 某40 mF电容器两端的电压在5 s内从160 V变到220 V，试计算流过该电容器的平均电流。

6-4 流过某2 F电容器的电流为$6\sin 4t$ A，试求该电容器两端的电压$v(t)$，假定$v(0)=1$ V。

6-5 某4 μF电容器两端的电压如图6-45所示，试求流过该电容器的电流波形。

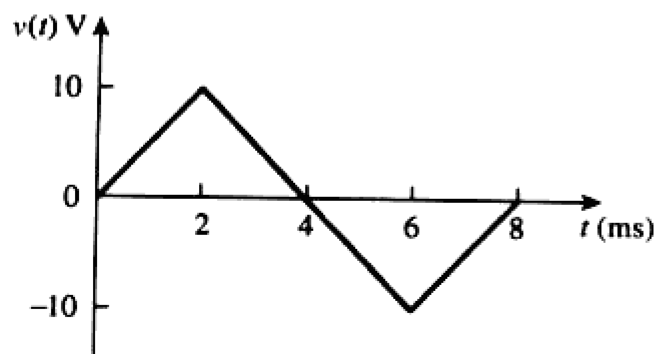


图 6-45 习题 6-5 的波形图

6-6 施加在某30 μF电容器两端的电压波形如图6-46所示，试画出流过该电容器的电流波形。

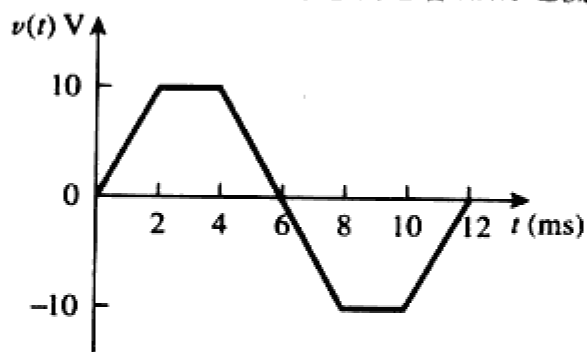


图 6-46 习题 6-6 的波形图

6-7 在$t=0$时刻，某50 mF电容器两端的电压为10 V，试计算当$4t$ mA（$t>0$）的电流流过该电容器时，电容器两端的电压。

6-8 某4 mF电容器两端的电压为

$$v=\begin{cases}50\text{ V} & t\text{ G }0\\ Ae^{-100t}+Be^{-600t}\text{ V} & t\text{ H }0\end{cases}$$

如果该电容器的初始电流为2 A，试求：

(a) 常数A与B；

(b) 该电容器在$t=0$时刻所存储的能量；

(c) $t>0$时流经该电容器的电流。

6-9 流经某0.5 F电容器的电流为$6(1-e^{-t})$ A，试确定在$t=2$ s时的电压和功率，假定$v(0)=0$。

6-10 某2 mF电容器两端的电压波形如图6-47所示，试确定流过该电容器的电流。

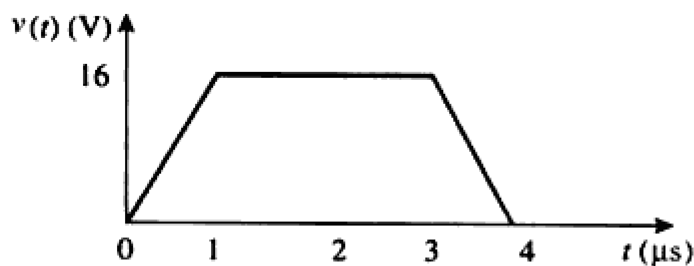


图 6-47 习题 6-10 的波形图

6-11 流经某4 mF电容器的电流波形如图6-48所示，假定$v(0)=10$ V，试画出该电容器两端的电压波形。

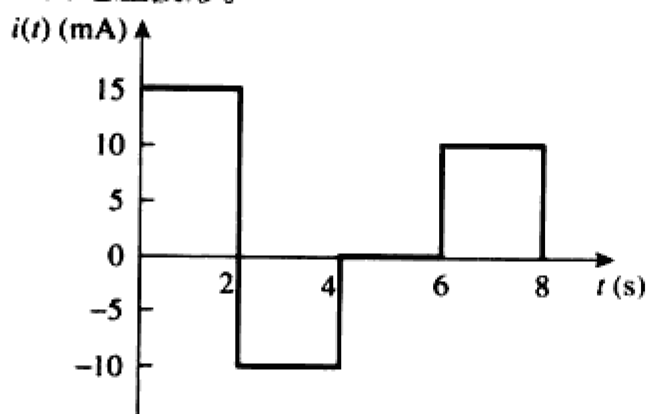


图 6-48 习题 6-11 的波形图

6-12 相互并联的100 mF电容器与12Ω电阻两端的电压为$6e^{-2000t}$ V，试计算该并联电路吸收的功率。

6-13 试求图6-49所示电路中电容器在直流条件下的端电压。

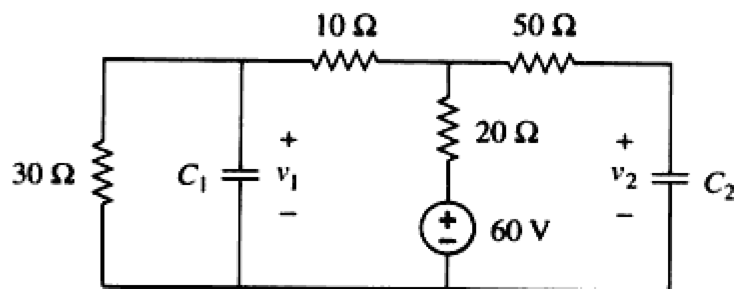


图 6-49 习题 6-13 的电路原理图

6.3 节

6-14 相互串联的20 pF和60 pF电容器与相互串联的30 pF和70 pF相并联，试确定等效电容。

6-15 两个电容器（20 μF和30 μF）与100 V电源相连，在两电容器（a）并联，（b）串联两种情况下，求各电容器存储的能量。

6-16 从图6-50所示电路的端口a—b看进去的等效电容为30 μF，试计算C的值。

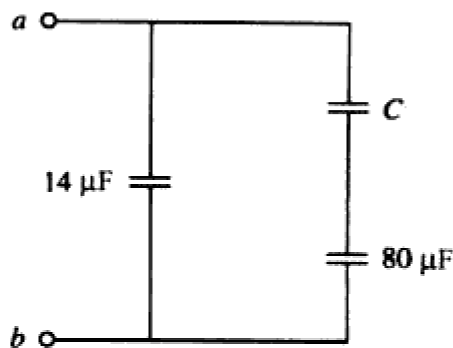


图 6-50 习题 6-16 的电路原理图

6-17 试确定图6-51所示各电路的等效电容。

6-18 试求图6-52所示电路的等效电容C_{eq}，图中所有电容均为4 μF。

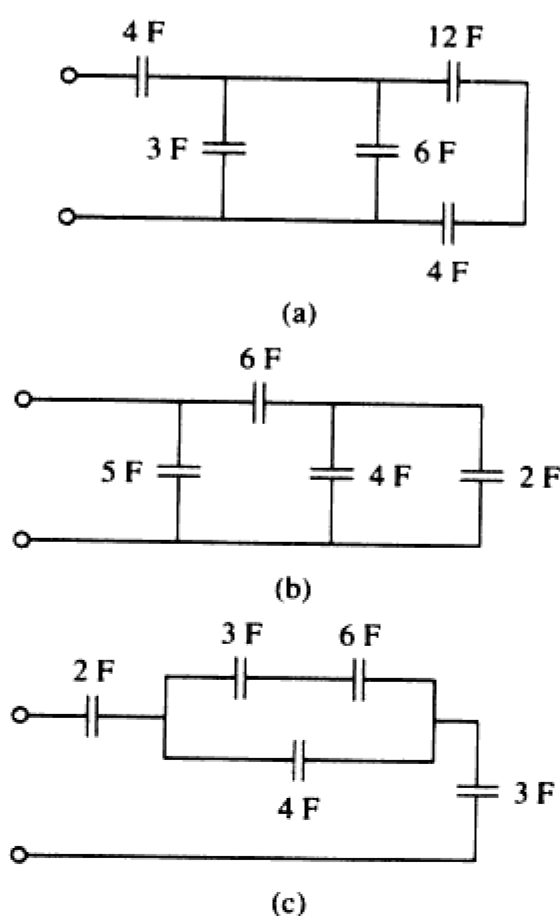


图 6-51　习题 6-17 的电路原理图

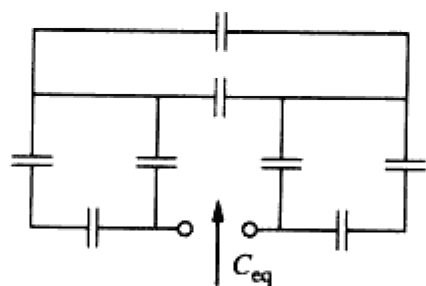


图 6-52　习题 6-18 的电路原理图

6-19　试求图6-53所示电路在a、b两端的等效电容，图中所有电容的单位均为μF。

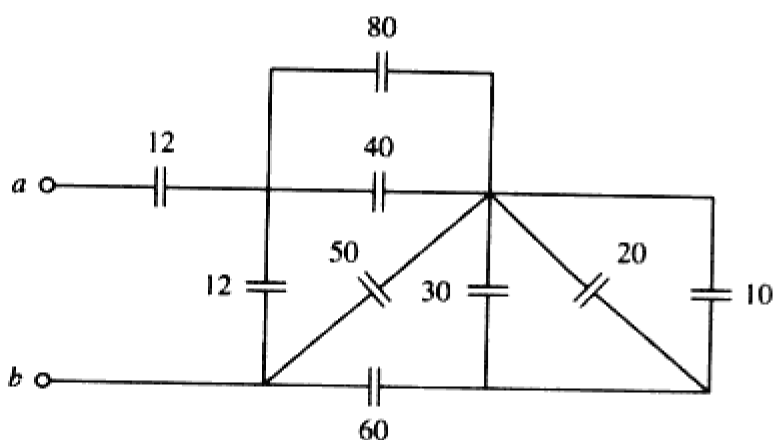


图 6-53　习题 6-19 的电路原理图

6-20　试求图6-54所示电路从端口a–b看进去的等效电容。

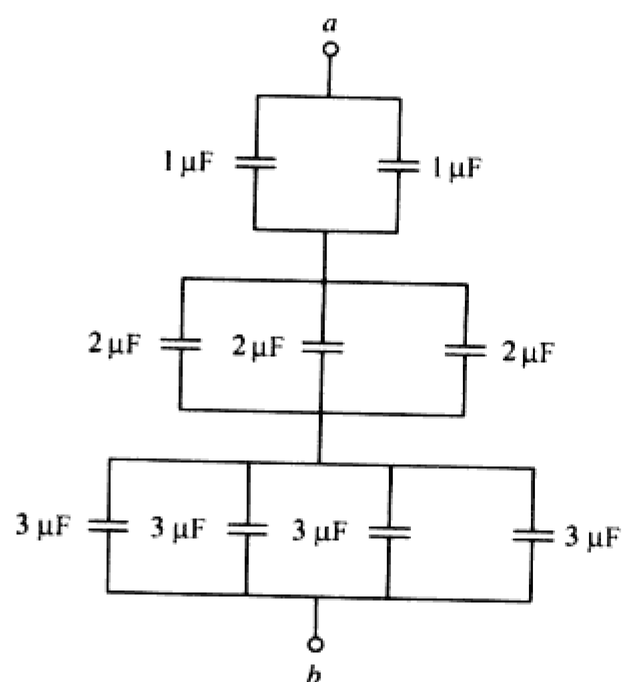


图 6-54　习题 6-20 的电路原理图

6-21　试求图6-55所示电路从端口a–b看进去的等效电容。

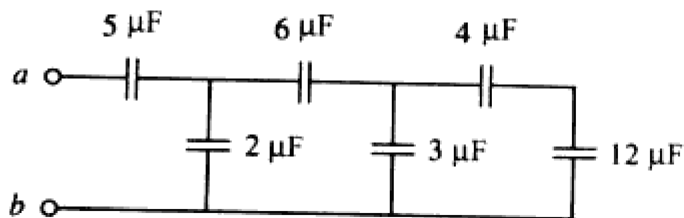


图 6-55　习题 6-21 的电路原理图

6-22　试确定图6-56所示电路的等效电容。

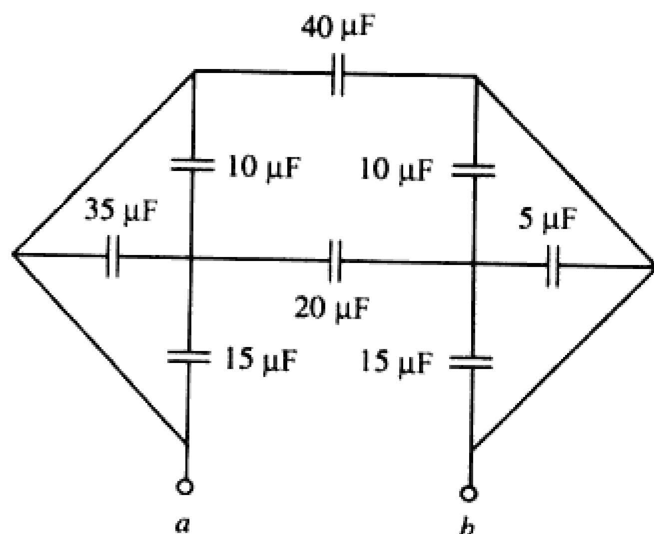


图 6-56　习题 6-22 的电路原理图

6-23　对于如图6-57所示的电路，试确定：

(a) 各电容器两端的电压；

(b) 各电容器所存储的能量。

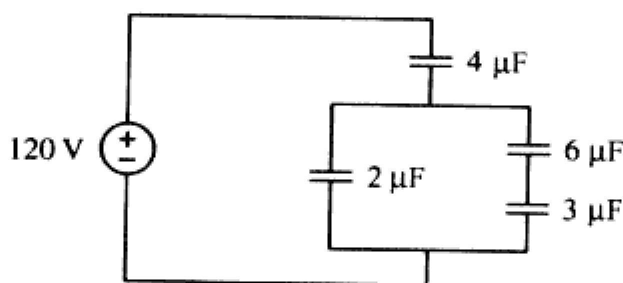


图 6-57　习题 6-23 的电路原理图

6-24　对于如图6-58所示的电路，重新回答习题6-23的问题。

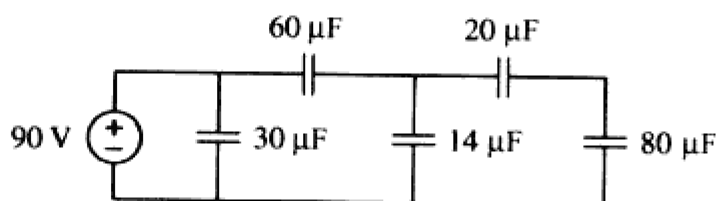


图 6-58　习题 6-24 的电路原理图

6-25　(a) 试证明如图6-59a所示的两个串联电容器的分压公式为：

$$v_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} v_s, \qquad v_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} v_s$$

假定初始条件均为零。

(b) 试证明如图 6-57b 所示的两个并联电容器的分流公式为：

$$i_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} i_s, \qquad i_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} i_s$$

假定初始条件均为零。

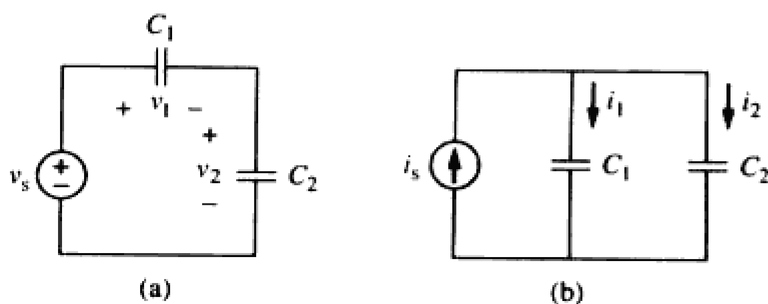


图 6-59　习题 6-25 的电路原理图

6-26　三个电容器$C_1 = 5\ \mu F$、$C_2 = 10\ \mu F$、$C_3 = 20\ \mu F$相并联，且两端电压为150 V，试确定：
(a) 总电容；(b) 各电容器上的电荷；
(c) 并联合并后储存的总能量。

6-27　给定四个4 μF电容器，它们既可以串联连接又可以并联连接，试求它们串/并联合并后的最小容值与最大容值。

*6-28　试确定图6-60所示电路网络的等效电容。

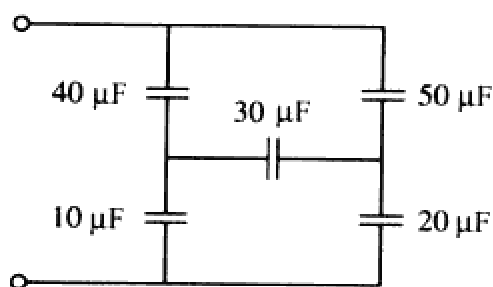
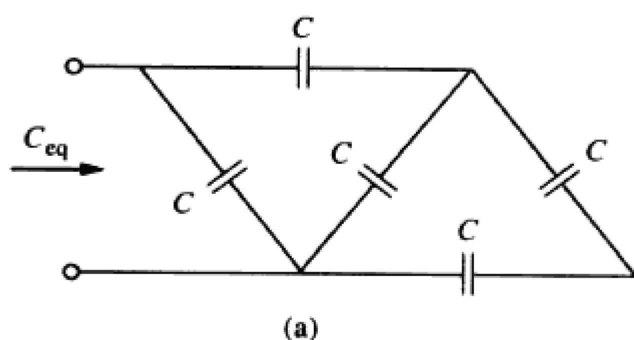


图 6-60　习题 6-28 的电路原理图

6-29　试确定图6-61所示各电路的等效电容C_{eq}。



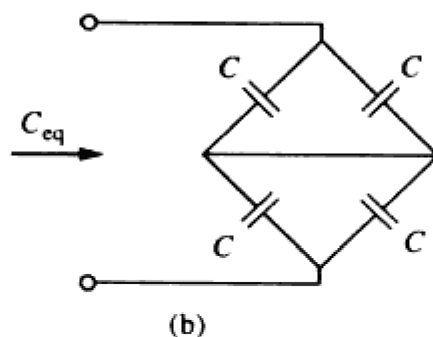


图 6-61　习题 6-29 的电路原理图

6-30　假定电容器初始状态为零，试求图6-62所示电路中的$v_o(t)$。

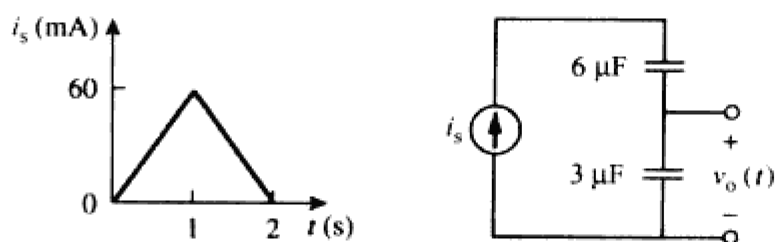


图 6-62　习题 6-30 的波形图与电路原理图

6-31　如果$v(0) = 0$，试求图6-63所示电路中的$v(t)$、$i_1(t)$与$i_2(t)$。

6-32　在如图6-64所示电路中，令$i_s = 30e^{2t}$ mA，$v_1(0) = 50$ V，$v_2(0) = 20$ V，试确定：
(a) $v_1(t)$与$v_2(t)$；
(b) 在$t = 0.5$ s时各电容器存储的能量。

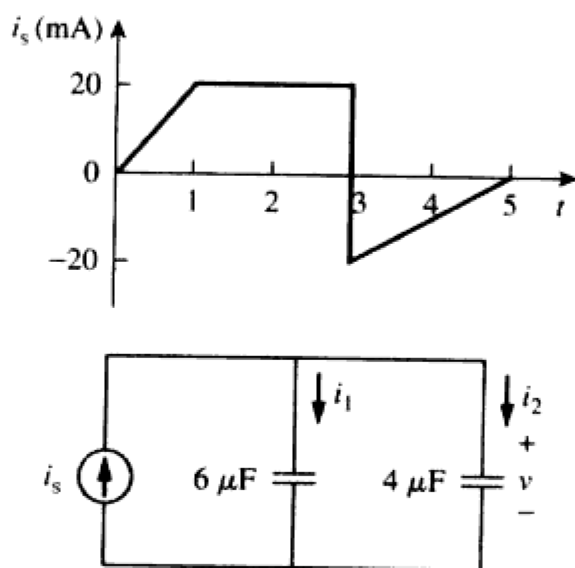


图 6-63 习题 6-31 的波形图与电路原理图

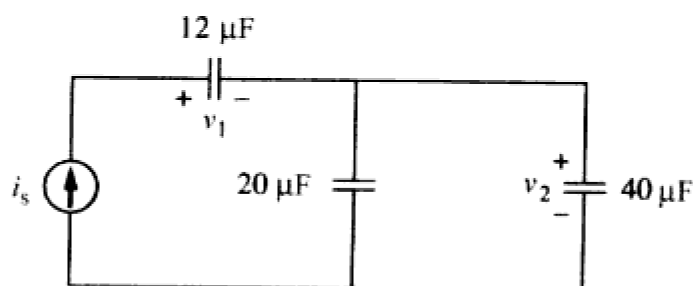


图 6-64 习题 6-32 的电路原理图

6-33 试确定图6-65所示电路的在端口$a-b$处的戴维南等效电路。注意，包括电容器和电阻器的电路一般不存在戴维南等效电路，但本题是一个特例，其戴维南等效电路的确存在。

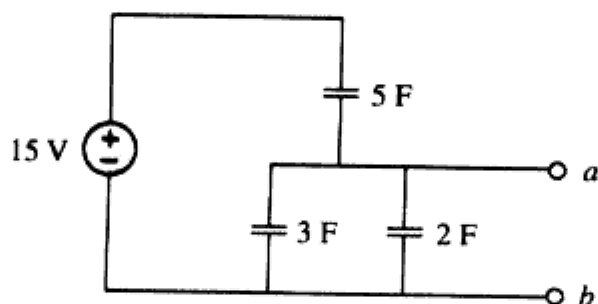


图 6-65 习题 6-33 的电路原理图

6.4 节

6-34 流过某10 mH电感器的电流为$6e^{-t/2}$ A，试求$t=3$ s时的电压与功率。

6-35 流经某电感器的电流在2 ms内从50 mA线性变化100 mA，感应出的电压为160 mV。试计算该电感器的电感量。

6-36 流过某12 mH电感器的电流为$i(t)=30te^{-2t}$ A，$t\geq 0$，试确定：(a) 该电感器两端的电压；(b) 在$t=1$ s时传递给该电感器的功率；(c) 在$t=1$ s时该电感器中所存储的能量。

6-37 流过某 12 mH 电感器的电流为 $4\sin 100t$ A，试求 $0<t<\pi/200$ s时该电感器两端的电压以及在$t=\pi/200$ s时该电感器所存储的能量。

6-38 流过某40 mH电感器的电流为：

$$i(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ te^{-2t}\text{ A}, & t>0\end{cases}$$

试求该电感器两端的电压$v(t)$。

6-39 某200 mH电感器两端的电压为：

$$v(t)=3t^2+2t+4\text{V},\quad t>0.$$

试确定流过该电感器的电流$i(t)$，假定$i(0)=1$A。

6-40 流过某 5 mH 电感器的电流波形如图 6-66 所示，试确定在 $t=1$、3、5 ms 时该电感器两端的电压。

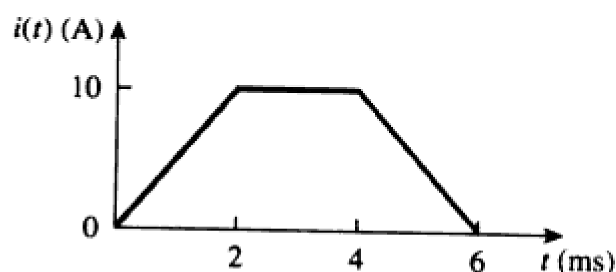


图 6-66 习题 6-40 的电路原理图

6-41 某2 H电感器两端的电压为$20(1-e^{-2t})$V，如果流过该电感器的初始电流为0.3 A，试求在$t=1$ s时流过该电感器的电流及其所存储的能量。

6-42 如果将图6-67所示的电压波形施加到某5 H电感器两端，试计算流过该电感器的电流，假定$i(0)=-1$A。

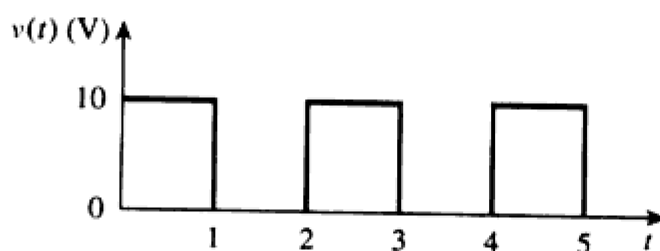


图 6-67 习题 6-42 的波形图

6-43 流经某80 mH电感器的电流从0增加到60 mA，试问该电感器中存储的能量为多少?

*6-44 某100 mH电感器与一个2 kΩ电阻相并联，流经该电感器的电流为$i(t)=50e^{-400t}$ mA。(a) 试求该电感器两端的电压v_L，(b) $v_R(t)+v_L(t)=0$? (c) 试计算在$t=0$时刻该电感器中所存储的能量。

6-45 如果将图6-68所示的电压波形施加在某10 mH电感器两端，试求该电感器的电流$i(t)$，假定$v(0)=0$。

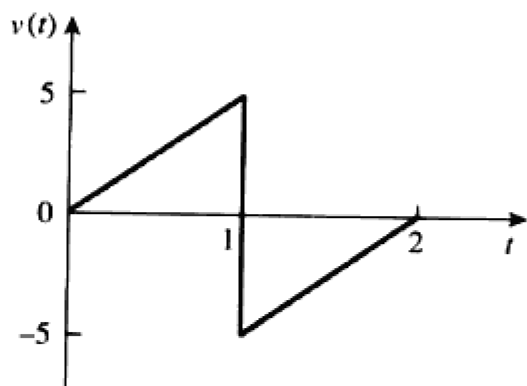


图 6-68 习题 6-45 的波形图

6-46 试求图6-69所示电路在直流条件下的v_C、i_L以及电容器和电感器所存储的能量。

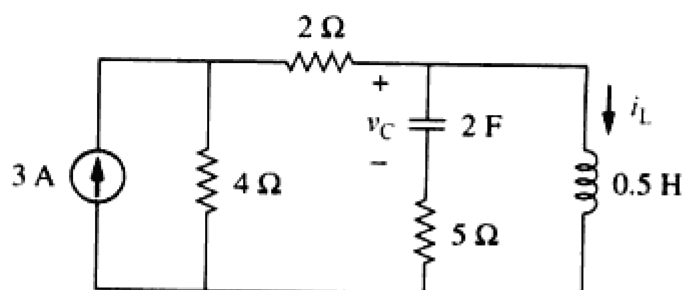


图 6-69 习题 6-46 的电路原理图

6-47 对于图6-70所示电路，试计算在直流条件下，使电容器存储的能量与电感器存储的能量相等的电阻值R。

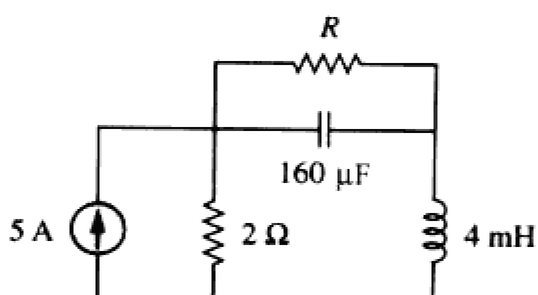


图 6-70 习题 6-47 的电路原理图

6-48 在直流稳态条件下，试求图6-71所示电路中的i与v。

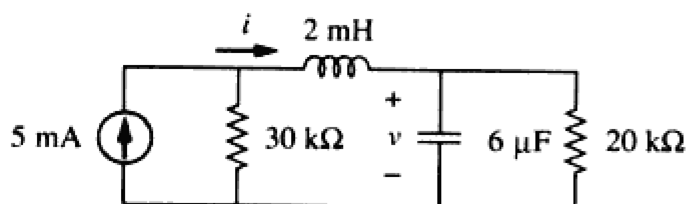


图 6-71 习题 6-48 的电路原理图

6.5 节

6-49 试求图6-72所示电路的等效电感，假定所有电感器均为10 mH。

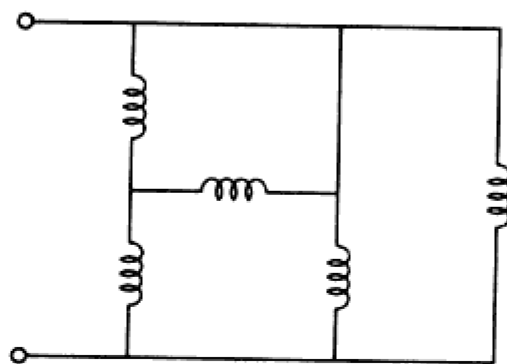


图 6-72 习题 6-49 的电路原理图

6-50 某储能网络由相互串联的16 mH和14 mH电感器与相互串联的24 mH和36 mH电感器并联组成，试计算该网络的等效电感。

6-51 试确定图6-73所示电路在端口a−b的等效电感L_{eq}。

6-52 试求图6-74所示电路的等效电感L_{eq}。

6-53 试求图6-75所示电路从端口看进去的等效电感L_{eq}。

6-54 试求图6-76所示电路从端口看进去的等效电感。

6-55 试求图6-77所示各电路的等效电感L_{eq}。

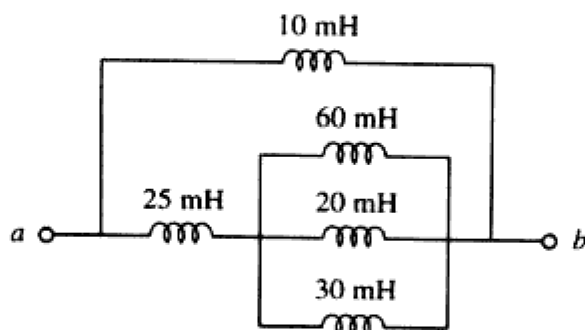


图 6-73 习题 6-51 的电路原理图

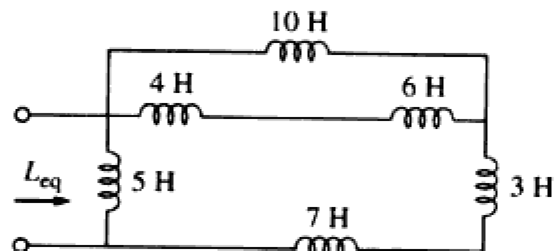


图 6-74 习题 6-52 的电路原理图

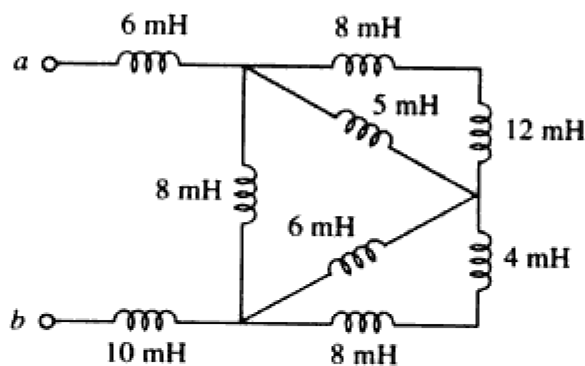


图 6-75 习题 6-53 的电路原理图

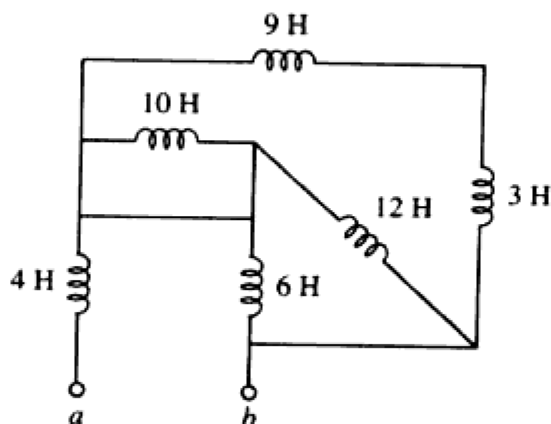
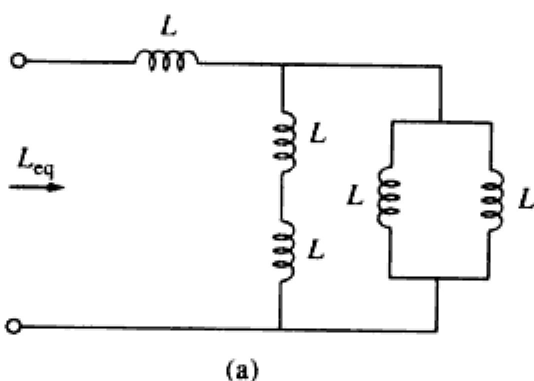


图 6-76 习题 6-54 的电路原理图



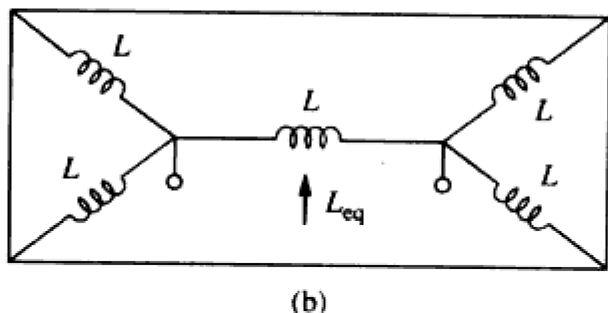


图 6-77 习题 6-55 的电路原理图

6-56 试求图6-78所示电路的等效电感L_{eq}。

*6-57 试确定可用于表示图6-79所示感性网络的端口等效电感L_{eq}。

6-58 流过某 3 H 电感器的电流波形如图 6-80 所示，试画出 $0 < t < 6$ s时该电感器两端的电压波形。

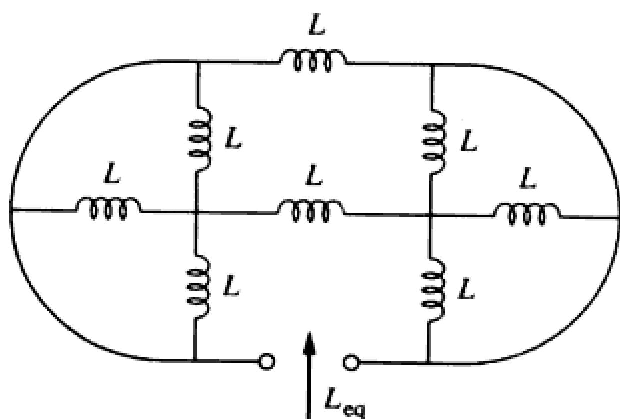


图 6-78 习题 6-56 的电路原理图

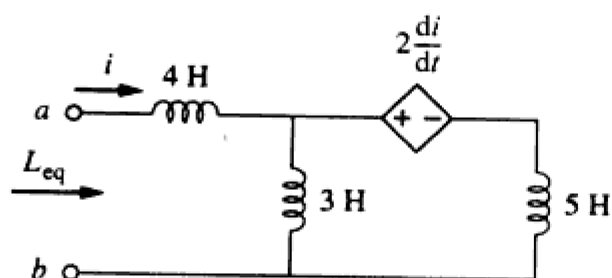


图 6-79 习题 6-57 的电路原理图

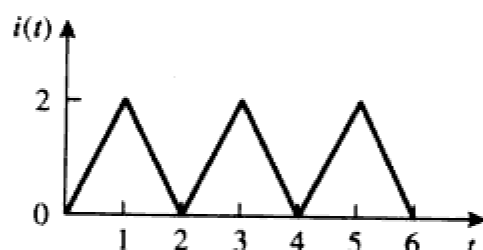


图 6-80 习题 6-58 的波形图

6-59 （a）试证明如图6-81a所示的两个串联电感器的分压公式为：

$$v_1 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} v_s, \quad v_2 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} v_s$$

假定初始条件均为零。

（b）试证明如图6-81b所示的两个并联电感器的分流公式为：

$$i_1 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} i_s, \quad i_2 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i_s$$

假定初始条件均为零。

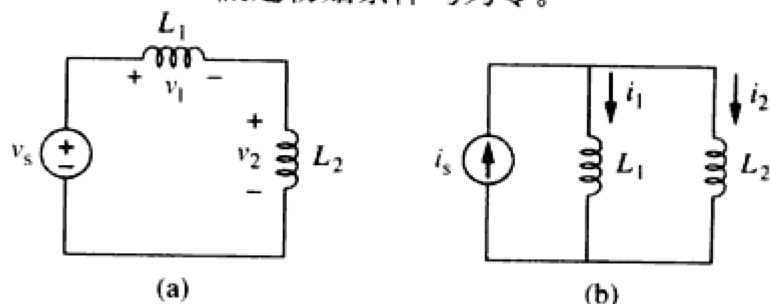


图 6-81 习题 6-59 的电路原理图

6-60 在图6-82所示电路中，$i_o(0) = 2$ A，试确定$t > 0$时的$i_o(t)$与$v_o(t)$。

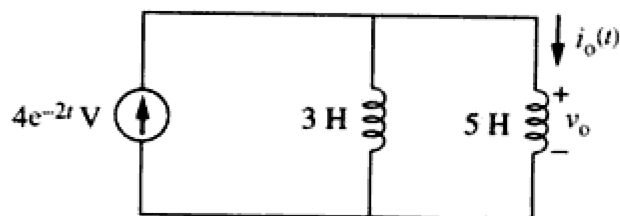


图 6-82 习题 6-60 的电路原理图

6-61 在图6-83所示电路中，试求：（a）$i_s = i(t) = 3e^{-t}$ mA时的L_{eq}、$i_1(t)$与$i_2(t)$，（b）在$t = 1$ s时 20 mH电感器中存储的能量。

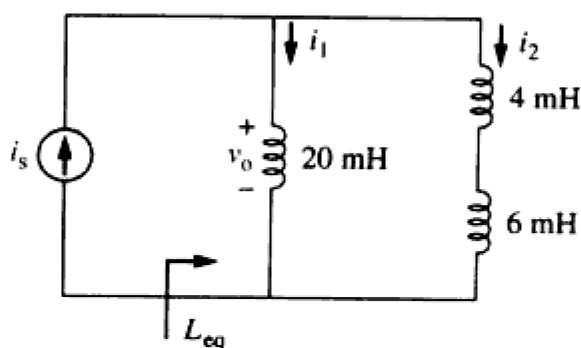


图 6-83 习题 6-61 的电路原理图

6-62 在图6-84所示电路中，如果t>0时$v(t)=i(t)=12e^{3t}$ mV且$i_1(0)=-10$ mA。试求：
(a) $i_2(0)$；(b) $i_1(t)$与$i_2(t)$。

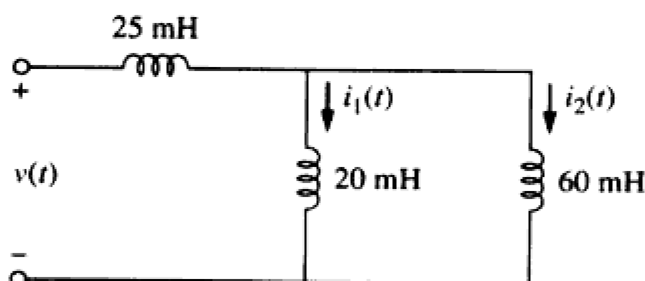


图 6-84 习题 6-62 的电路原理图

6-63 在图6-85所示电路中，试画出v_o的波形图。

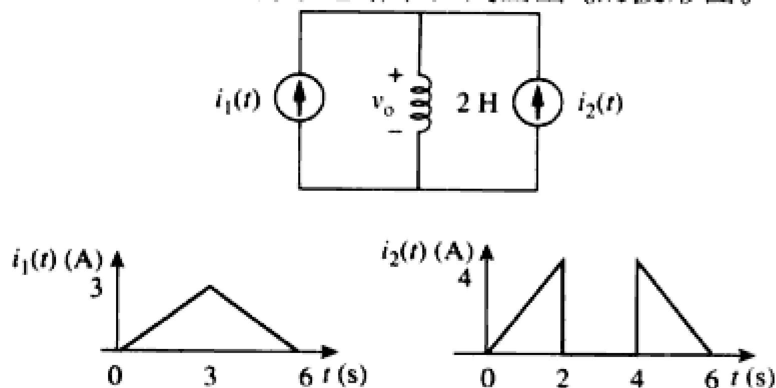


图 6-85 习题 6-63 的电路原理图与波形图

6-64 图6-86所示电路中的开关长期处于位置A，在$t=0$时刻开关从位置A切换至位置B，该开关为先通后断（make-before-break）型开关，因而电感器电流不存在间断。试求：(a) $t<0$时的$i(t)$；(b) 开关刚刚切换至B时的v；(c) 开关切换至B很长时间后的$v(t)$。

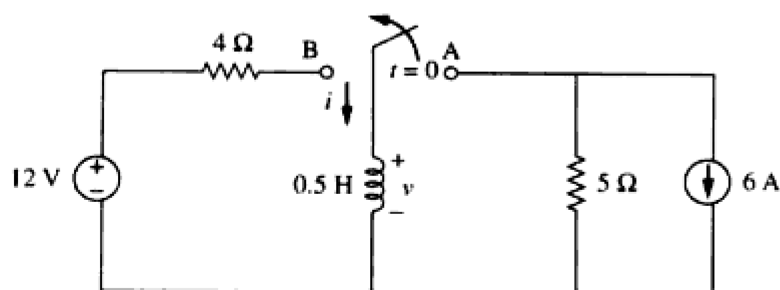


图 6-86 习题 6-64 的电路原理图

6-65 图6-87所示各电感器经初始充电后，在$t=0$时刻接入黑匣子，如果$i_1(0)=4$ A，$i_2(0)=-2$ A，$v(t)=50e^{200t}$ mV，$t\geqslant 0$，试求：
(a) 各电感器中的初始储能；(b) 从$t=0$到$t=\infty$传递给黑匣子的总能量；(c) $t\geqslant 0$时的$i_1(t)$ 与$i_2(t)$；(d) $t\geqslant 0$时的$i(t)$。

6-66 流经某20 mH电感器的电流$i(t)$在所有时刻对于其两端的电压都具有相等的幅度，如果$i(0)=2$ A，试求$i(t)$ 。

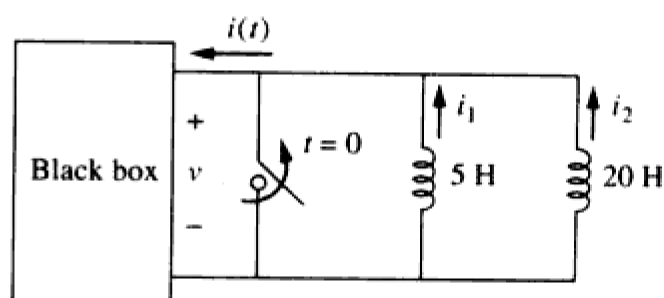


图 6-87 习题 6-65 的电路原理图

6.6 节

6-67 某运放积分器的$R=50$ kΩ，$C=0.04$ μF，如果输入电压为$v_i=10\sin 50t$ mV。试确定其输出电压。

6-68 在$t=0$时刻，将一个10 V直流电压施加到$R=50$ kΩ，$C=100$ μF的积分器上，如果运算放大器的饱和电压为+12 V与−12 V，试问该运算放大器经多长时间后进入饱和状态？假定电容器的初始电压为零。

6-69 某$R=4$ MΩ、$C=1$ μF的运放积分器的输入波形如图6-88所示，试画出其输出波形。

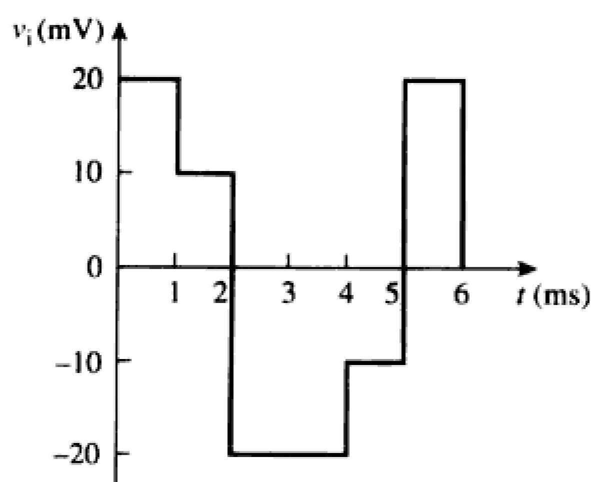


图 6-88 习题 6-69 的电路原理图

6-70 e2d 试利用单片运算放大器、一支电容器以及若干不超过100 kΩ的电阻，设计一个实现如下运算的电路：

$$v_o = -50\int_0^t v_i(t)\mathrm{d}t$$

假设$t=0$时$v_o=0$。

6-71 试说明如何利用单片运算放大器实现如下运算：

$$v_o = -\int_0^t (v_1 + 4v_2 + 10v_3)\mathrm{d}t$$

如果积分电容器$C=2\ \mu F$，试确定电路中其他元件的值。

6-72 试计算在$t=1.5$ ms时图6-89所示级联积分器的输出电压v_o。假定积分器在$t=0$时刻复位为0。

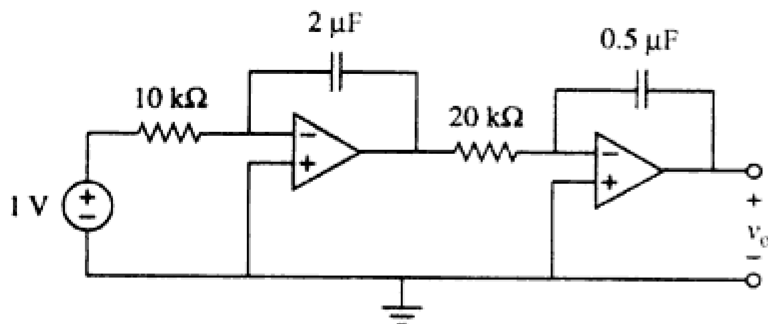


图 6-89 习题 6-72 的电路原理图

6-73 试证明图6-90所示电路是一个同相积分器。

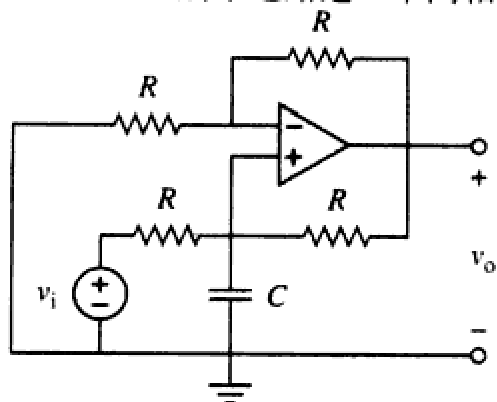


图 6-90 习题 6-73 的电路原理图

6-74 将图6-91a所示的三角波形施加到图6-91b所示的运放微分器的输入端，试画出该微分器的输出波形。

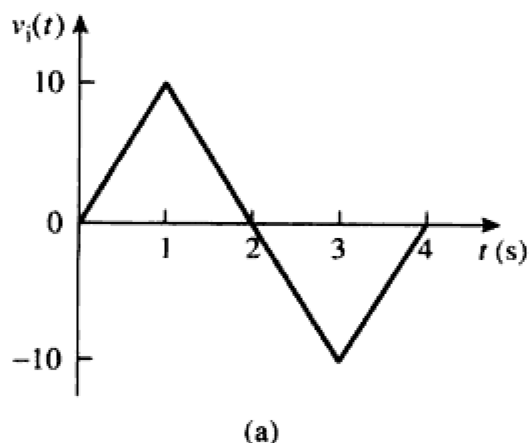


图 6-91 习题 6-74 的波形图与电路原理图

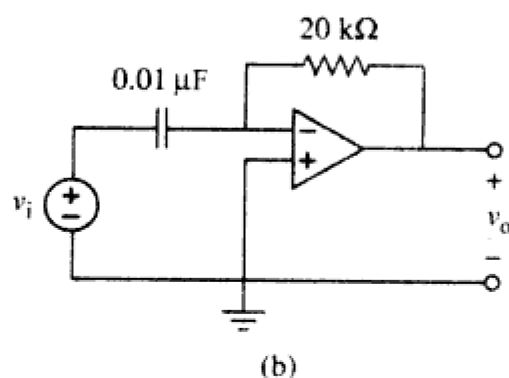
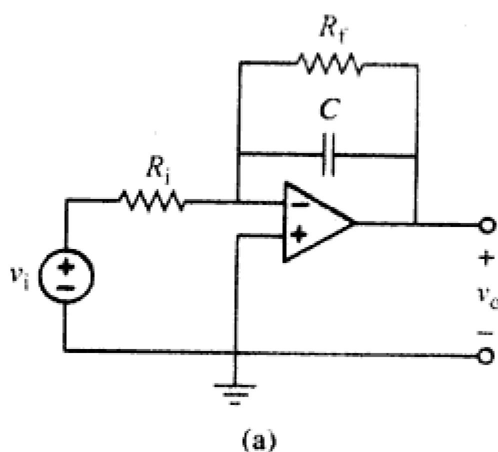


图 6-91 （续）

6-75 某运放微分器的$R=250\ \mathrm{k}\Omega$、$C=10\ \mu F$，输入电压为斜升函数$r(t)=12t$ mV。试求其输出电压。

6-76 某电压波形具有如下特性：前5 ms内具有正斜率20 V/s，接下来的10 ms具有负斜率10 V/s，如果将该电压波形施加到$R=50\ \mathrm{k}\Omega$、$C=10\ \mu F$的微分器上，试画出其输出电压波形。

6-77 图6-92a所示运算放大器电路的输出v_o如图6-92b所示，令$R_i=R_f=1\ \mathrm{M}\Omega$并且$C=1\ \mu F$。试确定输入电压波形并图示。



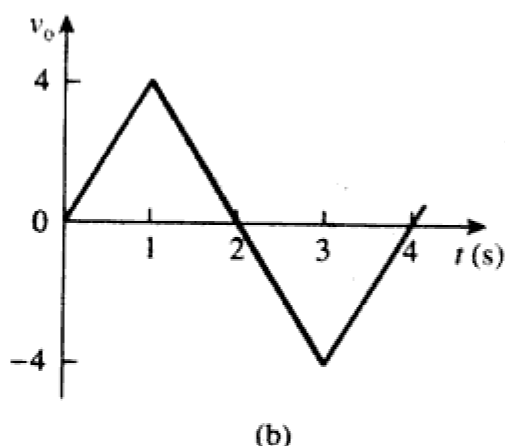


图 6-92 习题 6-77 的电路原理图与波形图

6-78 试设计一个实现如下微分方程的模拟计算机：

e2d

$$\frac{d^2v_o}{dt^2}+2\frac{dv_o}{dt}+v_o=10\sin 2t$$

其中$v_o(0)=2$且$v_o'(0)=0$。

6-79 e2d 设计一个求解如下微分方程的模拟计算机电路：

$$\frac{dy(t)}{dt}+4y(t)=f(t)$$

其中$y(0)=1$ V。

6-80 图6-93所示电路为求解某微分方程的模拟计算机，假定$f(t)$已知，试建立关于$f(t)$的微分方程。

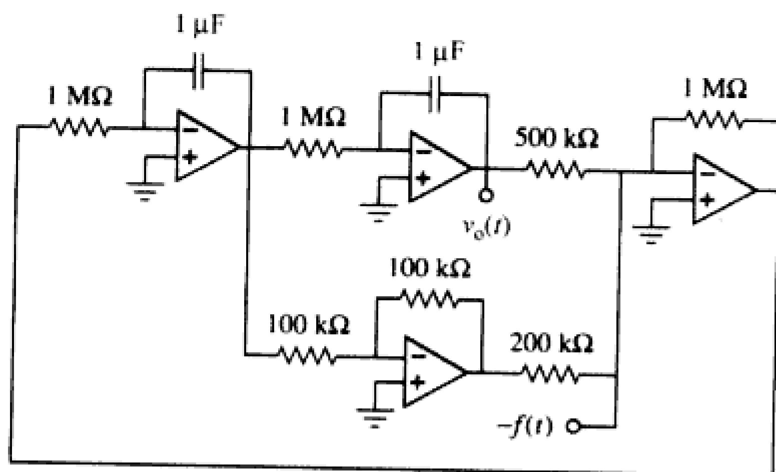


图 6-93　习题 6-80 的电路原理图

6-81 e2d 试设计求解如下微分方程的模拟计算机电路：

$$\frac{d^2v}{dt^2}+5v=-2f(t)$$

6-82 e2d 试设计执行如下运算的运算放大器电路：

$$v_o=10v_s+2\int v_s dt$$

其中，v_s与v_o分别为输入电压与输出电压。

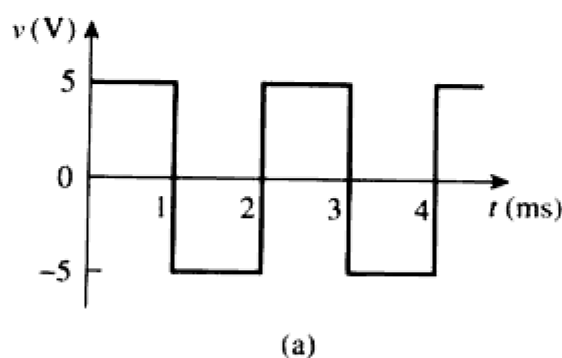
综合题

6-83 e2d 实验室有大量标称电压为300 V的10 μF电容器，现要设计一个额定电压为600 V的40 μF电容器组，试问需要用多少支10 μF电容器，应该如何连接？

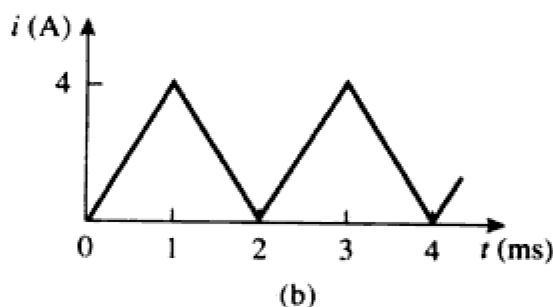
6-84 利用某8 mH电感器做熔断功率实验，如果流经该电感器的电流为$i(t)=5\sin^2\pi t$ mA，$t>0$，试求在$t=5$ s时传递给该电感器的功率及其所存储的能量。

6-85 某方波发生器产生的电压波形如图6-94a所示，试问需采用哪类电路器件才能将该电压波形转换为如图6-94b所示的三角电流波形，并计算相应的元件值，假定未进行初始充电。

6-86 某电动机可以建模为一个12 Ω电阻器与一个200 mH电感器的串联，如果流经该串联电路的电流为$i(t)=2te^{-10t}$ A，试求该串联电路两端的电压。



(a)



(b)

图 6-94　习题 6-85 的波形图

第7章 一 阶 电 路

生命的意义在于我们有所作为，而非生命的长短；在于我们不断地思考，而非是否能够呼吸；在于我们经历的种种情感，而非时光表盘上显示的数字。我们应该以心跳来计算生命。最有意义的人生应该拥有丰富的思考、高尚的情操和端正的行为。

——F. J. 贝利

拓展职业生涯

以计算机工程为职业

近几十年来，电子工程教育经历了巨大的变化，绝大多数电子工程系将其名称改为电子与计算机工程系，以突出由计算机带来的飞速发展。计算机在现代社会和教育中占有突出的地位，已经成为普通消费品，并且日益改变着科学研究、产品开发、制造、商业和娱乐的面貌。科学家、工程师、医生、律师、教师、航空飞行员、商人——几乎所有人都会受益于计算机存储大量信息以及在极短时间内处理大量信息的能力。因特网作为一种计算机通信网络已经成为商业、教育和图书馆科学中必不可少的工具。计算机的进一步应用必将迅速壮大。



利用计算机设计超大规模集成电路(VLSI)

计算机工程教育应当在软件设计、硬件设计以及基本建模方法等方面提供更宽泛的教育，所开设的课程包括数据结构、数字系统、计算机体系结构、微处理器、接口技术、软件工程以及操作系统等。

计算机工程专业的电子工程师可以在计算机行业或许多应用计算机的部门找到工作。软件生产公司的数量和规模都在飞速发展，并为有编程技能的工程师提供了就业岗位。扩展计算机知识的一种最佳途径是加入IEEE计算机分会，该分会主办许多期刊、杂志和国际会议。

7.1 引言

通过前面的章节，我们已经分别学习了三种无源元件（电阻器、电容器和电感器）与一种有源元件（运算放大器），为后续讨论由不同组合的两三个无源元件构成的电路做好了必要的准备。本章将介绍两种类型的简单电路，即由一个电阻器和一个电容器组成的电路，以及由一个电阻器和一个电感器组成的电路，它们分别称为RC电路和RL电路。通过学习我们会看到，由于这些电路结构简单，因而在电子学、通信以及控制系统中应用非常广泛。

与分析电阻电路的方法相同，本章同样采用基尔霍夫定律来分析RC电路与RL电路，唯一的差别在于，利用基尔霍夫定律分析纯电阻电路时得到的是代数方程组，而利用基尔霍夫定律分析RC与RL电路时得到的则是微分方程组，其求解过程要比代数方程困难得多。分析RC电路与RL电路得到的微分方程是一阶微分方程，因此，将这类电路统称为一阶（first-order）电路。

一阶电路的特性可以由一阶微分方程来表征。

除了有上述两种类型的一阶电路（RC与RL）外，电路的激励方式也有两种。一种是由电路中储能元件的初始条件来激励，在这类所谓的*无源电路*（Source Free Circuit）中，假定初始能量存储

在电容或电感元件中，该能量在电路中产生电流并且逐渐被电阻器消耗。虽然无源电路按照定义不包括独立源，但可以包括受控源。一阶电路的另一种激励方式是独立源。本章中所涉及的独立源均为直流电源（后续章节还将考虑正弦电源和指数电源）。这样，两种类型的一阶电路以及两种激励方式就会形成四种可能的组合，此即本章将要学习的内容。

最后，介绍RC电路与RL电路的四个典型应用，延时电路、继电器电路、相机闪光灯单元和汽车点火电路。

7.2 无源 RC 电路

当直流电源突然断开时，就会得到无源RC电路，此时已经存储在电容器中的能量就会向电阻释放。

由一个电阻器与一个已充电电容器组成的串联电路如图7-1所示（这里所说的电阻器可以是若干个电阻器组合的等效电阻，电容器可以是若干个电容器组合的等效电容）。我们的目的是确定该电路的响应，为了便于讲解，假定待确定的响应为电容器两端的电压$v(t)$。由于电容器具有初始储能，所以可以假定$t=0$时刻的初始电压为：

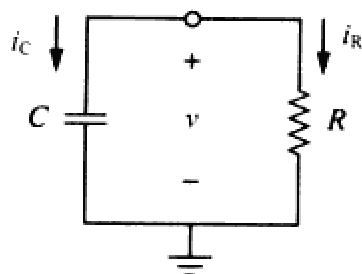


图 7-1 无源 RC 电路

$$v(0)=V_0 \tag{7-1}$$

电路响应是指电路对激励的一种反应方式。

相应的存储能量为：

$$w(0)=\frac{1}{2}CV_0^2 \tag{7-2}$$

对图7-1所示电路中的顶部节点应用KCL可以得到：

$$i_C+i_R=0 \tag{7-3}$$

由定义可知，$i_C=C\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$且$i_R=v/R$，于是：

$$C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{v}{R}=0 \tag{7-4a}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{v}{RC}=0 \tag{7-4b}$$

式(7-4b)中仅包括v的一阶微分，因此该式为一阶微分方程（first-order differential equation）。为求解该微分方程，需将其重新整理为：

$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=-\frac{1}{RC}\mathrm{d}t \tag{7-5}$$

两边取积分得到：

$$\ln v=-\frac{t}{RC}+\ln A$$

其中，$\ln A$为积分常数，因此，

$$\ln\frac{v}{A}=-\frac{t}{RC} \tag{7-6}$$

取e的幂指数可以得到：

$$v(t)=A\,\mathrm{e}^{-t/RC}$$

由初始条件，$v(0)=A=V_0$，可得：

$$v(t)=V_0\mathrm{e}^{-t/RC} \tag{7-7}$$

该式表明，RC电路的电压响应为初始电压的指数规律衰减。由于该响应是由电路的初始储能及其物理特性所决定的，而不是由外部电压源或电流源引起的，因此称其为电路的固有响应（natural response）。

电路的固有响应是指无外部电源激励时电路自身的（电压或电流）特性。

固有响应仅取决于无外部激励源时电路本身的特性。实际上，正是因为电容器中有初始储能，电路才有响应。

电路的固有响应曲线如图7-2所示。由图可见，当$t=0$时，即为由式(7-1)所确定的初始条件。随着t的增加，电压下降并趋于零。电压下降的速度由时间常数（time constant）确定，时间常数通常用小写希腊字母τ来表示。

电路的时间常数是指电路响应衰减到初始值的1/e或36.8%时所需要的时间[①]。

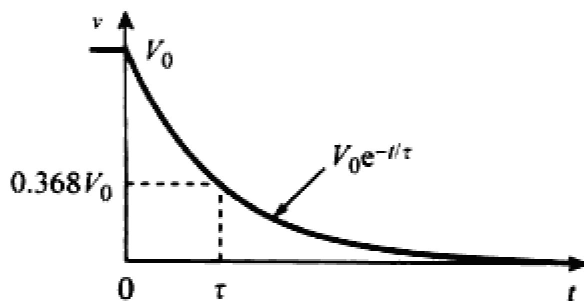


图 7-2 RC 电路的电压响应

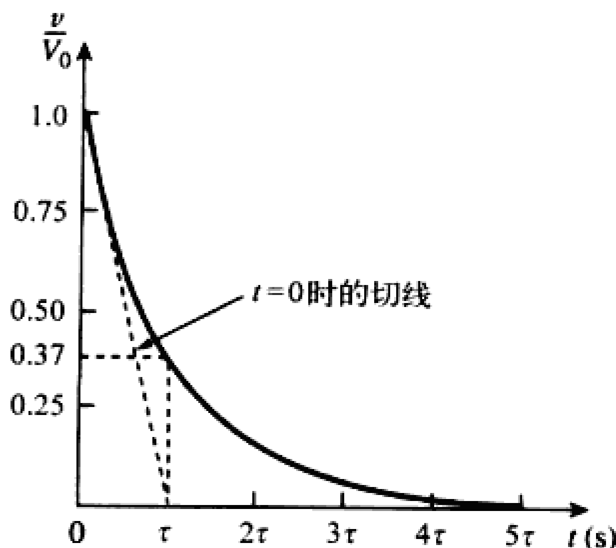


图 7-3 采用作图法由响应曲线确定时间常数 τ

时间常数的定义表明，在$t=\tau$时刻，式(7-7)成为：

$$V_0e^{-\tau/RC}=V_0e^{-1}=0.368V_0$$

即

$$\boxed{\tau=RC} \tag{7-8}$$

利用时间常数表示式(7-7)可以得到：

$$\boxed{v(t)=V_0e^{-t/\tau}} \tag{7-9}$$

利用计算器可以很容易地计算出$v(t)/V_0$的值，如表7-1所示。由表7-1可以明显看出，经过5τ（5倍时间常数）之后，电压$v(t)$小于V_0的1%，因此，通常假定电容器经过5倍时间常数后已完全放电（或充电）。换句话说，当电路不随时间而变化时，其达到最终状态，即稳定状态的时间为5τ。还要注意，

① 可以从另外一个角度来理解时间常数：计算式（7-7）中的$v(t)$在$t=0$时刻的微分，可以得到：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{V_0}\right)\bigg|_{t=0}=-\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\bigg|_{t=0}=-\frac{1}{\tau}$$

因此时间常数就是初始衰减速率，即假定衰减速率为常数条件下v/V_0从1衰减至0所需的时间。这种用初始斜率解释时间常数的方法经常在实验室中用于从示波器上显示的响应曲线求解时间常数τ。利用该响应曲线求解τ时，需画出$t=0$时刻的切线，如图7-3所示，该切线与时间轴的交点，即为$t=\tau$。

无论什么时刻t，每经过一个时间间隔τ，其电压降低为前一个电压值的36.8%，即：$v(t+\tau)=v(t)/e=0.386\ v(t)$。

由式(7-8)可以看出，时间常数越小，电压衰减就越快，即电路响应就越快，如图7-4所示。由于时间常数小的电路会迅速消耗掉所储存的能量而快速达到稳定状态（最终状态），所以电路的响应也很快。相反，时间常数大的电路达到稳定状态所需的时间较长，因此响应也较慢。无论时间常数的大小，电路均会在5倍时间常数的时间内达到稳定状态。

表 7-1 $v(t)/V_0=e^{-t/\tau}$ 的值

t	$v(t)/V_0$
τ	0.367 88
2τ	0.135 34
3τ	0.049 79
4τ	0.018 32
5τ	0.006 74

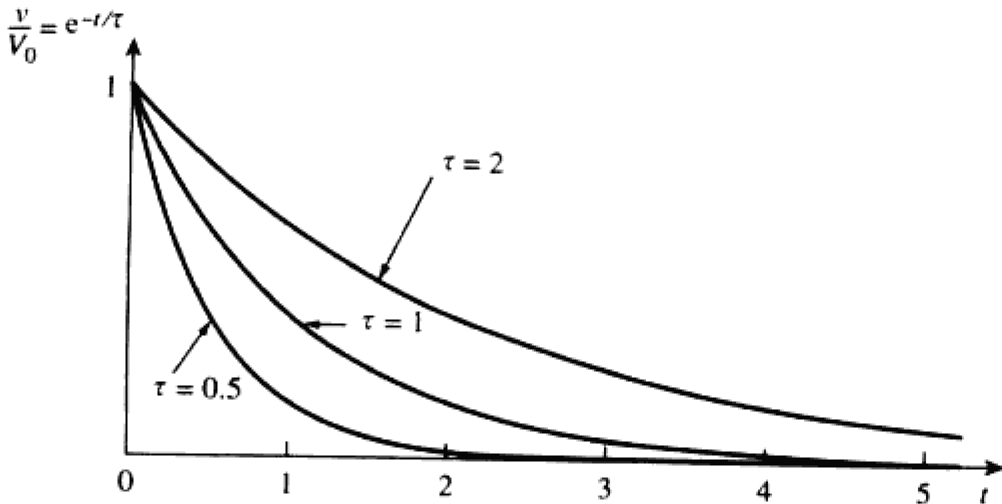


图 7-4 不同时间常数时 $v(t)/V_0=e^{-t/\tau}$ 的衰减曲线

由式(7-9)给出的电压响应$v(t)$，可以求得电流$i_R(t)$为：

$$i_R(t)=\frac{v(t)}{R}=\frac{V_0}{R}e^{-t/\tau} \tag{7-10}$$

电阻器消耗的功率为：

$$p(t)=vi_R=\frac{V_0^2}{R}e^{-2t/\tau} \tag{7-11}$$

该电阻器在时刻t所吸收的能量为：

$$\begin{aligned} w_R(t)&=\int_0^t p\,dt=\int_0^t \frac{V_0^2}{R}e^{-2t/\tau}dt \\ &=-\frac{\tau V_0^2}{2R}e^{-2t/\tau}\bigg|_0^t=\frac{1}{2}CV_0^2(1-e^{-2t/\tau}),\qquad \tau=RC \end{aligned} \tag{7-12}$$

可以看到，当$t\to\infty$时，$w_R(\infty)\to\frac{1}{2}CV_0^2$，与电容器的初始储能$w_C(0)$相同。说明电容器中的初始储能最终会被电阻器消耗掉。

总之，计算无源RC电路的关键在于求出：

(1) 电容两端的初始电压$v(0)=V_0$;

(2) 时间常数τ。

无论定义什么变量为输出，电路的时间常数是相同的。

求出以上两项，就可得到电容器的电压响应为：$v_C(t)=v(t)=v(0)\,e^{-t/\tau}$。一旦确定了电容器的电压，就可以确定电路的其他变量（电容器电流i_C、电阻器电压v_R以及流过电阻器的电流i_R）。在求时间常数$\tau=RC$时，R通常是从电容器两端看进去的戴维南等效电阻，即移去电容器后，在其

两端求得的$R = R_{\text{Th}}$。

当电路中包含一个电容器、若干个电阻器和受控源时，戴维南等效电阻就是构成简单RC电路的那个电容器两端的等效电阻。而且，如果能将若干个电容器合并为一个等效电容，则可以利用戴维南定理求等效电阻。

例题7-1 在图7-5中，假定$v_C(0) = 15$ V，试求$t > 0$时的v_C、v_x与i_x。

解 首先需将图7-5所示的电路变换为图7-1所示的标准RC电路。求出从电容器两端看进去的等效电阻，即戴维南电阻。目的是首先确定电容器两端的电压v_C，由此再确定v_x与i_x。

相互串联的8 Ω电阻与12 Ω电阻可以合为一个20 Ω电阻，该20 Ω电阻又与5 Ω电阻相并联，于是合并后的等效电阻为：

$$R_{\text{eq}} = \frac{20 \times 5}{20 + 5} = 4\Omega$$

从而得到如图7-6所示的等效电路，与图7-1相似。其时间常数为，

$$\tau = R_{\text{eq}}C = 4\ (0.1) = 0.4 \text{ s}$$

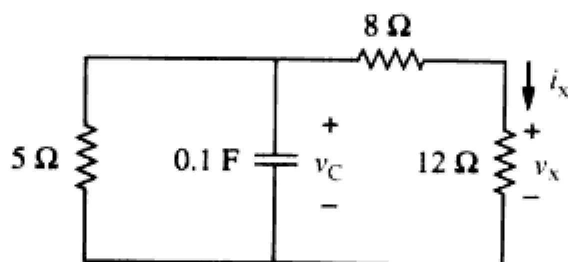


图 7-5 例题 7-1 的电路原理图

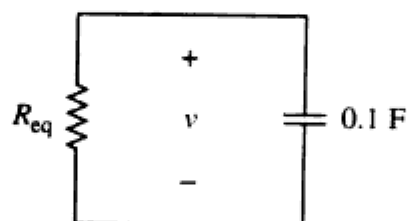


图 7-6 图 7-5 所示电路的等效电路

因此，

$$v = v(0)e^{-t/\tau} = 15e^{-t/0.4}\text{V}, \qquad v_C = v = 15e^{-2.5t}\text{V}$$

由图7-5可知，利用分压原理可以计算出v_x：

$$v_x = \frac{12}{12+8}v = 0.6(15e^{-2.5t}) = 9e^{-2.5t}\text{V}$$

最后，

$$i_x = \frac{v_x}{12} = 0.75e^{-2.5t}\text{A}$$

练习题7-1 在如图7-7所示电路中，假定$v_C(0) = 30$ V，试确定$t \geqslant 0$时的v_C、v_x与i_o。

答 $30e^{-0.25t}$ V，$10\ e^{-0.25t}$ V，$-2.5\ e^{-0.25t}$ A。

例题7-2 图7-8所示电路中的开关已长时间闭合，在$t = 0$时刻打开，试求$t \geqslant 0$时的$v(t)$，并计算电容器中的初始储能。

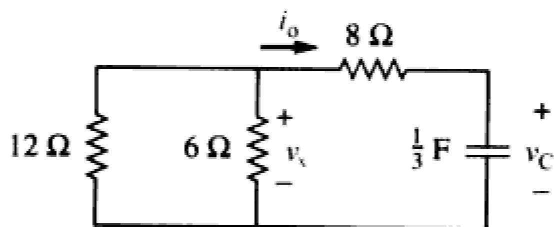


图 7-7 练习题 7-1 的电路原理图

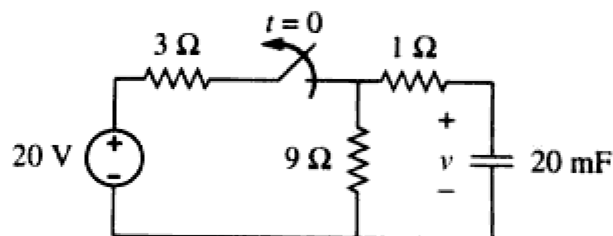


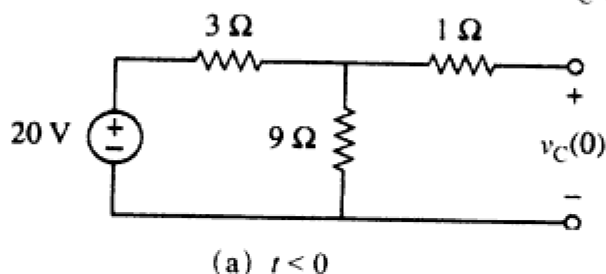
图 7-8 例题 7-2 的电路原理图

解 $t < 0$时，开关闭合，电容器对直流为开路，如图7-9a所示。利用分压原理，

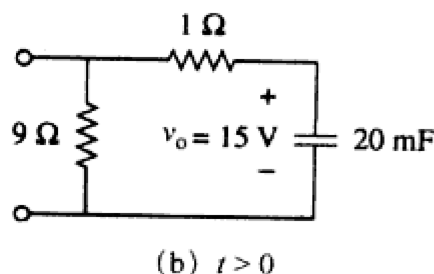
$$v_C(t) = \frac{9}{9+3}(20) = 15\text{V}, \qquad t < 0$$

由于电容器两端电压不能突变，所以$t=0$ 时刻电容器两端的电压与$t=0$时刻的电压相同，即：

$$v_C(0)=V_0=15\text{ V}$$



(a) $t<0$



(b) $t>0$

图 7-9　例题 7-2 的电路原理图

当$t>0$时，开关打开，得到如图7-9b所示的RC电路（注意，图7-9b所示RC电路为无源电路，需利用图7-8中的独立源提供电容器V_0或初始能量）。1 Ω电阻与9 Ω电阻相串联，于是：

$$R_{eq}=1+9=10\ \Omega$$

时间常数为：

$$\tau=R_{eq}C=10\times20\times10^{-3}=0.2\text{ s}$$

因此，$t\geqslant0$时电容器两端的电压为：

$$v(t)=v_C(0)e^{-t/\tau}=15e^{-t/0.2}\text{ V}$$

即

$$v(t)=15\ e^{-5t}\text{ V}$$

电容器中的初始储能为：

$$w_C(0)=\frac{1}{2}Cv_C^2(0)=\frac{1}{2}\times20\times10^{-3}\times15^2=2.25\text{ J}$$

练习题7-2　如果图7-10中的开关在$t=0$时刻打开，试求$t\geqslant0$时的$v(t)$以及$w_C(0)$。

答　$8\ e^{-2t}$ V，5.33 J。

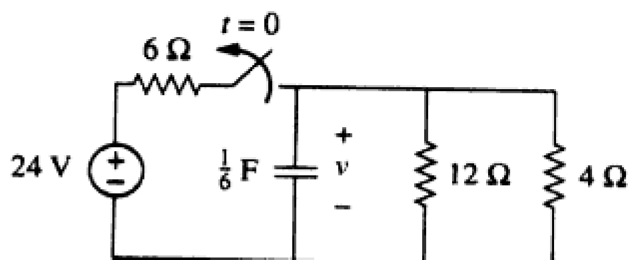


图 7-10　练习题 7-2 的电路原理图

7.3　无源 RL 电路

考虑如图7-11所示的由一个电阻器与一个电感器串联构成的电路。目标是确定该电路中流过电感器的电流响应$i(t)$。选择流过电感器的电流作为电路响应是为了利用电感电流不能突变的概念。假设电感器在$t=0$时刻的初始电流为I_0，即：

$$i(0)=I_0 \tag{7-13}$$

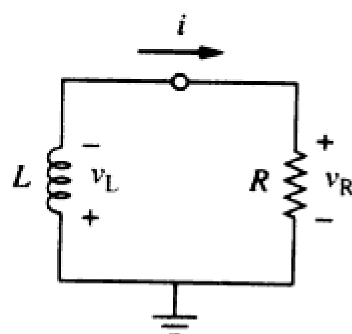


图 7-11　无源 RL 电路

电感器中相应的初始储能为：

$$w(0)=\frac{1}{2}LI_0^2 \tag{7-14}$$

对图7-11所示回路应用KVL可以得到：

$$v_L+v_R=0 \tag{7-15}$$

而$v_L=L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$且$v_R=i\,R$，因此，

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}i=0 \tag{7-16}$$

整理并取积分，得到：

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{\mathrm{d}i}{i} = -\int_0^t \frac{R}{L}\mathrm{d}t$$

$$\ln i\Big|_{I_0}^{i(t)} = -\frac{Rt}{L}\Big|_0^t \quad \Rightarrow \quad \ln i(t) - \ln I_0 = -\frac{Rt}{L} + 0$$

即

$$\ln\frac{i(t)}{I_0} = -\frac{Rt}{L} \tag{7-17}$$

取以e为底的幂指数，可以得到：

$$i(t) = I_0 \mathrm{e}^{-Rt/L} \tag{7-18}$$

这表明RL电路的固有响应函数为初始电流的指数规律衰减，电流响应如图7-12所示。显然，由式(7-18)可知，RL电路的时间常数为：

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}} \tag{7-19}$$

其中，τ 的单位仍然是s，于是式(7-18)可写为：

$$\boxed{i(t) = I_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}} \tag{7-20}$$

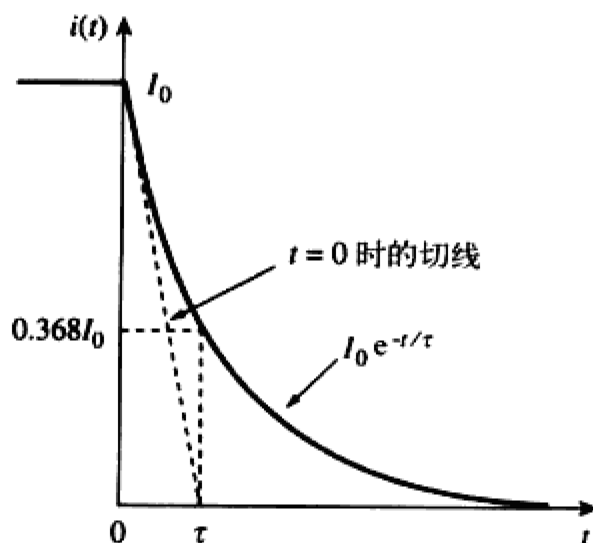


图 7-12　RL 电路的电流响应

利用式(7-20)的电流表达式，就可以求出电阻器两端的电压为：

$$v_R(t) = iR = I_0 R \mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{7-21}$$

该电阻器所消耗的功率为：

$$p = v_R i = I_0^2 R \mathrm{e}^{-2t/\tau} \tag{7-22}$$

电路的时间常数越小，其响应的衰减速率就越快；相反，电路的时间常数越大，其响应的衰减速率就越慢。5τ之后，以任意速率衰减的响应均会衰减到其初始值的1%以下（即达到稳定状态）。

该电阻器所吸收的能量为：

$$w_R(t) = \int_0^t p\,\mathrm{d}t = \int_0^t I_0^2 R \mathrm{e}^{-2t/\tau}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\tau I_0^2 R \mathrm{e}^{-2t/\tau}\Big|_0^t, \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

即

$$w_R(t) = \frac{1}{2} L I_0^2 (1 - \mathrm{e}^{-2t/\tau}) \tag{7-23}$$

注意，当$t \to \infty$时，$w_R(\infty) \to \frac{1}{2}LI_0^2$，与式(7-14)给出的电感器的初始储能$w_L(0)$相同，同样，该电感器中的初始储能最终被电阻器完全消耗。

图7-12表明，由初始斜率可以确定出τ。

总之，计算无源RL电路的关键是求出：

（1）流过电感器的初始电流$i(0) = I_0$；

（2）电路的时间常数τ。

求出上述两项，就可以得到电感器电流的响应$i_L(t) = i(t) = i(0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$。一旦确定了电感器电流$i$，就可以求出其他变量（电感器电压$v_L$、电阻器电压$v_R$以及流过电阻器的电流$i_R$）。一般而言，式(7-19)中的$R$是电感器两端的戴维南电阻。

当电路中包含一个电感器、若干个电阻器和受控源时，可以在构成简单RL电路的电感器两端求得其戴维南等效电阻。同样，如果能将若干个电感器合并为一个等效电感器，还可以利用戴维南定理进行计算。

例题7-3 假定$i(0)=10$ A，计算如图7-13所示电路的$i(t)$与$i_x(t)$。

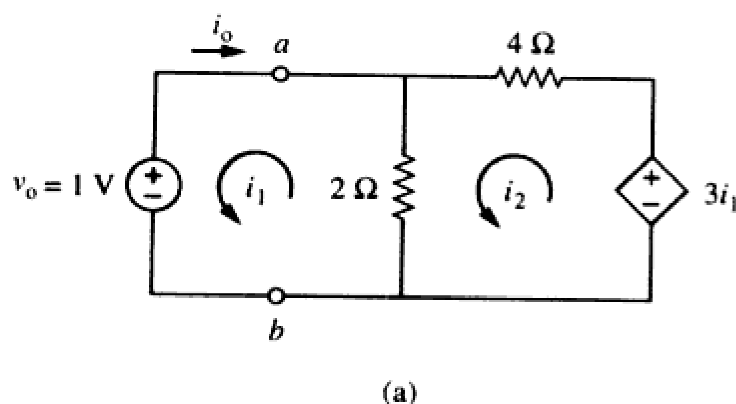
解 可以采用两种方法求解本题。一种方法是先确定电感器两端的等效电阻，然后利用式(7-20)计算；另一种方法是利用基尔霍夫电压定律进行计算。无论采用哪种方法，最好是先确定流过电感器的电流。

图 7-13 例题 7-3 的电路原理图

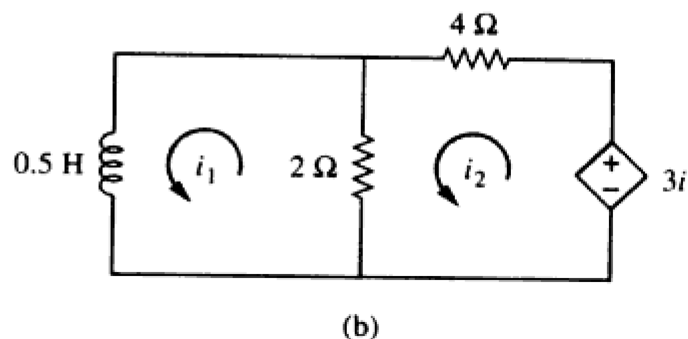
方法 1：等效电阻即电感器两端的戴维南电阻。由于存在受控源，应先在电感器端口 a–b 处插入一个 $v_0=1$ V 的电压源，如图 7-14a 所示（也可以在该端口处插入一个 1 A 的电流源）。对两个回路应用 KVL，可以得到：

$$2(i_1-i_2)+1=0 \quad \Rightarrow \quad i_1-i_2=-\frac{1}{2} \tag{7-3-1}$$

$$6i_2-2i_1-3i_1=0 \quad \Rightarrow \quad i_2=\frac{5}{6}i_1 \tag{7-3-2}$$



(a)



(b)

图 7-14 图 7-13 所示电路的求解

将式(7-3-2)代入式(7-3-1)得到：

$$i_1=-3\text{ A} \qquad i_o=-i_1=3\text{ A}$$

因此，

$$R_{eq}=R_{Th}=\frac{v_o}{i_o}=\frac{1}{3}\Omega$$

时间常数为：

$$\tau=\frac{L}{R_{eq}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\text{s}$$

于是，流过电感器的电流为：

$$i(t)=i(0)e^{-t/\tau}=10e^{-(2/3)t}\text{A}, \qquad t>0$$

方法 2：直接对图 7-14b 所示的电路应用 KVL 进行计算。对于回路 1 有：

$$\frac{1}{2}\frac{di_1}{dt}+2(i_1-i_2)=0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+4i_1-4i_2=0 \tag{7-3-3}$$

对于回路2有：

$$6i_2-2i_1-3i_1=0 \Rightarrow i_2=\frac{5}{6}i_1 \tag{7-3-4}$$

将式(7-3-4)代入式(7-3-3)可得：

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+\frac{2}{3}i_1=0$$

移项整理后得到：

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{i_1}=-\frac{2}{3}\mathrm{d}t$$

由于$i_1=i$，故可用i代替i_1，并对两边取积分得到：

$$\ln i\Big|_{i(0)}^{i(t)}=-\frac{2}{3}t\Big|_0^t$$

即

$$\ln\frac{i(t)}{i(0)}=-\frac{2}{3}t$$

最后，取以e为底的幂指数，得到：

$$i(t)=i(0)\mathrm{e}^{-(2/3)t}=10\mathrm{e}^{-(2/3)t}\mathrm{A},\qquad t>0$$

与方法1的结果相同。

电感器两端的电压为：

$$v=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=0.5(10)\left(-\frac{2}{3}\right)\mathrm{e}^{-(2/3)t}=-\frac{10}{3}\mathrm{e}^{-(2/3)t}\mathrm{V}$$

由于电感器与2 Ω电阻并联，所以：

$$i_x(t)=\frac{v}{2}=-1.6667\mathrm{e}^{-(2/3)t}\mathrm{A},\qquad t>0$$

练习题7-3 试求图7-15所示电路中的i与v_x，假定$i(0)=5$ A。

答 $5\mathrm{e}^{-53t}$ A，$-15\mathrm{e}^{-53t}$ V。

例题7-4 图7-16中的开关已长时间闭合，在$t=0$时刻，开关打开，试计算$t>0$时的$i(t)$。

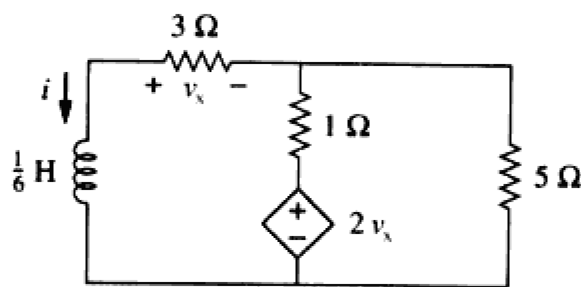


图 7-15 练习题 7-3 的电路原理图

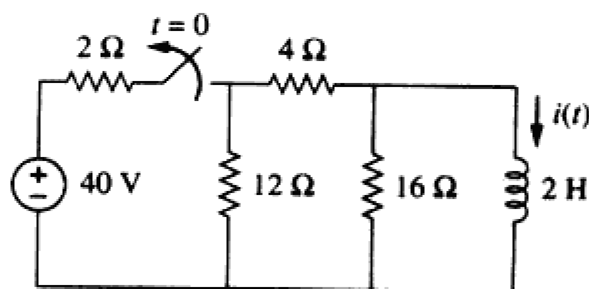


图 7-16 例题 7-4 的电路原理图

解 $t<0$时，开关闭合，电感对直流表现为短路，此时16 Ω电阻被短路，所得到的电路如图7-17a所示。为了确定图7-17a中的i_1，需将相互并联的4 Ω电阻与12 Ω电阻合并为：

$$\frac{4\times12}{4+12}=3\Omega$$

于是，

$$i_1 = \frac{40}{2+3} = 8\text{A}$$

利用分流原理，可以由图7-17a中的i_1求出$i(t)$：

$$i(t) = \frac{12}{12+4} i_1 = 6\text{A}, \quad t<0$$

由于流过电感器的电流不能突变，所以，

$$i(0) = i(0^-) = 6\text{ A}$$

当$t>0$时，开关打开，电压源被断开，得到如图7-17b所示的RL电路。合并电阻后得到：

$$R_{eq} = (12+4) \parallel 16 = 8\ \Omega$$

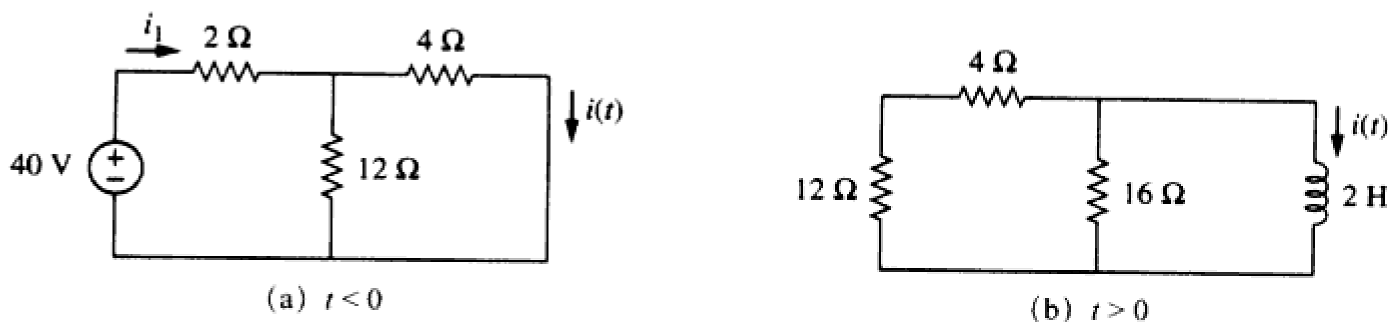


图 7-17 图 7-16 所示电路的求解

时间常数为：

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}\text{s}$$

于是，

$$i(t) = i(0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau} = 6\,\mathrm{e}^{-4t}\text{ A}$$

练习题7-4 对于图7-18所示电路，试求$t>0$的$i(t)$。

答 $2\,\mathrm{e}^{-2t}$ A，$t>0$。

例题7-5 在图7-19所示的电路中，假设开关已长时间打开，试求所有时刻的i_o、v_o与i。

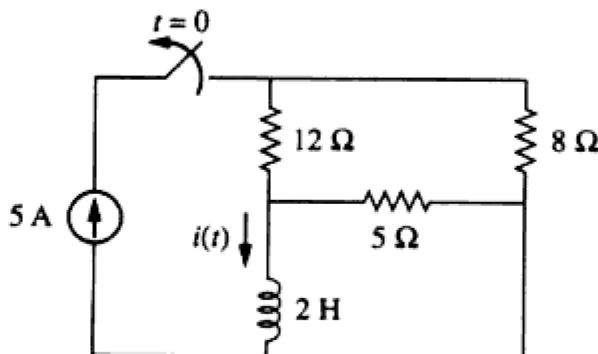


图 7-18 练习题 7-4 的电路原理图

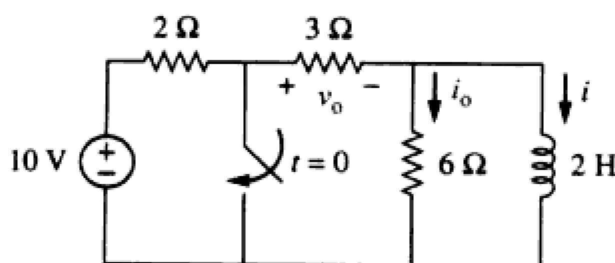


图 7-19 例题 7-5 的电路原理图

解 最好先求出流过电感器的电流i，之后再由此确定其他电路变量。

当$t<0$时，开关打开，电感器对直流表现为短路，此时6 Ω电阻器被短路，于是得到如图7-20a所示的电路，因此，$i_o=0$且

$$i(t) = \frac{10}{2+3} = 2\text{A}, \quad t<0$$

$$v_o(t) = 3i(t) = 6\text{V}, \quad t<0$$

于是，$i(0)=2$。

当$t>0$时，开关闭合，电压源被短路。得到如图7-20b所示的无源RL电路。在电感器两端，有：

$$R_{Th}=3\parallel 6=2\ \Omega$$

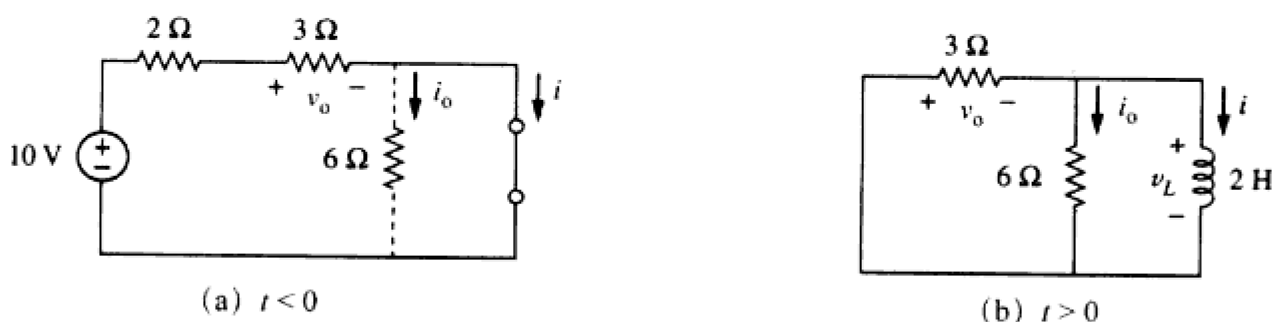


图 7-20 图 7-19 所示电路在不同时刻的等效电路

所以时间常数为：

$$\tau=\frac{L}{R_{Th}}=1\text{s}$$

因此，

$$i(t)=i(0)\,e^{-t/\tau}=2\,e^{-t}\ \text{A},\qquad t>0$$

由于电感器与6 Ω电阻和3 Ω电阻并联，所以，

$$v_o(t)=-v_L=-L\frac{di}{dt}=-2(-2e^{-t})=4e^{-t}\ \text{V},\qquad t>0$$

并且，

$$i_o(t)=\frac{v_L}{6}=-\frac{2}{3}e^{-t}\text{A},\qquad t>0$$

因此，在所有时刻，

$$i_o(t)\begin{cases}0\,\text{A}, & t<0\\ -\dfrac{2}{3}e^{-t}\,\text{A}, & t>0\end{cases}\qquad v_o(t)=\begin{cases}6\,\text{V}, & t<0\\ 4e^{-t}\,\text{V}, & t>0\end{cases}\qquad i(t)=\begin{cases}2\,\text{A}, & t<0\\ 2e^{-t}A, & t\,\text{H}\ 0\end{cases}$$

可以注意到，流过电感器的电流在$t=0$时刻是连续的，而流过6 Ω电阻的电流在$t=0$时刻从0下降到$-\dfrac{2}{3}$，3 Ω电阻两端的电压在$t=0$时刻从6下降到4。我们还会注意到，无论定义什么是输出，电路的时间常数都是保持不变的，图7-21画出了i与i_o的波形图。

练习题7-5 试确定图7-22所示电路在所有时刻的i、i_o与v_o。假定图中开关已长时间闭合。应该注意到，打开与理想电流源串联的开关，在该电流源两端产生一个无穷大的电压，显然是不可能的，为了求解本题，可以设置一个与该电流源并联的分流电阻（这样就等效于电压源与电阻串联）。在实际应用中，与电流源特性相同的器件是电子电路，这些电路使电流源在其工作范围内表现为理想电流源，但是当负载电阻非常大（如开路电路）时，其电压是有限的。

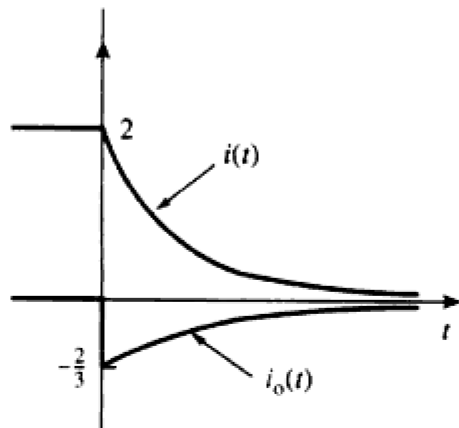


图 7-21 i 与 i_o 的波形图

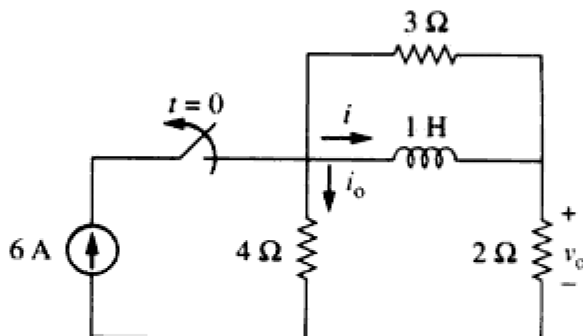


图 7-22 练习题 7-5 的电路原理图

答

$$i = \begin{cases} 4\text{A}, & t < 0 \\ 4\text{e}^{-2t}\text{A}, & t\ \mathrm{H}\ 0 \end{cases} \qquad i_o = \begin{cases} 2\,\text{A}, & t < 0 \\ -(4/3)\text{e}^{-2t}\ \text{A}, & t > 0 \end{cases} \qquad v_o = \begin{cases} 8\,\text{V}, & t < 0 \\ (8/3)\text{e}^{-2t}\ \text{V}, & t > 0 \end{cases}$$

7.4 奇异函数

在学习本章后半部分内容之前，有必要先离开主题讨论一些有助于我们理解电路瞬态分析的数学概念。掌握奇异函数的基本性质会帮助我们理解一阶电路在直流独立电压源或独立电流源的突然作用下的响应。

奇异函数［也称为开关函数（switching function）］在电路分析中非常有用，它们是开关运算电路中开关信号的良好近似。借助奇异函数可以简明扼要地描述一些电路现象，特别是描述后面几节将要讨论的RC或RL电路的阶跃响应。根据定义，

奇异函数是指本身不连续的函数，或者其导数不连续的函数。

电路分析中应用最广泛的三个奇异函数分别是：单位阶跃函数（unit step）、单位冲激函数（unit impulse）和单位斜升函数（unit ramp）。

单位阶跃函数$u(t)$在自变量t为负值时，取值为0；在自变量t为正值时，取值为1。

其数学表达式为：

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \tag{7-24}$$

单位阶跃函数在$t = 0$时刻无定义，此时其值从0突变到1。与正弦函数和余弦函数等其他数学函数一样，$u(t)$是无量纲的。图7-23给出了单位阶跃函数的波形图。如果突变发生在$t = t_0$（$t_0 > 0$）时刻，而不是$t = 0$时刻，则单位阶跃函数变为：

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases} \tag{7-25}$$

即$u(t)$滞后t_0秒后的波形，如图7-24a所示，仅需用$t - t_0$取代式(7-24)中的t，就可以得到式(7-25)。如果突变发生在$t = t_0$时刻，则单位阶跃函数变为：

$$u(t + t_0) = \begin{cases} 0, & t < -t_0 \\ 1, & t > -t_0 \end{cases} \tag{7-26}$$

即较$u(t)$超前t_0秒的波形，如图7-24b所示。

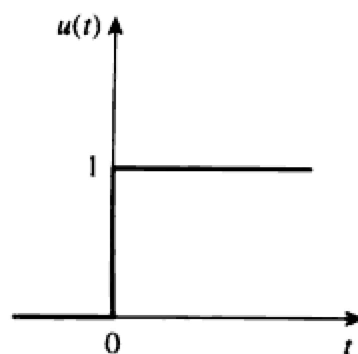
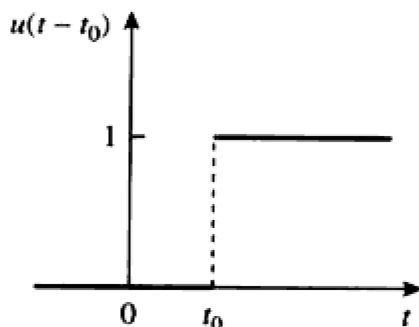
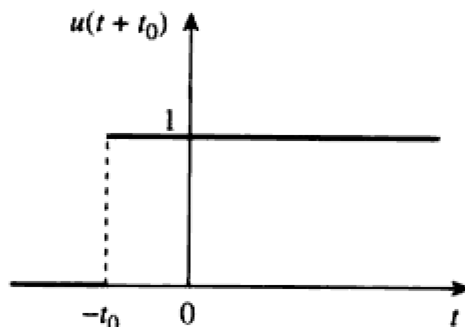


图 7-23 单位阶跃函数



（a）滞后 t_0 的单位阶跃函数



（b）超前 t_0 的单位阶跃函数

图 7-24 滞后及超前的单位阶跃函数

利用单位阶跃函数可以表示电路中电压或电流的突变，例如表示控制系统或数字计算机中电路中出现的突变。如下电压：

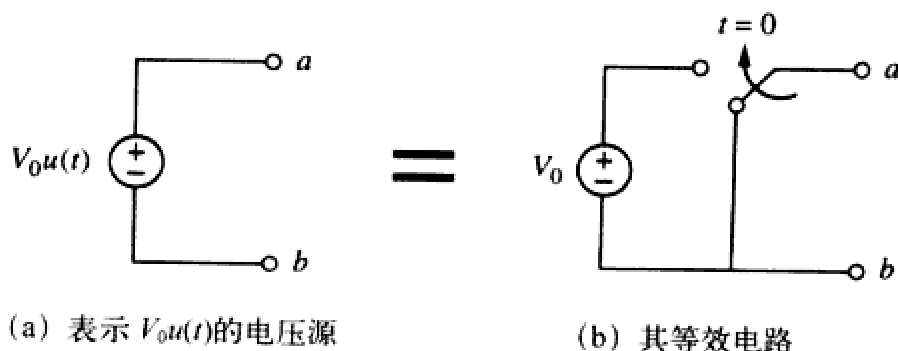
$$v(t)=\begin{cases}0, & t<t_0\\ V_0, & t>t_0\end{cases} \tag{7-27}$$

就可以用单位阶跃函数表示为：

$$v(t)=V_0u(t-t_0) \tag{7-28}$$

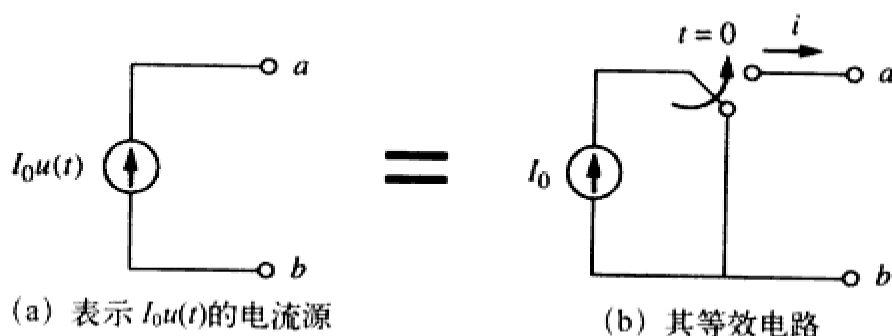
如果令$t_0=0$，则$v(t)$就是阶跃电压$V_0u(t)$。表示$V_0u(t)$的电压源如图7-25a所示，其等效电路如图7-25b所示，由图7-25b显而易见，当$t<0$时，端口$a-b$短路（即$v=0$），而当$t>0$时，该端口输出电压$v=V_0$。类似地，表示$I_0u(t)$的电流源如图7-26a所示，其等效电路如图7-26b所示，当$t<0$时，端口开路，而当$t>0$时，$i=I_0$。

另外，将式(7-24)写为：$u[f(t)]=1$，$f(t)>0$，当$f(t)$为$(t-t_0)$或$(t+t_0)$时，就可分别推出式(7-25)与式(7-26)。



（a）表示$V_0u(t)$的电压源　（b）其等效电路

图 7-25　电压源及其等效电路



（a）表示$I_0u(t)$的电流源　（b）其等效电路

图 7-26　电流源及其等效电路

单位阶跃函数的导数即单位冲激函数（unit impulse function）$\delta(t)$：

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \text{其他}, & t=0\\ 0, & t>0\end{cases} \tag{7-29}$$

单位冲激函数也称为δ函数，如图7-27所示。

单位冲激函数$\delta(t)$在$t=0$时刻以外处处为零，且在$t=0$时刻无定义。

由于存在开关运算或冲激电源，电路中就会出现冲激电流和冲激电压，虽然单位冲激函数是物理不可现实的（正如理想电源，理想电阻一样），但它却是一个非常有用的数学工具。

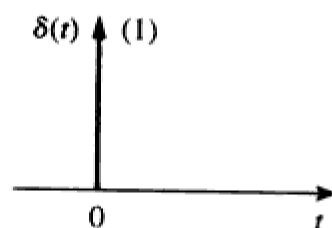


图 7-27　单位冲激函数

可以将单位冲激看作是施加或受到一次电击，即作用在单位面积上的一个持续时间非常短的脉冲，在数学上可以表示为：

$$\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\mathrm{d}t=1 \tag{7-30}$$

其中，$t=0^-$ 是指$t=0$时刻前的瞬间，而$t=0^+$ 是指$t=0$时刻后的瞬间，因此，通常用箭头表示单位冲激函数，并在箭头旁边标上1（表示单位面积），如图7-27所示。单位面积又称为冲激函数的强度（strength）。当冲激函数的强度不是单位1时，冲激的面积就等于它的强度。例如，冲激函数$10\delta(t)$，其面积为10，图7-28给出了冲激函数$5\delta(t+2)$、$10\delta(t)$与$-4\delta(t-3)$。

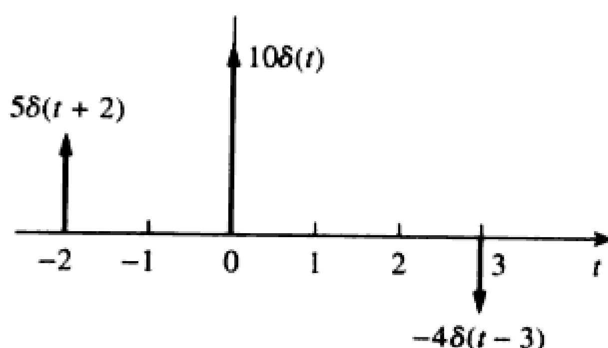


图 7-28 三个冲激函数

为了说明冲激函数对其他函数的作用，需计算如下积分：

$$\int_a^b f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t \tag{7-31}$$

其中，$a<t_0<b$。由于$\delta(t-t_0)=0$，$t\neq t_0$，所以上述积分除在$t=t_0$时刻外均为零。因此，

$$\int_a^b f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t_0)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t$$

$$= f(t_0)\int_a^b \delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)$$

即，

$$\boxed{\int_a^b f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)} \tag{7-32}$$

这说明一个函数与冲激函数作积分运算的结果是该函数在冲激发生时刻的函数值，这是冲激函数的一项非常有用的性质，称为抽样（sampling）特性或筛选（sifting）特性。式(7-31)的一个特例是$t_0=0$，此时式(7-32)变为：

$$\int_{0^-}^{0^+} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t = f(0) \tag{7-33}$$

对单位阶跃函数进行积分就可以得到单位斜升函数（unit ramp function）$r(t)$：

$$r(t)=\int_{-\infty}^{t} u(t)\mathrm{d}t = tu(t) \tag{7-34}$$

即，

$$\boxed{r(t)=\begin{cases}0, & t \text{ G } 0\\ t, & t \text{ H } 0\end{cases}} \tag{7-35}$$

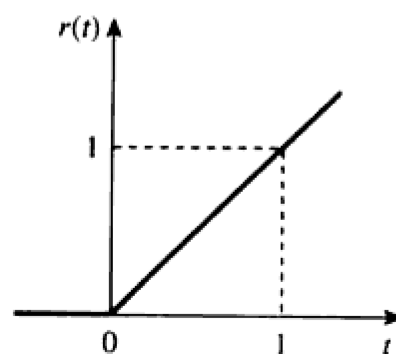


图 7-29 单位斜升函数

单位斜升函数在自变量t取负值时为零，在t取正值时其斜率为1。图7-29给出了单位斜升函数的波形图。一般而言，斜升函数就是一个以恒定速率变化的函数。

滞后或超前的单位斜升函数如图7-30所示。滞后的单位斜升函数的表达式为：

$$r(t-t_0)=\begin{cases}0, & t \text{ G } t_0\\ t-t_0, & t \text{ H } t_0\end{cases} \tag{7-36}$$

超前的单位斜升函数：

$$r(t+t_0)=\begin{cases}0, & t \text{ G } -t_0\\ t+t_0, & t \text{ H } -t_0\end{cases} \tag{7-37}$$

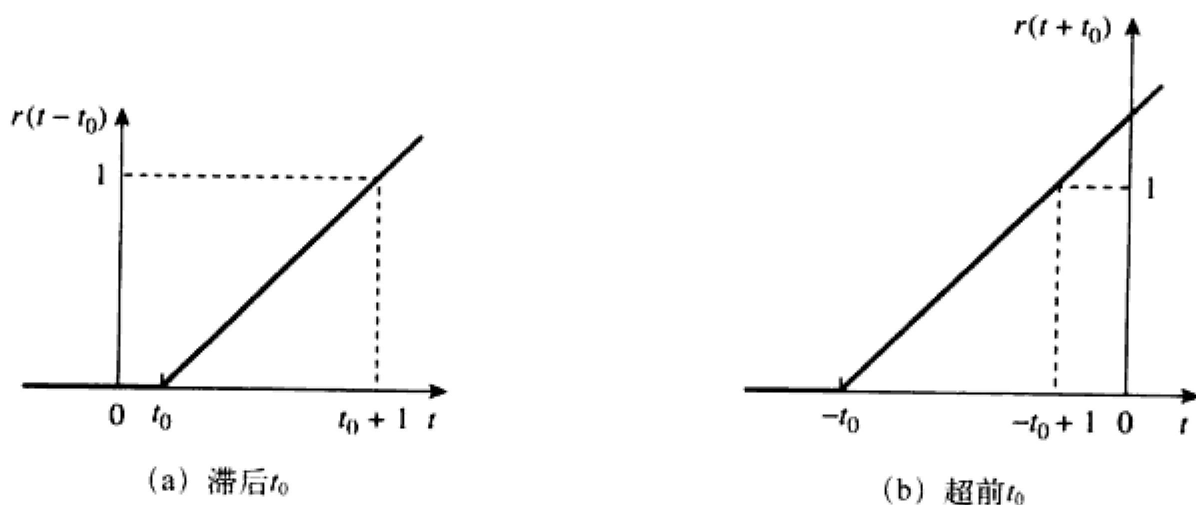
应该记住三个奇异函数（冲激函数、阶跃函数、斜升函数）之间的微分关系：

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}, \qquad u(t)=\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} \tag{7-38}$$

或积分关系：

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)\mathrm{d}t,\qquad r(t)=\int_{-\infty}^{t}u(t)\mathrm{d}t \tag{7-39}$$

虽然还存在大量的奇异函数，但这里仅对上述三个奇异函数（冲激函数、阶跃函数、斜升函数）感兴趣。



(a) 滞后t_0　(b) 超前t_0

图 7-30　单位斜升函数

例题7-6　试利用单位阶跃函数表示图7-31所示的电压脉冲，并计算其导数，画出导数波形图。

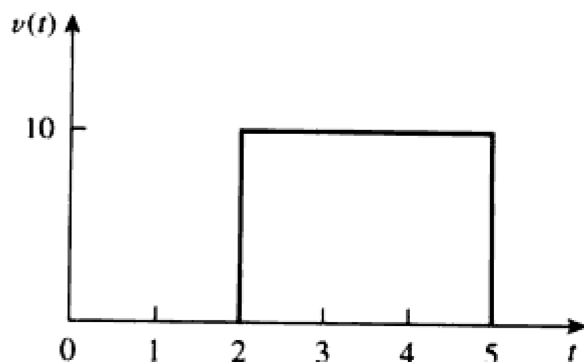


图 7-31　例题 7-6 的波形图

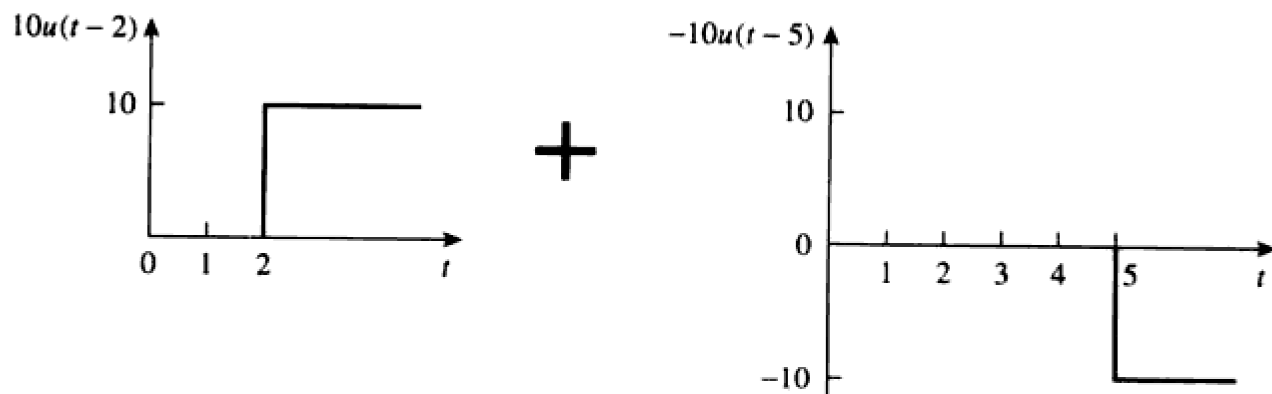
解　图7-31所示的脉冲称为门函数（gate function）[①]，可以将其看作是这样一个阶跃函数：在某个t值时打开；而在另一个t值时关闭。图7-31所示的门函数是在$t=2$s 时打开，$t=5$ s时关闭，该门函数由图7-32a所示的两个单位阶跃函数之和组成，由图可知：

$$v(t)=10\,u(t-2)-10\,u(t-5)=10[u(t-2)-u(t-5)]$$

取微分可得：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=10[\delta(t-2)-\delta(t-5)]$$

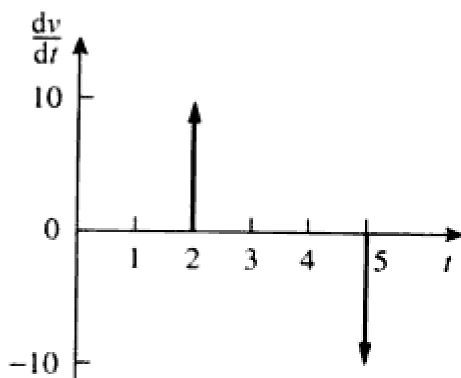
其波形图如图7-32b所示。我们观察到图7-31在$t=2$ s处存在一个10 V的突然上升，即得到$10\delta(t-2)$；在$t=5$ s处存在一个10 V的突然下降，从而得到$-10\delta(t-5)$，这样就可以由图7-31直接得到图7-32b。



(a) 图 7-31 所示脉冲的分解

图　7-32

① 门函数与开关可共同用于通过或阻止另一个信号。



（b）图 7-31 所示脉冲的微分

图 7-32 （续）

练习题7-6 试利用单位阶跃函数表示图7-33所示的电流脉冲，求其积分并画出其积分波形图。

答 $10[u(t)-2u(t-2)+u(t-4)]$，$10[r(t)-2r(t-2)+r(t-4)]$。

波形图见图7-34。

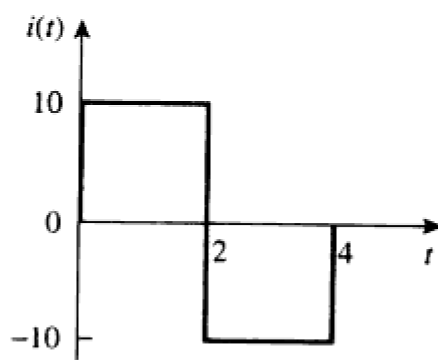


图 7-33 练习题 7-6 的波形图

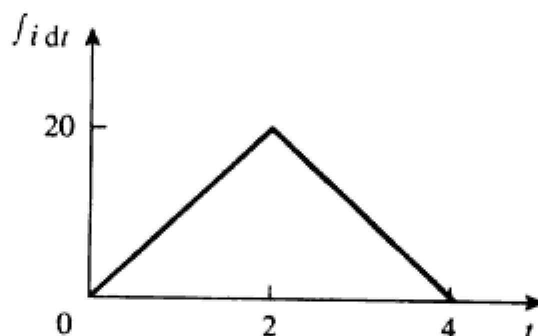


图 7-34 图 7-33 所示 $i(t)$的积分波形

例题7-7 试利用奇异函数表示图7-35所示的锯齿（sawtooth）函数。

解 解决这个问题的方法有三种，第一种方法是直接观察给定函数，而另外两种方法则涉及函数的某些图形操作。

方法 1：观察图 7-35 所示的 $v(t)$波形，不难发现函数 $v(t)$是奇异函数的组合。因此，令：

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + \cdots \tag{7-7-1}$$

$v_1(t)$是斜率为5的斜升函数，如图7-36a所示，即：

$$v_1(t) = 5r(t) \tag{7-7-2}$$

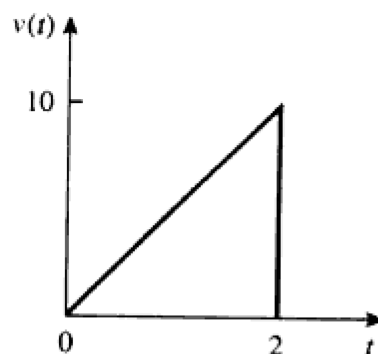


图 7-35 例题 7-7 的波形图

由于$v_1(t)$无限延伸，所以需要在$t=2$ s时有另一个函数以便得到$v(t)$，令该函数为$v_2(t)$，是一个斜率为-5的斜升函数，如图7-36b所示，即：

$$v_2(t) = -5r(t-2) \tag{7-7-3}$$

将v_1与v_2加起来，得到如图7-36c所示的信号波形。显然，该信号不同于图7-35所示的$v(t)$，但是二者

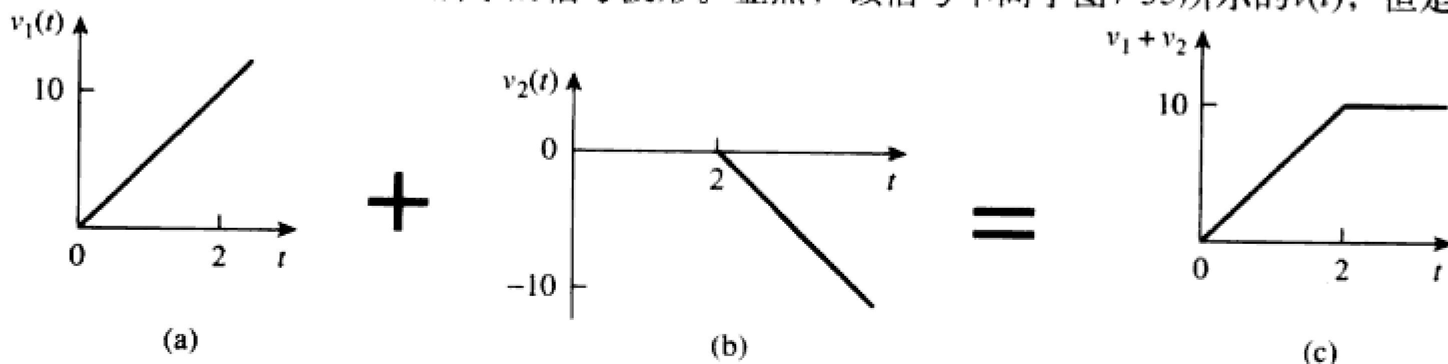


图 7-36 图 7-35 所示 $v(t)$的部分分解

的差别仅在于$t>2$ s后的10个单位的常量，与如下第三个信号v_3相加：

$$v_3=-10u(t-2) \tag{7-7-4}$$

就可以得到$v(t)$，如图7-37所示。将式(7-7-2)～式(7-7-4)代入式(7-7-1)，得到：

$$v(t)=5r(t)-5r(t-2)-10u(t-2)$$

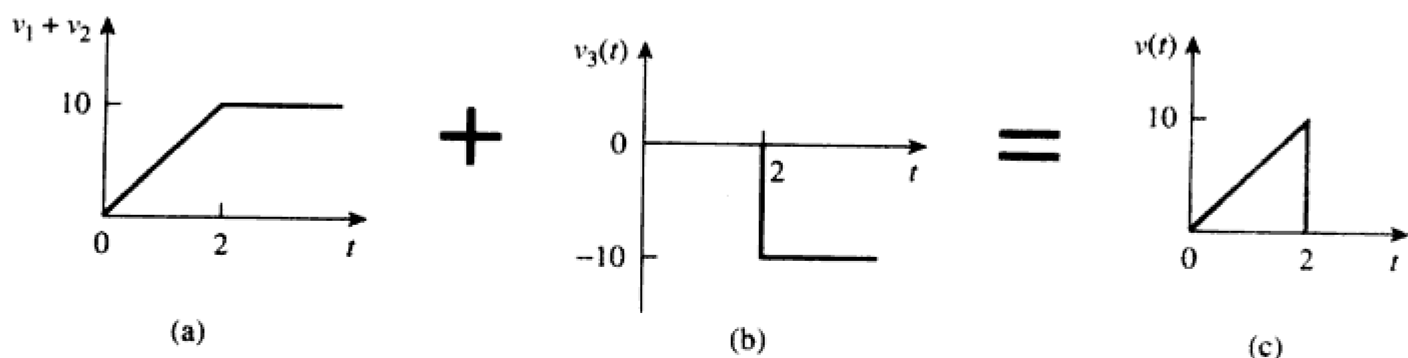


图 7-37 图 7-35 所示 $v(t)$的完整分解

方法 2：仔细观察图 7-35 会发现，$v(t)$是如下两个函数的乘积：斜升函数与门函数。因此，

$$\begin{aligned}v(t)&=5t[u(t)-u(t-2)]\\&=5tu(t)-5tu(t-2)\\&=5r(t)-5(t-2+2)u(t-2)\\&=5r(t)-5(t-2)u(t-2)-10u(t-2)\\&=5r(t)-5r(t-2)-10u(t-2)\end{aligned}$$

与方法1得到的结果相同。

方法 3：与方法 2 类似，由图 7-35 可以看出 $v(t)$是一个斜升函数与一个单位阶跃函数相乘的结果，如图 7-38 所示。因此，

$$v(t)=5r(t)u(-t+2)$$

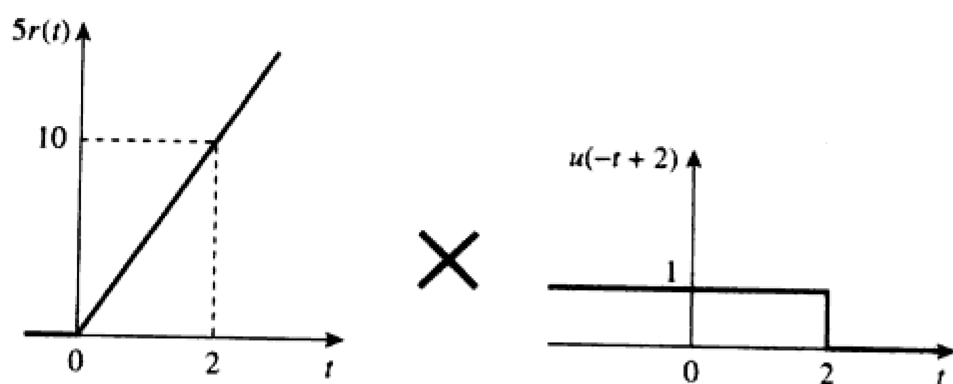


图 7-38 图 7-35 所示 $v(t)$的分解

如果用$1-u(t)$取代$u(-t)$，则$u(-t+2)$可以用$1-u(t+2)$取代，因此，

$$v(t)=5r(t)[1-u(t-2)]$$

经过与方法2中相同的简化过程，就可以得到同样的结果。

练习题7-7 试利用奇异函数写出图7-39所示 $i(t)$ 波形的表达。

答 $2u(t)-2r(t)+4r(t-2)-2r(t-3)$。

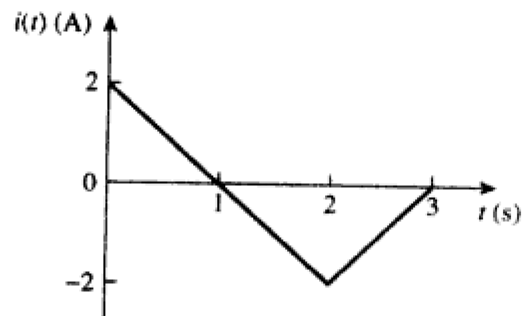


图 7-39 练习题 7-7 的波形图

例题7-8 给定信号

$$g(t)=\begin{cases}3, & t<0\\ -2, & 0<t<1\\ 2t-4, & t>1\end{cases}$$

试利用阶跃函数与斜升函数写出$g(t)$的表达式。

解 信号$g(t)$可以看作是定义在三个区间$t<0$、$0<t<1$、$t>1$的三个函数之和。

当$t<0$时，$g(t)$可以看成是3乘以$u(-t)$，其中$u(-t)=\begin{cases}1 & t<0\\ 0 & t>0\end{cases}$。在时间区间$0<t<1$，$g(t)$可以看成是$-2$乘以门函数$[u(t)-u(t-1)]$。当$t>1$时，$g(t)$可以看成是$(2t-4)$乘以单位阶跃函数$u(t-1)$。因此，

$$\begin{aligned}g(t)&=3u(-t)-2[u(t)-u(t-1)]+(2t-4)u(t-1)\\&=3u(-t)-2u(t)+(2t-4+2)u(t-1)\\&=3u(-t)-2u(t)+2(t-1)u(t-1)\\&=3u(-t)-2u(t)+2r(t-1)\end{aligned}$$

为了避免采用$u(-t)$的麻烦，可以用$1-u(t)$取代$u(-t)$，于是：

$$g(t)=3[1-u(t)]-2u(t)+2r(t-1)=3-5u(t)+2r(t-1)$$

另外，还可以画出$g(t)$的波形图，并利用例题7-7中的方法1求解。

练习题7-8 如果

$$h(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 4, & 0<t<2\\ 6-t, & 2<t<6\\ 0, & t>6\end{cases}$$

试利用奇异函数写出$h(t)$的表达式。

答 $4u(t)-r(t-2)+r(t-6)$。

例题7-9 试计算下列包含冲激函数的积分值。

$$\int_0^{10}(t^2+4t-2)\delta(t-2)\mathrm{d}t$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\delta(t-1)\mathrm{e}^{-t}\cos t+\delta(t+1)\mathrm{e}^{-t}\sin t]\,\mathrm{d}t$$

解 对于第一个积分，利用式（7-32）给出的筛选特性，有：

$$\int_0^{10}(t^2+4t-2)\delta(t-2)\mathrm{d}t=(t^2+4t-2)|_{t=2}=4+8-2=10$$

类似地，对于第二个积分，有：

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}[\delta(t-1)\mathrm{e}^{-t}\cos t+\delta(t+1)\mathrm{e}^{-t}\sin t]\mathrm{d}t\\&=\mathrm{e}^{-t}\cos t|_{t=1}+\mathrm{e}^{-t}\sin t|_{t=-1}\\&=\mathrm{e}^{-1}\cos 1+\mathrm{e}^{1}\sin(-1)=0.1988-2.2873=-2.0885\end{aligned}$$

练习题7-9 试计算下列积分的值。

$$\int_{-\infty}^{\infty}(t^3+5t^2+10)\delta(t+3)\mathrm{d}t,\qquad \int_0^{10}\delta(t-\pi)\cos 3t\,\mathrm{d}t$$

答 28，-1。

7.5 RC 电路的阶跃响应

当直流电源突然作用于RC电路时，其电压源或电流源可以建模为阶跃函数，此时的电路响应称为阶跃响应（step response）。

电路的阶跃响应是指激励电压源或激励电流源为阶跃函数时的响应。

所以，阶跃响应函数是由突然施加的直流电压源或电流源引起的电路响应。

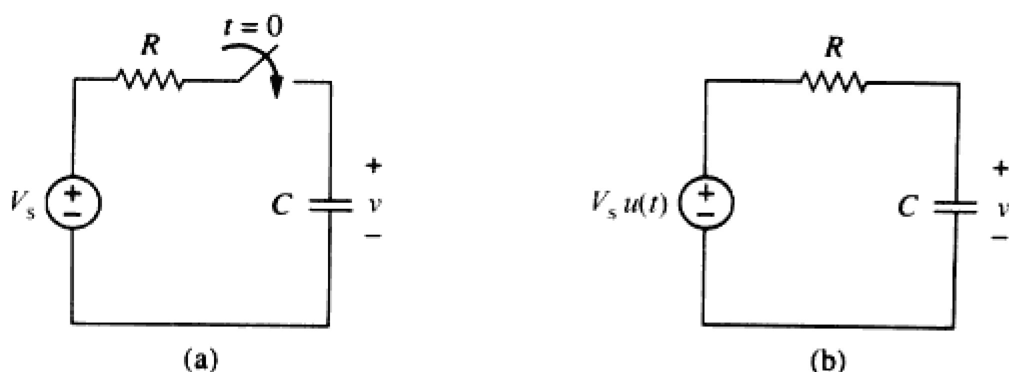


图 7-40 具有阶跃电压输入的 RC 电路

考虑如图7-40a所示的RC电路，它可以用图7-40b所示电路来取代，图中V_s为一恒定直流电压源。另外，选择电容器电压作为待确定的电路响应。假定电容器的初始电压为V_0（即便这对求解阶跃响应是没有必要的），由于电容器两端的电压不能突变，即：

$$v(0^-) = v(0^+) = V_0 \tag{7-40}$$

其中，$v(0^-)$为开关闭合前瞬间电容器两端的电压，而$v(0^+)$为开关闭合后瞬间电容器两端的电压。由KCL定律可得：

$$C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v - V_s u(t)}{R} = 0$$

即，

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{RC} = \frac{V_s}{RC}u(t) \tag{7-41}$$

其中，v为电容器两端的电压。当$t > 0$时，式(7-41)成为：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{RC} = \frac{V_s}{RC} \tag{7-42}$$

移项整理后可得：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{v - V_s}{RC}$$

即，

$$\frac{\mathrm{d}v}{v - V_s} = -\frac{\mathrm{d}t}{RC} \tag{7-43}$$

两边取积分，并代入初始条件得到：

$$\ln(v - V_s)\Big|_{V_0}^{v(t)} = -\frac{t}{RC}\Big|_0^t$$

$$\ln(v(t) - V_s) - \ln(V_0 - V_s) = -\frac{t}{RC} + 0$$

即，

$$\ln\frac{v-V_s}{V_0-V_s}=-\frac{t}{RC} \tag{7-44}$$

两边取以e为底的指数可得：

$$\frac{v-V_s}{V_0-V_s}=\mathrm{e}^{-t/\tau},\qquad \tau=RC$$

$$v-V_s=(V_0-V_s)\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

即，

$$v(t)=V_s+(v_0-V_s)\mathrm{e}^{-t/\tau},\qquad t>0 \tag{7-45}$$

因此，

$$v(t)=\begin{cases}V_0, & t<0\\ V_s+(V_0-V_s)\mathrm{e}^{-t/\tau} & t>0\end{cases} \tag{7-46}$$

这就是在假定电容器已初始充电的条件下，RC电路对突然施加的直流电压源的完全响应（complete response，total response)。稍后将阐明采用“完全”这一术语的原因。假定$V_s>V_0$，则$v(t)$的波形图如图7-41所示。

图 7-41 电容器经初始充电后，RC 电路的响应

如果假定电容器未经初始充电，则在式(7-46)中令$V_0=0$，于是有：

$$v(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ V_s(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}) & t>0\end{cases} \tag{7-47}$$

上式还可以写为：

$$v(t)=V_s(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})u(t) \tag{7-48}$$

此即电容器未经初始充电条件下，RC电路的完全阶跃响应，利用$i(t)=C\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$，由式(7-47)可以求出流经电容器的电流为：

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{C}{\tau}V_s\mathrm{e}^{-t/\tau},\qquad \tau=RC,\qquad t>0$$

即，

$$i(t)=\frac{V_s}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}u(t) \tag{7-49}$$

图7-42给出了电容器电压$v(t)$与电流$i(t)$的波形图。

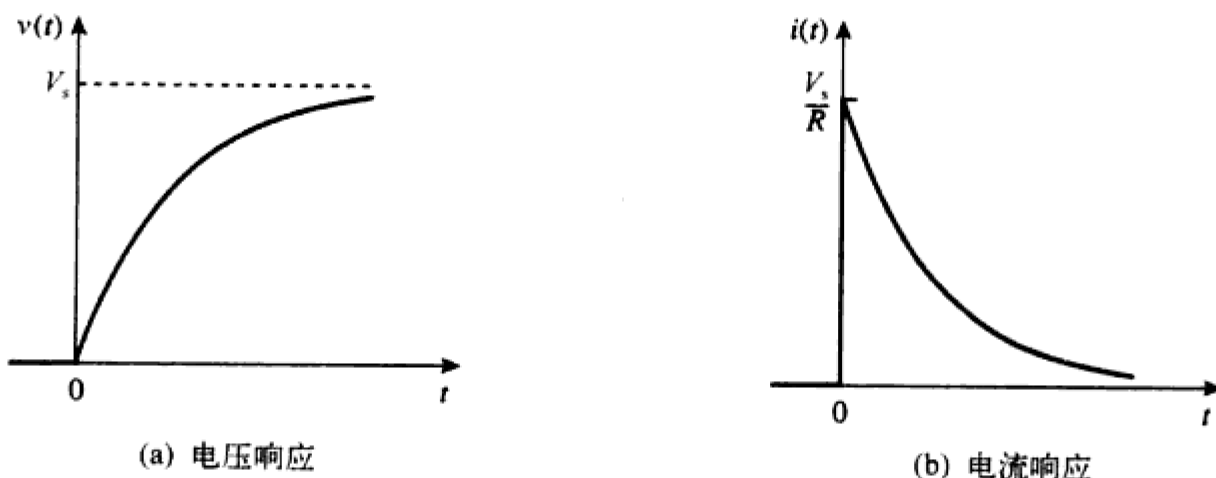


图 7-42 电容器未经初始充电条件下，RC 电路的阶跃响应

除了采用上述推导过程求解RC或RL电路的阶跃响应外，还有一种简便的系统求解方法。重新

观察式(7-45)可知，它是比式(7-48)更一般化的表达式。显然，$v(t)$包括两个组成部分，通常有两种方法可将其分解为两个组成部分。第一种方法是将其分解为“固有响应与强迫响应”，第二种方法是将其分解为“瞬态响应与稳态响应”。采用固有响应与强迫响应可将全响应写为：

全响应 = 固有响应 + 强迫响应
储能　　独立源

即，

$$v = v_n + v_f \tag{7-50}$$

其中，

$$v_n = V_o e^{-t/\tau}$$

且

$$v_f = V_s(1-e^{-t/\tau})$$

通过7.2节的讨论，我们对电路的固有响应v_n已经很熟悉。v_f之所以称为强迫（forced）响应，是因为该响应是电路在外加“强迫源”（这里就是电压源）的作用下产生的，它表示输入激励信号对电路的作用效果。固有响应最终会随着强迫响应的瞬态分量而消失，最后仅留下强迫响应的稳态分量。

研究全响应的另一种方法是将其分解为暂态分量和稳态分量，即

全响应 = 瞬态响应 + 稳态响应
暂态分量　　稳态分量

即，

$$v = v_t + v_{ss} \tag{7-51}$$

其中，

$$v_t = (V_o - V_s)e^{-t/\tau} \tag{7-52a}$$

且

$$v_{ss} = V_s \tag{7-52b}$$

瞬态响应（transient response）v_t是暂时的，它是全响应中随时间趋于无穷大而衰减为零的分量，因此，

瞬态响应是指随时间而消失的电路的暂态响应。

稳态响应（steady-state response）是瞬态响应消失后，全响应中保留的分量，因此，

稳态响应是指外部激励作用于电路很长时间之后电路的特性。

全响应的第一种分解方法是根据相应的源进行的，而第二种分解方法是根据响应的持久性进行的。在某些情况下，固有响应与瞬态响应是相同的，类似地，强迫响应与稳态响应也可能是相同的。

无论采用哪一种研究方法，式(7-45)所示的全响应均可写为：

$$\boxed{v(t) = v(\infty) + [v(0) - v(\infty)]e^{-t/\tau}} \tag{7-53}$$

其中，$v(0)$为$t=0^+$时刻的初始电压，$v(\infty)$为最终值或稳态值。于是，求解RC电路的阶跃响应时，需要知道如下三个值：

(1) 电容器两端的初始电压$v(0)$；

(2) 电容器两端的最终电压$v(\infty)$；

(3) 时间常数τ。

这与全响应是瞬态响应与稳态响应之和的表述是相同的。

一旦知道了$x(0)$、$x(\infty)$与τ。本章几乎所有的电路问题都可以用如下公式解决：

$$x(t)=x(\infty)+[x(0)-x(\infty)]\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

当$t<0$时，可以由给定电路求出上述第1项，而第2、3两项是在$t>0$时得到的。一旦确定了这几项，就可以利用式(7-53)得到电路的响应。这种方法同样适用于下一节将要讨论的RL电路。

如果开关在$t=t_0$时刻而不是$t=0$时刻改变位置，则会在响应中引入一个时间延迟，于是式(7-53)变为：

$$v(t)=v(\infty)+[v(t_0)-v(\infty)]\mathrm{e}^{-(t-t_0)/\tau} \tag{7-54}$$

其中，$v(t_0)$为$t=t_0^+$时刻的初始值。注意，式(7-53)或式(7-54)仅适用于输入激励恒定条件下的阶跃响应。

例题7-10　图7-43中的开关长时间处于位置A，在$t=0$时刻，开关转向位置B。试确定$t>0$时的$v(t)$，并计算它在$t=1$ s和4 s时的值。

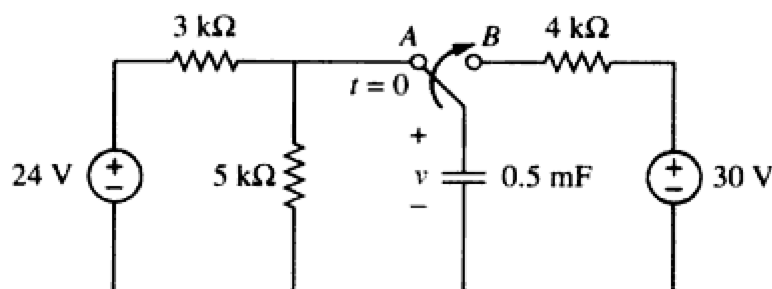


图 7-43　例题 7-10 的电路原理图

解　当$t<0$时，开关处于位置A，电容器对直流表现为开路，但其两端的电压v与5 kΩ电阻两端的电压相同，因此，在$t=0$时刻前，电容器两端的电压可以按照分压原理计算：

$$v(0^-)=\frac{5}{5+3}(24)=15\,\mathrm{V}$$

根据电容器电压不能突变的事实，可以得到：

$$v(0)=v(0^-)=v(0^+)=15\ \mathrm{V}$$

当$t>0$时，开关处于位置B，与电容器相连接的戴维南电阻为$R_{\mathrm{Th}}=4$ kΩ，且时间常数为：

$$\tau=R_{\mathrm{Th}}C=4\times10^3\times0.5\times10^{-3}=2\ \mathrm{s}$$

由于电容器在稳态时对直流相当于开路，于是$v(\infty)=30$ V，因此，

$$v(t)=v(\infty)+[v(0)-v(\infty)]\mathrm{e}^{-t/\tau}=30+(15-30)\mathrm{e}^{-t/2}=(30-15\,\mathrm{e}^{-0.5t})\ \mathrm{V}$$

当$t=1$时，$v(1)=30-15\,\mathrm{e}^{-0.5}=20.9$ V

当$t=4$时，$v(4)=30-15\,\mathrm{e}^{-2}=27.97$ V

练习题7-10　试求图7-44所示电路在$t>0$时的$v(t)$。假定开关已长时间断开，并且在$t=0$时刻闭合，试计算$t=0.5$时的$v(t)$。

答　$-5+15\,\mathrm{e}^{-2t}$ V，0.5182 V。

例题7-11　在图7-45所示电路中，开关已长时间闭合，并在$t=0$时刻断开，试求所有时刻的i与v。

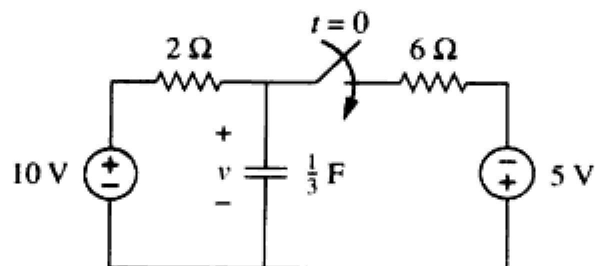


图 7-44　练习题 7-10 的电路原理图

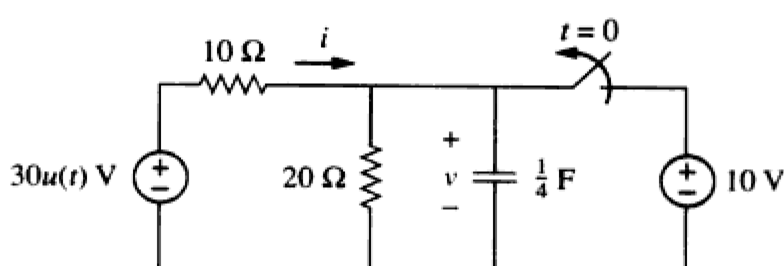


图 7-45　例题 7-11 的电路原理图

解 流过电阻的电流i在$t=0$时刻可以是不连续的，但电容器两端的电压却不可以。因此，总是应该先求出v，之后再由v得到i。

根据单位阶跃函数的定义，有：

$$30(u)t=\begin{cases}0, & t<0\\ 30, & t>0\end{cases}$$

当$t<0$时，开关闭合，$30\,u(t)=0$，也就是说电压源$30\,u(t)$被短路电路所取代，对电压v无任何贡献。由于开关长时间闭合，所以电容器两端的电压已达到稳态，并且电容器表现为开路特性。因此，在$t<0$时的电路如图7-46a所示，由该电路可得：

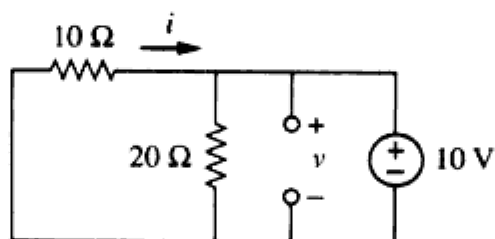
$$v=10\,\text{V},\qquad i=-\frac{v}{10}=-1\,\text{A}$$

由于电容器两端的电压不能突变，所以：

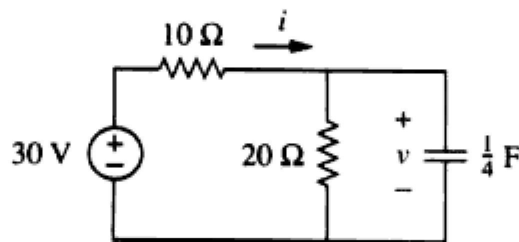
$$v(0)=v(0^-)=10\text{ V}$$

当$t>0$时，开关打开，10 V电压源与电路的连接被断开，电压源$30\,u(t)$开始起作用，于是电路等效为如图7-46b所示的情形。经过一段时间后，电路达到稳态状态，电容器再次表现出开路特性，利用分压原理可以计算出$v(\infty)$：

$$v(\infty)=\frac{20}{20+10}(30)=20\,\text{V}$$



(a) $t<0$



(b) $t>0$

图 7-46 例题 7-11 的求解

电容器两端的戴维南电阻为：

$$R_{\text{Th}}=10\,\|\,20=\frac{10\times 20}{30}=\frac{20}{3}\Omega$$

时间常数为：

$$\tau=R_{\text{Th}}C=\frac{20}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{3}s$$

因此，

$$v(t)=v(\infty)+[\,v(0)-v(\infty)\,]\,\text{e}^{-t/\tau}=20+(10-20)\,\text{e}^{-(3/5)t}=(20-10\,\text{e}^{-0.6t})\,\text{V}$$

为了求出i，由图7-46b可以注意到，i是流经20 Ω电阻与电容器的电流之和，即：

$$i=\frac{v}{20}+C\frac{\text{d}v}{\text{d}t}=1-0.5\text{e}^{-0.6t}+0.25(-0.6)(-10)\text{e}^{-0.6t}=(1+\text{e}^{-0.6t})\,\text{A}$$

由图7-46b可知满足$v+10i=30$，正是所期望的结果。因此，

$$v=\begin{cases}10\,\text{V}, & t<0\\ (20-10\text{e}^{-0.6t})\,\text{V}, & t\,\text{H}\,0\end{cases}$$

$$i=\begin{cases}-1\,\text{A}, & t<0\\ (1+\text{e}^{-0.6t})\,\text{A}, & t>0\end{cases}$$

注意，电容两端的电压是连续的，而电阻电流则不然。

练习题7-11 图7-47所示电路中的开关在$t=0$时刻闭合，试求所有时刻的$i(t)$与$v(t)$。注意，当$t<0$时，$u(-t)=1$，当$t>0$时，$u(-t)=0$，并且$u(-t)=1-u(t)$。

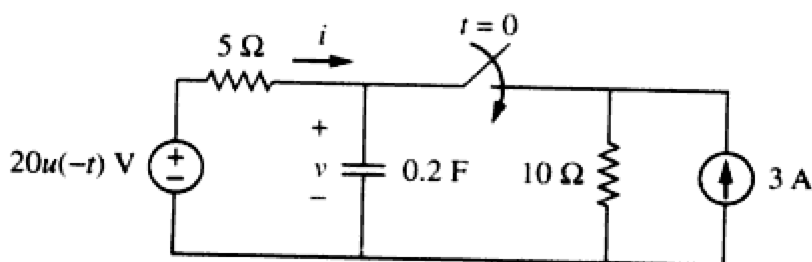


图 7-47 练习题 7-11 的电路原理图

答 $i(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ -2(1+e^{-1.5t})\text{A}, & t>0\end{cases}$ $v=\begin{cases}20V, & t<0\\ 10(1+e^{-1.5t})\text{V}, & t>0\end{cases}$

7.6 RL 电路的阶跃响应

考虑图7-48a所示的RL电路，它可以用图7-48b来取代。我们的目标是求出电感电流i作为电路的响应。这里不再利用基尔霍夫定律进行推导，而是采用式(7-50)~式(7-53)的简单方法，即令电路响应为瞬态响应与稳态响应之和：

$$i=i_t+i_{ss} \tag{7-55}$$

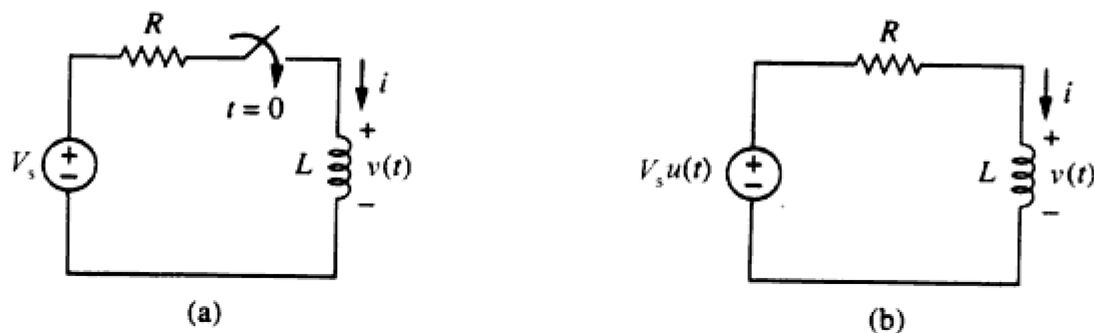


图 7-48 有阶跃输入电压的 RL 电路

我们知道，瞬态响应总是按照指数规律衰减的，即：

$$i_t=Ae^{-t/\tau} \qquad \tau=\frac{L}{R} \tag{7-56}$$

其中，A为待定常数。

稳态响应是图7-48a中开关闭合一段时间后的电流值。我们知道瞬态响应经过5倍时间常数后基本消失，届时电感器表现为短路，其两端的电压为零。电压源V_s全部加在电阻R上，因此稳态响应为：

$$i_{ss}=\frac{V_s}{R} \tag{7-57}$$

将式(7-56)与式(7-57)代入式(7-55)，得到：

$$i=Ae^{-t/\tau}+\frac{V_s}{R} \tag{7-58}$$

下面由i的初始值确定常数A。令I_0为流过电感的初始电流值，该初始电流可能是由V_s以外的某个电源引起的。由于流经电感器的电流不能突变，于是：

$$i(0^+)=i(0^-)=I_0 \tag{7-59}$$

因此，在$t=0$时刻，式(7-58)为：

$$I_0=A+\frac{V_s}{R}$$

由上式计算出A为：

$$A = I_0 - \frac{V_s}{R}$$

将A代入式(7-58)，得到：

$$i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right)e^{-t/\tau} \tag{7-60}$$

此即RL电路的全响应，如图7-49所示。式(7-60)所示响应还可写成：

$$\boxed{i(t) = i(\infty) + [i(0) - i(\infty)]e^{-t/\tau}} \tag{7-61}$$

其中，$i(0)$与$i(\infty)$分别是电流i的初始值和终值。因此，求解RL电路的阶跃响应需要知道以下三个值：

(1) $t=0$时刻电感器的初始电流$i(0)$；

(2) 电感器的最终电流$i(\infty)$；

(3) 时间常数τ。

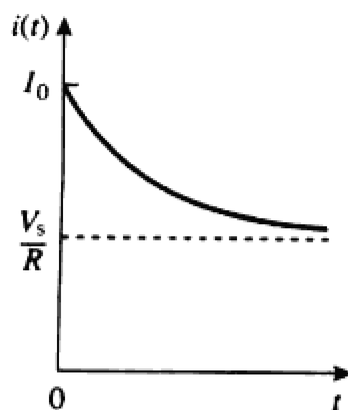


图 7-49 电感器初始电流为I_0时RL 电路的全响应

当$t<0$时，可以由给定电路求出上述第1项，而第2、3两项是在$t>0$时得到的。一旦确定了这几项，就可以利用式(7-61)得到电路的响应。应该注意，这种方法仅适用于阶跃响应。

另外，如果开关动作的时间是$t=t_0$时刻，而不是$t=0$时刻，则式(7-61)变为：

$$i(t) = i(\infty) + [i(t_0) - i(\infty)]e^{-(t-t_0)/\tau} \tag{7-62}$$

如果$I_0=0$，则有：

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \frac{V_s}{R}(1-e^{-t/\tau}), & t>0 \end{cases} \tag{7-63a}$$

即，

$$i(t) = \frac{V_s}{R}(1-e^{-t/\tau})u(t) \tag{7-63b}$$

此即电感器无初始电流条件下，RL电路的阶跃响应。利用$v=L\ \mathrm{d}i/\mathrm{d}t$与式(7-63)，可以求出电感器两端的电压为：

$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = V_s\frac{L}{\tau R}e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{L}{R}, \quad t>0$$

即

$$v(t) = V_s e^{-t/\tau}u(t) \tag{7-64}$$

图7-50给出了式(7-63)与式(7-64)表示的阶跃响应曲线。

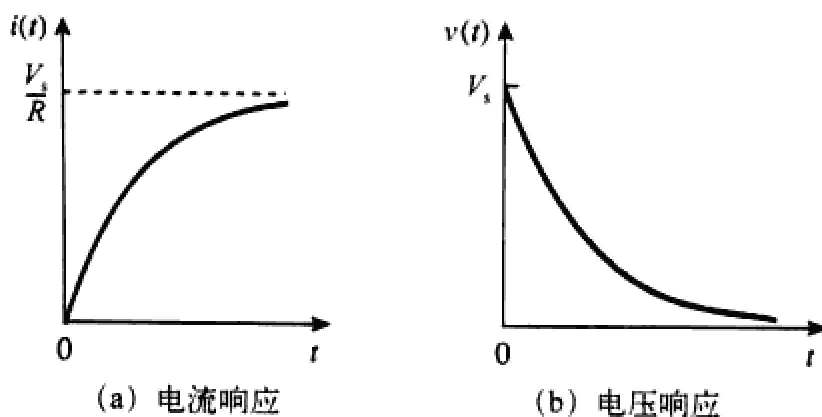


图 7-50 电感器无初始电流时，RL 电路的阶跃响应曲线

例题7-12 试求$t>0$时图7-51所示电路中的$i(t)$，假定开关已长时间闭合。

解 当$t<0$时，3 Ω电阻被短路，电感器相当于短路。$t=0^-$（即$t=0$之前的瞬间）时刻流经电感的电流为：

$$i(0^-)=\frac{10}{2}=5\,\text{A}$$

由于电感器电流不能突变，所以：

$$i(0)=i(0^+)=i(0^-)=5\,\text{A}$$

当$t>0$时，开关断开。2 Ω电阻与3 Ω电阻相串联，于是：

$$i(\infty)=\frac{10}{2+3}=2\,\text{A}$$

图 7-51 例题 7-12 的电路原理图

电感器两端的戴维南电阻为：

$$R_{\text{Th}}=2+3=5\,\Omega$$

时间常数为：

$$\tau=\frac{L}{R_{\text{Th}}}=\frac{\frac{1}{3}}{5}=\frac{1}{15}\text{s}$$

因此，

$$i(t)=i(\infty)+[\,i(0)-i(\infty)\,]\,\text{e}^{-t/\tau}=2+(5-2)\,\text{e}^{-15t}=2+3\,\text{e}^{-15t}\,\text{A},\quad t>0$$

检验：在图7-51中，当$t>0$时，必须满足KVL，即：

$$10=5i+L\frac{\text{d}i}{\text{d}t}$$

$$5i+L\frac{\text{d}i}{\text{d}t}=[10+15\text{e}^{-15t}]+\left[\frac{1}{3}(3)(-15)\text{e}^{-15t}\right]=10$$

说明结果正确。

练习题7-12 图7-52所示电路中的开关已长时间闭合，如果开关在$t=0$时刻断开，试求$t>0$时的$i(t)$。

答 $(2+\text{e}^{-10t})$A，$t>0$。

例题7-13 图7-53所示电路中的开关1在$t=0$时刻闭合，开关2在4 s之后再闭合，试求$t>0$时的$i(t)$，并计算$t=2$ s和5 s时的i。

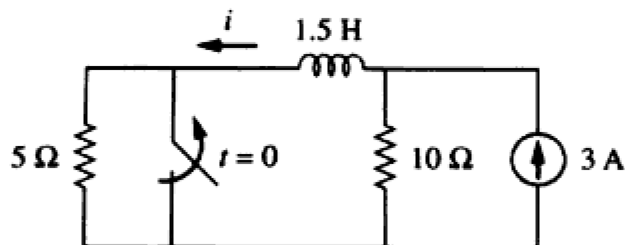


图 7-52 练习题 7-12 的电路原理图

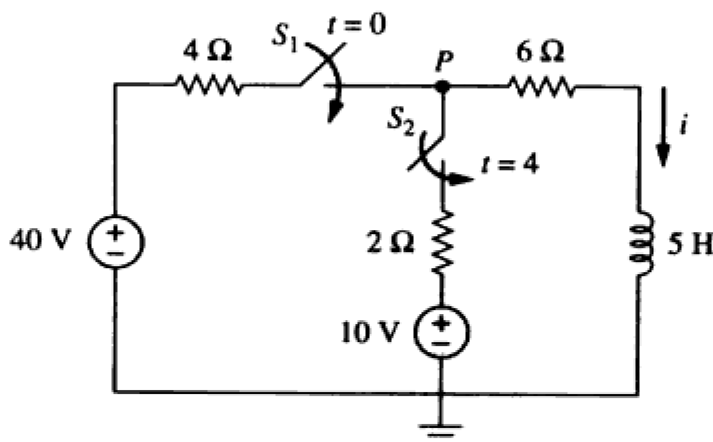


图 7-53 例题 7-13 的电路原理图

解 本例需要分别考虑三个时间区间：$t\leqslant 0$，$0\leqslant t\leqslant 4$和$t\geqslant 4$。当$t<0$时，开关S_1与S_2断开，所以$i=0$。由于电感器的电流不能突变，所以，

$$i(0^-)=i(0)=i(0^+)=0$$

当$0 \leqslant t \leqslant 4$时，开关$S_1$闭合，4 Ω电阻与6 Ω电阻相串联（切记，此时$S_2$仍然是断开的）。因此，假定此后$S_1$一直是闭合的，则有：

$$i(\infty)=\frac{40}{4+6}=4\,\mathrm{A},\qquad R_{\mathrm{Th}}=4+6=10\Omega$$

$$\tau=\frac{L}{R_{\mathrm{Th}}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}\mathrm{s}$$

于是，

$$i(t)=i(\infty)+[\,i(0)-i(\infty)\,]\,\mathrm{e}^{-t/\tau}=4+(0-4)\,\mathrm{e}^{-2t}=4(1-\mathrm{e}^{-2t})\,\mathrm{A},\quad 0\leqslant t\leqslant 4$$

当$t \geqslant 4$ s时，S_2闭合，10 V电压源被接入电路，电路发生变化。这一突变不会影响电感器的电流，因为电感器电流不能突变，因此，初始电流为：

$$i(4)=i(4\ )=4(1-\mathrm{e}^{-8})\approx 4\,\mathrm{A}$$

为了求出$i(\infty)$，令v为图7-53中节点P的电压，由KCL可得：

$$\frac{40-v}{4}+\frac{10-v}{2}=\frac{v}{6}\quad\Rightarrow\quad v=\frac{180}{11}v$$

$$i(\infty)=\frac{v}{6}=\frac{30}{11}=2.727\,\mathrm{A}$$

电感器两端的戴维南电阻为：

$$R_{\mathrm{Th}}=4\,\|\,2+6=\frac{4\times 2}{6}+6=\frac{22}{3}\Omega$$

并且

$$\tau=\frac{L}{R_{\mathrm{Th}}}=\frac{5}{\frac{22}{3}}=\frac{15}{22}\mathrm{s}$$

因此，

$$i(t)=i(\infty)+[\,i(4)-i(\infty)\,]\,\mathrm{e}^{-(t-4)/\tau},\quad t\geqslant 4$$

由于存在时间延迟，所以幂指数采用$(t-4)$，于是有：

$$\begin{aligned}i(t)&=2.727+(4-2.727)\mathrm{e}^{-(t-4)/\tau},\qquad \tau=\frac{15}{22}\\&=2.727+1.273\mathrm{e}^{-1.4667(t-4)},\qquad t\ \mathrm{H}\ 4\end{aligned}$$

将上述计算结果写在一起得到：

$$i(t)=\begin{cases}0, & t\ \mathrm{G}\ 0\\ 4(1-\mathrm{e}^{-2t}), & 0\ \mathrm{G}\ t\ \mathrm{G}\ 4\\ 2.727+1.273\mathrm{e}^{-1.4667(t-4)}, & t\ \mathrm{H}\ 4\end{cases}$$

在$t=2$时刻，

$$i(2)=4(1-\mathrm{e}^{-4})=3.93\,\mathrm{A}$$

在$t=5$时刻，

$$i(5)=2.727+1.273\mathrm{e}^{-1.4667}=3.02\,\mathrm{A}$$

练习题7-13 图7-54所示电路中的开关S_1在$t=0$时刻闭合，开关S_2在$t=2$ s时闭合，试求所有时刻的$i(t)$，并计算$i(1)$与$i(3)$。

答

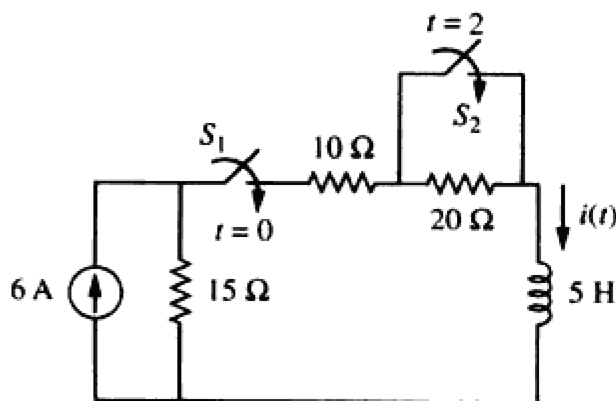


图 7-54 练习题 7-13 的电路原理图

$$i(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 2(1-e^{-9t}), & 0<t<2\\ 3.6-1.6e^{-5(t-2)}, & t>2\end{cases}$$

$i(1)=1.9997$ A，$i(3)=3.589$ A。

7.7 †一阶运算放大器电路

包含储能元件的运算放大器电路会表现出一阶特征。6.6节介绍的微分器与积分器就是一阶运算放大器电路的实例。实际上，电感器很少用于运算放大器电路中。因此，本节考虑的运算放大器电路均为RC电路。

分析运算放大器电路通常采用节点分析法，有时也要利用戴维南等效电路将运算放大器电路简化为易于分析处理的电路。下面将通过三个例子具体说明这些概念。第一个例子是分析无源激励运算放大器电路，另外两个例子涉及到阶跃响应。精心选取的这三个例子涵盖了所有可能的RC运算放大器电路，也就是电容器在运算放大器电路中位于各种不同的位置，即电容器位于其输入、输出或反馈回路中。

例题7-14 在图7-55a所示的运算放大器电路中，已知$v(0)=3$ V，$R_f=80$ kΩ，$R_1=20$ kΩ且$C=5$ μF，试求$t>0$时的v_o。

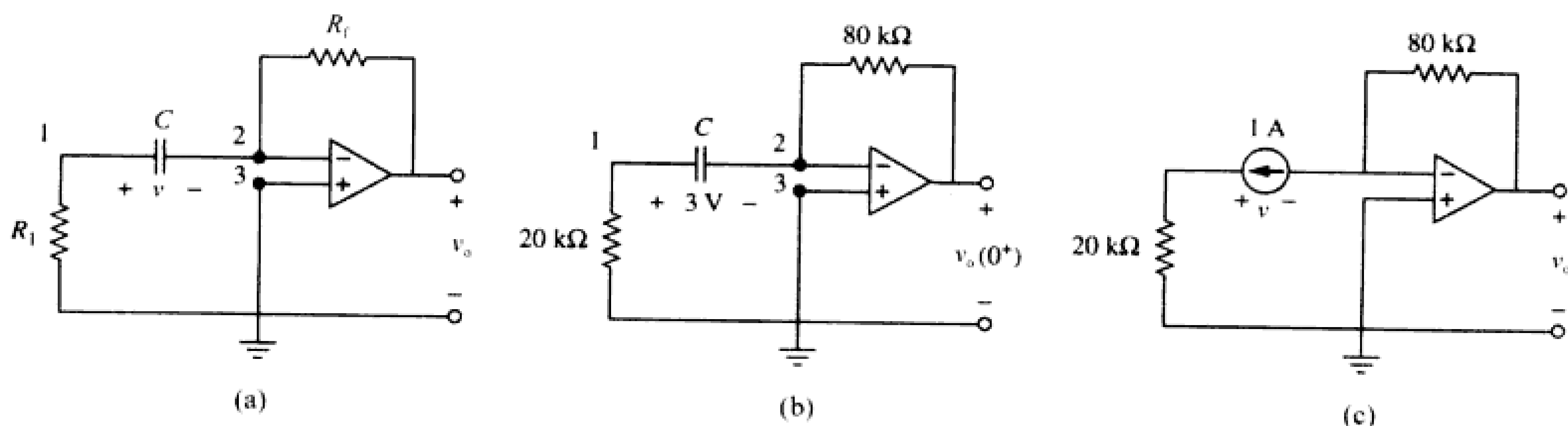


图 7-55　例题 7-14 的电路原理图

解　可以采用两种方法求解本例题。

方法 1：考虑图 7-55a 所示电路，利用节点分析法，推导其微分方程。如果 v_1 为节点 1 的电压，则在该节点处利用 KCL 可以得到：

$$\frac{0-v_1}{R_1}=C\frac{dv}{dt} \tag{7-14-1}$$

由于节点2与节点3必须具有相同的电位，故节点2的电位为零，于是，$v_1-0=v$，即$v_1=v$，式（7-14-1）变为：

$$\frac{dv}{dt}+\frac{v}{CR_1}=0 \tag{7-14-2}$$

上式与式(7-4b)类似，所以其求解方法与7.2节介绍的方法相同，即：

$$v(t)=V_0e^{-t/\tau},\qquad \tau=R_1C \tag{7-14-3}$$

其中，V_0为电容器两端的初始电压。但是$v(0)=3=V_0$，$\tau=20\times10^3\times5\times10^{-6}=0.1$，于是得到：

$$v(t)=3e^{-10t} \tag{7-14-4}$$

对节点2应用KCL可以得到：

$$C\frac{dv}{dt}=\frac{0-v_o}{R_f}$$

即

$$v_o=-R_fC\frac{dv}{dt} \tag{7-14-5}$$

于是，可以求出v_o为：

$$v_o=-80\times10^3\times5\times10^{-6}(-30e^{-10t})=12\ e^{-10t}\ V,\ t>0$$

方法 2：利用式(7-53)给出的简便方法求解，此时需求出 $v_o(0^+)$，$v_o(\infty)$以及 τ。由于 $v_o(0^+)=v_o(0^-)=3$ V，所以在图 7-55b 所示电路的节点 2 处应用 KCL 可以得到：

$$\frac{3}{20\ 000}+\frac{0-v_o(0^+)}{80\ 000}=0$$

即$v_o(0^+)=12$ V。由于该电路是无源激励的，所以$v(\infty)=0$ V。为了求出τ，需先确定电容器两端的等效电阻R_{eq}，如果将电容器移开，并用一个1 A的电流源取代，则得到如图7-55c所示的电路。对输入回路应用KVL可以得到：

$$20\ 000(1)-v=0 \qquad \Rightarrow \qquad v=20\text{ kV}$$

于是，

$$R_{eq}=\frac{v}{1}=20\text{k}\Omega$$

于是，$\tau=R_{eq}C=0.1$。因此，

$$\begin{aligned}v_o(t)&=v_o(\infty)+[v_o(0)-v_o(\infty)]e^{-t/\tau}\\&=0+(12-0)e^{-10t}=12\ e^{-10t}\ V,\ t>0\end{aligned}$$

与采用方法1得到的结果相同。

练习题7-14 在图7-56所示的运算放大器电路中，如果$v(0)=4$ V，试求v_o，$t>0$。假定$R_f=50$ k Ω，$R_1=10$ k Ω且$C=10$ μF。

答 $-4\ e^{-2t}$ V，$t>0$。

例题7-15 试确定图7-57所示电路中的$v(t)$与$v_o(t)$。

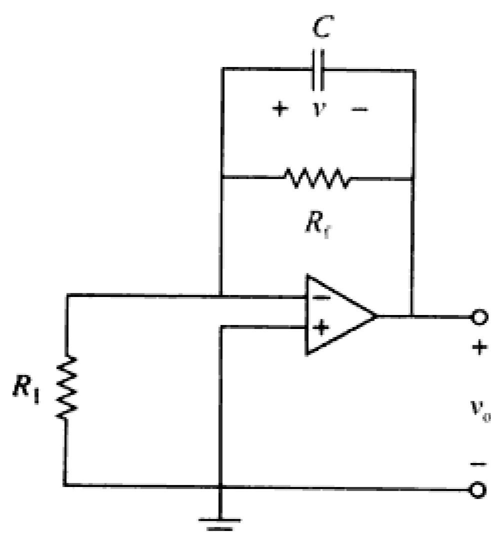


图 7-56 练习题 7-14 的电路原理图

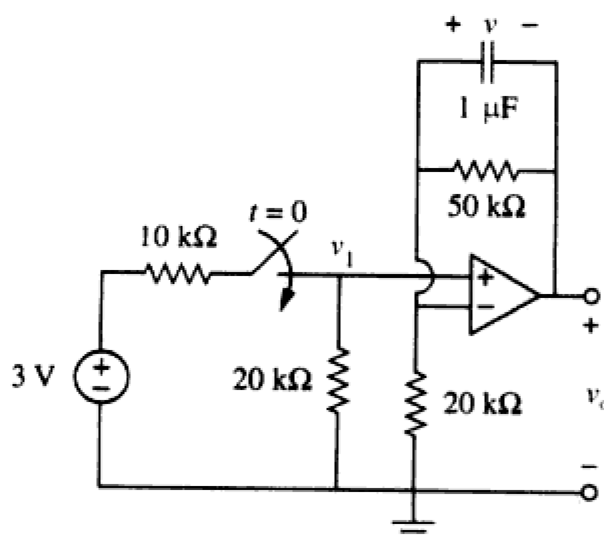


图 7-57 例题 7-15 的电路原理图

解 与前一道例题一样，本题同样可以采用两种方法求解，但这里仅采用第二种解法。由于本题求解的是电路的阶跃响应，故可以利用式(7-53)：

$$v(t)=v(\infty)+[v(0)-v(\infty)]e^{-t/\tau},\ t>0 \tag{7-15-1}$$

仅需求出时间常数τ，初始电压$v(0)$和最终电压$v(\infty)$即可。注意，这种方法仅严格地适用于由阶跃输入引起的电容器的电压响应。由于没有电流流入运算放大器的输入端，所以运算放大器反馈回路中的元件构成一个RC电路，其时间常数为：

$$\tau = RC = 50\times10^{3}\times10^{-6} = 0.05 \tag{7-15-2}$$

当$t<0$时，开关是断开的，电容器两端无电压，因此，$v(0)=0$；当$t>0$时，利用分压原理可以计算出节点1的电压：

$$v_1 = \frac{20}{20+10}3 = 2\,\text{V} \tag{7-15-3}$$

由于输入回路中没有储能元件，所以v_1在所有时刻t保持恒定。电容器在稳态时相当于开路，这样，运算放大器电路成为同相放大器。因此，

$$v_o(\infty) = \left(1+\frac{50}{20}\right)v_1 = 3.5\times2 = 7\,\text{V} \tag{7-15-4}$$

但是，

$$v_1 - v_o = v \tag{7-15-5}$$

所以，

$$v(\infty) = 2-7 = -5\,\text{V}$$

将τ、$v(0)$与$v(\infty)$代入式(7-15-1)，得到：

$$v(t) = -5+[0-(-5)]\,e^{-20t} = 5(e^{-20t}-1)\,\text{V},\ t>0 \tag{7-15-6}$$

由式(7-15-3)、式(7-15-5)与式(7-15-6)，得到：

$$v_o(t) = v_1(t) - v(t) = 7-5\,e^{-20t}\,\text{V},\ t>0 \tag{7-15-7}$$

练习题7-15　试求图7-58所示运算放大器电路中的$v(t)$与$v_o(t)$。

答　$40(1-e^{-10t})$mV，$40(e^{-10t}-1)$mV。

例题7-16　试求图7-59所示运算放大器电路在$t>0$时的阶跃响应$v_o(t)$。设$v_i=2\,u(t)$，$R_1=20\,\text{k}\Omega$，$R_f=50\,\text{k}\Omega$，$R_2=R_3=10\,\text{k}\Omega$且$C=2\,\mu\text{F}$。

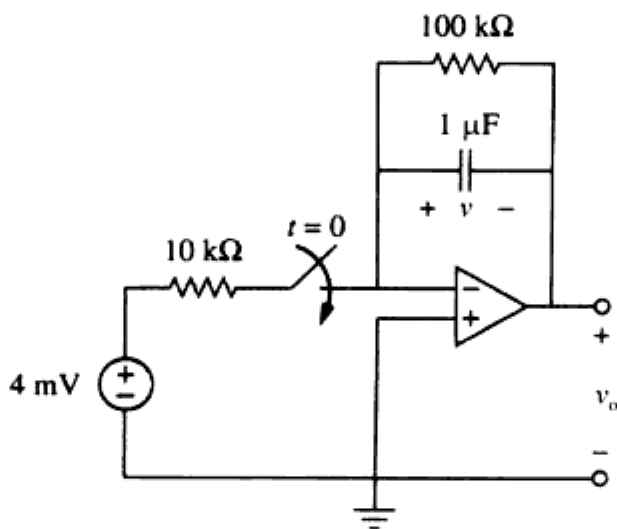


图 7-58　练习题 7-15 的电路原理图

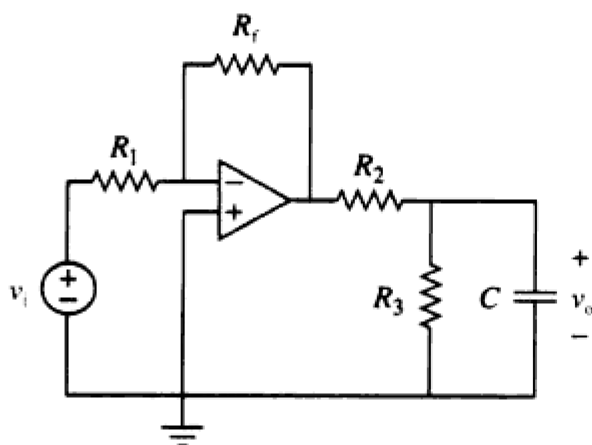


图 7-59　例题 7-15 的电路原理图

解　应该注意到，例题7-14中的电容器位于输入回路，而例题7-15中的电容器则位于反馈回路中。在本例题中，电容器位于运算放大器的输出电路中，同样，可以直接利用节点分析法求解本题，但这里利用戴维南等效电路则可以简化本例的求解。

将电容器临时移开，求出其两端的戴维南等效电路。为了求出V_{Th}，考虑图7-60a所示的电路，由于该电路是一个反相放大器，故：

$$V_{ab} = -\frac{R_f}{R_1}v_i$$

按照分压原理，有：

$$V_{Th} = \frac{R_3}{R_2+R_3}V_{ab} = -\frac{R_3}{R_2+R_3}\frac{R_f}{R_1}v_i$$

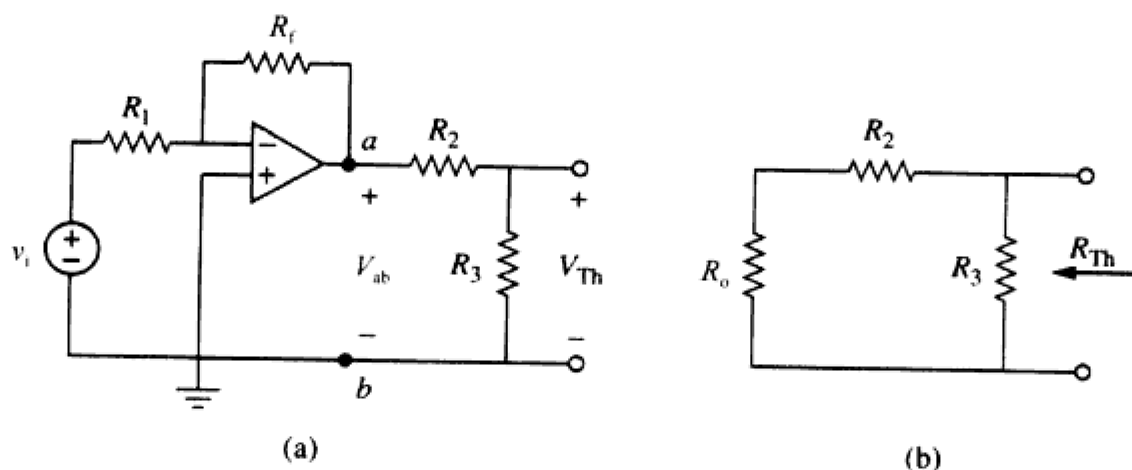


图 7-60 求解图 7-59 中电容器两端的 V_{Th} 与 R_{Th}

为了求出R_{Th}，考虑图7-60b所示的电路，图中R_o为运算放大器的输出电阻，对于理想运放而言，$R_o=0$，于是，

$$R_{Th} = R_2 \| R_3 = \frac{R_2R_3}{R_2+R_3}$$

将已知数据代入后得到：

$$V_{Th} = -\frac{R_3}{R_2+R_3}\frac{R_f}{R_1}v_i = -\frac{10}{20}\frac{50}{20}2u(t) = -2.5u(t)$$

$$R_{Th} = \frac{R_2R_3}{R_2+R_3} = 5\text{ k}\Omega$$

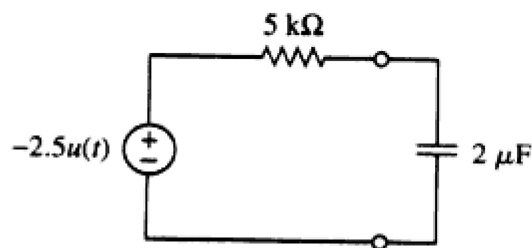


图 7-61 图 7-59 所示电路的戴维南等效电路

所得到的戴维南等效电路如图 7-61 所示，与图 7-40 类似。因此，其解与式(7-48)类似，即：

$$v_o(t) = -2.5(1-e^{-t/\tau})\,u(t)$$

其中，$\tau = R_{Th}C = 5\times10^3\times2\times10^{-6} = 0.01$。于是$t>0$时电路的阶跃响应为：

$$v_o(t) = 2.5(e^{-100t}-1)\,u(t)\text{ V}$$

练习题7-16 试计算图7-62所示电路的阶跃响应$v_o(t)$。设$v_i = 2\,u(t)$ V, $R_1 = 20$ k Ω, $R_f = 40$ k Ω, $R_2 = R_3 = 10$ k Ω, $C = 2$ μF。

答 $6(1-e^{-50t})\,u(t)$ V。

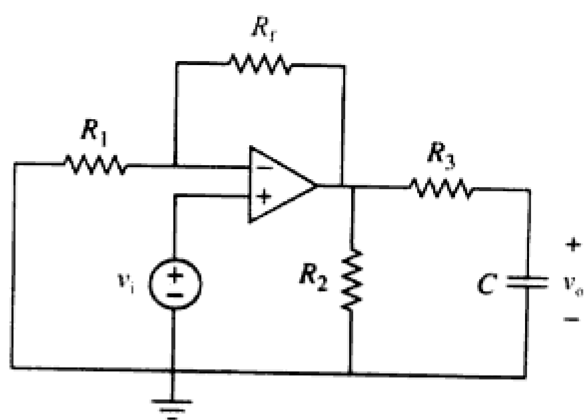


图 7-62 练习题 7-16 的电路原理图

7.8 利用 PSpice 软件进行瞬态分析

正如7.5节所讨论过的，瞬态响应是电路的临时响应，会很快消失，可以利用PSpice软件确定包含储能元件的电路瞬态响应。

PSpice利用“transient（瞬态）”指“时间的函数”，因此，PSpice软件中的瞬态响应并不会像所期望的那样真正消失。

如果有必要的话，首先要对电路进行PSpice直流分析以确定其初始条件，之后再将初始条件用于PSpice的瞬态分析中，得到电路的瞬态响应。建议（但不是必须）读者在进行直流分析时，将所有电容器开路，而将所有电感器短路。

例题7-17 试利用PSpice确定图7-63所示电路在$t>0$时的响应$i(t)$。

解 手算可以得到$i(0)=0$，$i(\infty)=2$ A，$R_{\text{Th}}=6$，$\tau=3/6=0.5$ s，于是，

$$i(t)=i(\infty)+[i(0)-i(\infty)]\,e^{-t/\tau}=2(1-e^{-2t}),\qquad t>0$$

利用PSpice软件进行分析时，首先应画出电路原理图，如图7-64所示，闭合开关的部件名称为“Sw-tclose”。本题无需标出电感器的初始条件，因为PSpice程序会由电路确定其初始条件。选择菜单“Analysis/Setup/Transient”，并将“Print Step（打印步长）”设置为25 ms，将“Final Step”设置为5 τ = 2.5 s。保存电路之后，就可以选择“Analysis/Simulate”执行模拟运算，在PSpice的A/D窗口中，选择“Trace/Add”并显示 − I(L1)为流过电感器的电流。$i(t)$的模拟结果如图7-65所示，与手算得到的瞬态响应一致。

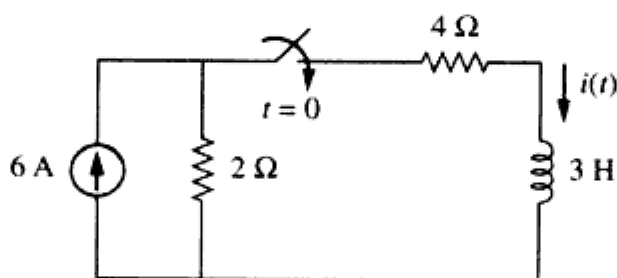


图 7-63 例题 7-17 的电路原理图

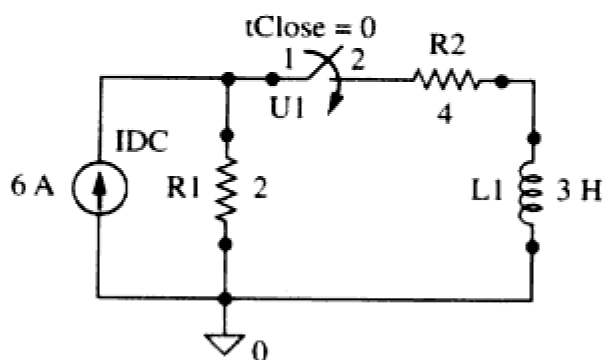


图 7-64 图 7-63 所示电路的 PSpice 原理图

注意，I(L1)前面的负号是必须的，因为电流是从电感器的上端流过电感器的，经逆时针绕行后，恰好出现负端。避免出现符号的一种方法是保证电流从电感器的引脚1流入，为了得到这种期望的正电流方向，就必须将最初的电感器符号逆时针旋转270°，并放到相应的位置上。

练习题7-17 对于图7-66所示的电路，试利用PSpice求$v(t)$，$t>0$。

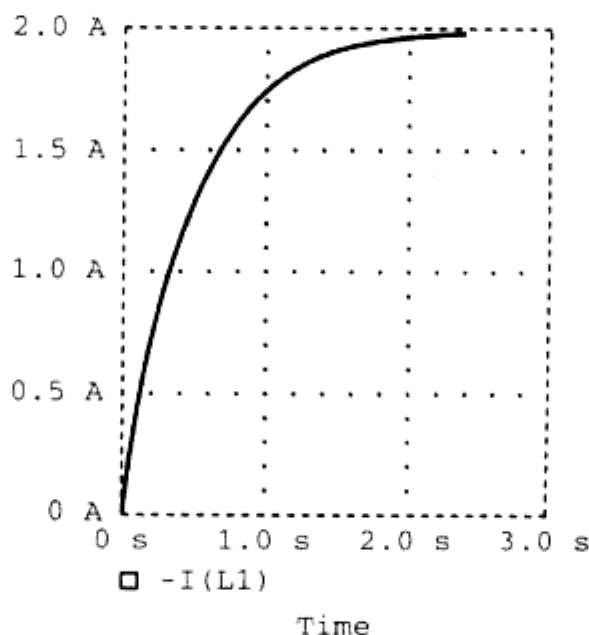


图 7-65 图 7-63 所示电路的响应曲线

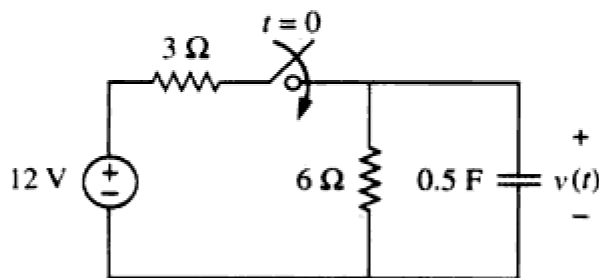


图 7-66 练习题 7-17 电路原理图

答 $v(t)=8(1-e^{-t})$V，$t>0$。响应曲线的形状与图7-65类似。

例题7-18 试确定图7-67所示电路中的响应$v(t)$。

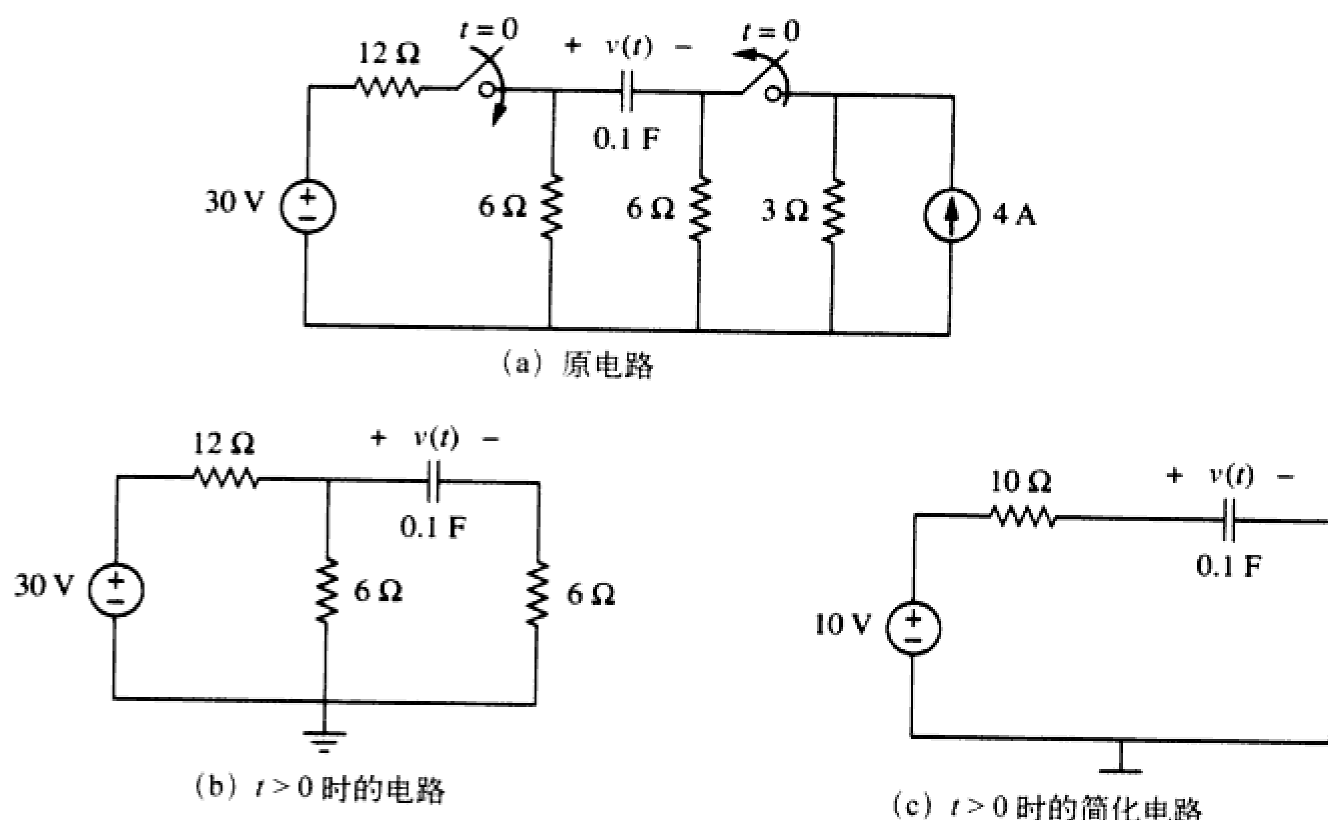


图 7-67 例题 7-18 的电路原理图

解 (1) **明确**问题。问题的表示已经非常清楚，并且用符号明确地描述了电路。

(2) **表述**对问题的理解。给定如图7-67a所示的电路，要确定响应$v(t)$。

(3) 确定**可选解**。可以用电路分析的方法、节点分析法和网孔分析法求解该电路，也可以用PSpice求解该电路。这里我们采用电路分析的方法（即求出戴维南等效电路）求解该问题，之后利用PSpice的两种方法对答案进行验证。

(4) **尝试**问题的求解。当$t < 0$时，左边的开关打开，右边的开关闭合，假定右边的开关已经长时间闭合，电路已进入稳定状态，此时电容器相当于开路，来自4 A电流源的电流流经6 Ω与3 Ω两个并联电阻器（$6 \| 3 = 18/9 = 2$），产生的压降为$2 \times 4 = 8\text{V} = -v(0)$。

在$t = 0$时刻，左边的开关闭合，右边的开关打开，得到如图7-67b所示的电路。

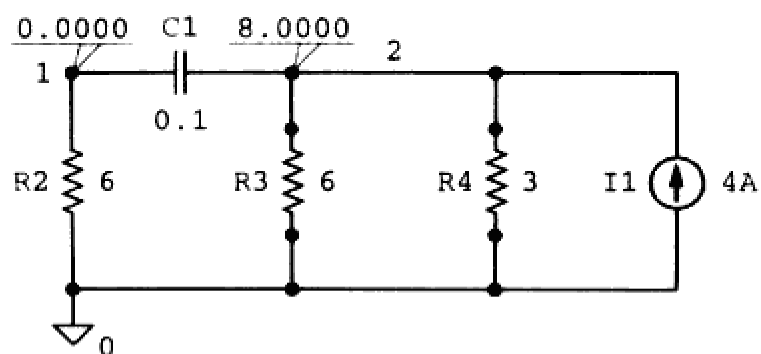
求解本题最简单的方法是求出从电容器两端看进去的戴维南等效电路，（移去电容器后的）开路电压等于左边6 Ω电阻两端的压降，即10 V（压降在12 Ω电阻与6 Ω电阻上均匀地分布，分别为20 V和10 V），此即V_{Th}。从电容器两端看进去的电阻等于$12 \| 6 + 6 = 72/18 + 6 = 10\ \Omega$，此即$R_{\text{Th}}$。由此便得到如图7-67c所示的戴维南等效电路，结合边界条件（$v(0) = -8$ V且$v(\infty) = 10$ V）以及$\tau = RC = 1$，可以得到：

$$v(t) = 10 - 18e^{-t}\ \text{V}$$

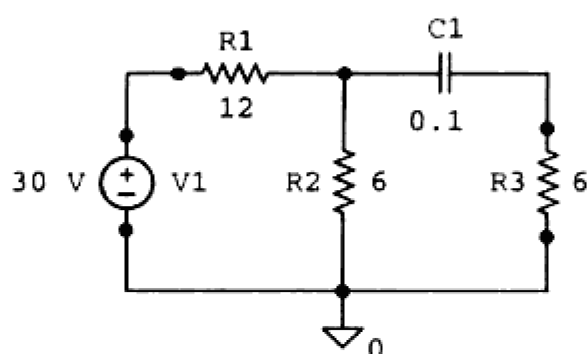
(5) **评价**得到的结果，利用PSpice软件求解该电路的方法有两种。

方法 1：首先执行 PSpice 直流分析，确定电容器两端的初始电压，相应的电路原理图如图7-68a 所示。图中插入的两个伪元件 VIEWPOINT 用于测量节点 1 与节点 2 的电压。对电路进行模拟后，就得到图 7-68a 上显示的参数结果 $V_1 = 0$ V 且 $V_2 = 8$ V，因此，电容器两端的初始电压为 $v(0) = V_1 - V_2 = -8$ V。下面利用该初始值与图 7-68b 所示的电路原理图进行 PSpice 瞬态分析。一旦画好图 7-68b 所示的原理图，就可以插入电容器的初始值 IC = −8。选择 Analysis/Setup/Transient 并将 Print Step 设置为 0.1，将 Final Step 设置为 4 τ=4 s。保存电路后，就可以选择 Analysis/Simulate 对电路进行模拟。在 PSpice A/D 窗口中，选择 Trace/Add，显示出 V(R2 :

2) − V(R3 : 2)或 V(C1 : 1) − V(C1 : 2)作为电容器的电压 $v(t)$，$v(t)$的响应曲线如图 7-69 所示。与手算得到的结果 $v(t) = 10 - 18\,e^{-t}$ 一致。



(a) 求解 $v(0)$的直流分析电路原理图



(b) 通过瞬态分析求解 $v(t)$的电路原理图

图 7-68

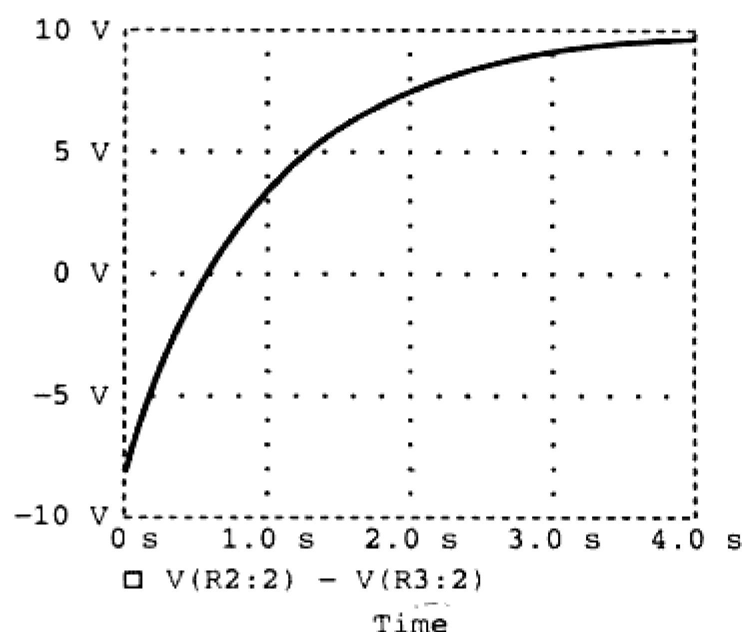


图 7-69 图 7-67 所示电路的响应 $v(t)$

方法 2：由于 PSpice 软件能够处理打开和闭合的开关元件并自动确定初始条件，所以可以直接对图 7-67 所示电路进行模拟。采用这种方法的电路原理图如图 7-70 所示，做好图后，选择 Analysis/Setup/Transient 菜单，并将 Print step 设置为 0.1，将 Final step 设置为 4 τ = 4 s。保存电路后，选择 Analysis/simulate 对电路进行模拟，在 PSpice A/D 窗口中，选择 Trace/Add，显示出 V(R2 : 2) − V(R3 : 2)作为电容器的电压 $v(t)$，所得到的 $v(t)$波形图与图 7-69 所示相同。

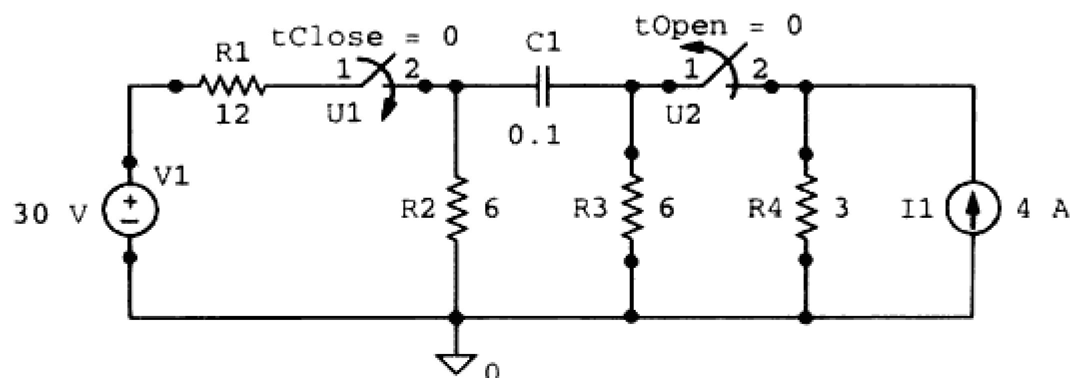


图 7-70 例题 7-18 的电路原理图

(6) 对结果是否满意？显然，我们已经求出了输出响应$v(t)$的值，即本题所要求解的参数，同时也验证了答案的有效性，可以将上述过程作为该问题的完整解。

练习题7-18 图7-71所示电路中的开关已长时间断开，并在$t = 0$时刻闭合，如果$i(0) = 10$ A，试通过手算和PSpice确定$i(t)$，$t > 0$。

答 $i(t) = 6 + 4\,e^{-5t}$ A，利用PSpice分析得到的$i(t)$波形图如图7-72所示。

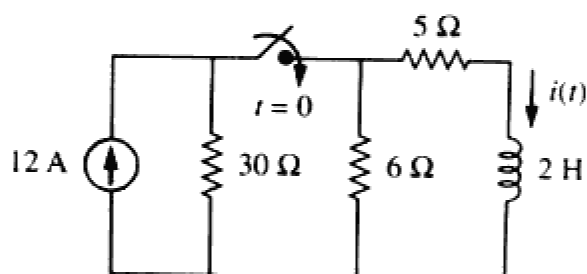


图 7-71 练习题 7-18 的电路原理图

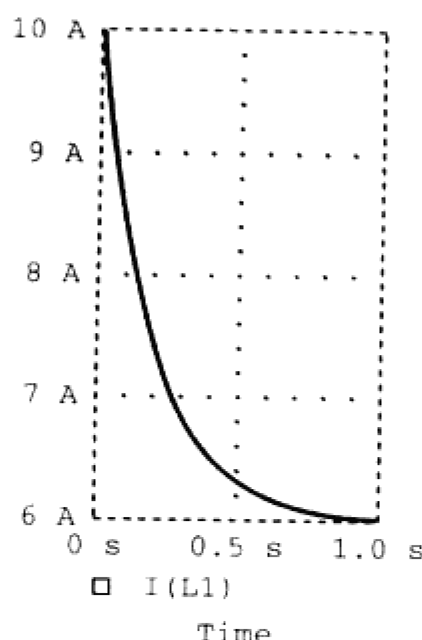


图 7-72 练习题 7-18 的响应曲线

7.9 †应用

RC电路与RL电路在许多电子设备中都很常用，包括：直流电源中的滤波器、数字通信中的平滑电路、微分器、积分器、延时电路以及继电器电路等。其中某些应用是利用RC或RL电路时间常数短（或长）的优点。本节讨论四个简单的应用实例，前两个是RC电路，后两个是RL电路。

7.9.1 延时电路

RC电路可以用来提供不同的时间延迟，图7-73给出了一个RC延时电路，基本上是由电容器和与其并联的氖灯泡组成。电压源能够提供使灯泡点亮的足够电压。开关闭合时，电容器两端的电压逐渐升高至110 V，其升高速率取决于电路的时间常数$(R_1+R_2)C$。灯泡一开始相当于开路，直至其两端的电压超过某个电压值（例如70V）后才点亮发光。灯泡点亮后，电容器就通过它放电，由于灯泡亮后的阻值小，电容器两端的电压会迅速降低从而导致灯泡熄灭。熄灭后的灯泡再次相当于开路，电容器被再度充电。调节电阻R_2可以使电路的延迟时间变长或变短，于是每隔时间常数$\tau=(R_1+R_2)C$的时间，就会经历一次灯泡由点亮到熄灭，电容器再度充电到再点亮的循环过程，因为时间常数τ决定了电容器两端电压升高使灯泡点亮或电压降低使灯泡熄灭所需的时间。

路政施工现场常见的闪烁警示灯就是这种RC延时电路的一个有用实例。

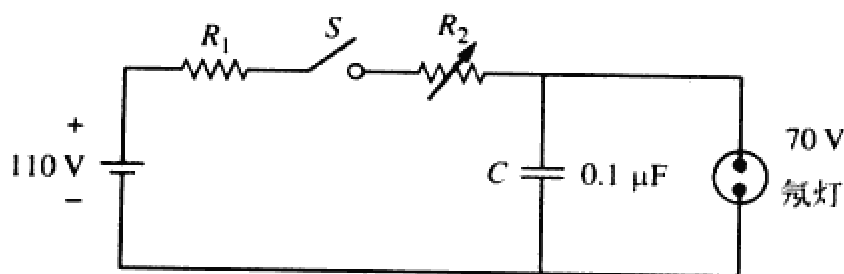


图 7-73 RC 延时电路

例题7-19 在图7-73所示电路中，假定$R_1=1.5\ \text{M}\Omega$，$0<R_2<2.5\ \text{M}\Omega$。(a) 试计算电路的两个极限时间常数；(b) 假定R_2取其最大值，试求开关闭合后，灯泡第一次点亮需要多长时间？

解 (a) R_2的最小值为0 Ω，于是该电路相应的时间常数为：

$$\tau=(R_1+R_2)C=(1.5\times10^6+0)\times0.1\times10^{-6}=0.15\ \text{s}$$

R_2的最大值为2.5 MΩ，此时该电路相应的时间常数为：

$$\tau=(R_1+R_2)C=(1.5+2.5)\times10^6\times0.1\times10^{-6}=0.4\text{ s}$$

因此，恰当地设计电路，就可以调整电路的时间常数，从而在电路中引入一个合适的时间延迟。

（b）假定电容器初始时刻未被充电，即$v_C(0)=0$，而$v_C(\infty)=110$，但是，

$$v_C(t)=v_C(\infty)+[v_C(0)-v_C(\infty)]\,\mathrm{e}^{-t/\tau}=110[1-\mathrm{e}^{-t/\tau}]$$

其中，$\tau=0.4$ s，如（a）中计算的结果。当$v_C=70$ V时，灯泡点亮。如果在$t=t_0$时刻，$v_C(t)=70$ V，则有：

$$70=110[1-\mathrm{e}^{-t_0/\tau}]\quad\Rightarrow\quad\frac{7}{11}=1-\mathrm{e}^{-t_0/\tau}$$

即

$$\mathrm{e}^{-t_0/\tau}=\frac{4}{11}\quad\Rightarrow\quad\mathrm{e}^{t_0/\tau}=\frac{11}{4}$$

上式两边取自然对数，得到：

$$t_0=\tau\ln\frac{11}{4}=0.4\ln2.75=0.4046\text{s}$$

求解t_0的一般公式为：

$$t_0=\tau\ln\frac{-v(\infty)}{v(t_0)-v(\infty)}$$

当且仅当$v(t_0)<v(\infty)$时，该灯泡才会每隔t_0秒重复地被点亮。

练习题7-19 图7-74所示的RC电路是一个报警器电路，当流过报警器的电流超过120 μA时，就会报警，如果$0\leqslant R\leqslant6$ kΩ，试求该电阻变化时电路所能产生的时间延迟范围。

答 在47.23 ms与124 ms之间。

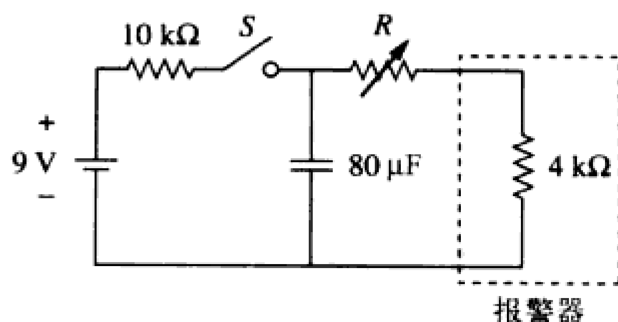


图 7-74 练习题 7-19 的电路原理图

7.9.2 闪光灯单元

电子闪光灯单元是RC电路的一个常见应用实例，其原理是利用电容器阻止其两端电压突变的性质。图7-75给出了一个简化电路，该电路主要由一个高压直流电源、一个限流大电阻R_1以及一个与低阻值（R_2）闪光灯相并联的电容器C组成。开关处于位置1时，时间常数（$\tau_1=R_1C$）很大，电容器被缓慢地充电，如图7-76a所示，电容器两端的电压逐渐由零升高至V_s，而流过它的电流逐渐由$I_1=V_s/R_1$下降至零。充电时间大约为时间常数的5倍，

$$T_{充电}=5R_1C\tag{7-65}$$

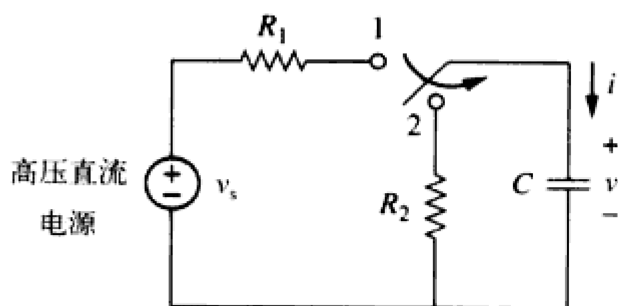


图 7-75 闪光灯单元电路，开关处于位置 1 时缓慢充电，开关处于位置 2 时迅速放电

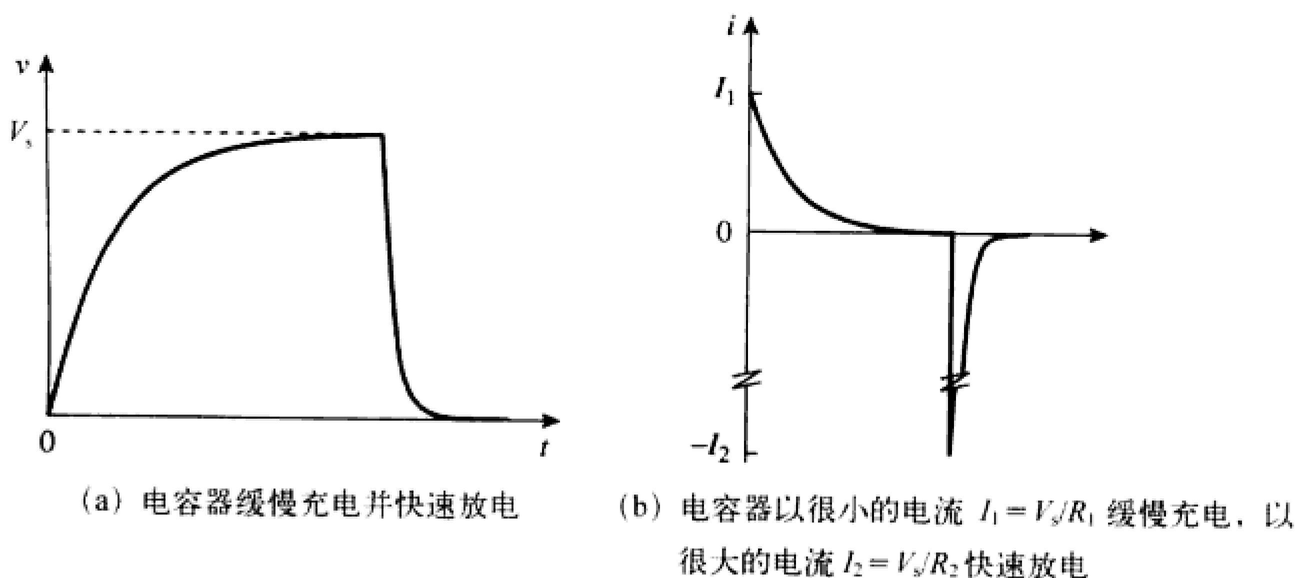
当开关处于位置2时，电容器放电。峰值为$I_2=V_s/R_2$的很大的放电电流在很短的时间内通过低阻值闪光灯R_2，如图7-76b所示，放电时间近似等于时间常数的5倍，

$$t_{放电}=5R_2C\tag{7-66}$$

因此，图7-75所示的简单RC电路能产生短时间的大电流脉冲，这类电路还可以用于电子点焊机和雷达发射管等装置中。

例题7-20 某电子枪电路包括一个6 kΩ限流电阻和一个可充电至240 V的2 000 μF电解电容器，如果

灯泡电阻为12 Ω，试求：(a) 峰值充电电流；(b) 电容器充满电荷所需的时间；(c) 峰值放电电流；(d) 电容器所储存的总能量以及 (e) 灯泡所消耗的平均功率。



(a) 电容器缓慢充电并快速放电

(b) 电容器以很小的电流 $I_1 = V_s/R_1$ 缓慢充电，以很大的电流 $I_2 = V_s/R_2$ 快速放电

图 7-76

解 (a) 峰值充电电流为：

$$I_1 = \frac{V_s}{R_1} = \frac{240}{6\times10^3} = 40\,\text{mA}$$

(b) 由式(7-65)可以得到：

$$t_{充电} = 5\,R_1C = 5\times6\times10^3\times2\,000\times10^{-6} = 60\text{ s} = 1\text{minute}$$

(c) 峰值放电电流为：

$$I_2 = \frac{V_s}{R_2} = \frac{240}{12} = 20\,\text{A}$$

(d) 电容器存储的能量为：

$$W = \frac{1}{2}CV_s^2 = \frac{1}{2}\times2\,000\times10^{-6}\times240^2 = 57.6\,\text{J}$$

(e) 电容器存储的能量在放电期间被灯泡消耗掉，于是，由式(7-66)可以得到：

$$t_{放电} = 5\,R_2C = 5\times12\times2\,000\times10^{-6} = 0.12\text{ s}$$

因此，消耗的平均功率为：

$$p = \frac{W}{t_{放电}} = \frac{57.6}{0.12} = 480\,\text{W}$$

练习题7-20 照相机的闪光灯电路包括一个可以充电至80 V的2 mF电容器，试求：

(a) 电容器上的电荷量是多少？

(b) 电容器上存储的能量是多少？

(c) 如果闪光灯闪亮的时间为0.8 ms，流经该闪光灯的平均电流是多少？

(d) 传递给闪光灯的功率是多少？

(e) 拍照之后，电容器需通过一个最大供电电流为5 mA的功率单元充电，此时电容器充满电需要多长时间？

答 (a) 0.16 C；(b) 6.4 J；(c) 200 A；(d) 8 kW；(e) 32 s。

7.9.3 继电器电路

磁力控制的开关称作继电器 (relay)。继电器通常是用于打开或闭合控制另一个电路的开关的电

磁器件。图7-77a给出了一个典型的继电器电路，其中的线圈电路是一个与图7-77b类似的RL电路，图中的R与L分别是线圈的电阻与电感。当图7-77a中的开关S_1闭合时，线圈电路被加上电压，线圈电流逐渐增加并产生磁场，在磁场增加到足够强时，就能拉动处于另一电路中的可动触片而将开关S_2闭合，此时称继电器吸合（pulled in），开关S_1的闭合到开关S_2的闭合之间的时间间隔t_d称为继电器延迟时间（relay delay time）。

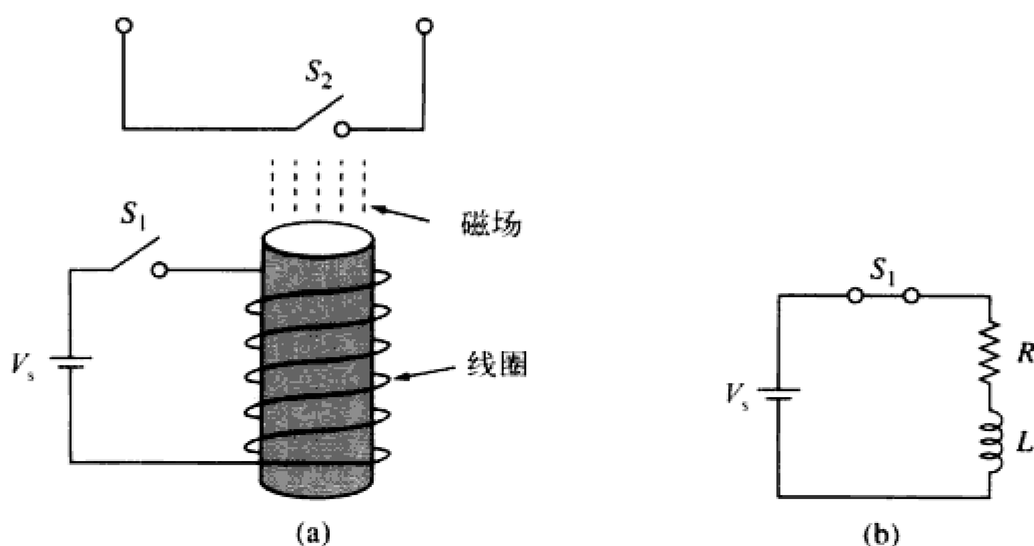


图 7-77 继电器电路

在早期数字电路中，继电器应用广泛，目前仍然被应用于高功率开关电路中。

例题7-21 某继电器的线圈由12 V电池供电，如果线圈电阻为150 Ω，线圈电感为30 mH，吸合电流为50 mA，试计算继电器延迟时间。

解 流经线圈的电流为：

$$i(t)=i(\infty)+[i(0)-i(\infty)]\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

其中，

$$i(0)=0,\qquad i(\infty)=\frac{12}{150}=80\,\mathrm{mA}$$

$$\tau=\frac{L}{R}=\frac{30\times10^{-3}}{150}=0.2\,\mathrm{ms}$$

因此，

$$i(t)=80\,[1-\mathrm{e}^{-t/\tau}]\,\mathrm{mA}$$

如果$i(t_d)=50\mathrm{mA}$，则：

$$50=80[1-\mathrm{e}^{-t_d/\tau}]\quad\Rightarrow\quad\frac{5}{8}=1-\mathrm{e}^{-t_d/\tau}$$

即，

$$\mathrm{e}^{-t_d/\tau}=\frac{3}{8}\quad\Rightarrow\quad\mathrm{e}^{t_d/\tau}=\frac{8}{3}$$

两边取自然对数，可以得到：

$$t_d=\tau\ln\frac{8}{3}=0.2\ln\frac{8}{3}\mathrm{ms}=0.1962\,\mathrm{ms}$$

另外，也可以按照如下公式求出t_d：

$$t_d=\tau\ln\frac{i(0)-i(\infty)}{i(t_d)-i(\infty)}$$

练习题7-21 某继电器的电阻为200 Ω，电感为500 mH，当流经线圈的电流达到350 mA时，该中继器触片闭合，试问从给线圈施加110 V电压开始到触片闭合需经过多长时间？

答 2.529 ms。

7.9.4 汽车点火电路

电感阻止其电流迅速变化的特性可被用于电弧或火花发生器中，汽车点火电路就是利用了这一特性。

汽车的汽油发动机在启动时要求气缸中的汽油混合物在适当时刻被点燃，这就要通过火花塞（如图7-78所示）来完成，火花塞主要是由一对气隙电极组成。在两个电极之间产生一个高压（几千伏特）时，电极气隙中就会形成火花，从而点燃气缸中的油汽混合物。但是通过供电电压仅12V的汽车电池如何获得如此之高的电压呢？这就是要利用电感器（火花线圈）L来实现。由于电感器两端的电压为$v=L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$，因此，如果使电流在极短的时间内出现很大的变化，就可以获得非常大的$\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$，从而使电感器两端的电压很高。当图7-78中的点火开关闭合时，流过电感器的电流逐渐增大，并且最终达到$i=V_s/R$，其中$V_s=12$ V。电感器充电所需的时间为该电路时间常数（$\tau=L/R$）的5倍：

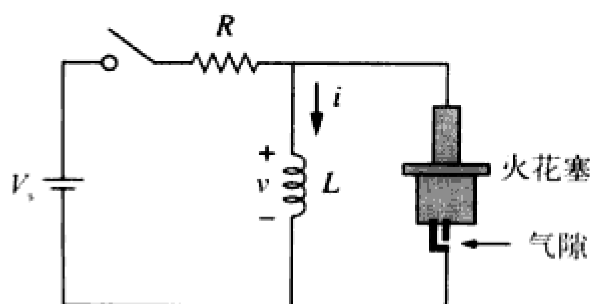


图 7-78 汽车点火电路

$$t_{充电}=5\frac{L}{R} \tag{7-67}$$

由于稳态时的i是恒定的，所以$\mathrm{d}i/\mathrm{d}t=0$并且电感器两端的电压$v=0$。当开关突然断开时，电感器两端就会形成一个很高的电压（由于电磁场的快速消失），从而在空气隙中产生火花或电弧，直至放电过程中电感器中的储能被消耗为止。在实验室中利用电感电路做实验时，上述效应也时有发生，使人有电击的感觉，所以必须引起注意。

例题7-22 在与图7-78类似的汽车点火电路中，螺线管的阻值为4 Ω，电感为6 mH，如果电池的供电电压为12 V，试确定开关闭合后，流过该螺线管的电流终值、线圈中储存的能量以及气隙两端的电压，假定断开开关需要1 μs。

解 流过线圈的电流终值为：

$$I=\frac{V_s}{R}=\frac{12}{4}=3\text{A}$$

线圈中储存的能量为：

$$W=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\times 6\times 10^{-3}\times 3^2=27\text{ mJ}$$

气隙两端的电压为：

$$V=L\frac{\Delta I}{\Delta t}=6\times 10^{-3}\times\frac{3}{1\times 10^{-6}}=18\text{kV}$$

练习题7-22 汽车点火系统的点火线圈阻值为5Ω，电感为20 mH，供电电压为12 V。试计算：线圈完全充电所需的时间，线圈中存储的能量以及火花隙的电压，假定开关断开需要2 μs。

答 20 ms，57.6 mJ以及24 kV。

7.10 本章小结

（1）本章介绍的电路分析方法适用于任何一阶电路，即最终可简化为由一个电阻和一个储能元

件（电感器或电容器）组成的等效电路的任何电路。之所以称之为一阶电路是因为其电路特性可以用一阶微分方程来描述。在分析RC电路和RL电路时，必须牢记，在直流稳态条件下，电容器相当于开路，而电感器则相当于短路。

（2）当没有独立电源作用于电路时，可以得到其自然响应，它的一般形式为：

$$x(t)=x(0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

其中，x表示流经电阻器、电容器或电感器的电流，或者表示电阻器、电容器或电感器两端的电压。$x(0)$为x的初始值。由于绝大多数实际的电阻器、电容器和电感器总是有损耗的，所以自然响应是一种瞬态响应，即会随着时间而消失。

（3）时间常数τ是指电路响应衰减至其初始值的1/e时所需要的时间。对于RC电路而言，$\tau=RC$，对于RL电路而言，$\tau=L/R$。

（4）本章介绍的奇异函数包括单位阶跃函数、单位斜升函数和单位冲激函数。单位阶跃函数$u(t)$为：

$$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$$

单位冲激函数为：

$$\delta(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \text{其他}, & t=0\\ 0, & t>0\end{cases}$$

单位斜升函数为：

$$r(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0\\ t, & t\geqslant 0\end{cases}$$

（5）稳态响应是独立电源长时间作用于电路后，电路所表现出的特征。瞬态响应是完全响应中随时间而消失的分量。

（6）电路的完全响应由其稳态响应和瞬态响应构成。

（7）阶跃响应是电路对于突然施加的直流电流或电压的响应。求解一阶电路的阶跃响应需要知道初始值$x(0^+)$、终止值$x(\infty)$以及时间常数τ。有了这三个要素，就可以得到阶跃响应为：

$$x(t)=x(\infty)+[x(0^+)-x(\infty)]\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

更一般地表达形式为：

$$x(t)=x(\infty)+[x(t_0^+)-x(\infty)]\,\mathrm{e}^{-(t-t_0)/\tau}$$

或者写成：

$$\text{瞬时值}=\text{终值}+[\text{初值}-\text{终值}]\,\mathrm{e}^{-(t-t_0)/\tau}$$

（8）PSpice对于确定电路的瞬态响应是非常有用的。

（9）RC电路与RL电路的四个应用实例是：延时电路、闪光灯单元、继电器电路和汽车点火电路。

复习题

7-1 某RC电路中，$R=2\ \Omega$，$C=4$ F，其时间常数为：

(a) 0.5 s (b) 2 s (c) 4 s
(d) 8 s (e) 15 s

7-2 某RL电路中，$R=2\ \Omega$，$L=4$ H，其时间常数为：

(a) 0.5 s (b) 2 s (c) 4 s
(d) 8 s (e) 15 s

7-3 给$R=2\ \Omega$，$C=4$ F的某RC电路中的电容器充电，该电容器上的电压达到其稳态值的63.2%所需要的时间为：

(a) 2 s (b) 4 s (c) 8 s
(d) 16 s (e) 上述结果都不对

7-4 某RL电路中，$R=2\ \Omega$，$L=4$ H，流过电感器

的电流达到其稳态值的40%所需的时间为：

(a) 0.5 s (b) 1 s (c) 2 s

(d) 4 s (e) 上述结果都不对

7-5 在图7-79所示电路中，$t=0$时刻前电容器两端的电压为：

(a) 10 V (b) 7 V (c) 6 V

(d) 4 V (e) 0 V

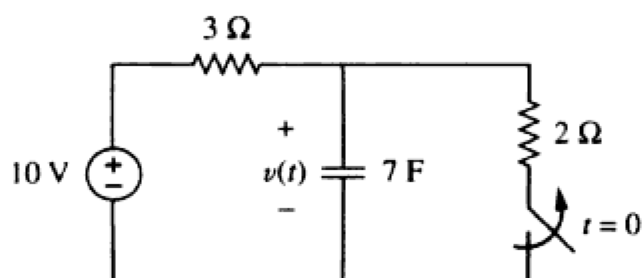


图 7-79 复习题 7-5 与复习题 7-6 的电路原理图

7-6 在图7-79所示电路中，$v(\infty)$为：

(a) 10 V (b) 7 V (c) 6 V

(d) 4 V (e) 0 V

7-7 在图7-80所示电路中，$t=0$时刻前电感器的电流为：

(a) 8 A (b) 6 A (c) 4 A

(d) 2 A (e) 0 A

7-8 在图7-80所示电路中，$i(\infty)$为：

(a) 8 A (b) 6 A (c) 4 A

(d) 2 A (e) 0 A

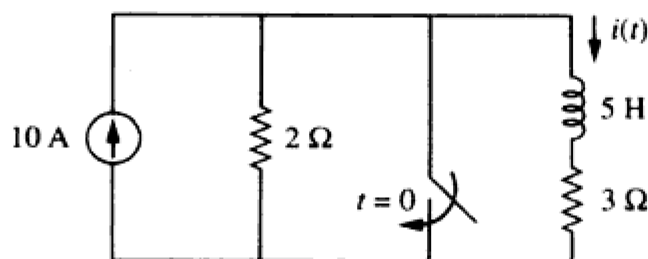


图 7-80 复习题 7-7 与复习题 7-8 的电路原理图

7-9 如果v_s在$t=0$时刻由2 V变到4 V，则可将v_s表达为：

(a) $\delta(t)$ V (b) $2\,u(t)$ V

(c) $2\,u(-t)+4\,u(t)$ V

(d) $2+2\,u(t)$ V (e) $4\,u(t)-2$ V

7-10 图7-116a所示脉冲用奇异函数可以表达为：

(a) $2\,u(t)+2\,u(t-1)$ V (b) $2\,u(t)-2\,u(t-1)$ V

(c) $2\,u(t)-4\,u(t-1)$ V (d) $2\,u(t)+4\,u(t-1)$ V

答案 7-1 d；7-2 b；7-3 c；7-4 b；7-5 d；7-6 a；7-7 c；7-8 e；7-9 c，d；7-10 b。

习题

7.2 节

7-1 在图7-81所示电路中，

$$v(t)=56e^{-200t}\ \text{V},\quad t>0$$

$$i(t)=8e^{-200t}\ \text{mA},\quad t>0$$

(a) 试求R与C的值。

(b) 试计算时间常数τ。

(c) 试计算电压衰减为其$t=0$时刻的初始值的一半所需的时间。

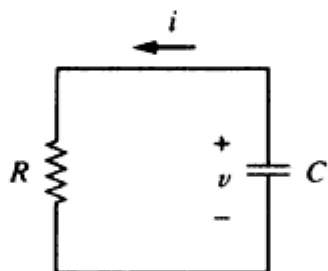


图 7-81 习题 7-1 的电路原理图

7-2 试求图7-82所示RC电路的时间常数。

7-3 试确定图7-83所示电路的时间常数。

7-4 图7-84所示电路中的开关已长时间处于位置A，假定开关在$t=0$瞬间由A掷向B，试求 $t>0$时的v。

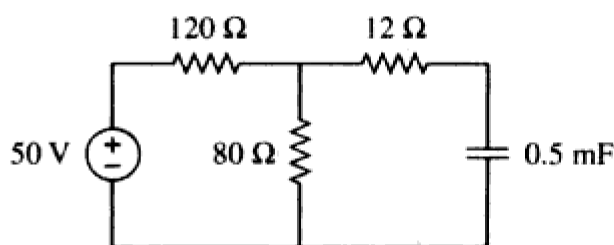


图 7-82 习题 7-2 的电路原理图

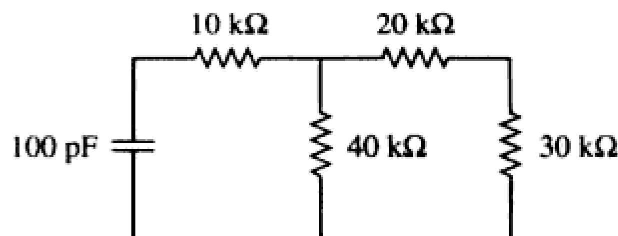


图 7-83 习题 7-3 的电路原理图

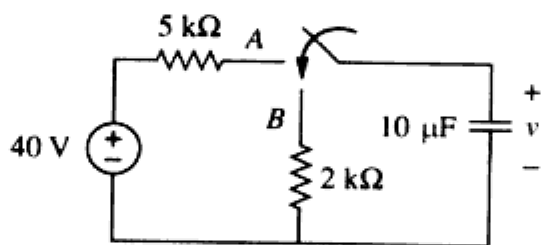


图 7-84 习题 7-4 的电路原理图

7-5 在图7-85所示电路中，试求$t > 0$时的$i(t)$。

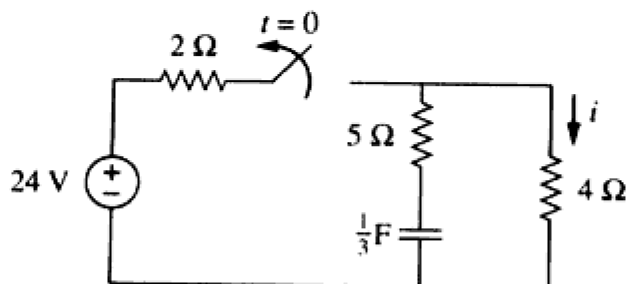


图 7-85 习题 7-5 的电路原理图

7-6 图7-86所示电路中的开关已长时间闭合，并在$t = 0$时刻断开，试求 $t \geqslant 0$时的$v(t)$。

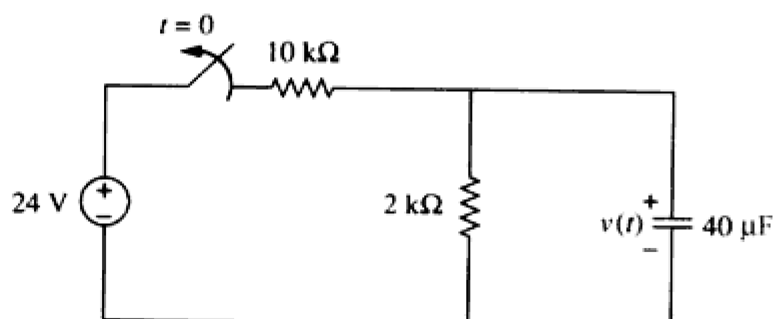


图 7-86 习题 7-6 的电路原理图

7-7 假定图7-87所示电路中的开关已长时间处于位置A，并在$t = 0$时刻掷向位置B，试求 $t \geqslant 0$时的$v_o(t)$。

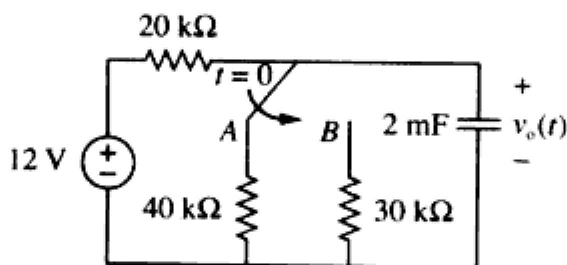


图 7-87 习题 7-7 的电路原理图

7-8 在图7-88所示电路中，如果$v = 10\ e^{-4t}$ V，$i = 0.2\ e^{-4t}$ A，$t > 0$。

(a) 试求R与C的值。

(b) 试确定时间常数。

(c) 试计算电容器中的初始储能。

(d) 试计算消耗初始能量的50%所需要的时间。

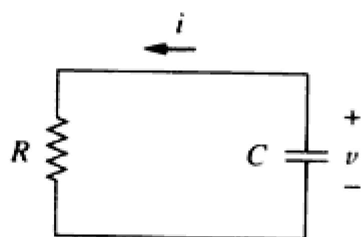


图 7-88 习题 7-8 的电路原理图

7-9 图7-89所示电路中的开关在$t = 0$时刻断开，试求$t > 0$时的v_o。

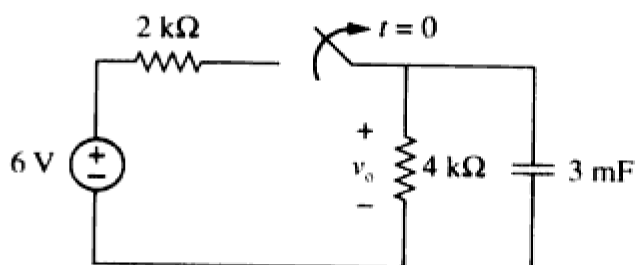


图 7-89 习题 7-9 的电路原理图

7-10 在图7-90所示电路中，试求$t > 0$时的$v_o(t)$。并确定电容器电压衰减为其$t = 0$时刻的初始值的三分之一所需的时间。

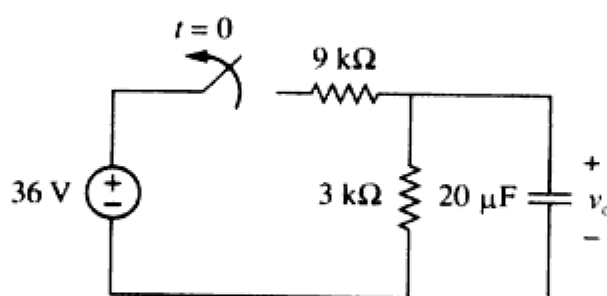


图 7-90 习题 7-10 的电路原理图

7.3 节

7-11 在图7-91所示电路中，试求$t > 0$时的i_o。

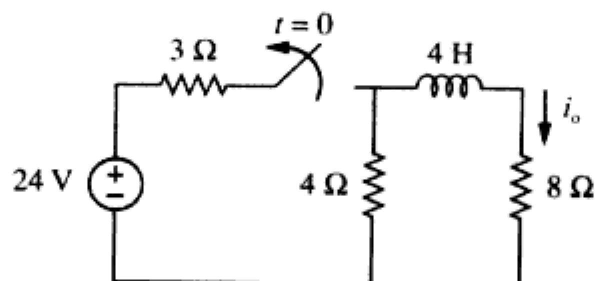


图 7-91 习题 7-11 的电路原理图

7-12 图7-92所示电路中的开关已长时间闭合，在$t = 0$时刻，开关断开，试计算$t > 0$时的$i(t)$。

7-13 在图7-93所示电路中，

$$v(t) = 20e^{-10^3 t}\ \text{V}, \quad t > 0$$

$$i(t) = 4e^{-10^3 t}\text{ mA},\quad t>0$$

（a）试求R、L以及τ的值。

（b）试计算电阻器在$0<t<0.5$ ms期间消耗的能量。

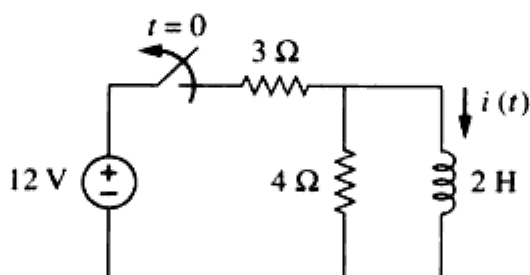


图 7-92 习题 7-12 的电路原理图

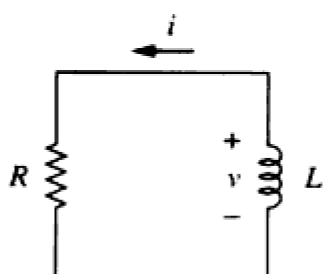


图 7-93 习题 7-13 的电路原理图

7-14 试计算图7-94所示电路的时间常数。

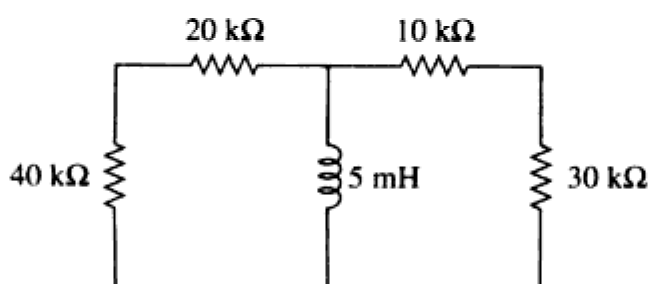


图 7-94 习题 7-14 的电路原理图

7-15 试求图7-95所示各电路的时间常数。

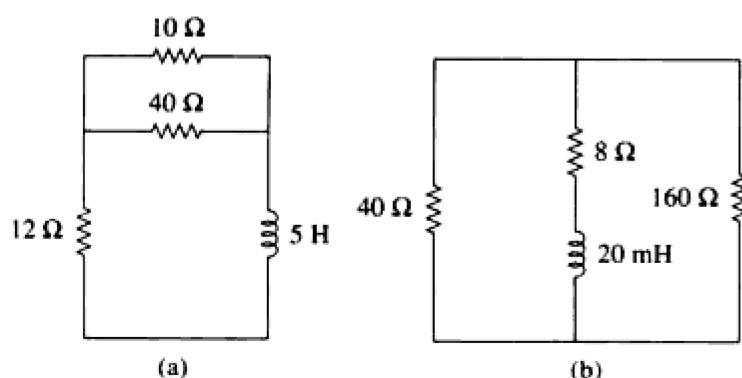


图 7-95 习题 7-15 的电路原理图

7-16 试确定图7-96所示各电路的时间常数。

7-17 在图7-97所示电路中，如果$i(0)=2$ A，$v(t)=0$，试求$v_o(t)$。

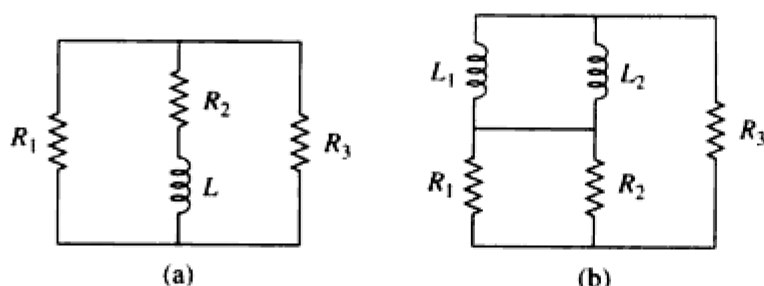


图 7-96 习题 7-16 的电路原理图

7-18 在图7-98所示电路中，试确定$i(0)=1$ A，$v(t)=0$时的$v_o(t)$。

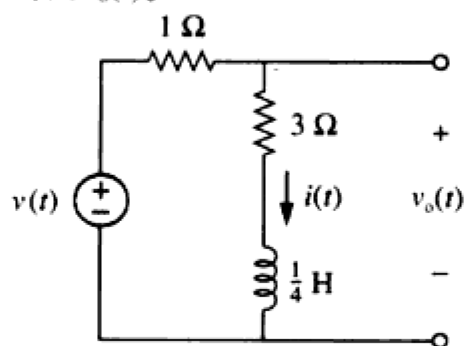


图 7-97 习题 7-17 的电路原理图

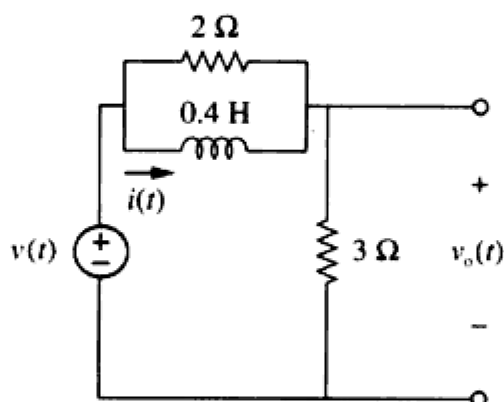


图 7-98 习题 7-18 的电路原理图

7-19 在图7-99所示电路中，如果$i(0)=2$ A，试求$t>0$时的$i(t)$。

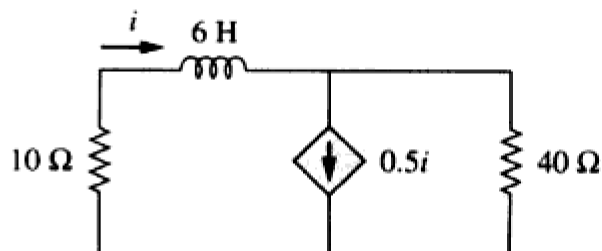


图 7-99 习题 7-19 的电路原理图

7-20 在图7-100所示电路中，$v=120\ e^{-50t}$ V且$i=30\ e^{-50t}$ A，$t>0$。

（a）试求L与R的值。

（b）试确定时间常数。

（c）试计算电感器的初始储能。

（d）在10 ms内消耗初始储能的比例为多少？

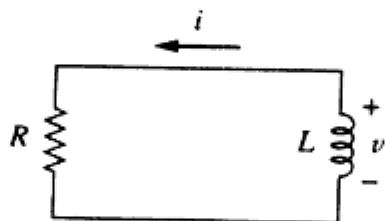


图 7-100　习题 7-20 的电路原理图

7-21　在图7-101所示电路中，试求电感器的稳态储能为1 J时的电阻值R。

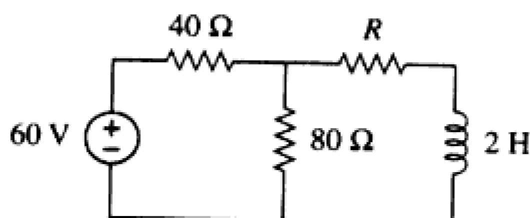


图 7-101　习题 7-21 的电路原理图

7-22　在图7-102所示电路中，如果$i(0)=10$ A，试求$t>0$时的$i(t)$与$v(t)$。

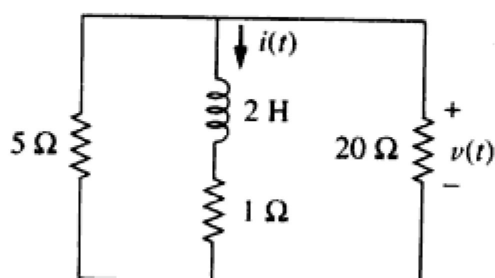


图 7-102　习题 7-22 的电路原理图

7-23　在图7-103所示电路中，如果$v_o(0)=2$ V，试求$t>0$时的v_o与v_x。

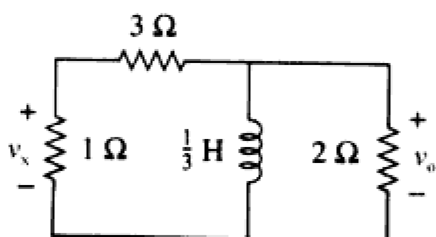


图 7-103　习题 7-23 的电路原理图

7.4 节

7-24　试利用奇异函数表达如下各信号：

(a) $v(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ -5, & t>0\end{cases}$

(b) $i(t)=\begin{cases}0, & t<1\\ -10, & 1<t<3\\ 10, & 3<t<5\\ 0, & t>5\end{cases}$

(c) $x(t)=\begin{cases}t-1, & 1<t<2\\ 1, & 2<t<3\\ 4-t, & 3<t<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

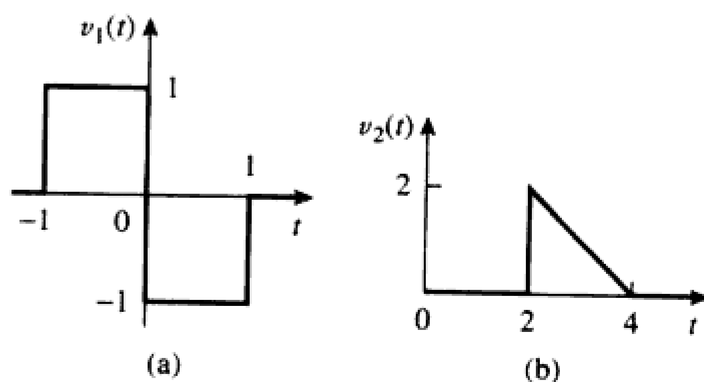
(d) $y(t)=\begin{cases}2, & t<0\\ -5, & 0<t<1\\ 0, & t>1\end{cases}$

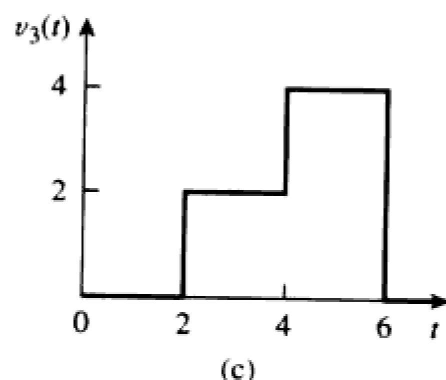
7-25　试画出如下各信号的波形图：

(a) $i(t)=u(t-2)+u(t+2)$

(b) $v(t)=r(t)-r(t-3)+4u(t-5)-8u(t-8)$

7-26　试利用奇异函数写出图7-104所示各个信号的表达式。





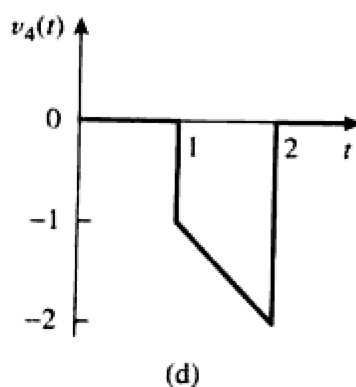


图 7-104　习题 7-26 的图

7-27　试利用阶跃函数写出图7-105所示$v(t)$的表达式。

7-28　试画出如下信号的波形：

$$i(t)=r(t)+r(t-1)-u(t-2)-r(t-2)+r(t-3)+u(t-4)$$

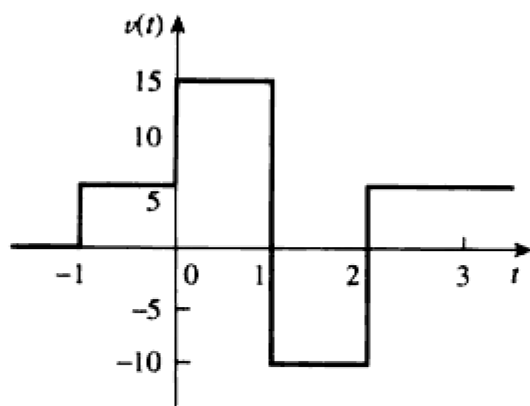


图 7-105 习题 7-27 的电路原理图

7-29 试画出如下函数的波形：

(a) $x(t)=10e^{-t}u(t-1)$

(b) $y(t)=10e^{-(t-1)}u(t)$

(c) $z(t)=\cos 4t\,\delta(t-1)$

7-30 试计算下列包含冲激函数的积分：

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} 4t^2\,\delta(t-1)\,dt$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} 4\,t^2\cos 2\pi t\delta(t-0.5)\,dt$

7-31 试计算下列积分：

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4t^2}\delta(t-2)dt$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty}[5\delta(t)+e^{-t}\delta(t)+\cos 2\pi t\delta(t)]dt$

7-32 试计算下列积分

(a) $\int_1^t u(\lambda)d\lambda$　　(b) $\int_0^4 r(t-1)dt$

(c) $\int_1^5 (t-6)^2\delta(t-2)dt$

7-33 某10 mH电感器两端的电压为20 $\delta(t-2)$，试求流经该电感器的电流，假定电感器无初始储能。

7-34 试计算如下微分：

(a) $\dfrac{d}{dt}[u(t-1)\,u(t+1)]$

(b) $\dfrac{d}{dt}[r(t-6)\,u(t-2)]$

(c) $\dfrac{d}{dt}[\sin 4t\,u(t-3)]$

7-35 试求如下微分方程的解：

(a) $\dfrac{dv}{dt}+2v=0$，$v(0)=-1$ V

(b) $2\dfrac{di}{dt}-3i=0$，$i(0)=2$

7-36 试在给定的初始条件下，求解如下微分方程中的v。

(a) $dv/dt+v=u(t)$，　$v(0)=0$

(b) $2dv/dt-v=3u(t)$，　$v(0)=-6$

7-37 某电路可以描述为：

$$4\frac{dv}{dt}+v=10$$

(a) 该电路的时间常数为多少？

(b) v的终值$v(\infty)$为多少？

(c) 如果$v(0)=2$，试求$t\geqslant 0$时的$v(t)$。

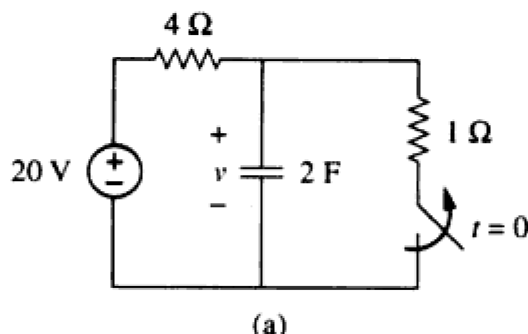
7-38 某电路可以描述为：

$$\frac{di}{dt}+3i=2u(t)$$

如果$i(0)=0$，试求$t>0$时的$i(t)$。

7.5 节

7-39 试计算图7-106所示各电路在$t<0$和$t>0$时电容器两端的电压。



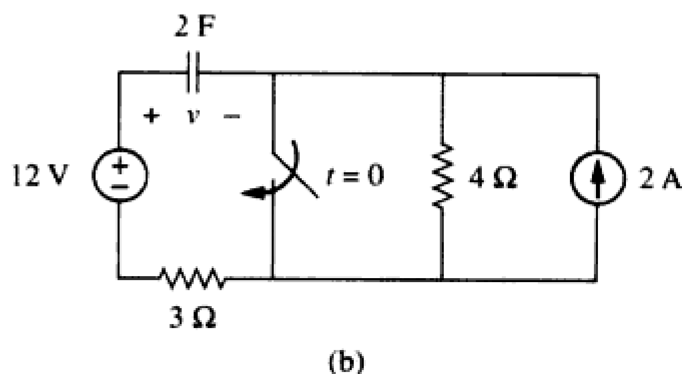


图 7-106 习题 7-39 的电路原理图

7-40 试计算图7-107所示各电路在$t<0$和$t>0$时电容器两端的电压。

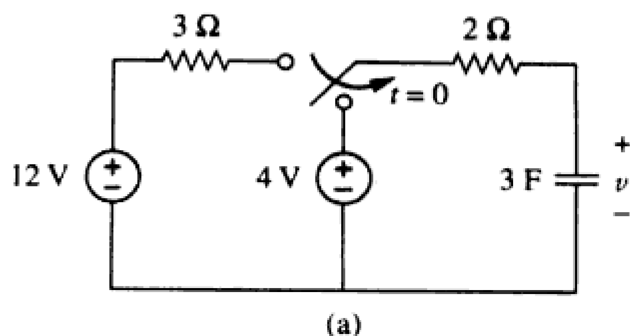


图 7-107 习题 7-40 的电路原理图

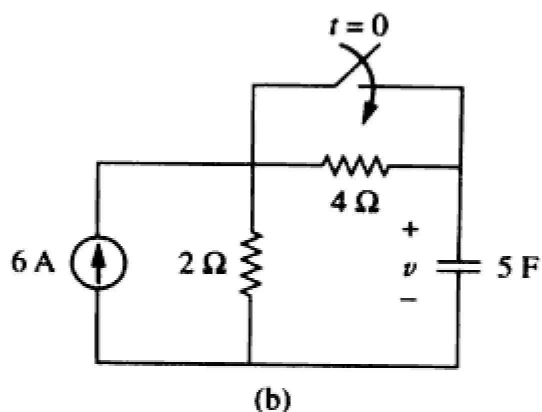


图 7-107 （续）

7-41 在图7-108所示电路中，试求$t > 0$时的$v(t)$。

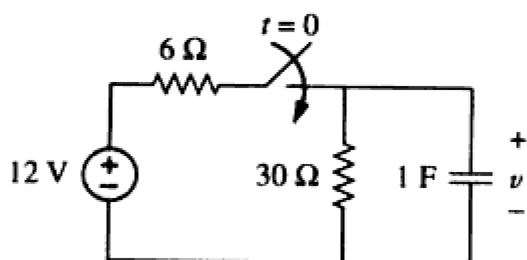


图 7-108 习题 7-41 的电路原理图

7-42 (a) 如果图7-109所示电路中的开关已长时间断开，并在$t = 0$时刻闭合，试求$v_o(t)$。

(b) 假定开关已长时间闭合，并在$t = 0$时刻断开，试求$v_o(t)$。

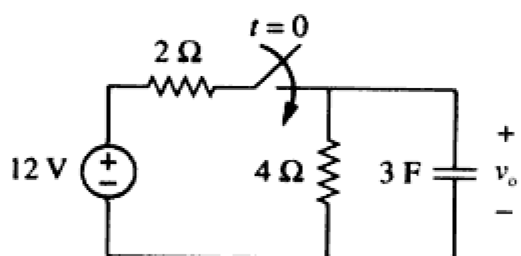


图 7-109 习题 7-42 的电路原理图

7-43 在图7-110所示电路中，试求$t < 0$与$t > 0$两种情况下的$i(t)$。

7-44 图7-111所示电路中的开关已长时间处于置a，并在$t = 0$时刻转向位置b。试计算$t > 0$时的$i(t)$。

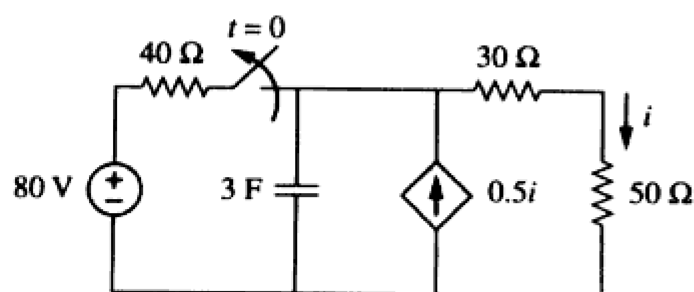


图 7-110 习题 7-43 的电路原理图

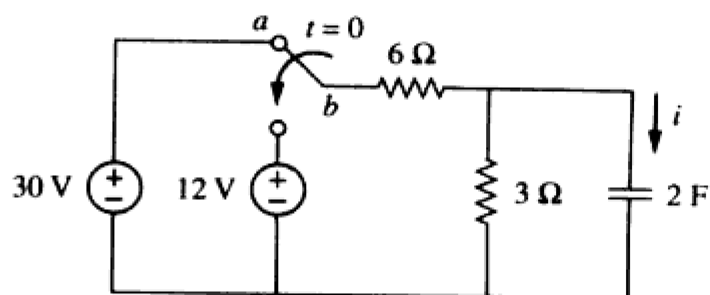


图 7-111 习题 7-44 的电路原理图

7-45 在图7-112所示电路中，假定$v_o(0) = 1$ V，试求$v_s = 6\,u(t)$时的v_o。

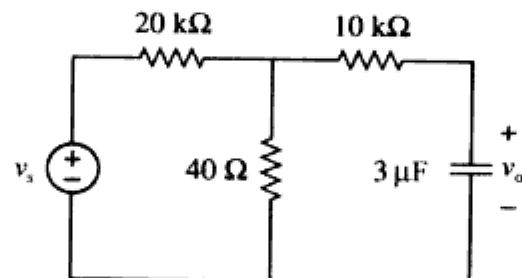


图 7-112 习题 7-45 的电路原理图

7-46 在图7-113所示电路中，$v_s = 5\,u(t)$，试求$v(t)$。

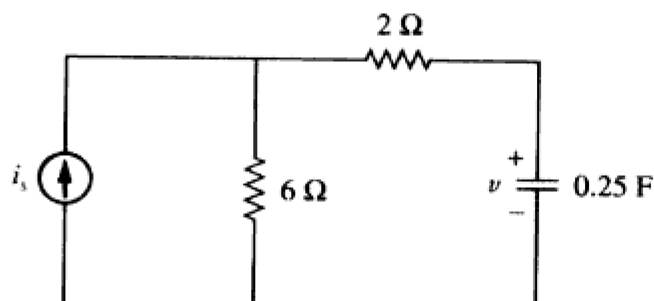


图 7-113 习题 7-46 的电路原理图

7-47 在图7-114所示电路中，如果$v(0) = 0$，试确定$t > 0$时的$v(t)$。

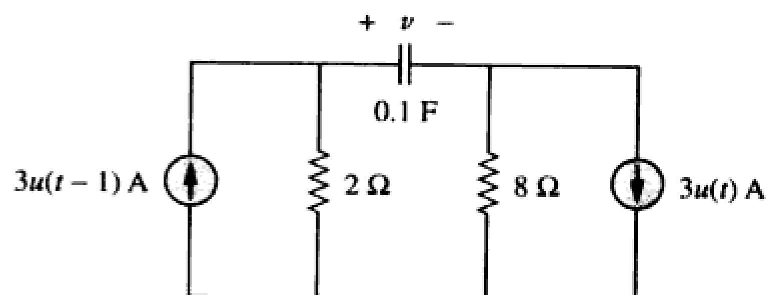


图 7-114 习题 7-47 的电路原理图

7-48 试求图7-115所示电路中的$v(t)$与$i(t)$。

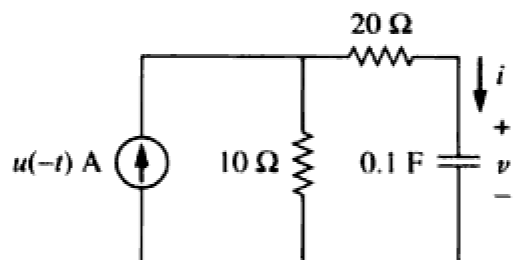
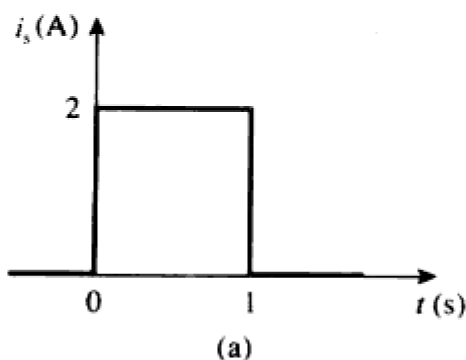


图 7-115 习题 7-48 的电路原理图

7-49 如果将图7-116a所示波形施加给图7-110b所示电路，试求$v(t)$，假定$v(0)=0$。



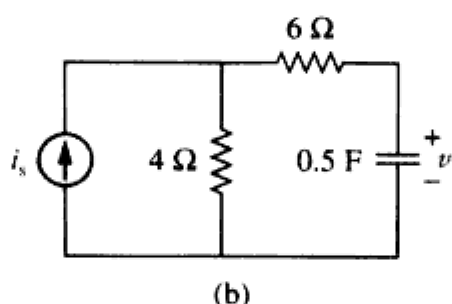


图 7-116 习题 7-49 与复习题 7-10 的波形图与电路原理图

*7-50 在图7-117所示电路中，假定$R_1=R_2=1\ \text{k}\Omega$，$R_3=2\ \text{k}\Omega$，$C=0.25\ \text{mF}$，试求$t>0$时的$i_x$。

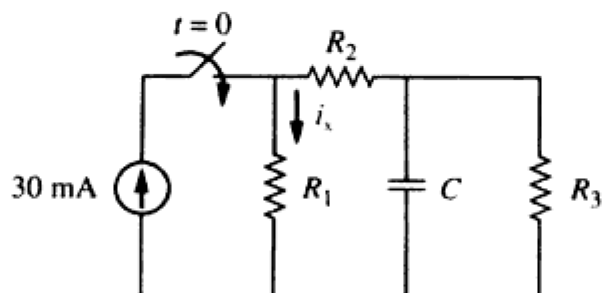


图 7-117 习题 7-50 的电路原理图

7.6 节

7-51 不采用7.6节介绍的简便方法，试利用KVL定律推导式(7-60)。

7-52 在图7-118所示电路中，试求$t>0$时的$i(t)$。

7-53 试计算图7-119所示各电路在$t<0$和$t>0$两种情况下流经电容器的电流。

7-54 试计算图7-120所示各电路在$t<0$和$t>0$两种情况下流经电容器的电流。

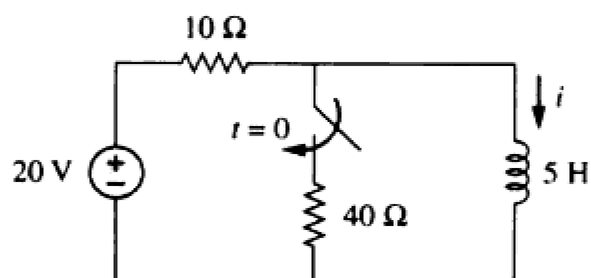
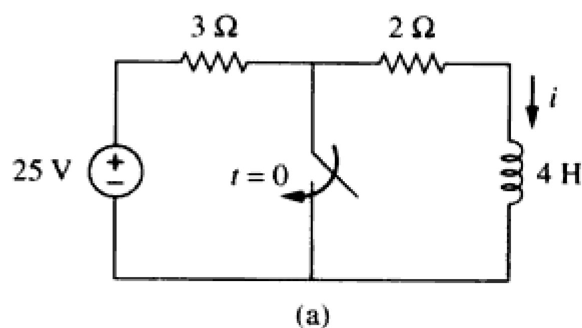


图 7-118 习题 7-52 的电路原理图



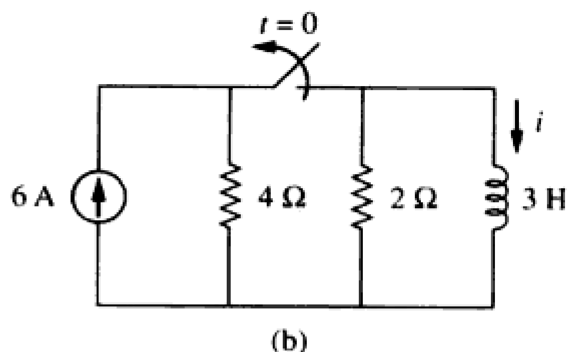
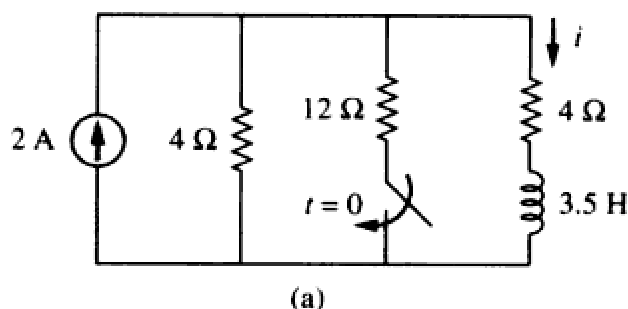


图 7-119 习题 7-53 的电路原理图



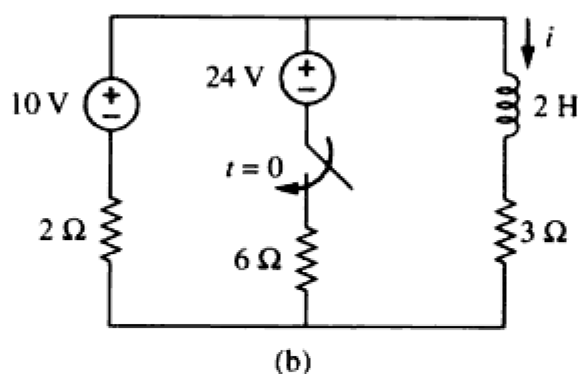


图 7-120 习题 7-54 的电路原理图

7-55 试求图7-121所示电路在$t<0$和$t>0$两种情况下$v(t)$。

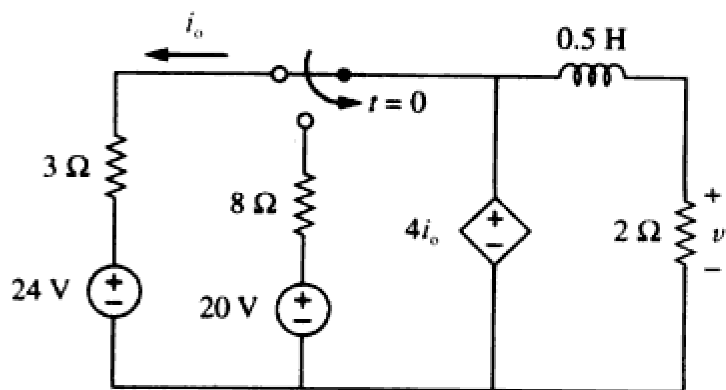


图 7-121 习题 7-55 的电路原理图

7-56　对于图7-122所示电路网络，试求$t > 0$时的$v(t)$。

*7-57　在图7-123所示电路中，试求$t > 0$时的$i_1(t)$与$i_2(t)$。

7-58　如果$i(0) = 10$ A且$v(t) = 20\ u(t)$ V，重做习题7-17。

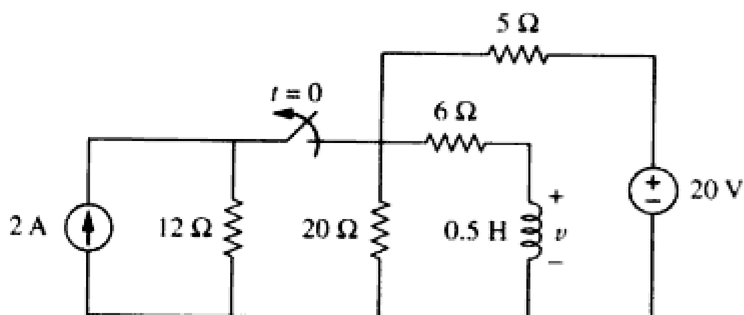


图 7-122　习题 7-56 的电路原理图

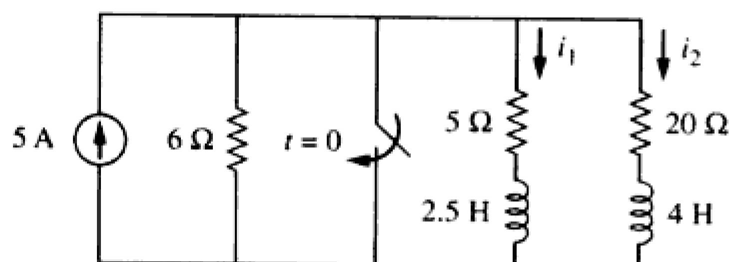


图 7-123　习题 7-57 的电路原理图

7-59　在图7-124所示电路中，$v_s = 18\ u(t)$，试求其阶跃响应$v_o(t)$。

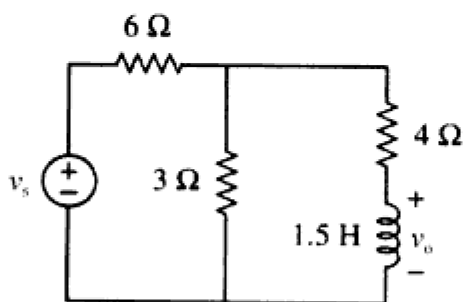


图 7-124　习题 7-59 的电路原理图

7-60　在图7-125所示电路中，如果电感器中的初始电流为零，试求$t > 0$时的$v(t)$。

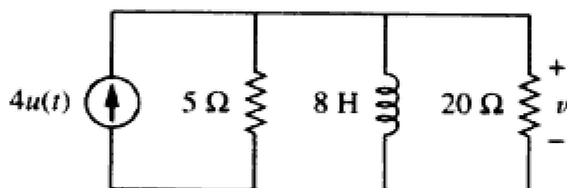


图 7-125　习题 7-60 的电路原理图

7-61　在图7-126所示电路中，i_s在$t = 0$时刻由5 A变化到10 A，即$i_s = 5u(-t) + 10u(t)$，试求v与i。

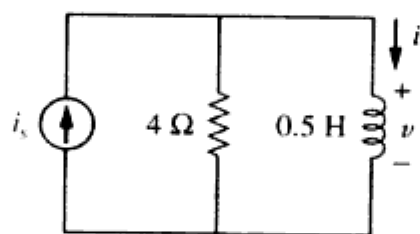


图 7-126　习题 7-61 的电路原理图

7-62　在图7-127所示电路中，如果$i(0) = 0$，试计算$i(t)$。

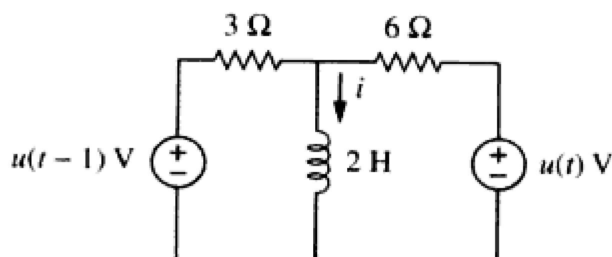


图 7-127　习题 7-62 的电路原理图

7-63　试确定图7-128所示电路中的$v(t)$与$i(t)$。

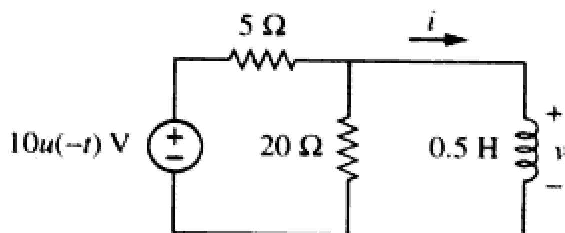


图 7-128　习题 7-63 的电路原理图

7-64　试求图7-129所示电路在$t > 0$时的$v_o(t)$。

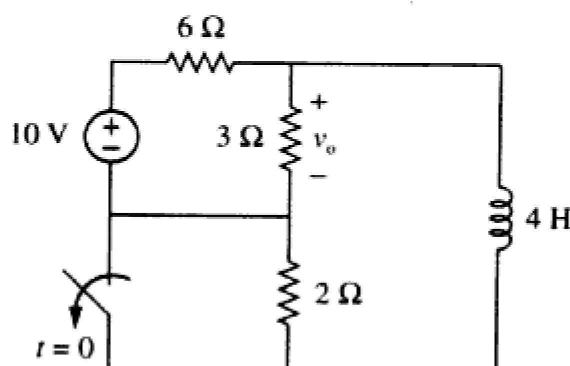


图 7-129　习题 7-64 的电路原理图

7-65　如果将图7-130a所示的输入脉冲作用于图7-130b所示电路上，试确定该电路的响应$i(t)$。

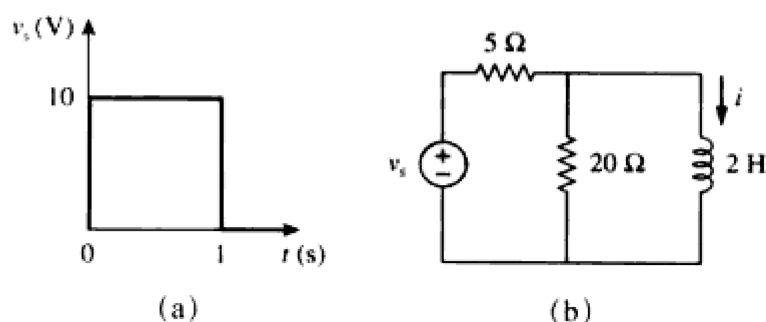


图 7-130　习题 7-65 的波形图与电路原理图

7.7 节

7-66 试求图7-131所示运算放大器电路的v_o。假定v_s在$t=0$时刻从0突变至1 V。

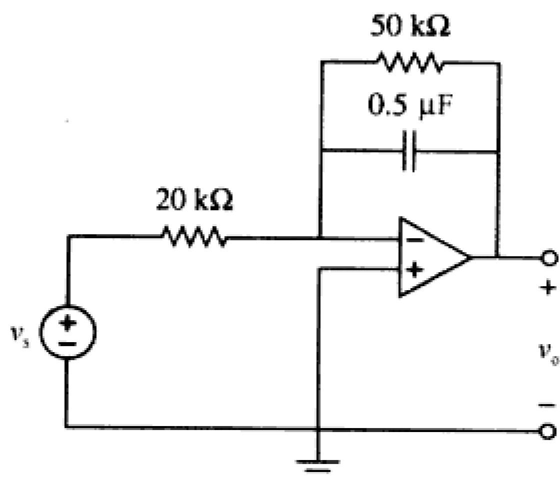


图 7-131 习题 7-66 的电路原理图

7-67 在图7-132所示运算放大器电路中，如果$v(0)=5$ V，并假定$R=10$ k Ω，$C=1$ μF，试求$t>0$时的$v_o(t)$。

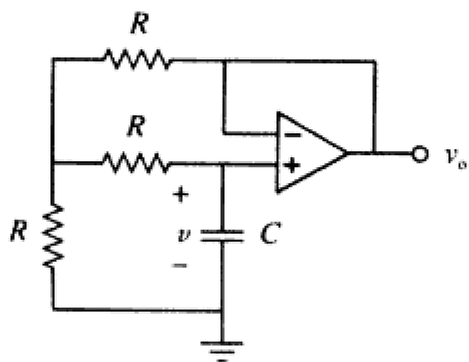


图 7-132 习题 7-67 的电路原理图

7-68 试确定图7-133所示电路在$t>0$时的v_o。

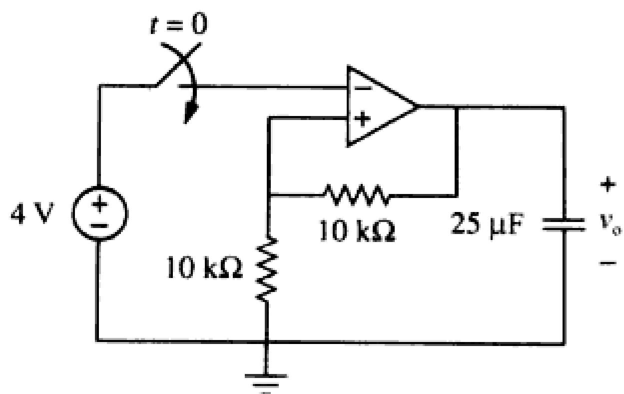


图 7-133 习题 7-68 的电路原理图

7-69 试求图7-134所示运算放大器电路在$t>0$时的$v_o(t)$。

7-70 图7-135所示运算放大器电路中，如果$v_s=20$ mV，试确定$t>0$时的v_o。

7-71 在图7-136所示运算放大器电路中，假定$v(0)=0$且$v_s=3$ V，试求$t>0$时的$v(t)$。

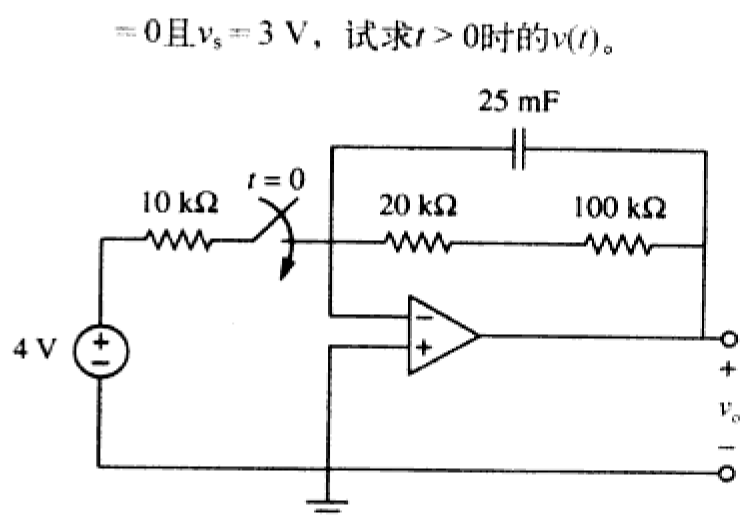


图 7-134 习题 7-69 的电路原理图

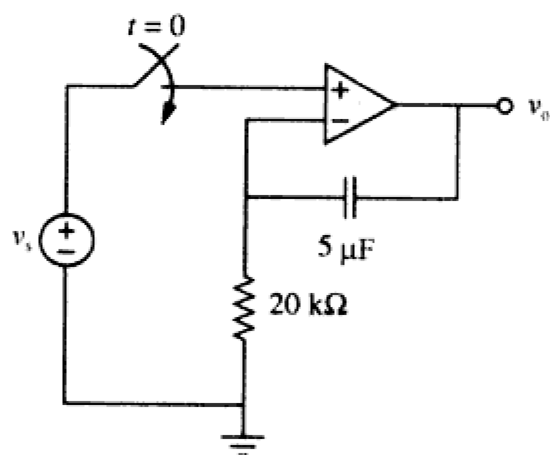


图 7-135 习题 7-70 的电路原理图

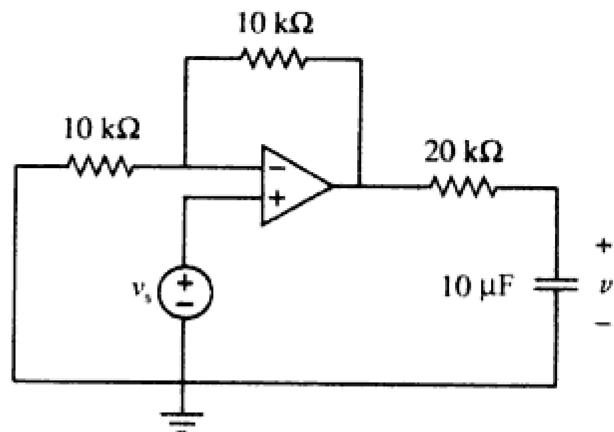


图 7-136 习题 7-71 的电路原理图

7-72 试求图7-137所示运算放大器电路中的i_o，假定$v(0)=-2$ V，$R=10$ k Ω且$C=10$ μF。

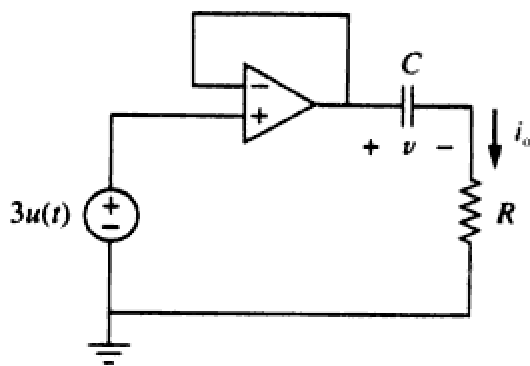


图 7-137 习题 7-72 的电路原理图

7-73　在图7-138所示运算放大器电路中，假定R_1 = 10 kΩ，R_f = 20 kΩ，C = 20 μF且$v(0)$ = 1 V，试求v_o。

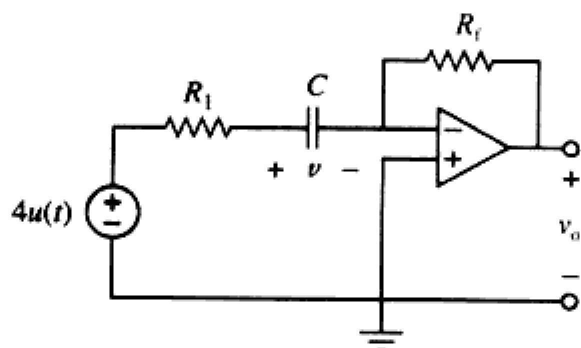


图 7-138　习题 7-73 的电路原理图

7-74　在图7-139所示电路中，假定i_s = 10 $u(t)$ A并且电容器无初始储能，试确定t > 0时的$v_o(t)$。

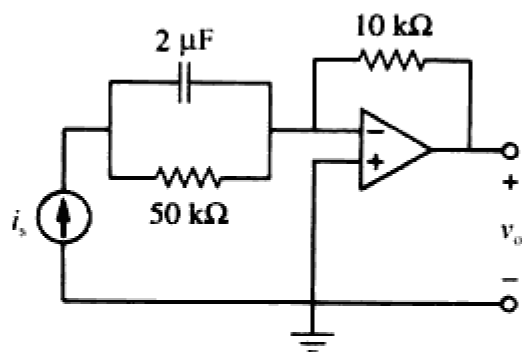


图 7-139　习题 7-74 的电路原理图

7-75　在图7-140所示电路中，如果v_s = 4 $u(t)$ V且$v(0)$ = 1 V，试求v_o与i_o。

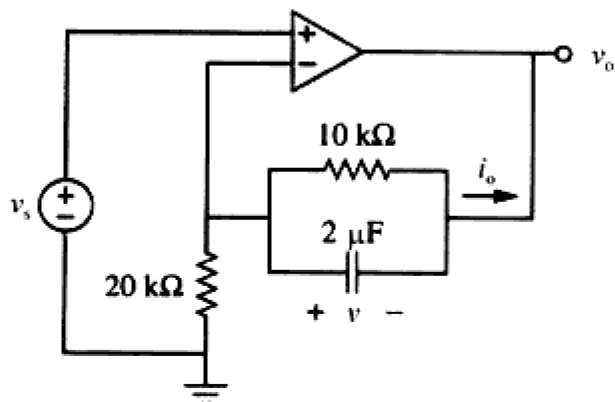


图 7-140　习题 7-75 的电路原理图

7.8 节

ps

7-76　试利用PSpice重做习题7-49。

7-77　图7-141所示电路中的开关在t = 0时刻断开，试利用PSpice确定t > 0时的$v(t)$。

7-78　图7-142所示电路中的开关在t = 0时刻由位置a转向位置b，试利用PSpice确定t > 0时的$i(t)$。

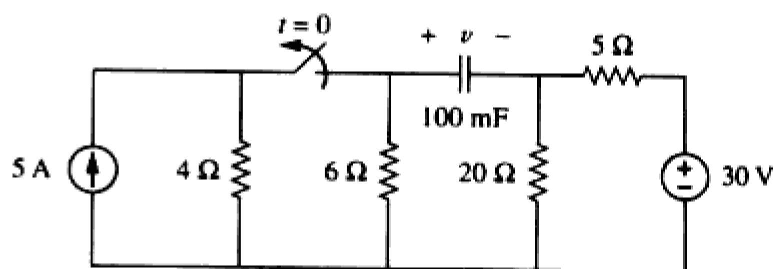


图 7-141　习题 7-77 的电路原理图

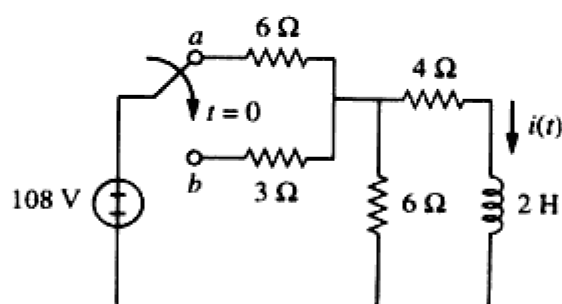


图 7-142　习题 7-78 的电路原理图

7-79　在图7-143所示电路中，开关已经长时间处于位置a，并在t = 0瞬间转向位置b，试确定$i_o(t)$。

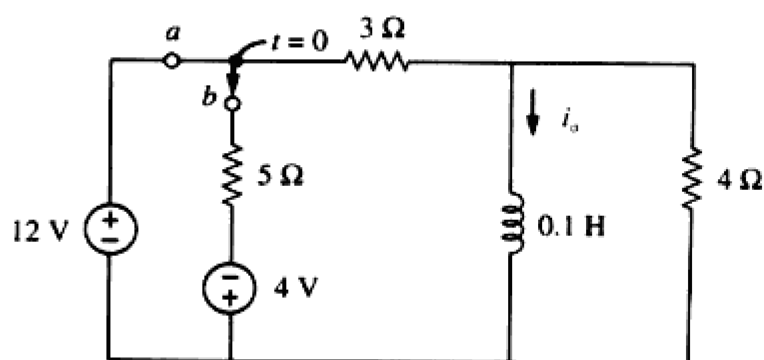


图 7-143　习题 7-79 的电路原理图

7-80　在图7-144所示电路中，假定开关已经长时间处于位置a，试求：

(a) $i_1(0)$、$i_2(0)$与$v_o(0)$

(b) $i_L(t)$

(c) $i_1(\infty)$、$i_2(\infty)$与$v_o(\infty)$

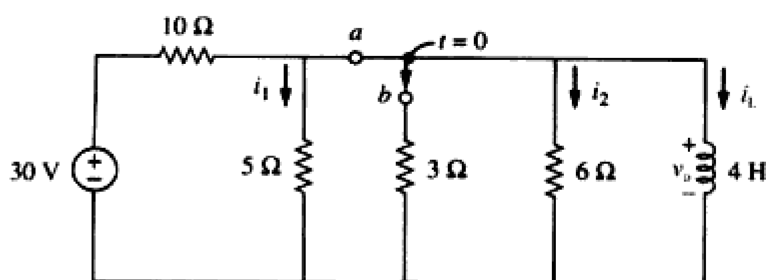


图 7-144　习题 7-80 的电路原理图

7-81　试利用PSpice重做习题7-65。

7.9 节

7-82　在设计信号转换电路时，发现需要一支100 μF电容器来实现3 ms的时间常数，试问该电路所需的电阻值应为多少？

7-83　某RC电路由一个120 V电源、一支开关、一支34 MΩ电阻和一支15 μF电容器串联组成，该电路用于估计在4 km跑道上奔跑的马的速度。马起跑时开关闭合，达到终线时开关断开，假定电容器充电至85.6 V，试计算马奔跑的速度。

7-84　某160 mH线圈的电阻值为8 Ω，试求给该线圈施加电压后，电流增大为其终值的60%所需的时间。

7-85　某简单的弛张振荡器电路如图7-145所示。当电压达到75 V时氖灯点亮，电压降到30 V时氖灯熄灭，并且氖灯点亮时的阻值为120 Ω，熄灭时的阻值为无穷大。

(a) 每次电容器放电时，氖灯能维持多长时间点亮？

(b) 氖灯闪灭的时间间隔为多少？

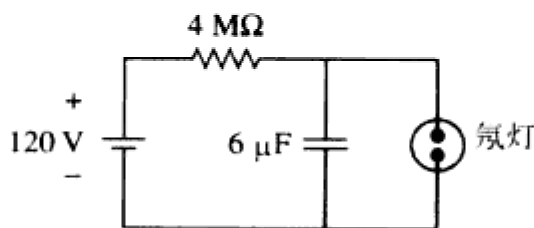


图 7-145　习题 7-85 的电路原理图

7-86　图7-146所示的电路用于设定施加到点焊机电极上的时间长度，如果该时间长度等于电容器从0 V充电到8 V所需的时间，试问图中可变电阻器所确定的时间范围是多少？

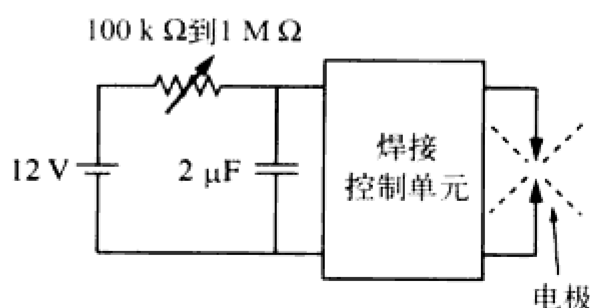


图 7-146　习题 7-86 的电路原理图

7-87　用120 V的直流发电机驱动一个电动机，该电动机线圈的电感为50 H，电阻为100 Ω。为了避免损坏该电动机，将一支400 Ω的放电电阻与电动机并联，如图7-147所示。该系统处于稳态状态，试求断路开关跳开100 ms后流过放电电阻的电流为多少？

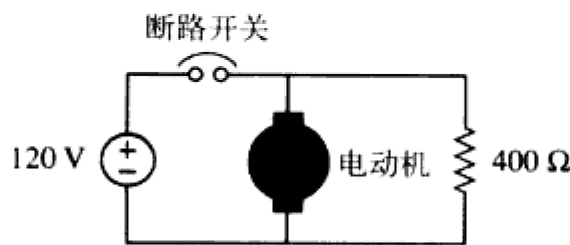


图 7-147　习题 7-87 的电路原理图

综合题

7-88　图7-148a所示电路可以设计为一个近似的微分器或者一个积分器，这取决于输出取自电阻器两端还是电容器两端，以及该电路的时间常数$\tau = RC$和如图7-148b所示的输入脉冲的宽度T。如果$\tau \ll T$，例如$\tau < 0.1T$，则电路是一个微分器。如果$\tau \gg T$，例如$\tau > 10T$，则电路是一个积分器。

(a) 如果将电容器两端的电压作为微分器的输出，试问其允许的最小脉冲宽度是多少？

(b) 如果电路的输出是输入的积分形式，试问脉冲宽度的最大值应设定为多少？

7-89　如果以某RL电路电感器两端的电压作为输出，且$\tau \ll T$（例如，$\tau < 0.1T$），则该RL电路可以作为一个微分器使用，其中T为输入脉冲的宽度。如果将R固定为200 kΩ，试确定对一个$T = 10$ μs的脉冲进行微分运算所需的最大电感值L？

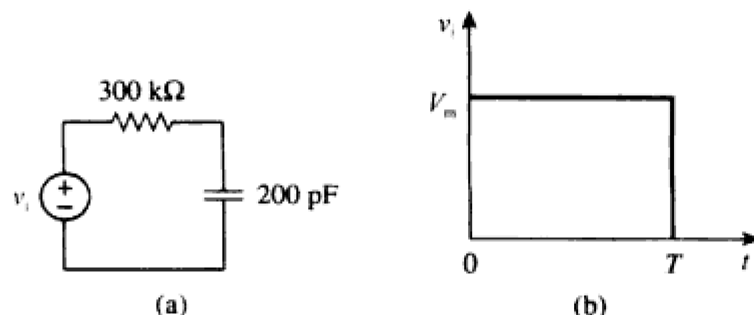


图 7-148　习题 7-88 的电路原理图与波形图

7-90　某示波器衰减探头对输入电压（v_i）幅度的

衰减因子为10倍。如图7-149所示，该示波器的内部电阻为R_s，电容为C_s，而探头的内部电阻为R_p。如果R_p固定为6 MΩ，试求该电路时间常数为15 μs时的R_s与C_s。

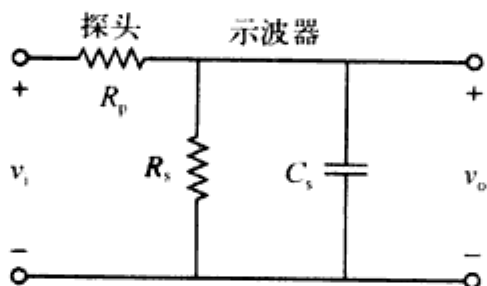


图 7-149 习题 7-90 的电路原理图

7-91 e2d 生物课上学生利用如图7-150所示电路观察“蛙泳蹬腿”。学生注意到，当开关闭合时，青蛙仅稍稍蹬腿，而当开关断开时，青蛙连续5 s剧烈蹬腿，将青蛙建模为一个电阻器，试计算该电阻器的阻值，假定青蛙激剧烈蹬腿时需要10 mA的电流。

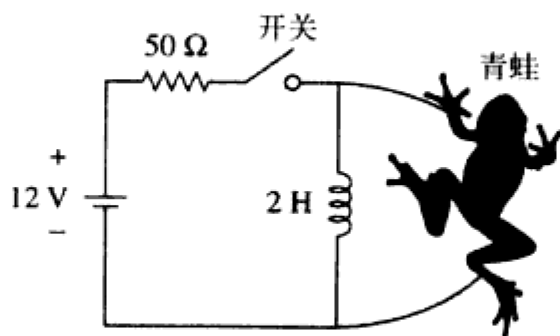


图 7-150 习题 7-91 的电路原理图

7-92 e2d 使发光点在阴极射线管屏幕上运动，需要在其偏转板上施加如图7-151所示的线性增长电压。假定偏转板的电容为4 nF，试画出流过该偏转板的电流波形图。

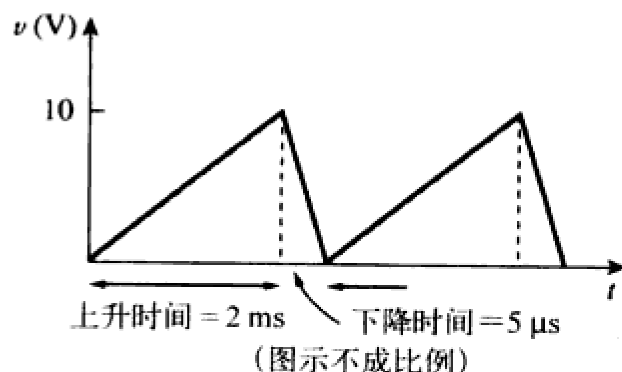


图 7-151 习题 7-92 的电路原理图

第8章 二 阶 电 路

你是否有过这样的经历呢？仅仅因为一个令人愉悦的词语而使你的一天突然变得阳光灿烂。同样，你也可以为别人带来这样的感受，这只需要发挥一下想像力，花费一点儿时间和精力。现在想想："我今天做些什么能让别人——老人、孩子或者佣人——开心快乐呢？"甚至于喂小狗一块骨头或给小鸟一块糖，也是在为别人带来快乐！为什么不呢？

——M. D. Bobcock

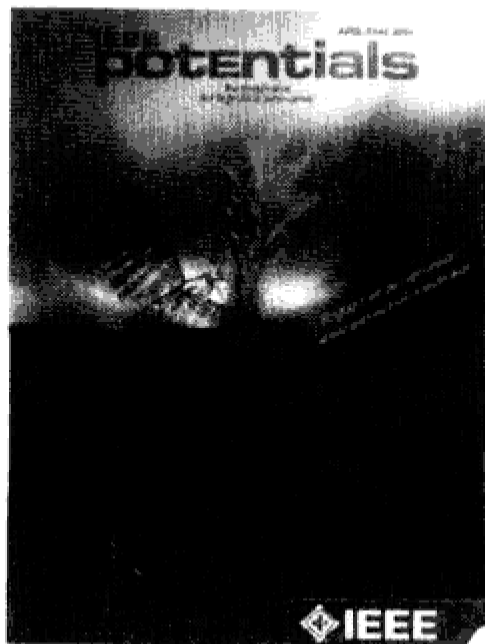
拓展职业生涯

为了增加你毕业后在工程领域的发展机遇，应该在更广泛的工程领域内打下坚实的基础知识。如果有可能，最好在一取得学士学位后就进入研究生阶段的学习，这样就会尽早实现上述目标。

工程领域不同层次的学位都反映了学生所获得的某种技能的程度。获得学士学位的学生，所学到的是工程语言和工程实践与设计的基础知识。达到硕士学位水平的学生，有能力完成高级的工程课题，并且可以有效地针对自己的工作与别人进行口头或书面上的交流。获得博士学位后，就应该彻底掌握电子工程的基本理论，并且完全有能力从事工程领域中的前沿课题，将自己的努力结果与他人进行交流、探讨。

如果你还没有思考毕业后从事什么样的职业，那么攻读硕士学位将会增强你探索和选择职业的能力。大学阶段的学习仅为你提供了一些工程基础知识，而工学硕士研究生的学习，会给你增补一些商务课程，这比专门攻读工商管理硕士(MBA)的学生得益更多。攻读MBA学位的最佳时间是在你已经拥有几年的工程实践之后，并且决定了你今后的职业生涯需要通过提高你的商务能力来拓展。

工程师应该不断地通过各种正式的或非正式的方式进行自学，博采各种教育方式的优点。也许加入IEEE这样的协会，并成为其会员不失为一种拓展你职业生涯的好方法。



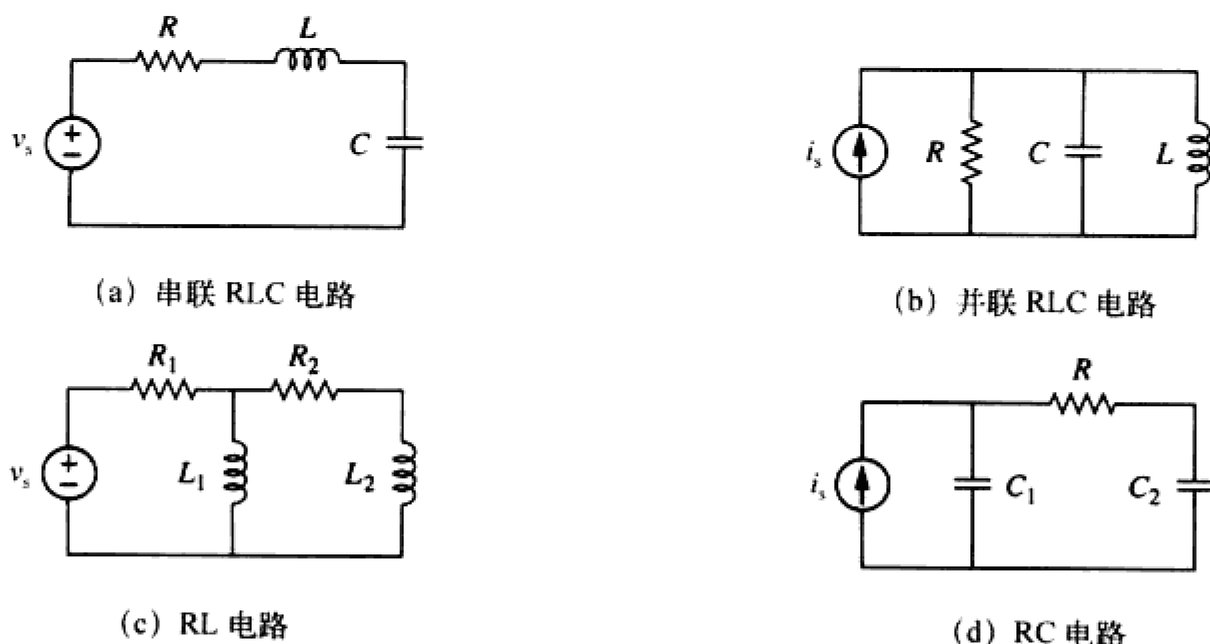
拓展你的职业生涯包括认清自己的发展目标，提高自己的应变能力，抢占自己面临的机遇以及规划自己的社会地位等

8.1 引言

上一章中讨论了包含一个储能元件（一个电容或一个电感）的电路，由于描述这类电路的微分方程是一阶微分方程，故称之为一阶电路。本章将讨论包含两个储能元件的电路，由于这类电路的响应可以用二阶微分方程来描述，故称为二阶（second-order）电路。

二阶电路的典型实例是RLC电路，即电路中包含三种无源元件，图8-1a与图8-1b所示为这类电路的例子。图8-1c与图8-1d所示的RL电路与RC电路也是二阶电路的例子。由图8-1可见，二阶电路既可以包含两个不同类型的储能元件，也可以包含两个相同类型的储能元件（但相同类型的储能元件不能用一个等效元件来表示）。包含两个储能元件的运算放大器电路也可以称为二阶电路。与一阶电路

类似，二阶电路中可含有多个电阻器、受控源和独立源。



（a）串联 RLC 电路　（b）并联 RLC 电路　（c）RL 电路　（d）RC 电路

图 8-1　二阶电路的典型实例

二阶电路可以用二阶微分方程表征其特性，它由电阻器和两个储能元件的等效单元组成。

本章对二阶电路的分析与对一阶电路的分析类似，首先讨论由储能元件的初始条件激励的电路，虽然这类电路中可以包括受控源，但不能包含独立源。这类无源激励电路给出的是电路的自然响应。之后讨论由独立源激励的电路，得到电路的瞬态响应与稳态响应。本章仅考虑直流独立源，正弦电源与指数电源的情况将在后续章节中讨论。

由于初始条件对于分析二阶电路非常关键，因此首先学习如何确定电路变量及其导数的初始条件，之后讨论在如下两种激励情况下图8-1所示串联与并联RLC电路的响应：由储能元件的初始条件激励以及由阶跃输入源激励。接着讨论包含运算放大器的二阶电路，以及二阶电路的PSpice分析。本章最后介绍二阶电路的两个典型应用，汽车点火系统和平滑电路。包括振荡电路和滤波器在内的其他应用将在第14章中讨论。

8.2　初值与终值的确定

求解二阶电路时，学生面临的主要问题可能是如何确定电路变量的初始条件和终止条件。学生通常会很轻松地求出v与i的初值和终值，但是对确定其导数$\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$与$\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$的初值往往会感到困难。出于这一点考虑，本节专门明确地介绍如何确定$v(0)$、$i(0)$、$\mathrm{d}v(0)/\mathrm{d}t$、$\mathrm{d}i(0)/\mathrm{d}t$，$i(\infty)$与$v(\infty)$。除非另有说明，本章中的$v$表示电容器两端的电压，而$i$表示流过电感器的电流。

确定初始条件时，必须牢记如下两个关键点：

第一，在分析电路时，必须始终仔细地处理电容器两端电压$v(t)$的极性以及流过电感器电流$i(t)$的方向，v与i必须严格地按照无源符号规约（参见图6-3与图6-23）予以定义。必须仔细观察上述电参量示如何定义的，并在分析电路时相应地加以应用。

第二，电容器两端的电压总是连续的，即，

$$v(0^+) = v(0^-) \tag{8-1a}$$

并且流过电感器的电流总是连续的，即，

$$i(0^+) = i(0^-) \tag{8-1b}$$

其中，假定开关动作的时刻为$t=0$，则$t=0^-$表示开关动作之前的瞬间，$t=0^+$表示开关动作之后的瞬间。

因此，在确定初始条件时，首先要利用式(8-1)确定这些不能突变的电路变量——电容器电压和电感器电流的初值。下面通过一个例子说明上述求解思路。

图 8-2 例题 8-1 的电路原理图

例题8-1 图8-2中的开关已长时间闭合，并在$t=0$时刻断开，试求：(a) $i(0^+)$，$v(0^+)$；(b) $\mathrm{d}i(0^+)/\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}v(0^+)/\mathrm{d}t$；(c) $i(\infty)$，$v(\infty)$。

解 (a) 如果开关在$t=0$时刻之前已长时间闭合，则说明该电路已在$t=0$时刻已经达到直流稳态，此时电感器相当于短路，而电容器则相当于开路。于是在$t=0$ 时刻的电路如图8-3a所示，因此，

$$i(0^-)=\frac{12}{4+2}=2\,\mathrm{A},\qquad v(0^-)=2i(0^-)=4\,\mathrm{V}$$

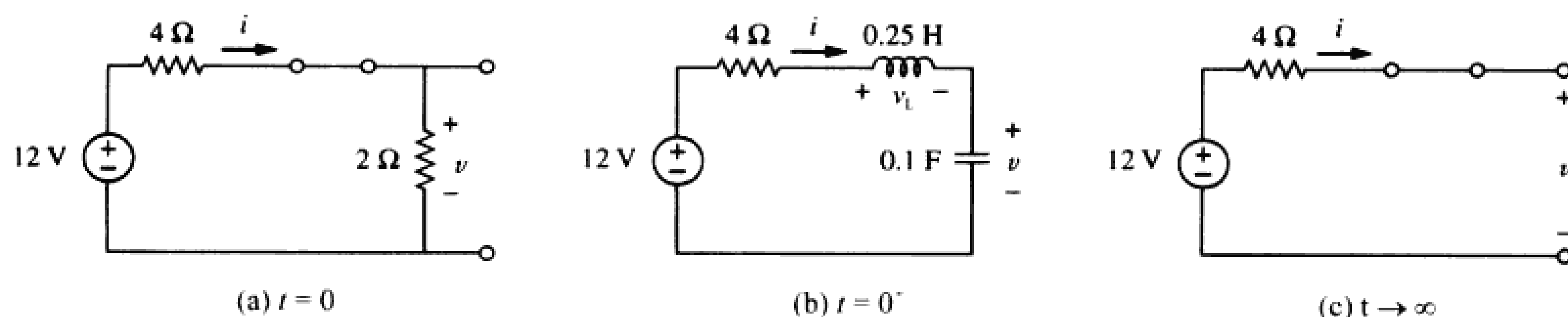


图 8-3 图 8-2 所示电路的等效电路

由于流过电感器的电流和电容器两端的电压不能突变，所以，

$$i(0^+)=i(0\ \ )=2\,\mathrm{A},\qquad v(0^+)=v(0\ \ )=4\,\mathrm{V}$$

(b) 在$t=0^+$时刻，开关断开，其等效电路如图8-3b所示，流过电感器和电容器的电流相同，因此，

$$i_C(0^+)=i(0^-)=2\,\mathrm{A}$$

由于$C\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=i_C$，$\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=i_C/C$，于是，

$$\frac{\mathrm{d}v(0^+)}{\mathrm{d}t}=\frac{i_C(0^+)}{C}=\frac{2}{0.1}=20\,\mathrm{V/s}$$

同理，由于$L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t=v_L$，$\mathrm{d}i/\mathrm{d}t=v_L/L$，对图8-3b中的回路应用KVL可以确定$V_L$，得到：

$$-12+4\,i(0^+)+v_L(0^+)+v(0^+)=0$$

即，

$$v_L(0^+)=12-8-4=0$$

因此，

$$\frac{\mathrm{d}i(0^+)}{\mathrm{d}t}=\frac{v_L(0^+)}{L}=\frac{0}{0.25}=0\,\mathrm{A/s}$$

(c) 当$t>0$时，电路经历瞬态响应，但随着$t\to\infty$，电路再次达到稳定状态，电感器相当于短路，电容器相当于开路，此时图8-3b所示电路变为如图8-3c所示电路，于是得到，

$$i(\infty)=0\,\mathrm{A},\qquad v(\infty)=12\,\mathrm{V}$$

练习题8-1 图8-4中的开关已长时间断开，但在$t=0$时刻闭合，试确定：(a) $i(0^+)$，$v(0^+)$；(b) $\mathrm{d}i(0^+)/\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}v(0^+)/\mathrm{d}t$；(c) $i(\infty)$，$v(\infty)$。

答 (a) 2 A，4 V；(b) 50 A/s，0 V/s；(c) 12 A，24 V。

例题8-2 在图8-5所示电路中，试计算：(a) $i_L(0^+)$，$v_C(0^+)$，$v_R(0^+)$；(b) $di_L(0^+)/dt$，$dv_C(0^+)/dt$，$dv_R(0^+)/dt$；(c) $i_L(\infty)$，$v_C(\infty)$，$v_R(\infty)$。

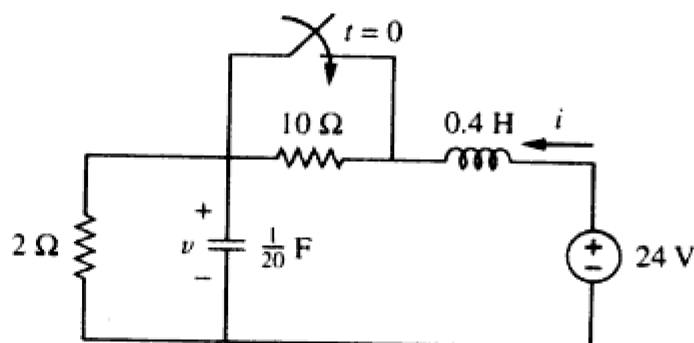


图 8-4 练习题 8-1 的电路原理图

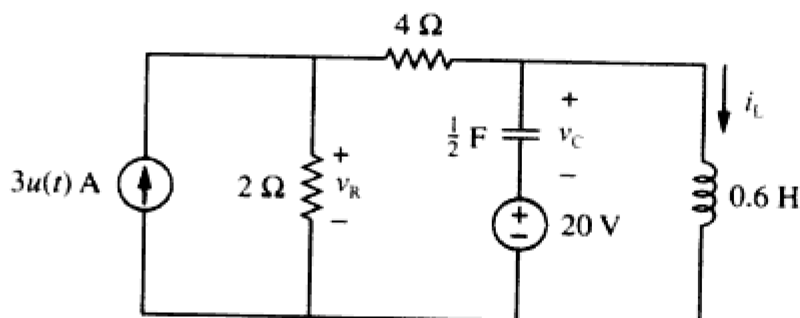
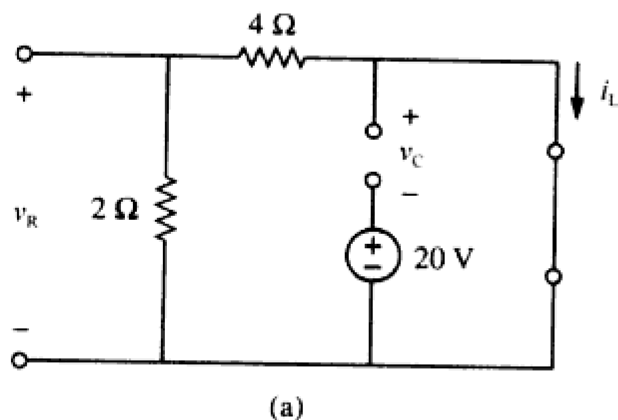


图 8-5 例题 8-2 的电路原理图

解 (a) 当$t<0$时，$3u(t)=0$，由于电路在$t=0^-$时刻已达到稳定状态，于是电感器可以用短路取代，而电容器可以用开路取代，得到如图8-6a所示的电路。由该图可得：

$$i_L(0^-)=0, \quad v_R(0^-)=0, \quad v_C(0^-)=-20\,\text{V} \tag{8-2-1}$$

虽然无需求出上述电参量在$t=0^-$时刻的导数值，但由于电路已达到稳定状态，没有任何变化，所以其导数值均为零。



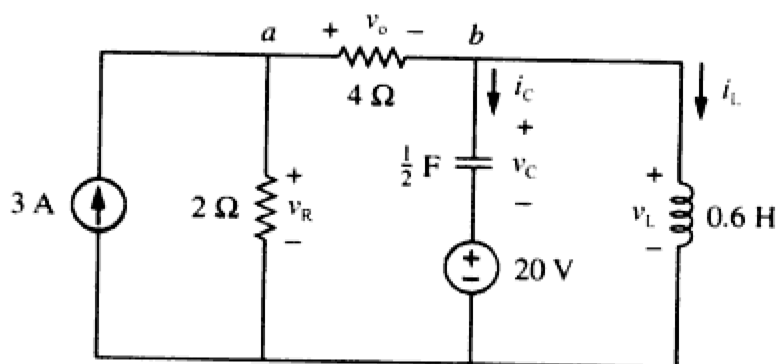


图 8-6 图 8-5 所示电路在 (a) $t=0^-$，(b) $t=0^+$时刻的等效电路

当$t>0$时，$3u(t)=3$，此时的等效电路如图8-6b所示，由于流过电感器的电流与电容器两端的电压不能突变，于是，

$$i_L(0^+)=i_L(0^-)=0, \quad v_C(0^+)=v_C(0^-)=-20\,\text{V}, \tag{8-2-2}$$

虽然本题未要求确定4 Ω电阻器两端的电压，但在应用KVL和KCL时会用到该电压。因此设该电压为v_o，对图8-6b中的节点a应用KCL，得到：

$$3=\frac{v_R(0^+)}{2}+\frac{v_o(0^+)}{4} \tag{8-2-3}$$

对图8-6b的中间网孔应用KVL，得到：

$$-v_R(0^+)+v_o(0^+)+v_C(0^+)+20=0 \tag{8-2-4}$$

由式(8-2-2)可知$v_C(0^+)=-20$ V，所以式（8-2-4）表明，

$$v_R(0^+)=v_o(0^+) \tag{8-2-5}$$

由式(8-2-3)与式(8-2-5)可以得到，

$$v_R(0^+)=v_o(0^+)=4\text{V} \tag{8-2-6}$$

(b) 由于$L\,di_L/dt=v_L$，所以，

$$\frac{\mathrm{d}i_L(0^+)}{\mathrm{d}t}=\frac{v_L(0^+)}{L}$$

但对图8-6b中右边的网孔应用KVL可以得到：

$$v_L(0^+)=v_C(0^-)+20=0$$

因此，

$$\frac{\mathrm{d}i_L(0^+)}{\mathrm{d}t}=0 \tag{8-2-7}$$

类似地，由于$C\,\mathrm{d}v_C/\mathrm{d}t=i_C$，于是$\mathrm{d}v_C/\mathrm{d}t=i_C/C$。对图8-6b中的节点$b$应用KCL即可得到$i_C$：

$$\frac{v_o(0^+)}{4}=i_C(0^+)+i_L(0^+) \tag{8-2-8}$$

由于$v_o(0^+)=4$且$i_L(0^+)=0$，故$i_C(0^+)=4/4=1$ A，于是：

$$\frac{\mathrm{d}v_C(0^+)}{\mathrm{d}t}=\frac{i_C(0^+)}{C}=\frac{1}{0.5}=2\,\mathrm{V/s} \tag{8-2-9}$$

为了求出$\mathrm{d}v_R(0^+)/\mathrm{d}t$，对节点$a$应用KCL得到：

$$3=\frac{v_R}{2}+\frac{v_o}{4}$$

对上式各项求导，并令$t=0^+$，得到：

$$0=2\frac{\mathrm{d}v_R(0^+)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}v_o(0^+)}{\mathrm{d}t} \tag{8-2-10}$$

再对图8-6b的中间网孔应用KVL得到：

$$-v_R+v_C+20+v_o=0$$

同样，对上式各项求导，并令$t=0^+$，有：

$$-\frac{\mathrm{d}v_R(0^+)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}v_C(0^+)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}v_o(0^+)}{\mathrm{d}t}=0$$

将$\mathrm{d}v_C(0^+)/\mathrm{d}t=2$代入可以得到：

$$\frac{\mathrm{d}v_R(0^+)}{\mathrm{d}t}=2+\frac{\mathrm{d}v_o(0^+)}{\mathrm{d}t} \tag{8-2-11}$$

由式(8-2-10)与式(8-2-11)可得：

$$\frac{\mathrm{d}v_R(0^+)}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{3}\,\mathrm{V/s}$$

虽然本例没有要求确定$\mathrm{d}i_R(0^+)/\mathrm{d}t$，但这里可以顺便求出。因为$v_R=5\,i_R$，所以，

$$\frac{\mathrm{d}i_R(0^+)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{5}\frac{\mathrm{d}v_R(0^+)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{5}\frac{2}{3}=\frac{2}{15}\,\mathrm{A/s}$$

（c）当$t\to\infty$时，电路达到稳定状态，其等效电路如图8-6a所示，但是3A电流源应处于工作状态。由分流原理可得：

$$i_L(\infty)=\frac{2}{2+4}3\,\mathrm{A}=1\,\mathrm{A}$$
$$v_R(\infty)=\frac{2}{2+4}3\,\mathrm{A}\times 2=4\,\mathrm{V},\qquad v_C(\infty)=-20\,\mathrm{V} \tag{8-2-12}$$

练习题8-2 在图8-7所示电路中，试求：(a) $i_L(0^+)$，$v_C(0^+)$，$v_R(0^+)$；(b) $\mathrm{d}i_L(0^+)/\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}v_C(0^+)/\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}v_R(0^+)/\mathrm{d}t$；(c) $i_L(\infty)$，$v_C(\infty)$，$v_R(\infty)$。

答 (a) -3 A，0，0；(b) 0，10 V/s，0；(c) -1 A，10 V，10 V。

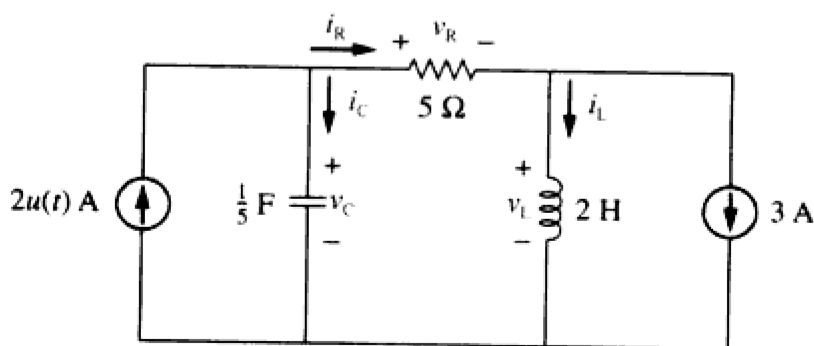


图 8-7 练习题 8-2 的电路原理图

8.3 无源激励 RLC 串联电路

掌握串联RLC电路的自然响应是将来学习滤波器设计和通信网络的必备基础知识。

考虑如图8-8所示的RLC串联电路，该电路受存储在电容器和电感器中的初始能量激励，该初始能量可以用电容器的初始电压V_0和电感器的初始电流I_0表示。于是在$t=0$时刻，

$$v(0)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i\,\mathrm{d}t=V_0 \tag{8-2a}$$

$$i(0)=I_0 \tag{8-2b}$$

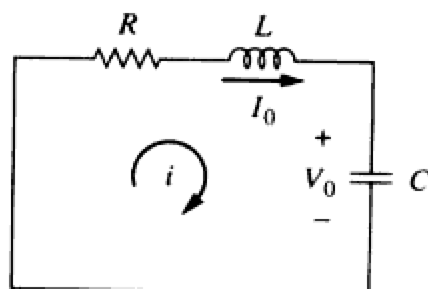


图 8-8 无源激励 RLC 串联电路

对图8-8所示回路应用KVL，可以得到：

$$Ri+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,\mathrm{d}t=0 \tag{8-3}$$

为了消去积分运算，将上式两端对t求导并整理得到：

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{i}{LC}=0 \tag{8-4}$$

这是一个二阶微分方程（second-order differential equation），同时也是将本章讨论的RLC电路称为二阶电路的原因。我们的目标是求解式(8-4)，但是求解这样一个二阶微分方程需要两个初始条件，例如i及其一阶导数的初值或者i和v的初值。式(8-2b)给出了i的初值，由式(8-2a)与式(8-3)还可以确定i导数的初值，即：

$$Ri(0)+L\frac{\mathrm{d}i(0)}{\mathrm{d}t}+V_0=0$$

亦即，

$$\frac{\mathrm{d}i(0)}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{L}(RI_0+V_0) \tag{8-5}$$

利用式(8-2b)与式(8-5)的两个初始条件，就可以求解式(8-4)，前一章求解一阶电路的经验告诉我们，该式的解具有指数形式。于是令

$$i=A\mathrm{e}^{st} \tag{8-6}$$

其中A与s为两个待定常数。将式(8-6)代入式(8-4)，并进行必要的微分运算，可以得到：

$$As^2\mathrm{e}^{st}+\frac{AR}{L}s\mathrm{e}^{st}+\frac{A}{LC}\mathrm{e}^{st}=0$$

即

$$A\mathrm{e}^{st}\left(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}\right)=0 \tag{8-7}$$

由于假定解的形式为$i=A\,\mathrm{e}^{st}$，所以只能是括号内的表达式为零：

$$s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=0 \tag{8-8}$$

由于上述方程的根决定了i的特性，所以将该二次方程称为微分方程式(8-4)的特征方程(characteristic equation)。式(8-8)的两个根为：

$$s_1=-\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}} \tag{8-9a}$$

$$s_2=-\frac{R}{2L}-\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}} \tag{8-9b}$$

上述两个根更为简洁的表达式可以写成：

$$s_1=-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2},\qquad s_2=-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2} \tag{8-10}$$

其中，

$$\alpha=\frac{R}{2L},\qquad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{8-11}$$

由于特征根s_1和s_2与电路的自然响应有关，故称之为自然频率（natrual frequency），单位是奈培每秒（Np /s）；将ω_0称为振荡频率（resonant frequency）或者更严格地称为无阻尼自然频率（undamped natrual frequency），单位为弧度每秒（rad / s）；α称为奈培频率（neper frequency）或阻尼因子（damping factor），单位为奈培每秒。式(8-8)用α和ω_0表达，可以写为：

$$s^2+2\alpha s+\omega_0^2=0 \tag{8-8a}$$

变量s与ω_0均为重要的参量，将贯穿在本书后续的讨论中。

奈培（Np）是一个无量纲单位，是以苏格兰数学家约翰·奈培（John Napier，1550—1617）的名字命名。

比值α/ω_0称为阻尼率ζ。

式(8-10)中s的两个值表明i有两个可能解。分别具有式(8-6)所假定的解的形式，即：

$$i_1=A_1\mathrm{e}^{s_1t},\qquad i_2=A_2\mathrm{e}^{s_2t} \tag{8-12}$$

由于式(8-4)为线性方程式，所以两个不同解i_1与i_2的任意线性组合同样是式(8-4)的解。因此，式(8-4)的完整解或全解应该是i_1和i_2的线性组合。于是，RLC串联电路的自然响应为：

$$i(t)=A_1\mathrm{e}^{s_1t}+A_2\mathrm{e}^{s_2t} \tag{8-13}$$

其中，常数A_1与A_2由式(8-2b)与式(8-5)给出的初值$i(0)$与$\mathrm{d}i(0)/\mathrm{d}t$确定。

由式(8-10)可以推出解的如下三种类型：

（1）当$\alpha>\omega_0$时，为过阻尼（overdamped）情况。

（2）当$\alpha=\omega_0$时，为临界阻尼（critically damped）情况。

（3）当$\alpha<\omega_0$时，为欠阻尼（underdamped）情况。

当电路特征方程的两个特征根为不相等的实数时，电路响应是过阻尼的；当两个特征根是相等的实数时，电路响应为临界阻尼；而当两个特征根为复数时，电路响应则为欠阻尼响应。

下面分别讨论这三种情况：

过阻尼情况（$\alpha>\omega_0$）

由式(8-9)与式(8-10)可知，$\alpha>\omega_0$意味着$C>4L/R^2$，此时，两个根s_1与s_2均为负实数，相应的电路响应为：

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \tag{8-14}$$

$i(t)$随着t的增加而衰减并趋于零。图8-9a给出了典型的过阻尼响应情况。

临界阻尼情况（$\alpha = \omega_0$）

当$\alpha = \omega_0$时，$C = 4L/R^2$，并且

$$s_1 = s_2 = -\alpha = -\frac{R}{2L} \tag{8-15}$$

此时，式(8-13)成为：

$$i(t) = A_1 e^{-\alpha t} + A_2 e^{-\alpha t} = A_3 e^{-\alpha t}$$

其中，$A_3 = A_1 + A_2$。这并非电路的解，因为一个常数A_3不能同时满足两个初始条件，那么问题出在哪里呢？我们假定电路的解是指数形式，对临界阻尼这种特殊情况是不正确的。回到式(8-4)，当$\alpha = \omega_0 = R/2L$时，式(8-4)变为：

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \alpha^2 i = 0$$

即

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{di}{dt} + \alpha i\right) + \alpha\left(\frac{di}{dt} + \alpha i\right) = 0 \tag{8-16}$$

如果令

$$f = \frac{di}{dt} + \alpha i \tag{8-17}$$

则式(8-16)变为：

$$\frac{df}{dt} + \alpha f = 0$$

这是一个一阶微分方程，其解为$f = A_1 e^{-\alpha t}$，其中A_1为常数。于是式(8-17)可以写为：

$$\frac{di}{dt} + \alpha i = A_1 e^{-\alpha t}$$

即

$$e^{\alpha t} \frac{di}{dt} + e^{\alpha t} \alpha i = A_1 \tag{8-18}$$

上式可写成：

$$\frac{d}{dt}(e^{\alpha t} i) = A_1 \tag{8-19}$$

两边取积分，得到：

$$e^{\alpha t} i = A_1 t + A_2$$

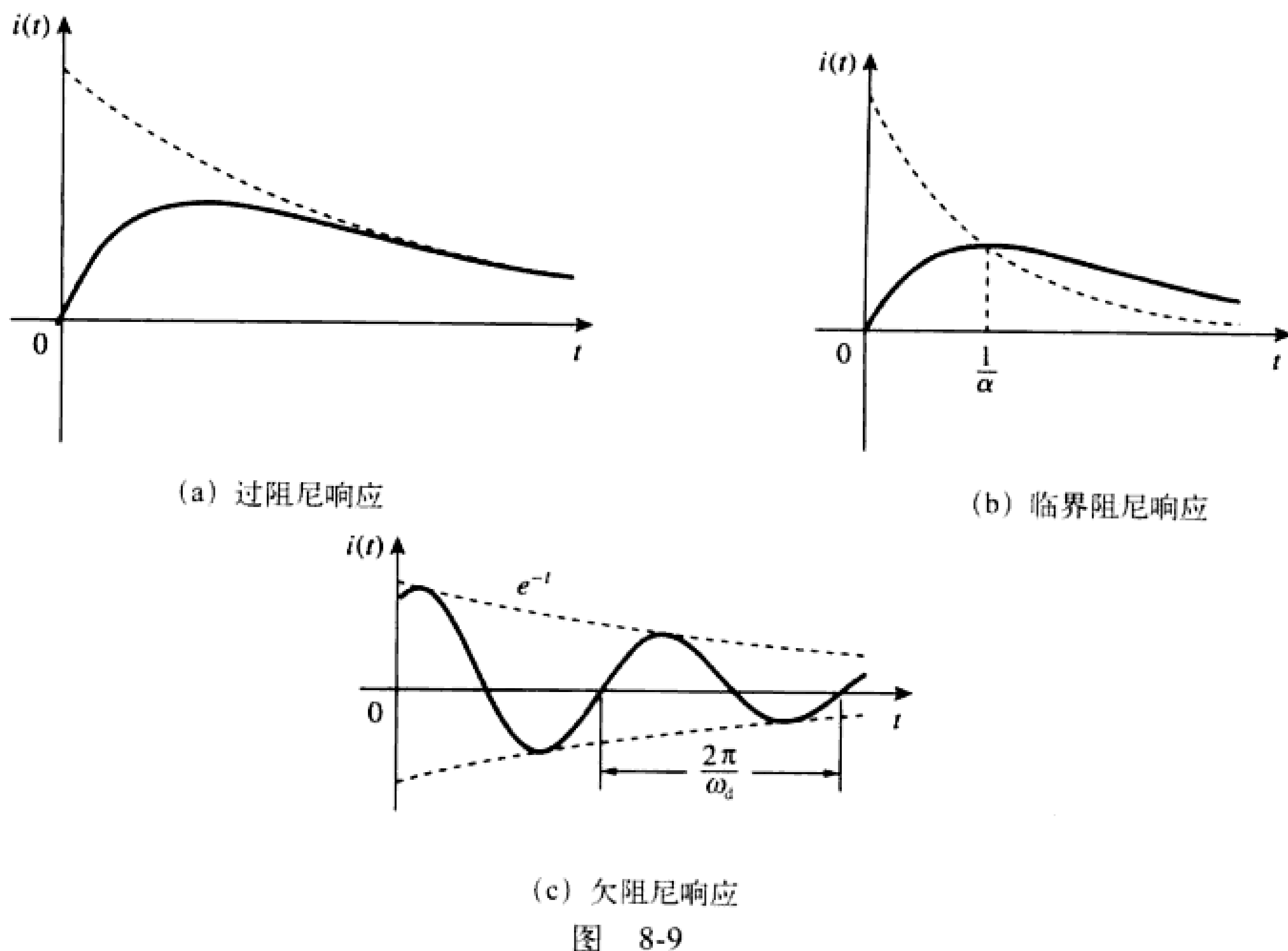
即

$$i = (A_1 t + A_2) e^{-\alpha t} \tag{8-20}$$

其中，A_2为另一个常数。因此，临界阻尼电路的自然响应为两项之和：一个负指数函数和一个与线性项相乘的负指数函数，即：

$$i(t) = (A_2 + A_1 t) e^{-\alpha t} \tag{8-21}$$

典型的临界阻尼响应如图8-9b所示。事实上，图8-9b是函数$i(t) = te^{-\alpha t}$的波形图，在$t = 1/\alpha$时（即t等于1个时间常数时），$i(t)$达到最大值e^{-1}/α，之后就逐渐衰减为零。



（a）过阻尼响应

（b）临界阻尼响应

（c）欠阻尼响应

图 8-9

欠阻尼情况（$\alpha < \omega_0$）

当$\alpha < \omega_0$时，$C < 4L/R^2$，特征根可以写成：

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} = -\alpha + \mathrm{j}\omega_d \tag{8-22a}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} = -\alpha - \mathrm{j}\omega_d \tag{8-22b}$$

其中，$\mathrm{j} = \sqrt{-1}$，$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$，称为阻尼频率（damping frequency）。ω_0与ω_d均为自然频率，它们有助于确定电路的自然响应，ω_0通常称为无阻尼自然频率，ω_d称为阻尼自然频率（damped natural frequency）。电路的自然响应为：

$$\begin{aligned} i(t) &= A_1 \mathrm{e}^{-(\alpha - \mathrm{j}\omega_d)t} + A_2 \mathrm{e}^{-(\alpha + \mathrm{j}\omega_d)t} \\ &= \mathrm{e}^{-\alpha t}(A_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_d t} + A_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_d t}) \end{aligned} \tag{8-23}$$

利用欧拉恒等式：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta, \qquad \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} = \cos\theta - \mathrm{j}\sin\theta \tag{8-24}$$

得到：

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathrm{e}^{-\alpha t}[A_1(\cos\omega_d t + \mathrm{j}\sin\omega_d t) + A_2(\cos\omega_d t - \mathrm{j}\sin\omega_d t)] \\ &= \mathrm{e}^{-\alpha t}[(A_1 + A_2)\cos\omega_d t + \mathrm{j}(A_1 - A_2)\sin\omega_d t] \end{aligned} \tag{8-25}$$

利用常数B_1、B_2分别取代上式中的$(A_1 + A_2)$、$\mathrm{j}(A_1 - A_2)$，则有：

$$\boxed{i(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}(B_1\cos\omega_d t + B_2\sin\omega_d t)} \tag{8-26}$$

式中存在正弦和余弦函数，显然，这种情况下的自然响应具有指数衰减且振荡的特征。响应函数的时间常数为$1/\alpha$，振荡周期为$T = 2\pi/\omega_d$。图8-9c给出了典型的欠阻尼电路的响应曲线［图8-9中假定每种情况下的$i(0) = 0$］。

一旦求出RLC串联电路中流过电感器的电流$i(t)$，其他电路参量，如各个元件的电压等均能容易

求得。例如，电阻器两端的电压为$v_R = Ri$，电感器两端的电压为$v = L\ di/dt$；为了利用式(8-16)，首先应该确定作为关键变量的电感器电流$i(t)$。

下面总结RLC网络的三项主要性质。

（1）这类RLC网络的特征可以通过“阻尼衰减”的概念来理解，所谓阻尼即初始储能的逐渐损耗，也就是网络响应幅度的连续下降。阻尼效应是由电阻R的存在引起的，阻尼因子α决定了响应受阻的速率。如果$R = 0$，则$\alpha = 0$，此时电路成为无阻尼自然频率等于$1/\sqrt{LC}$的LC电路。在这种情况下，满足$\alpha < \omega_0$，所以响应不仅是无阻尼的，而且是振荡的。由于不存在耗能元件即阻尼元件R，该电路又称为无损（loss-less）电路。通过调整R的值，可以使电路响应为无阻尼（undamped）、过阻尼、临界阻尼或欠阻尼中的任何一种状态。

$R = 0$时产生理想的正弦响应。由于L、C内在损耗的存在，使得这种理想的正弦响应实际上并不能够用LC电路实现，参见图6-8与图6-26。一种称为振荡器（oscillator）的电子器件可以产生理想的正弦响应。

例题8-5与例题8-7说明了改变电阻R所引起的效果。

（2）由于两类储能元件的存在，使得振荡响应的出现成为可能。同时利用L和C，就可以实现能量在二者之间来回传送。欠阻尼响应所表现出来的阻尼振荡也称为振铃（ringing）响应，因为储能元件L和C具有来回传递它们之间能量的能力。

包含两个同类储能元件的二阶电路的响应是不可能出现振荡的，如图8-1c与图8-1d所示。

（3）由图8-9可见，不同情况下响应的波形是不同的。一般而言，从波形上区分过阻尼响应与临界阻尼响应之间的差别非常困难。临界阻尼状态是欠阻尼与过阻尼的分界线，其衰减是最快的。在相同的初始条件下，过阻尼电路消耗初始储能所需的时间最长，所以其建立也是最长的。如果要求响应以最快的速度无振荡地趋于最终值，临界阻尼电路则是最好的选择。

这里的意思是说，在绝大多数实际电路中，我们所要寻找的是特性与临界阻尼电路尽可能接近的过阻尼电路。

例题8-3　在图8-8中，$R = 40\ \Omega$，$L = 4\ \text{H}$，$C = 1/4\ \text{F}$，试计算该电路的特征根，该电路的自然响应是过阻尼、欠阻尼还是临界阻尼？

解　首先计算α与ω_0：

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{40}{2(4)} = 5, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{4 \times \frac{1}{4}}} = 1$$

于是特征根为：

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -5 \pm \sqrt{25 - 1}$$

即，

$$s_1 = -0.101, \qquad s_2 = -9.899$$

由于$\alpha > \omega_0$，所以电路响应是过阻尼的。这一结论也可以从特征根是两个负实数的事实中得出。

练习题8-3　在图8-8中，如果$R = 10\ \Omega$，$L = 5\ \text{H}$，$C = 2\ \text{mF}$，试求α，ω_0，s_1与s_2，该电路的自然响应属于哪种类型？

答　1，10，$-1 \pm j\,9.95$，欠阻尼。

例题8-4　试求图8-10电路中的$i(t)$，假定该电路在$t = 0$时刻已达到稳定状态。

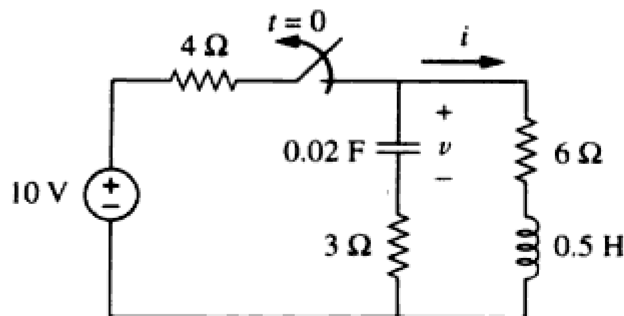


图 8-10　例题 8-4 的电路原理图

解　当$t < 0$时，开关闭合，电容器相当于开路，而电

感器相当于短路，其等效电路如图8-11a所示。因此，在$t=0$时刻，

$$i(0)=\frac{10}{4+6}=1\,\text{A},\qquad v(0)=6i(0)=6\,\text{V}$$

其中，$i(0)$为流过电感的初始电流，$v(0)$为电容器两端的初始电压。

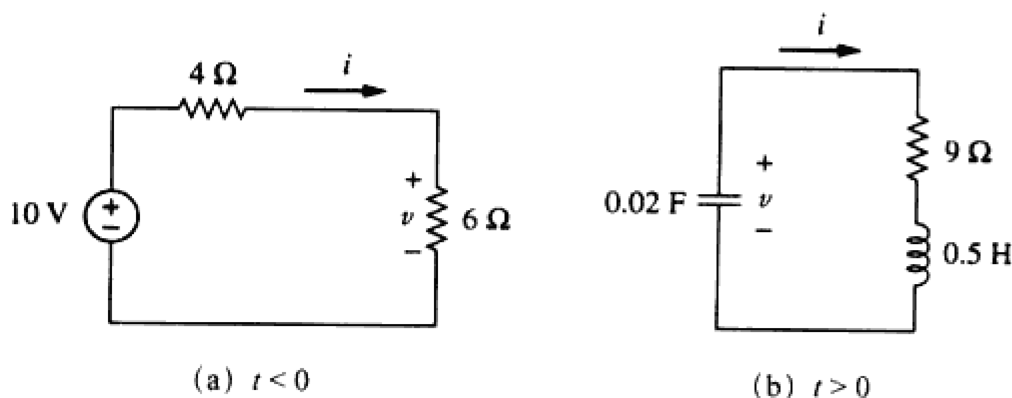


图 8-11　图 8-10 中的电路

当$t>0$时，开关断开，电压源随之脱离，其等效电路如图8-11b所示，即成为一个无源激励的串联RLC电路。注意，开关断开后，图8-10中3 Ω与6 Ω的两个串联电阻，在图8-11b中已经合并为一个9 Ω电阻。电路的特征根计算如下：

$$\alpha=\frac{R}{2L}=\frac{9}{2\left(\frac{1}{2}\right)}=9,\qquad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{1}{50}}}=10$$

$$s_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}=-9\pm\sqrt{81-100}$$

即，

$$s_{1,2}=-9\pm \mathrm{j}\,4.359$$

因此，该电路的响应是欠阻尼的（$\alpha<\omega_0$），即，

$$i(t)=\mathrm{e}^{-9t}(\mathrm{A}_1\cos 4.359t+\mathrm{A}_2\sin 4.359t) \tag{8-4-1}$$

下面利用初始条件确定A_1与A_2。在$t=0$时刻，

$$i(0)=1=\mathrm{A}_1 \tag{8-4-2}$$

由式(8-5)可得：

$$\left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=-\frac{1}{L}[Ri(0)+v(0)]=-2[9(1)-6]=-6\text{A/s} \tag{8-4-3}$$

注意，这里$v(0)=V_0=-6$ V，因为图8-11b中v的极性与图8-8中v的极性是相反的。对式(8-4-1)中的$i(t)$求导，得到：

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=-9\mathrm{e}^{-9t}(A_1\cos 4.359t+A_2\sin 4.359t)+\mathrm{e}^{-9t}(4.359)(-A_1\sin 4.359t+A_2\cos 4.359t)$$

在$t=0$时刻利用式(8-4-3)中的初始条件，得到：

$$-6=-9(A_1+0)+4.359(-0+A_2)$$

而由式(8-4-2)可得$A_1=1$，于是：

$$-6=-9+4.359A_2\qquad\Rightarrow\qquad A_2=0.6882$$

将A_1与A_2的值代入式(8-4-1)得到电路的全解为：

$$i(t)=\mathrm{e}^{-9t}(\cos 4.359t+0.6882\sin 4.359t)\,\text{A}$$

练习题8-4　图8-12所示电路在$t=0$ 时刻已达到稳定状态，如果保险开关在$t=0$时刻掷向位置b，试计算$i(t)$，$t>0$。

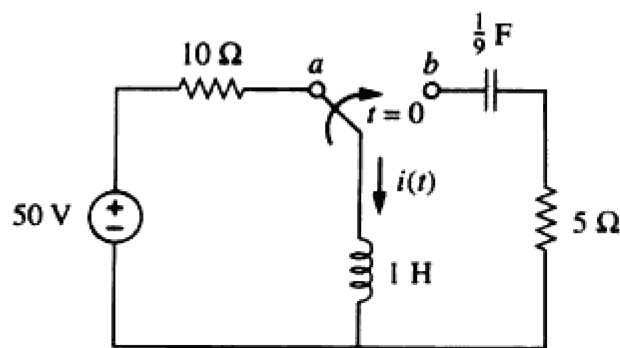


图 8-12　练习题 8-4 的电路原理图

答　$e^{-2.5t}(5\cos 1.6583t - 7.5378\sin 1.6583t)$ A。

8.4　无源激励 RLC 并联电路

RLC并联电路有许多实际应用，特别是在通信网络和滤波器设计中应用更为广泛。

在图8-13所示的RLC并联电路中，假定电感器的初始电流为I_0，电容器两端的初始电压为V_0，则：

$$i(0) = I_0 = \frac{1}{L}\int_{\infty}^{0} v(t)\mathrm{d}t \tag{8-27a}$$

$$v(0) = V_0 \tag{8-27b}$$

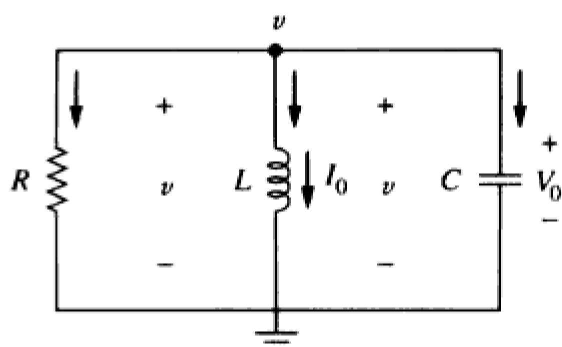


图 8-13　无源激励 RLC 并联电路

由于电路中的三个元件是并联的，所以它们两端具有相同的电压v，按照无源符号规约，电流流入各个元件，即流过每个元件的电流来自顶部的节点。因此，对顶部的节点应用KCL得到：

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v\,\mathrm{d}t + C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{8-28}$$

两边对t求导，并同时除以C得到：

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}v = 0 \tag{8-29}$$

用s取代一阶导数，s^2取代二阶导数，就可以得到特征方程。根据建立式(8-4)～式(8-8)相同的道理，所得到的特征方程为：

$$s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0 \tag{8-30}$$

该特征方程的特征根为：

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

即，

$$\boxed{s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}} \tag{8-31}$$

其中，

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2RC}, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \tag{8-32}$$

α、ω_0的名称与上一节相同，因为它们在方程解中的作用与上一节介绍的作用相同。而且，对于$\alpha > \omega_0$、$\alpha = \omega_0$和$\alpha < \omega_0$三种情况，存在三种可能的解，下面分别对这三种情况进行讨论。

过阻尼情况（$\alpha > \omega_0$）

由式(8-32)可知，当$L > 4R^2C$时，$\alpha > \omega_0$。特征方程的特征根为负实数，于是，电路的响应为：

$$\boxed{v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}} \tag{8-33}$$

临界阻尼情况（$\alpha = \omega_0$）

当$\alpha = \omega_0$时，$L = 4R^2C$。特征方程是两个相等的实根，此时电路的响应为：

$$\boxed{v(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t}} \tag{8-34}$$

欠阻尼情况（$\alpha < \omega_0$）

当$\alpha < \omega_0$时，$L < 4R^2C$，这种情况下的特征根是复数，可以表示为：

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d \tag{8-35}$$

其中，

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \tag{8-36}$$

电路的响应为：

$$\boxed{v(t) = e^{-\alpha t}(A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t)} \tag{8-37}$$

以上三种情况下的常数A_1与A_2由初始条件确定，即由$v(0)$与$dv(0)/dt$确定。其中第一项可以由式(8-27b)得到，而第二项可以通过合并式(8-27)与式(8-28)得到，即：

$$\frac{V_0}{R} + I_0 + C\frac{dv(0)}{dt} = 0$$

即：

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{(V_0 + RI_0)}{RC} \tag{8-38}$$

电压波形图与图8-9所示类似，具体情况取决于电路是过阻尼、欠阻尼还是临界阻尼的。

求出RLC并联电路中电容器两端的电压$v(t)$之后，就可以很方便地求出电路的其他参量，如流过各个元件的电流等。例如，流过电阻器的电流为$i_R = v/R$，流过电容器的电流为$i_C = Cdv/dt$。之所以选择电容器两端的电压$v(t)$作为首先确定的关键变量，是为了充分利用式(8-1a)所示的电压连续带来的方便。注意，对于RLC串联电路而言，首先要确定流过电感器的电流$i(t)$，但对于RLC并联电路来说，首先要确定电容器两端的电压$v(t)$。

例题8-5 图8-13所示的并联电路中，假定$v(0) = 5$ V，$i(0) = 0$，$L = 1$ H，$C = 10$ mF。试求$R = 1.923\ \Omega$，$R = 5\ \Omega$以及$R = 6.25\ \Omega$三种情况下的$v(t)$，$t > 0$。

解 第一种情况：如果$R = 1.923\ \Omega$，则：

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \times 1.923 \times 10 \times 10^{-3}} = 26$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1 \times 10 \times 10^{-3}}} = 10$$

由于此时$\alpha > \omega_0$，故电路响应为过阻尼的，特征方程的特征根为：

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -2, -50$$

相应的电路响应为：

$$v(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-50t} \tag{8-5-1}$$

下面利用初始条件确定A_1与A_2：

$$v(0) = 5 = A_1 + A_2 \tag{8-5-2}$$

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{v(0) + Ri(0)}{RC} = -\frac{5 + 0}{1.923 \times 10 \times 10^{-3}} = -260$$

对式(8-5-1)的求导，得到：

$$\frac{dv}{dt} = -2A_1 e^{-2t} - 50A_2 e^{-50t}$$

在$t = 0$时刻，

$$-260 = -2A_1 - 50A_2 \tag{8-5-3}$$

由式(8-5-2)与式(8-5-3)可得，$A_1 = 10.625$，$A_2 = 5.625$，将A_1，A_2代入式(8-5-1)得到：

$$v(t) = -0.2083\,\mathrm{e}^{-2t} + 5.208\,\mathrm{e}^{-50t} \tag{8-5-4}$$

第二种情况：当$R = 5\ \Omega$时，有：

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2\times5\times10\times10^{-3}} = 10$$

而$\omega_0 = 10$保持不变。由于$\alpha = \omega_0 = 10$，所以电路响应是临界阻尼的。于是，$s_1 = s_2 = -10$，并且：

$$v(t) = (A_1 + A_2 t)\,\mathrm{e}^{-10t} \tag{8-5-5}$$

利用初始条件确定A_1与A_2：

$$v(0) = 5 = A_1 \tag{8-5-6}$$

$$\frac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t} = -\frac{v(0)+Ri(0)}{RC} = -\frac{5+0}{5\times10\times10^{-3}} = -100$$

对式(8-5-5)求导数得到：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (-10A_1 - 10A_2 t + A_2)\mathrm{e}^{-10t}$$

在$t = 0$时刻，

$$-100 = -10A_1 + A_2 \tag{8-5-7}$$

由式(8-5-6)与式(8-5-7)得到，$A_1 = 5$，$A_2 = 150$，于是：

$$v(t) = (5 - 50t)\,\mathrm{e}^{-10t}\ \mathrm{V} \tag{8-5-8}$$

第三种情况：当$R = 6.25\ \Omega$时，有：

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2\times6.25\times10\times10^{-3}} = 8$$

而$\omega_0 = 10$保持不变。由于此时$\alpha < \omega_0$，所以电路响应是欠阻尼的，特征方程式的特征根为：

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - w_0^2} = -8 \pm \mathrm{j}6$$

因此，

$$v(t) = (A_1\cos 6t + A_2\sin 6t)\,\mathrm{e}^{-8t} \tag{8-5-9}$$

下面确定A_1与A_2：

$$v(0) = 5 = A_1 \tag{8-5-10}$$

$$\frac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t} = -\frac{v(0)+Ri(0)}{RC} = -\frac{5+0}{6.25\times10\times10^{-3}} = -80$$

对式(8-5-9)求导，可得：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (-8\mathrm{A}_1\cos6t - 8\mathrm{A}_2\sin6t - 6\mathrm{A}_1\sin6t + 6\mathrm{A}_2\cos6t)\mathrm{e}^{-8t}$$

在$t = 0$时刻，

$$-80 = -8A_1 + 6A_2 \tag{8-5-11}$$

由式(8-5-10)与式(8-5-11)可得，$A_1 = 5$，$A_2 = -6.667$，因此：

$$v(t) = (5\cos 6t - 6.667\sin 6t)\,\mathrm{e}^{-8t} \tag{8-5-12}$$

注意，随着电阻R的增大，阻尼的程度减弱，导致电路的响应也不同，图8-14给出了三种不同情况下的响应曲线。

练习题8-5 在图8-13所示电路中，假定$R = 2\ \Omega$，$L = 0.4$ H，$C = 25$ mF，$v(0) = 0$，$i(0) = 3$ A，试求$v(t)$，$t > 0$。

答 $-120t\mathrm{e}^{-10t}$ V。

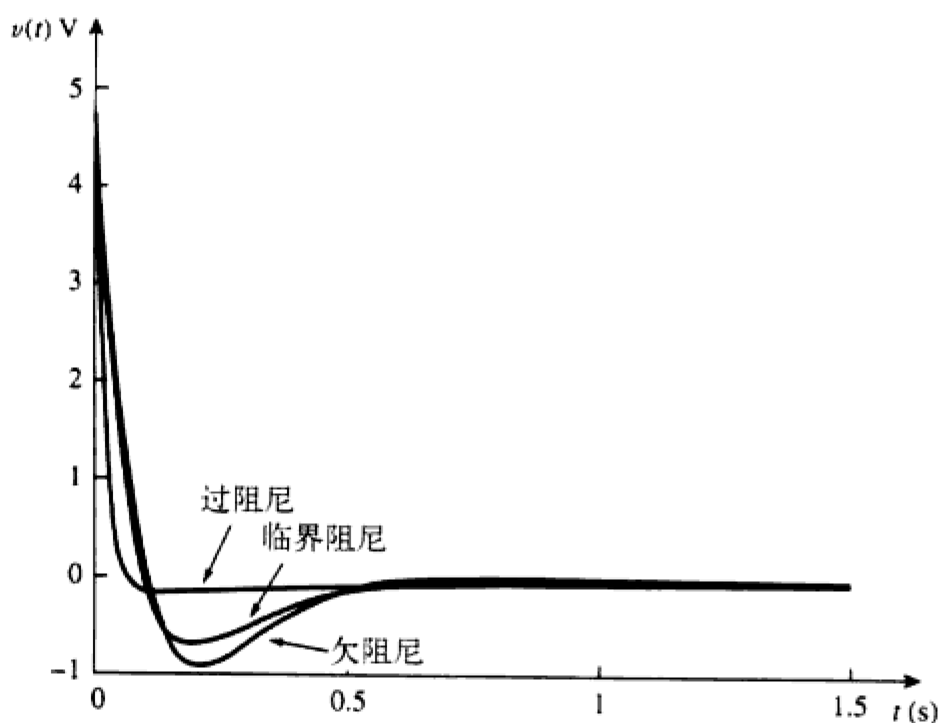


图 8-14 例题 8-5 的图：三种不同阻尼情况的响应曲线

例题8-6 试求图8-15所示RLC电路在$t>0$条件下的$v(t)$。

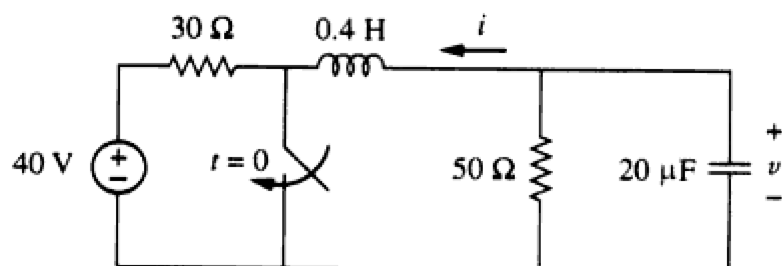


图 8-15 例题 8-6 的电路原理图

解 当$t<0$时，开关断开，电感器相当于短路，而电容器相当于开路，电容器两端的初始电压与50 Ω电阻两端的电压相同，即：

$$v(0)=\frac{50}{30+50}(40)=\frac{5}{8}\times 40=25\,\text{V} \tag{8-6-1}$$

流过电感器的初始电流为：

$$i(0)=-\frac{40}{30+50}=-0.5\,\text{A}$$

该电流i的方向如图8-15所示，与图8-13中的I_0方向一致，这样就符合电流从电感器正极流入的规则（参见图6-23）。因为所要求的解是$v(t)$，所以需要用$\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$表示上述初始值：

$$\frac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t}=-\frac{v(0)+Ri(0)}{RC}=-\frac{25-50\times 0.5}{50\times 20\times 10^{-6}}=0 \tag{8-6-2}$$

当$t>0$时，开关闭合，电压源和30 Ω电阻与电路的其余部分相互隔离，RLC并联电路与电压源相互独立地工作，如图8-16所示。下面确定特征方程的特征根，得到：

$$\alpha=\frac{1}{2RC}=\frac{1}{2\times 50\times 20\times 10^{-6}}=500$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\frac{1}{\sqrt{0.4\times 20\times 10^{-6}}}=354$$

$$\begin{aligned}s_{1,2}&=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\\&=-500\pm\sqrt{250\,000-124\,997.6}=-500\pm 354\end{aligned}$$

即：

$$s_1 = -854,\quad s_2 = -146$$

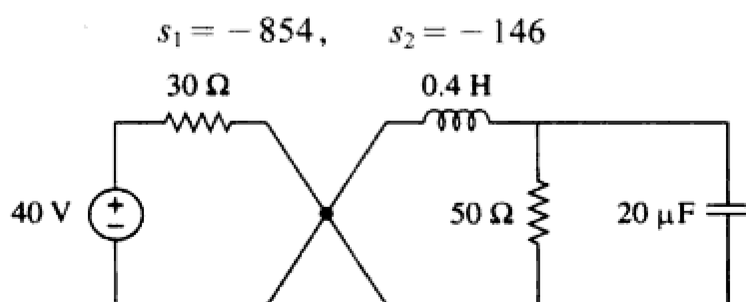


图 8-16　$t > 0$ 时图 8-15 的电路，节点右边的 RLC 并联电路与节点左边的电路相互独立地工作

由于$\alpha > \omega_0$，于是得到电路的过阻尼响应为：

$$v(t) = A_1\,\mathrm{e}^{-854t} + A_2\,\mathrm{e}^{-146t} \tag{8-6-3}$$

在$t = 0$时刻，利用式(8-6-1)的条件，得到：

$$v(0) = 25 = A_1 + A_2 \quad\Rightarrow\quad A_2 = 25 - A_1 \tag{8-6-4}$$

对式(8-6-3)中的$v(t)$求导可得：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -854A_1\mathrm{e}^{-854t} - 146A_2\mathrm{e}^{-146t}$$

利用式(8-6-2)的条件，得到：

$$\frac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t} = 0 = -854A_1 - 146A_2$$

即，

$$0 = 854\,A_1 + 146A_2 \tag{8-6-5}$$

联立求解式(8-6-4)与式(8-6-5)，得到：

$$A_1 = -5.156,\quad A_2 = 30.16$$

因此，式(8-6-3)的全解为：

$$v(t) = -5.156\,\mathrm{e}^{-854t} + 30.16\,\mathrm{e}^{-146t}\ \mathrm{V}$$

练习题8-6　试求图8-17所示电路在$t > 0$条件下的$v(t)$。

答　$66.67(\mathrm{e}^{-10t} - \mathrm{e}^{-2.5t})$ V。

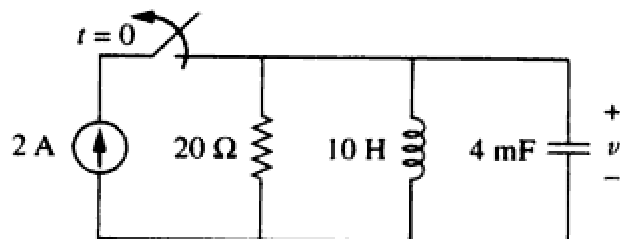


图 8-17　练习题 8-6 的电路原理图

8.5　RLC 串联电路的阶跃响应

上一章已经学习过，给电路突然施加一个直流电源就可以确定电路的阶跃响应。在图8-18所示的RLC串联电路中，在$t > 0$时沿回路应用KVL定律，有：

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + v = V_s \tag{8-39}$$

但是，

$$i = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

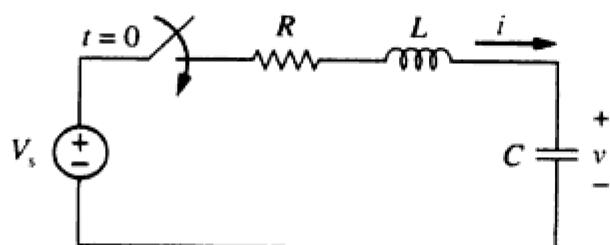


图 8-18　阶跃电压施加于 RLC 串联电路上

将i代入式(8-39)并整理得到：

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{LC} = \frac{V_s}{LC} \tag{8-40}$$

上式与式(8-4)具有相同的形式。特别是两式中的系数是相同的（系数对于确定电路响应的频率

参数是很主要的)，但两式中的电路变量是不同的［式(8-47)的情况相同］。因此，RLC电路的串联特征方程并不会受到直流源存在的影响。

式(8-40)的解包含两部分：瞬态响应$v_t(t)$与稳态响应$v_{ss}(t)$，即：

$$v(t)=v_t(t)+v_{ss}(t) \tag{8-41}$$

瞬态响应$v_t(t)$是全响应中随时间衰减的分量，瞬态响应的形式与8.3节得到的无源电路的解式(8-14)、式(8-21)以及式(8-21)形式相同。因此，在过阻尼、欠阻尼和临界阻尼情况下的瞬态响应$v_t(t)$分别为：

$$v_t(t)=A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t} \quad （过阻尼） \tag{8-42a}$$

$$v_t(t)=(A_1+A_2t)e^{-\alpha t} \quad （临界阻尼） \tag{8-42b}$$

$$v_t(t)=(A_1\cos\omega_d t+A_2\sin\omega_d t)e^{-\alpha t} \quad （欠阻尼） \tag{8-42c}$$

稳态响应$v_{ss}(t)$是$v(t)$的终值。在图8-18所示的电路中，电容器电压的终值就等于源电压V_s，因此，

$$v_{ss}(t)=v(\infty)=V_s \tag{8-43}$$

于是，电路在过阻尼、欠阻尼和临界阻尼三种情况下的全解为：

$$v(t)=V_s+A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t} \quad （过阻尼） \tag{8-44a}$$

$$v(t)=V_s+(A_1+A_2t)e^{-\alpha t} \quad （临界阻尼） \tag{8-44b}$$

$$v(t)=V_s+(A_1\cos\omega_d t+A_2\sin\omega_d t)e^{-\alpha t} \quad （欠阻尼） \tag{8-44c}$$

由电路的初始条件：$v(0)$与$dv(0)/dt$可以确定常数A_1与A_2的值。需要记住的是，v与i分别表示电容器两端的电压与流过电感器的电流，于是，式(8-44)仅适用于求解v。但是，一旦已知电容器两端的电压$v_C=v$，就可以确定$i=Cdv/dt$，也就是流过电容器、电感器和电阻器的电流。因此，电阻器两端的电压为$v_R=iR$，而电感器两端的电压为$v_L=Ldi/dt$。

换言之，可以直接求出电路中任何变量$x(t)$的全响应，因为其一般形式均为：

$$x(t)=x_{ss}(t)+x_t(t) \tag{8-45}$$

其中，$x_{ss}=x(\infty)$为终值，$x_t(t)$为瞬态响应。终值的求解方法参见第8.2节的介绍，瞬态响应的形式与式(8-42)相同，相应的常数可以根据$x(0)$与$dx(0)/dt$的值由式(8-44)确定。

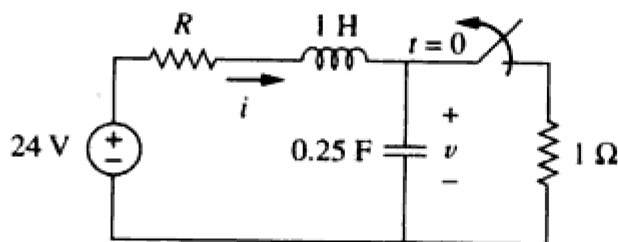


图 8-19 例题 8-7 的电路原理图

例题8-7 图8-19所示的电路中，试求$R=5\ \Omega$，$R=4\ \Omega$和$R=1\ \Omega$三种情况下的$v(t)$与$i(t)$，$t>0$。

解 第一种情况：$R=5\ \Omega$。当$t<0$时，开关长时间闭合，电容器相当于开路，而电感器相当于短路，流过电感器的初始电流为：

$$i(0)=\frac{24}{5+1}=4\ \text{A}$$

电容器两端的初始电压等于1 Ω电阻两端的电压，即：

$$v(0)=1i(0)=4\ \text{V}$$

当$t>0$时，开关断开，此时1 Ω电阻与电路的连接被断开，剩余的是带有电压源的RLC串联电路。其特征根确定如下：

$$\alpha=\frac{R}{2L}=\frac{5}{2\times1}=2.5, \qquad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\frac{1}{\sqrt{1\times0.25}}=2$$

$$s_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}=-1,-4$$

由于$\alpha > \omega_0$，所以产生过阻尼自然响应，于是全响应为：

$$v(t) = v_{ss} + (A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t})$$

其中，v_{ss}为稳态响应，其值为电容器电压的终值。在图8-19中，$v_{ss} = 24$ V，于是：

$$v(t) = 24 + (A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t}) \tag{8-7-1}$$

下面利用初始条件来确定A_1与A_2：

$$v(0) = 4 = 24 + A_1 + A_2$$

即：

$$-20 = A_1 + A_2 \tag{8-7-2}$$

流过电感器的电流不能突变，由于电感器与电容器现在是串联的，所以该电流就是在$t = 0^+$时刻流过电容器的电流。因此，

$$i(0) = C\frac{dv(0)}{dt} = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv(0)}{dt} = \frac{4}{C} = \frac{4}{0.25} = 16$$

在利用该条件之前，需对式(8-7-1)的v求导，有：

$$\frac{dv}{dt} = -A_1 e^{-t} - 4A_2 e^{-4t} \tag{8-7-3}$$

在$t = 0$时刻，

$$\frac{dv(0)}{dt} = 16 = -A_1 - 4A_2 \tag{8-7-4}$$

由式(8-7-2)与式(8-7-4)可得，$A_1 = -64/3$，$A_2 = 4/3$。将A_1与A_2的值代入式(8-7-1)，得到：

$$v(t) = 24 + \frac{4}{3}(-16e^{-t} + e^{-4t})\text{V} \tag{8-7-5}$$

由于电感器与电容器在$t > 0$时是串联的，所以流过电感器的电流与流过电容器的电流相同，因此：

$$i(t) = C\frac{dv}{dt}$$

式(8-7-3)两端同乘以$C = 0.25$，并将A_1与A_2的值代入，得到：

$$i(t) = \frac{4}{3}(4e^{-t} - e^{-4t})\text{A} \tag{8-7-6}$$

由此可知$i(0) = 4$ A，与初始条件相符。

第二种情况：$R = 4\ \Omega$。同样，流过电感器的初始电流$i(0)$为：

$$i(0) = \frac{24}{4+1} = 4.8\text{A}$$

电容器两端的初始电压$v(0)$为：

$$v(0) = 1i(0) = 4.8\text{ V}$$

对于特征根而言：

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{4}{2\times 1} = 2$$

而$\omega_0 = 2$保持不变。在这种情况下，$s_1 = s_2 = -\alpha = -2$，产生临界阻尼自然响应。因此，全响应为：

$$v(t) = v_{ss} + (A_1 + A_2 t)e^{-2t}$$

与前一种情况相同，$v_{ss} = 24$ V。于是，

$$v(t) = 24 + (A_1 + A_2 t)e^{-2t} \tag{8-7-7}$$

利用初始条件确定A_1与A_2，有

$$v(0) = 4.8 = 24 + A_1 \quad \Rightarrow \quad A_1 = -19.2 \tag{8-7-8}$$

由于$i(0) = C\,\mathrm{d}\,v(0)/\mathrm{d}t = 4.8$，即：

$$\frac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t} = \frac{4.8}{C} = 19.2$$

由式(8-7-7)可得：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (-2A_1 - 2tA_2 + A_2)\mathrm{e}^{-2t} \tag{8-7-9}$$

在$t = 0$时刻，

$$\frac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t} = 19.2 = -2A_1 + A_2 \tag{8-7-10}$$

由式(8-7-8)与式(8-7-10)可以求出$A_1 = -19.2$，$A_2 = -19.2$。于是式(8-7-7)成为：

$$v(t) = 24 - 19.2\,(1 + t)\,\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{V} \tag{8-7-11}$$

流过电感的电流等于流过电容器的电流，即：

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

式(8-7-9)两端同乘以$C = 0.25$，并将A_1，A_2的值代入后得到：

$$i(t) = (\,4.8 + 9.6t\,)\,\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{A} \tag{8-7-12}$$

可以看出，$i(0) = 4.8\mathrm{A}$与初始条件相符。

第三种情况：$R = 1\,\Omega$。流过电感器的初始电流$i(0)$为：

$$i(0) = \frac{24}{1+1} = 12\,\mathrm{A}$$

电容器两端的初始电压等于$1\,\Omega$电阻器两端的电压：

$$v(0) = 1i(0) = 12\,\mathrm{V}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{1}{2\times 1} = 0.5$$

由于$\alpha = 0.5 < \omega_0 = 2$，所以电路产生欠阻尼响应：

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -0.5 \pm \mathrm{j}1.936$$

于是，电路的全响应为：

$$v(t) = 24 + (A_1\cos 1.936t + A_2\sin 1.936t)\mathrm{e}^{-0.5t} \tag{8-7-13}$$

下面确定常数A_1与A_2，有：

$$v(0) = 12 = 24 + A_1 \quad \Rightarrow \quad A_1 = -12 \tag{8-7-14}$$

由于$i(0) = C\,\mathrm{d}\,v(0)/\mathrm{d}t = 12$，所以：

$$\frac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t} = \frac{12}{C} = 48 \tag{8-7-15}$$

但是，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = &\ \mathrm{e}^{-0.5t}(-1.936A_1\sin 1.936t + 1.936A_2\cos 1.936t)\\ &-0.5\mathrm{e}^{-0.5t}(A_1\cos 1.936t + A_2\sin 1.936t)\end{aligned} \tag{8-7-16}$$

在$t = 0$时刻，有：

$$\frac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t} = 48 = (-0 + 1.936A_2) - 0.5(A_1 + 0)$$

将$A_1 = -12$代入后得到$A_2 = 21.694$，式(8-7-13)变为：

$$v(t) = 24 + (21.694\,\sin\,1.936t - 12\,\cos\,1.936t\,)\,\mathrm{e}^{-0.5t}\,\mathrm{V} \tag{8-7-17}$$

流过电感器的电流为：

$$i(t)=C\frac{dv}{dt}$$

式(8-7-16)两边同乘以$C=0.25$，并将A_1与A_2的值代入后得到：

$$i(t)=(3.1\sin 1.936t+12\cos 1.936t)\,e^{-0.5t}\text{ A} \tag{8-7-18}$$

由此可见，$i(0)=12$ A，与预期相符。

图8-20给出了上述三种情况下的响应曲线，由图可见，临界阻尼响应以最快的速度达到阶跃输入电压24 V。

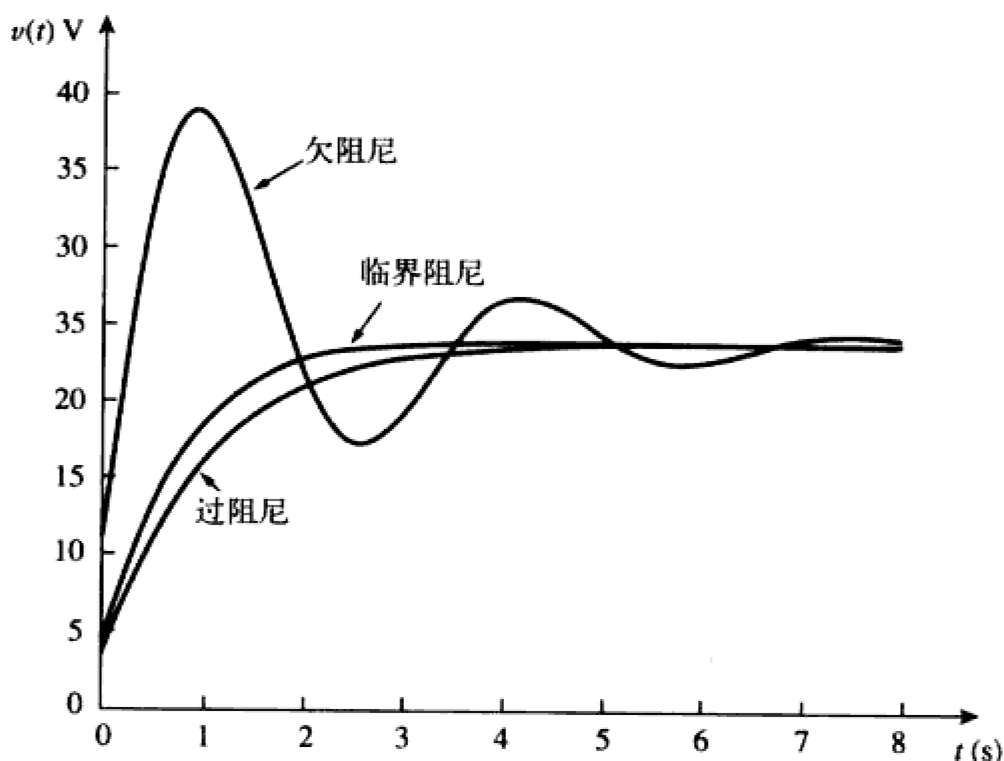


图 8-20 例题 8-7 的图：三种不同阻尼程度的响应曲线

练习题8-7 图8-21所示电路中的开关长时间位于位置a，而在$t=0$时刻，掷向位置b，试求$t>0$时的$v(t)$与$v_R(t)$。

答 $10-(1.1547\sin 3.464t+2\cos 3.464t)\,e^{-2t}$ V，$2.31\,e^{-2t}\sin 3.464t$ V。

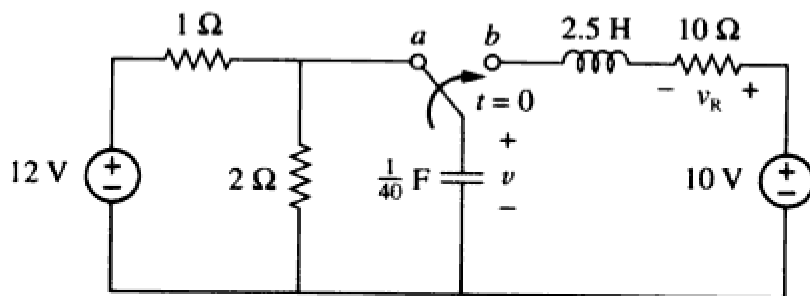


图 8-21 练习题 8-7 的电路原理图

8.6 RLC 并联电路的阶跃响应

考虑如图8-22所示的RLC并联电路，现欲求出一个直流电流源突然作用于该电路时，电路的响应i。当$t>0$时，在电路的顶部节点应用KCL得到：

$$\frac{v}{R}+i+C\frac{dv}{dt}=I_s \tag{8-46}$$

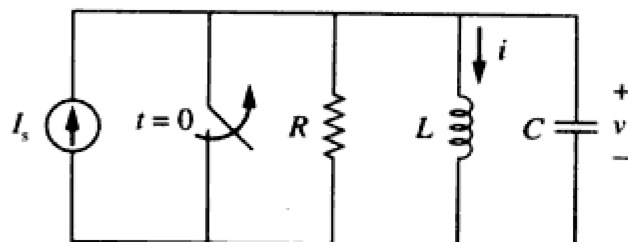


图 8-22 电流源激励的 RLC 并联电路

但是，

$$v = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

将v代入式(8-46)，并且两边同除以LC，得到：

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{LC} = \frac{I_s}{LC} \tag{8-47}$$

其特征方程与式(8-29)的特征方程相同。

式(8-47)的全解由瞬态响应$i_t(t)$和稳态响应$i_{ss}(t)$组成，即：

$$i(t) = i_t(t) + i_{ss}(t) \tag{8-48}$$

瞬态响应与我们在8.4节得到的表达式相同，稳态响应即i的终值。在图8-22所示电路中，流过电感器的电流终值就是电流源I_s，因此，

$$\boxed{i(t) = I_s + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}} \quad （过阻尼） \tag{8-49}$$

$$\boxed{i(t) = I_s + (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t}} \quad （临界阻尼）$$

$$\boxed{i(t) = I_s + (A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t)e^{-\alpha t}} \quad （欠阻尼）$$

每种情况下的常数A_1与A_2由i与$\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$的初始条件确定。应该注意的是，式(8-49)仅适用于求解流过电感器的电流i。但是，一旦已知流过电感器的电流$i_L = i$，就可以求出$v = L\ \mathrm{d}i/\mathrm{d}t$，此即电感器、电容器和电阻器两端的电压。于是，流过电阻器的电流为$i_R = v/R$，而流过电容器的电流为$i_C = C\ \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$。同理，电路中任何变量$x(t)$的全响应均可直接利用下式求出：

$$x(t) = x_{ss}(t) + x_t(t) \tag{8-50}$$

其中，x_{ss}与x_t分别是其终值与瞬态响应。

例题8-8 在如图8-23所示电路中，试求$t > 0$时的$i(t)$与$i_R(t)$。

解 当$t < 0$时，开关断开，图示电路被分割为两个独立的子电路。4 A电流流过电感器，于是：

$$i(0) = 4\ \mathrm{A}$$

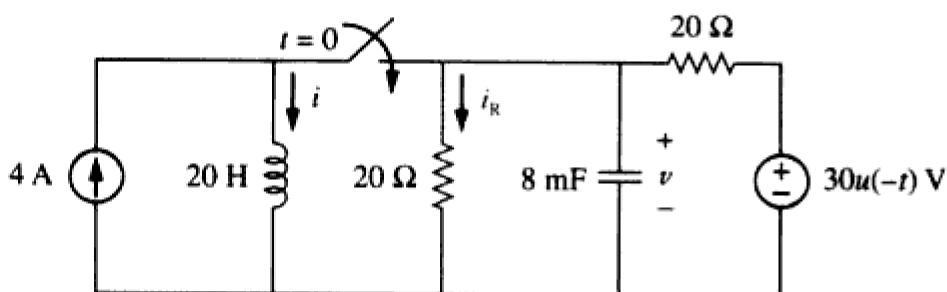


图 8-23 例题 8-8 的电路原理图

由于当$t < 0$时，$30\ u(-t) = 30$，当$t > 0$时，$30\ u(-t) = 0$，所以该电压源在$t < 0$时有效，此时电容器相当于开路，其两端的电压和与其并联的20 Ω电阻两端的电压相同，由分压原理可得电容器两端的初始电压为：

$$v(0) = \frac{20}{20+20}(30) = 15\ \mathrm{V}$$

当$t > 0$时，开关闭合，得到一个电流源激励的RLC并联电路。此时电压源为零，即处于短路状态，并且两个20 Ω电阻器相互并联，合并后的电阻值为$R = 20 \,||\, 20 = 10\ \Omega$。电路的特征根求解如下：

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2\times 10\times 8\times 10^{-3}} = 6.25$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{20\times 8\times 10^{-3}}} = 2.5$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -6.25 \pm \sqrt{39.0625 - 6.25} = -6.25 \pm 5.7282$$

即：

$$s_1 = -11.978, \qquad s_2 = -0.5218$$

由于$\alpha > \omega_0$，所以处于过阻尼状态，于是：

$$i(t) = I_s + A_1 e^{-11.978t} + A_2 e^{-0.5218t} \tag{8-8-1}$$

其中，$I_s = 4$为$i(t)$的终值。下面利用初始条件确定常数A_1与A_2。在$t=0$时刻：

$$i(0) = 4 = 4 + A_1 + A_2 \quad \Rightarrow \quad A_2 = -A_1 \tag{8-8-2}$$

对式(8-8-1)中的$i(t)$求导，得到：

$$\frac{di}{dt} = -11.978 A_1 e^{-11.978t} - 0.5218 A_2 e^{-0.5218t}$$

因此，在$t=0$时刻有，

$$\frac{di(0)}{dt} = -11.978 A_1 - 0.5218 A_2 \tag{8-8-3}$$

但是，

$$L\frac{di(0)}{dt} = v(0) = 15 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{di(0)}{dt} = \frac{15}{L} = \frac{15}{20} = 0.75$$

将该值代入式(8-8-3)并与式(8-8-2)联立求解，得到：

$$0.75 = (\ 11.978 - 0.5218\ ) A_2 \Rightarrow \qquad A_2 = 0.0655$$

于是，$A_1 = -0.0655$，$A_2 = 0.0655$。将A_1与A_2代入式(8-8-1)得到的电路的全解为：

$$i(t) = 4 + 0.0655\ (\ e^{-0.5218t} - e^{-11.978t})\ \mathrm{A}$$

由$i(t)$可以得到$v(t) = L\ di/dt$，以及：

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{20} = \frac{L}{20}\frac{di}{dt} = 0.785 e^{-11.978t} - 0.0342 e^{-0.5218t}\ \mathrm{A}$$

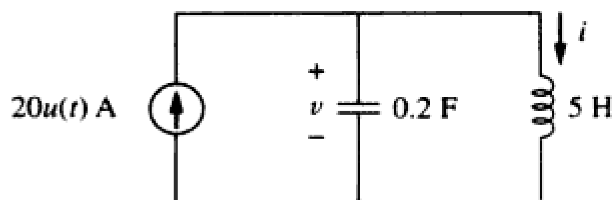


图 8-24 练习题 8-8 的电路原理图

练习题8-8 试求图8-24所示电路在$t > 0$时的$i(t)$与$v(t)$。

答 $20(\ 1-\cos t\ )$ A，$100 \sin t$ V。

8.7 一般二阶电路

通过前面几节的学习，已经掌握了RLC串联电路与并联电路的求解，本节将其主要思想推广到包含一个或多个常值独立源的任意二阶电路的求解中。虽然RLC串联电路与并联电路是应用最多的二阶电路，但还有一些其他的二阶电路，如运算放大器等也是非常有用的。对于给定的二阶电路，可以按照如下四个步骤确定其阶跃响应$x(t)$（$x(t)$可以是电压也可以是电流）。

（1）首先利用8.2节讨论的方法，确定电路的初始条件$x(0)$和$dx(0)/dt$，以及终值$x(\infty)$。

（2）关闭独立源，并应用KCL和KVL求解电路的瞬态响应$x_t(t)$。一旦得到电路的二阶微分方程，就可以求出其特征根。根据由特征根决定的电路响应是过阻尼、临界阻尼，还是欠阻尼的情况，就可以利用前一节的方法写出含有两个待定常数的瞬态响应$x_t(t)$。

某些电路初看起来很复杂，但是在求解瞬态响应时，一旦将电源关闭，电路中的储能元件如果可以合并的话，电路就可能简化为一阶电路或RLC并联/串联电路。如果简化后的电路为一阶电路，其解即第7章所讨论的简单形式，如果简化后的电路为RLC并联或串联电路，则可利用本章前几节的方法确定电路的响应。

（3）电路的稳态响应为：

$$x_{ss}(t) = x(\infty) \tag{8-51}$$

其中，$x(\infty)$是步骤1确定的x的终值。

（4）电路的全响应即瞬态响应与稳态响应之和：

$$x(t) = x_t(t) + x_{ss}(t) \tag{8-52}$$

最后利用步骤1得到的初始条件$x(0)$与$dx(0)/dt$确定瞬态响应中的待定常数。

本章的问题也可以使用第15章和第16章介绍的拉普拉斯变换来解决。

以上求取阶跃响应的一般步骤适用于包括运算放大器在内的任何二阶电路。下面举例说明这四个步骤。

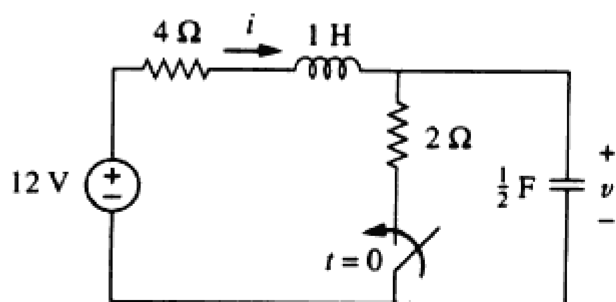


图 8-25 例题 8-9 的电路原理图

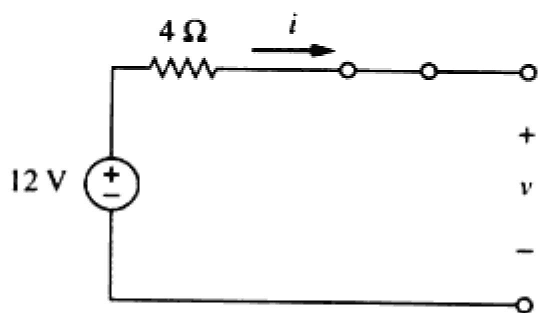
例题8-9 试求图8-25所示电路在$t>0$时的全响应v以及i。

解 首先确定初值和终值。在$t=0^-$时刻，电路处于稳定状态，开关断开，等效电路如图8-26a所示。由图显见，

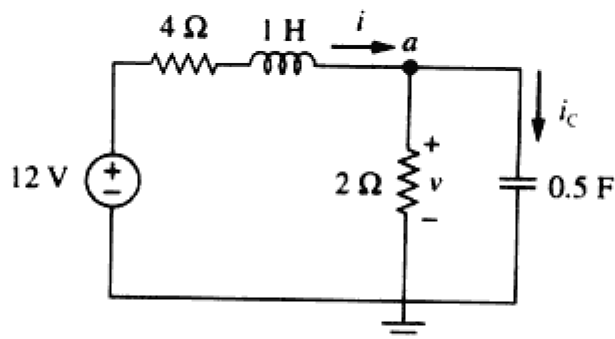
$$v(0^-) = 12\text{ V}, \quad i(0^-) = 0$$

在$t=0^+$时刻，开关闭合，等效电路如图8-26b所示。根据电容器电压和电感器电流的连续性原理，可知：

$$v(0^+) = v(0^-) = 12\text{ V}, \quad i(0^+) = i(0^-) = 0 \tag{8-9-1}$$



(a) $t<0$



(b) $t>0$

图 8-26 图 8-25 所示电路的等效电路

为了求出$dv(0^+)/dt$，需利用公式$C dv/dt = i_C$，即$dv/dt = i_C/C$，对图8-26b中的节点a应用KCL可得：

$$i(0^+) = i_C(0^+) + \frac{v(0^+)}{2}$$

$$0 = i_C(0^+) + \frac{12}{2} \quad \Rightarrow \quad i_C(0^+) = -6\text{ A}$$

因此，

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{-6}{0.5} = -12\text{ V/s} \tag{8-9-2}$$

将图8-26b所示电路中的电感视为短路，电容视为开路，就可以得到该电路的终值：

$$i(\infty) = \frac{12}{4+2} = 2\text{ A}, \quad v(\infty) = 2i(\infty) = 4\text{ V} \tag{8-9-3}$$

下面，确定$t>0$时瞬态响应的形式。将12V电压源关闭，得到如图8-27所示电路，对该电路的节点a应用KCL可得：

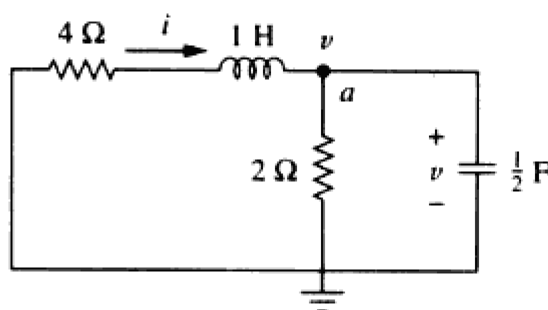


图 8-27 确定例题 8-9 瞬态响应的电路原理图

$$i=\frac{v}{2}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{8-9-4}$$

对左边网孔应用KVL可得：

$$4i+1\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+v=0 \tag{8-9-5}$$

现在要求出v，故将式(8-9-4)中的i代入式(8-9-5)，得到：

$$2v+2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}+v=0$$

即，

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}+5\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+6v=0$$

由此得到其特征方程为：

$$s^2+5s+6=0$$

特征根为$s=-2$，$s=-3$。于是，其自然响应为：

$$v_n(t)=A\,\mathrm{e}^{-2t}+B\,\mathrm{e}^{-3t} \tag{8-9-6}$$

其中，A、B为两个待定常数。该电路的稳态响应为：

$$v_{ss}(t)=v(\infty)=4 \tag{8-9-7}$$

电路的全响应为：

$$v(t)=v_t+v_{ss}=4+A\,\mathrm{e}^{-2t}+B\,\mathrm{e}^{-3t} \tag{8-9-8}$$

下面利用初始值确定A和B。由式(8-9-1)可知$v(0)=12$，在$t=0$时刻将其代入式(8-9-8)，得到：

$$12=4+A+B \quad\Rightarrow\quad A+B=8 \tag{8-9-9}$$

对式(8-9-8)中的v求导得到：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-2A\mathrm{e}^{-2t}-3B\mathrm{e}^{-3t} \tag{8-9-10}$$

在$t=0$时刻将式(8-9-2)代入式(8-9-10)，得到：

$$-12=-2A-3B \quad\Rightarrow\quad 2A+3B=12 \tag{8-9-11}$$

联立求解式(8-9-9)与式(8-9-11)可得：

$$A=12,\qquad B=-4$$

于是，式(8-9-8)成为：

$$v(t)=4+12\,\mathrm{e}^{-2t}-4\,\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{V},\qquad t>0 \tag{8-9-12}$$

由所求得的v可以进一步求出图8-26b所示电路中感兴趣的其他变量。例如，电流i为：

$$\begin{aligned}i&=\frac{v}{2}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2+6\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-3t}-12\mathrm{e}^{-2t}+6\mathrm{e}^{-3t}\\&=2-6\mathrm{e}^{-2t}+4\mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{A},\qquad t>0\end{aligned} \tag{8-9-13}$$

我们可以注意到，$i(0)=0$，这与式(8-9-1)是一致的。

练习题8-9 试确定如图8-28所示电路在$t>0$时的v与i（有关电流源的说明参见练习题7-5）。
答 $8(1-e^{-5t})$ V，$2(1-e^{-5t})$ A。

例题8-10 试求如图8-29所示电路在$t>0$时的$v_o(t)$。

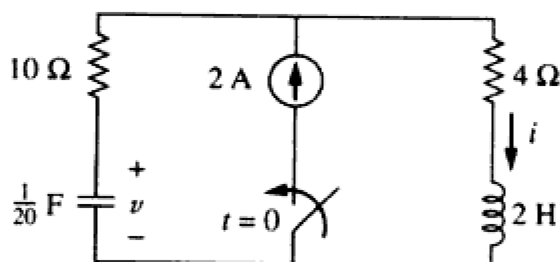


图 8-28 练习题 8-9 的电路原理图

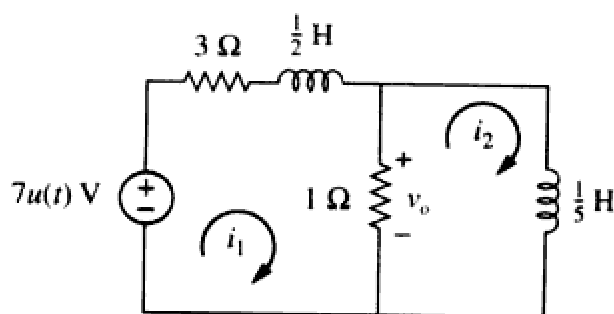


图 8-29 例题 8-10 的电路原理图

解 这是一个包括两个电感器的二阶电路。首先确定网孔电流i_1与i_2，它们恰好是流过两个电感器的电流。为此，需先求出这两个电流的初始值和终值。

当$t<0$时，$7u(t)=0$，所以$i_1(0^-)=0=i_2(0^-)$；当$t>0$时，$7u(t)=7$，于是其等效电路如图8-30a所示。由电感电流的连续性可得：

$$i_1(0^+)=i_1(0^-)=0,\qquad i_2(0^+)=i_2(0^-)=0 \tag{8-10-1}$$

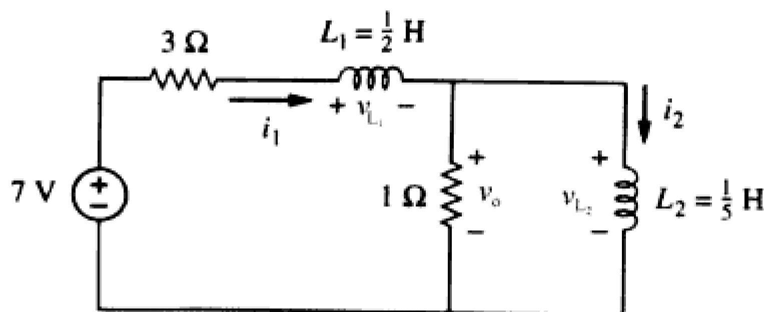
$$v_{L_2}(0^+)=v_o(0^+)=1\,[i_1(0^+)-i_2(0^+)]=0 \tag{8-10-2}$$

在$t=0^+$时刻，对图8-30a所示电路的左边回路应用KVL可得：

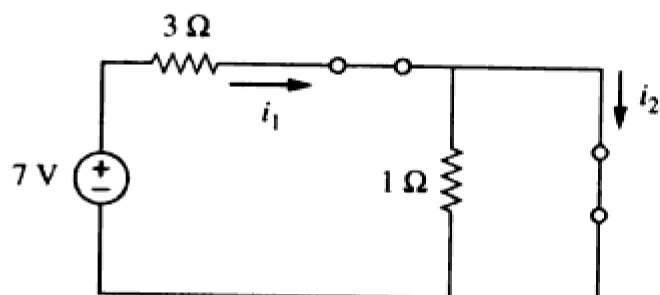
$$7=3\,i_1(0^+)+v_{L_1}(0^+)+v_o(0^+)$$

即，

$$v_{L_1}(0^+)=7\text{ V}$$



(a) $t>0$



(b) $t\to\infty$

图 8-30 图 8-29 所示电路的等效电路

由于$L_1=\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t=v_{L_1}$，所以：

$$\frac{\mathrm{d}i_1(0^+)}{\mathrm{d}t}=\frac{v_{L_1}}{L_1}=\frac{7}{\frac{1}{2}}=14\text{ V/s} \tag{8-10-3}$$

同理，由$L_2=\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t=v_{L_2}$可以得到：

$$\frac{\mathrm{d}i_2(0^+)}{\mathrm{d}t}=\frac{v_{L_2}}{\mathrm{L}_2}=0 \tag{8-10-4}$$

当$t\to\infty$时，电路趋于稳态，电感可以视作短路，如图8-30b所示，由图可见：

$$i_1(\infty)=i_2(\infty)=\frac{7}{3}\text{A} \tag{8-10-5}$$

接下来将电压源短路，确定瞬态响应的形式，如图8-31所示。对该电路图中的两个网孔应用KVL得到：

$$4i_1-i_2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=0 \tag{8-10-6}$$

以及

$$i_2+\frac{1}{5}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}-i_1=0 \tag{8-10-7}$$

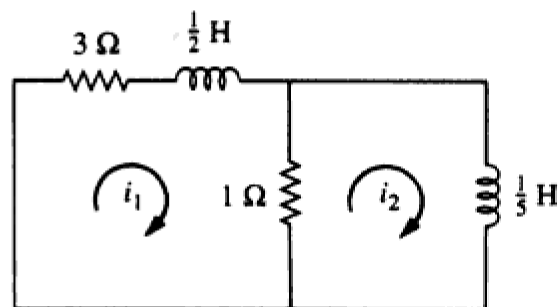


图 8-31 确定例题 8-10 所示电路瞬态响应的电路原理图

由式(8-10-6)得：

$$i_2=4i_1+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \tag{8-10-8}$$

将式(8-10-8)代入式(8-10-7)，得到：

$$4i_1+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+\frac{4}{5}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{10}\frac{\mathrm{d}^2i_1}{\mathrm{d}t^2}-i_1=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2i_1}{\mathrm{d}t^2}+13\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+30i_1=0$$

由此可写出特征方程为：

$$s^2+13s+30=0$$

特征根为$s=-3$，$s=-10$。于是其瞬态响应为：

$$i_{1n}=A\mathrm{e}^{-3t}+\mathrm{Be}^{-10t} \tag{8-10-9}$$

其中，A、B为常数。电路的稳态响应为：

$$i_{1ss}=i_1(\infty)=\frac{7}{3}\text{A} \tag{8-10-10}$$

由式(8-10-9)与式(8-10-10)，得到电路的全响应为：

$$i_1(t)=\frac{7}{3}+A\mathrm{e}^{-3t}+B\mathrm{e}^{-10t} \tag{8-10-11}$$

最后，由初始值确定A与B。由式（8-10-1）与（8-10-11）可得：

$$0=\frac{7}{3}+A+B \tag{8-10-12}$$

对式(8-10-11)求导，令导数中$t=0$，并以式(8-10-3)代入，得到：

$$14=-3A-10B \tag{8-10-13}$$

联立求解式(8-10-12)与式(8-10-13)，可得$A=-4/3$，$B=-1$。于是：

$$i_1(t)=\frac{7}{3}-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-3t}-\mathrm{e}^{-10t} \tag{8-10-14}$$

下面由i_1确定i_2，对图8-30a所示电路的左边回路应用KVL可得：

$$7=4i_1-i_2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \quad\Rightarrow\quad i_2=-7+4i_1+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

将式(8-10-14)确定的i_1代入上式，得到：

$$i_2(t) = -7 + \frac{28}{3} - \frac{16}{3}e^{-3t} - 4e^{-10t} + 2e^{-3t} + 5e^{-10t}$$
$$= \frac{7}{3} - \frac{10}{3}e^{-3t} + e^{-10t} \tag{8-10-15}$$

由图8-29可知：

$$v_o(t) = 1[i_1(t) - i_2(t)] \tag{8-10-16}$$

将式(8-10-14)与式(8-10-15)代入式(8-10-16)，得到：

$$v_o(t) = 2(e^{-3t} - e^{-10t}) \tag{8-10-17}$$

可以看出，$v_o(0)=0$，与式（8-10-2）的结果一致。

练习题8-10 试确定图8-32所示电路在$t>0$时的$v_o(t)$（提示：首先求出v_1与v_2）。

答 $2(e^{-t} - e^{-6t})$V，$t>0$。

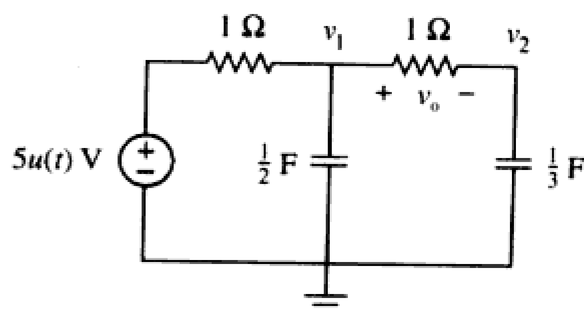


图 8-32 练习题 8-10 的电路原理图

8.8 二阶运算放大器电路

包含两个储能元件且不能合并为一个等效储能元件的运算放大器电路即为二阶电路。由于电感器的体积和重量问题，很少在实际运算放大器电路中使用，因此本节仅考虑二阶RC运算放大器电路，这类二阶运算放大器电路在滤波器、振荡器等装置中应用广泛。

二阶运算放大器电路的分析方法与前一节介绍的四个分析步骤相同。

利用运算放大器组成二阶电路应避免使用电感器，因为在某些应用中通常不希望出现电感器。

例题8-11 在如图8-33所示的运算放大器电路中，令$R_1=R_2=10\text{ k}\Omega$，$C_1=20\ \mu\text{F}$，$C_2=100\ \mu\text{F}$，试求当$v_s=10u(t)$ mV时的$v_o(t)$，$t>0$。

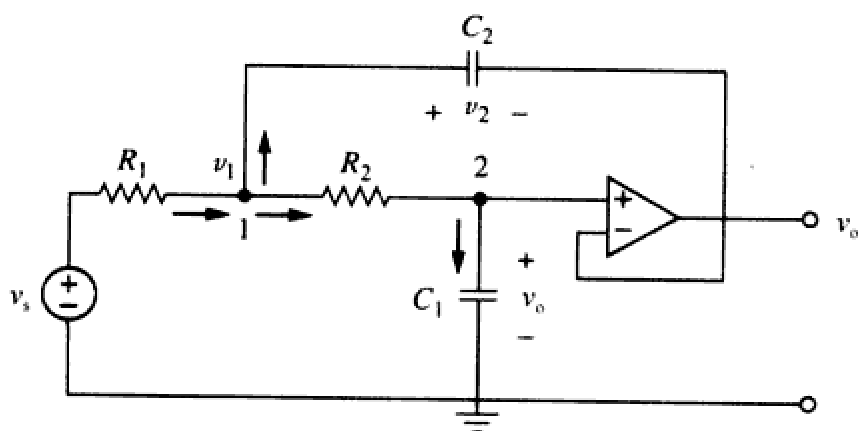


图 8-33 例题 8-11 的电路原理图

解 虽然可以按照前一节介绍的四个步骤求解本题，但这里介绍的求解方法稍有不同。根据电压跟随器的结构可知，电容器C_1两端的电压就是v_o。在节点1处应用KCL可得：

$$\frac{v_s - v_1}{R_1} = C_2\frac{dv_2}{dt} + \frac{v_1 - v_o}{R_2} \tag{8-11-1}$$

在节点2处应用KCL可得：

$$\frac{v_1 - v_o}{R_2} = C_1\frac{dv_o}{dt} \tag{8-11-2}$$

但是，

$$v_2 = v_1 - v_o \tag{8-11-3}$$

下面要消去式(8-11-1)～式(8-11-3)中的v_1与v_2。将式(8-11-2)与式(8-11-3)代入式(8-11-1)，得到：

$$\frac{v_s - v_1}{R_1} = C_2\frac{dv_1}{dt} - C_2\frac{dv_o}{dt} + C_1\frac{dv_o}{dt} \tag{8-11-4}$$

由式(8-11-2)有：

$$v_1 = v_o + R_2C_1\frac{dv_o}{dt} \tag{8-11-5}$$

将式(8-11-5)代入式(8-11-4)，得到：

$$\frac{v_s}{R_1} = \frac{v_o}{R_1} + \frac{R_2C_1}{R_1}\frac{dv_o}{dt} + C_2\frac{dv_o}{dt} + R_2C_1C_2\frac{d^2v_o}{dt^2} - C_2\frac{dv_o}{dt} + C_1\frac{dv_o}{dt}$$

即：

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_1C_2} + \frac{1}{R_2C_2}\right)\frac{dv_o}{dt} + \frac{v_o}{R_1R_2C_1C_2} = \frac{v_s}{R_1R_2C_1C_2} \tag{8-11-6}$$

将给定的R_1，R_2，C_1和C_2的值代入式（8-11-6），得到：

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} + 2\frac{dv_o}{dt} + 5v_o = 5v_s \tag{8-11-7}$$

为了求出电路的瞬态响应，在式(8-11-7)中令$v_s = 0$，即相当于关闭了电压源。特征方程为：

$$s^2 + 2s + 5 = 0$$

其特征根为复数$s_{1,2} = -1 \pm j2$。于是，瞬态响应为：

$$v_{ot} = e^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t) \tag{8-11-8}$$

其中，A与B为待定的未知常数。

当$t \to \infty$时，电路趋于稳定状态，电容器可以用开路取代。由于在稳态条件下，没有电流流过C_1和C_2，也没有电流流入理想运算放大器的输入端，所以就没有电流流经R_1和R_2。

因此，

$$v_o(\infty) = v_1(\infty) = v_s$$

于是，电路的稳态响应为：

$$v_{oss} = v_o(\infty) = v_s = 10\text{mV}, \qquad t > 0 \tag{8-11-9}$$

电路的全响应为：

$$v_o(t) = v_{ot} + v_{oss} = 10 + e^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t)\text{mV} \tag{8-11-10}$$

下面利用初始条件来确定常数A和B。当$t < 0$时，$v_s = 0$，所以：

$$v_o(0^-) = v_2(0^-) = 0$$

当$t > 0$时，电源开始工作，但由于电容电压的连续性，有：

$$v_o(0^+) = v_2(0^+) = 0 \tag{8-11-11}$$

由式(8-11-3)可知：

$$v_1(0^+) = v_2(0^+) + v_o(0^+) = 0$$

于是，由式(8-11-2)得到：

$$\frac{dv_o(0^+)}{dt} = \frac{v_1 - v_o}{R_2C_1} = 0 \tag{8-11-12}$$

下面在$t = 0$时刻将式(8-11-11)用于式(8-11-10)确定的全解中，得到：

$$0 = 10 + A \quad \Rightarrow \quad A = -10 \tag{8-11-13}$$

对式(8-11-10)求导，有：

$$\frac{dv_o}{dt} = e^{-t}(-A\cos 2t - B\sin 2t - 2A\sin 2t + 2B\cos 2t)$$

令$t=0$，并结合式(8-11-12)，有：

$$0=-A+2B \tag{8-11-14}$$

联立求解式(8-11-13)与式(8-11-14)可得，$A=-10$，$B=-5$。于是，电路的阶跃响应为：

$$v_o(t)=10-e^{-t}(10\cos 2t+5\sin 2t)\ \text{mV},\quad t>0$$

练习题8-11 在如图8-34所示的运算放大器电路中，$v_s=4u(t)$ V，假定$R_1=R_2=10\ \text{k}\Omega$，$C_1=20\ \mu\text{F}$且$C_2=100\ \mu\text{F}$，试求$t>0$条件下的$v_o(t)$。

答 $4-5e^{-t}+e^{-5t}$ V，$t>0$。

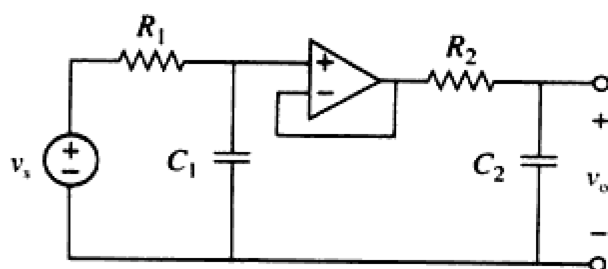


图 8-34 练习题 8-11 的电路原理图

8.9 RLC 电路的 PSpice 分析

利用PSpice软件可以很容易地分析RLC电路，其分析过程与第7章RC或RL电路的分析过程类似，下面将通过两个例题予以说明。

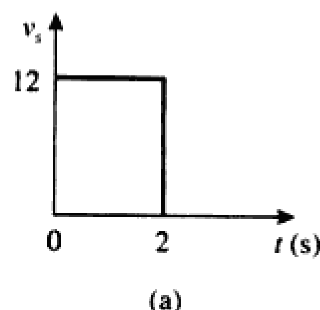
例题8-12 图8-35a所示的输入电压作用于图8-35b所示的电路上，试利用PSpice绘制出$0<t<4$ s时$v(t)$的波形图。

解 (1) **明确**问题。与教材中绝大多数问题一样，本例题所要解决的问题已经很清楚明确。

(2) **表述**对问题的理解。输入是幅度等于12V、持续时间等于2s的单个方波，所要解决的问题是利用PSpice绘制输出的波形。

(3) 确定**可选**解。由于本题要求采用PSpice求解，故不存在可供选择的其他求解方式。但是，可以利用第8.5节介绍的方法（RLC串联电路的阶跃响应）进行验证。

(4) **尝试**问题的求解。利用Schematics将给定电路绘制为图8-36所示电路原理图。输入脉冲信号用VPWL电压源表示，当然也可以用VPULSE表示。利用分段线性函数，将VPWL的属性设置为：T1＝0，V1＝0，T2＝0.001，V2＝12等等，如图8-36所示。为了绘制输入电压和输出电压的波形，需插入两个电压标识器。电路绘制和属性设置完成后，就可以选择Analysis/Setup/Transient开启瞬态分析（Transient Analysis）对话框。对于本例中的RLC串联电路而言，其特征方程的特征根为－1、－9，因此，可以设置终止时间（Final Time）为4 s（即小特征根的4倍）。存储原理图之后，就可以选择Analysis/Simulate功能进行模拟，从而在PSpice A/D窗口中得到输入电压和输出电压的波形，如图8-37所示。



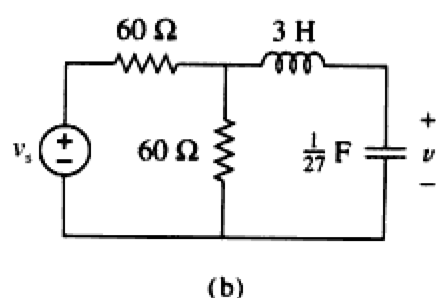


图 8-35 例题 8-12 的图

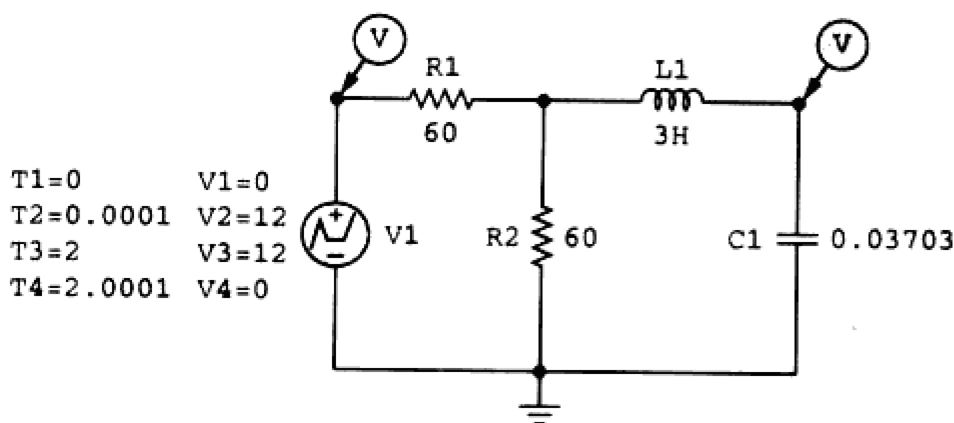


图 8-36 图 8-35b 所示电路的原理图

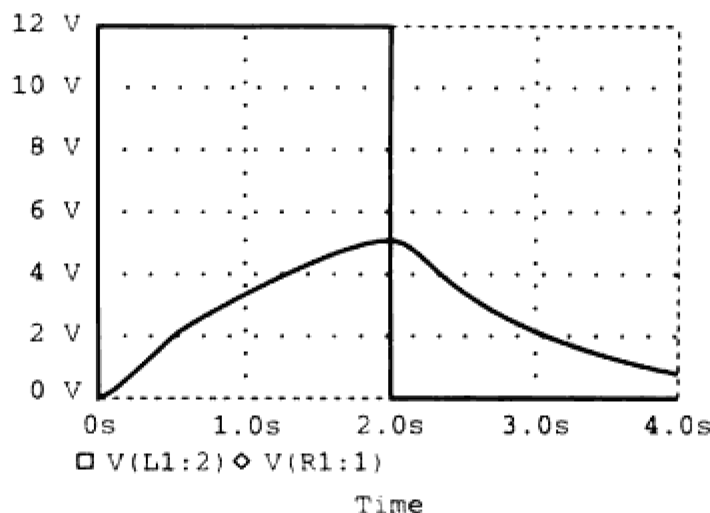


图 8-37 例题 8-12 的波形图：输入电压与输出电压

下面利用8.5节介绍的方法进行验证。首先确定戴维南等效电压为$V_{Th}=12/2$（开路电压平均分布在两个电阻上）$=6$V，等效电阻为30 Ω（60||60）。这样就可以利用$R=30\ \Omega$，$L=3$ H，$C=(1/27)$ F求解电路的响应。

首先需求出α和ω_0：

$$\alpha = R/(2L) = 30/6 = 5 \qquad 且 \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{3\frac{1}{27}}} = 3$$

由于5 > 3，故电路产生过阻尼响应：

$$s_{1,2} = -5 \pm \sqrt{5^2 - 9} = -1, -9, \quad v(0) = 0,$$
$$v(\infty) = 6\,\text{V}, \quad i(0) = 0$$
$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$$

其中，

$$v(t) = A_1\,\mathrm{e}^{-t} + A_2\,\mathrm{e}^{-9t} + 6$$
$$v(0) = 0 = A_1 + A_2 + 6$$
$$i(0) = 0 = C(-A_1 - 9A_2)$$

由此得到$A_1=-9A_2$。将其代入前面的式子可得，$0=9A_2-A_2+6$，即$A_2=0.75$且$A_1=-6.75$。

$$v(t) = (-\mathbf{6.75\,e^{-t} + 0.75\,e^{-9t} + 6})\,\boldsymbol{u(t)}\ \text{V}, \qquad 0 < t < 2\ \text{s}$$

当$t=1$ s时，$v(1)=-6.75\,\mathrm{e}^{-1}+0.75\,\mathrm{e}^{-9}+6=-2.483+0.0001+6=-3.552$ V；当$t=2$ s时，$v(2)=-6.75\,\mathrm{e}^{-2}+0+6=5.086$ V

可以注意到，当$2<t<4$ s时，$V_{Th}=0$，表明$v(\infty)=0$，因此，$v(t)=(A_3\,\mathrm{e}^{-(t-2)}+A_4\,\mathrm{e}^{-9(t-2)})\,u(t-2)$ V。当$t=2$ s时，$A_3+A_4=5.086$，

$$i(t) = \frac{(-A_3\mathrm{e}^{-(t-2)} - 9A_4\mathrm{e}^{-9(t-2)})}{27}$$

且

$$i(2) = \frac{(6.75\mathrm{e}^{-2} - 6.75\mathrm{e}^{-18})}{27} = 33.83\ \text{mA}$$

因此，$-A_3-9A_4=0.9135$。

将两式合并后得到，$-A_3-9(5.086-A_3)=0.9135$，解之得$A_3=5.835$且$A_4=-0.749$。

$$v(t) = (\mathbf{5.835\,e^{-(t-2)} - 0.749\,e^{-9(t-2)}})\,\boldsymbol{u(t-2)}\ \text{V}$$

当$t=3$ s时，$v(3)=(2.147-0)=2.147$ V；当$t=4$ s时，$v(4)=0.7897$ V。

（5）**评价**结果。上述计算得到的结果与图8-37所示的波形图显然是一致的。

（6）对题解是否**满意**？计算结果令人满意，可以作为本题的答案提交。

练习题8-12 如果将图8-35a所示的脉冲电压作用于图8-38所示的电路上，试利用PSpice确定$0 < t < 4$ s时的$i(t)$。

答 见图8-39。

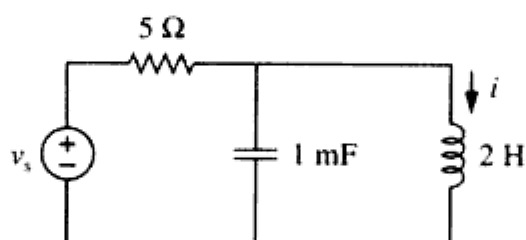


图 8-38 练习题 8-12 的电路原理图

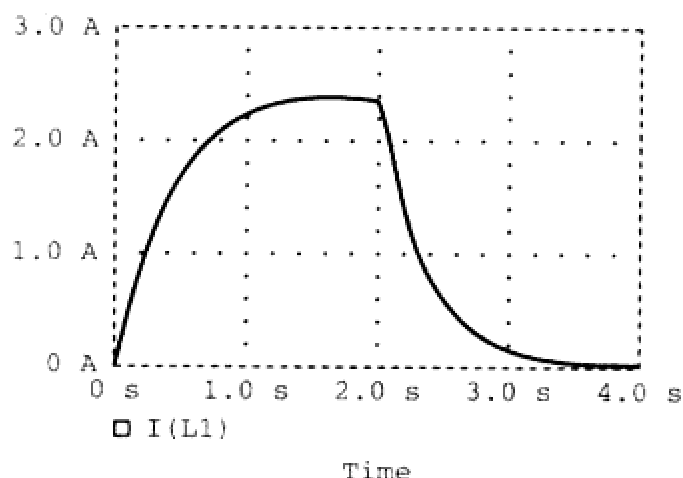


图 8-39 练习题 8-12 中 $i(t)$的波形图

例题8-13 试利用PSpice确定如图8-40所示电路在$0 < t < 3$ s时的$i(t)$。

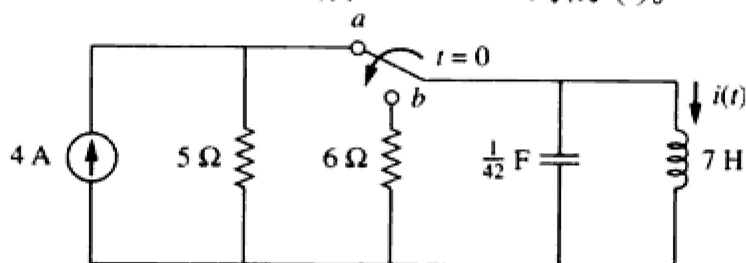
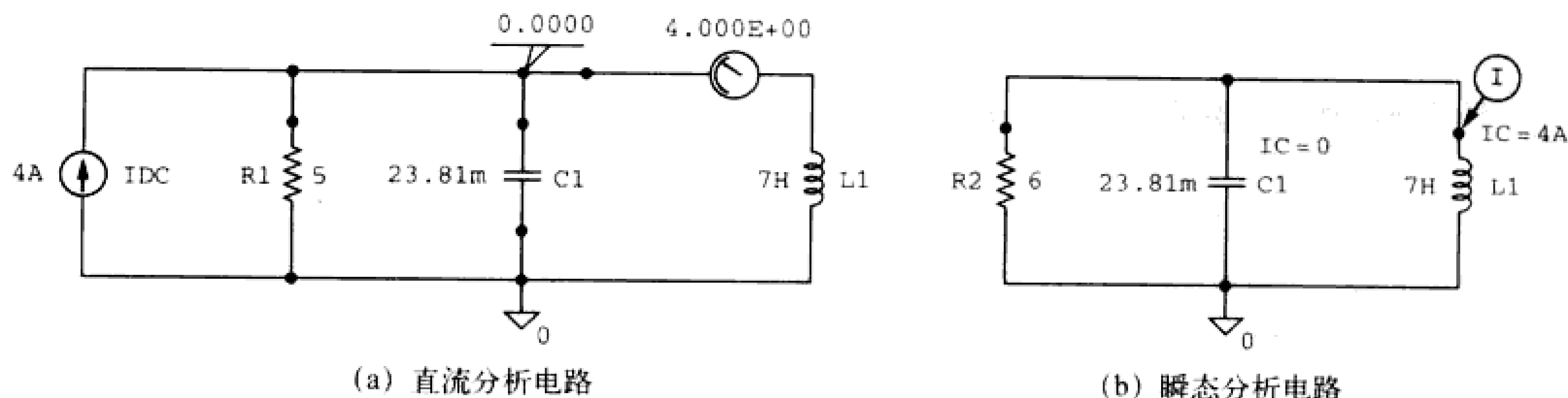


图 8-40 例题 8-13 的电路原理图

解 当开关处于位置a时，6 Ω电阻不起作用，这种情况下的电路原理图如图8-41a所示。为了确保电流$i(t)$进入引脚1，应将电感器旋转三次后再连接至电路中，电容器也做同样的处理。在电路图中插入的两个伪元件VIEWPOINT和IPROBE，以确定电容器的初始电压和电感器的初始电流。选择Analysis/Simulate菜单即可执行PSpice的直流分析功能。直流分析的结果如图8-41a所示，电容器的初始电压为0 V，电感器初始电流为4 A。这些初始值将用于电路的瞬态分析中。

开关切换到位置b后，电路变为如图8-41b所示的无源激励RLC并联电路。设置该电路中电容器的初始条件为IC = 0，电感器的初始条件为IC = 4 A，并在电感器的引脚1处插入电流标记。选择Analysis/Setup/Transient菜单打开瞬态分析（Transient Analysis）对话框，将终止时间（Final Time）设定为3 s。保存原理图文件后，运行Analysis/Transient。$i(t)$的波形图如图8-42所示，该曲线与手工计算的结果$i(t) = 4.8\ e^{-t} - 0.8\ e^{-6t}$ A相一致。



（a）直流分析电路　（b）瞬态分析电路

图 8-41 例题 8-13 的电路原理图

练习题8-13　试利用PSpice确定如图8-21所示电路（见练习题8-7）在$0 < t < 2$时的$v(t)$。

答　见图8-43。

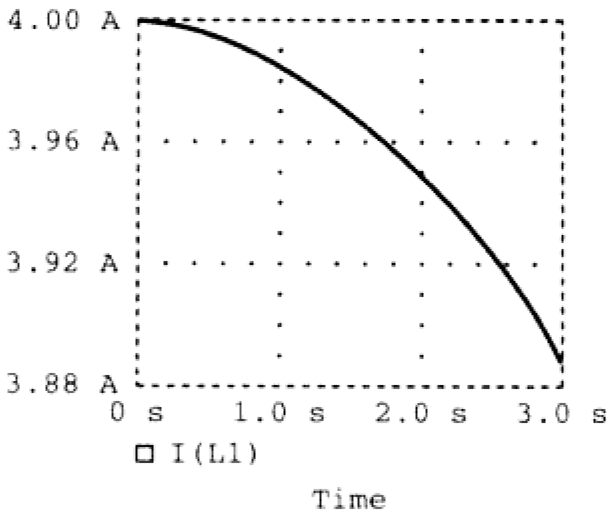


图 8-42　例题 8-13 中 $i(t)$的波形图

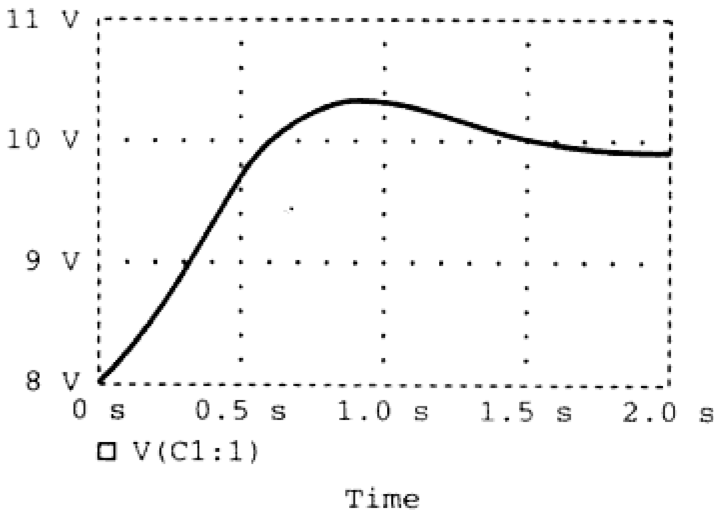


图 8-43　练习题 8-13 中 $v(t)$的波形图

8.10　†对偶原理

对偶的概念是求解电路问题的一种省时而有效的方法。考虑式(8-4)与式(8-29)的相似性可知，只要将如下几个变量互换，这两个方程就是相同的：(1) 电压与电流；(2) 电阻与电导；(3) 电容与电感。因此，在电路分析中经常会遇到只要将某些互补元件的角色互换，两个不同的电路就会具有相同的方程和相同的解。这种可互换的性质即称为*对偶原理*（principle of duality）。

对偶原理指出了电路的特征方程与电路定理之间存在的对偶关系。

对偶元件对如表8-1所示。注意，表8-1中未出现功率，即不存在功率的对偶量，其原因是对偶原理满足线性性质，而功率不是线性的，因此表中没有功率。由表8-1还可以看出，对偶原理还可以扩展到电路元件、电路结构和电路定理等。

表 8-1　对偶对

电阻 R	电导 G	电阻 R	电导 G
电感 L	电容 C	串联	并联
电压 v	电流 i	开路	短路
电压源	电流源	KVL	KCL
节点	网孔	戴维南定理	诺顿定理

即使线性性质适用，电路元件或变量仍然可能不存在对偶，例如互感（将在第13章中介绍）就没有对偶。

如果描述两个电路的方程具有相同的形式，只是将其中的变量相互交换，则称这两个电路是互为对偶的。

如果两个电路能够用对偶量可相互交换的相同的特征方程来描述，则称这两个电路是互为对偶的。

对偶原理的有效性是不言而喻的，只要求出一个电路的解，就可以自动推出其对偶电路的解。显然如图8-8与图8-13所示的两个电路是对偶的，因此，式(8-32)表示的解就是式(8-11)所示解的对偶形式。必须记住的是，对偶原理只适用于平面电路，非平面电路不存在对偶电路，因为它不能用网孔方程组来描述。

在确定给定电路的对偶电路时，无需写出其网孔方程或节点方程，可以通过图的方法予以确定。

对于给定的平面电路，按照如下三个步骤即可得到其对偶电路：

(1) 在给定电路的各网孔中心设置一个节点，在该给定电路之外设置对偶电路的参考节点（即地节点）。

(2) 在节点之间画线，使每条线通过一个元件，并将该元件用其对偶元件（参见表8-1）取代。

(3) 按如下规则确定电压源的极性和电流源的方向：对于引起正的（顺时针方向）网孔电流的电压源而言，其对偶电流源的参考方向为由地节点流向非参考节点。

如果怀疑上述方法的正确性，则可通过列写节点方程或网孔方程予以验证。原电路的网孔方程（或节点方程）与其对偶电路的节点方程（或网孔方程）是一样的。下面通过两个例子说明对偶原理。

例题8-14 试画出如图8-44所示电路的对偶电路。

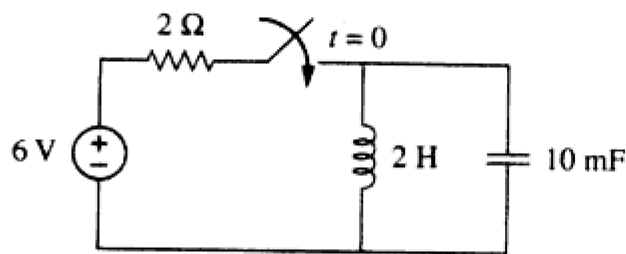
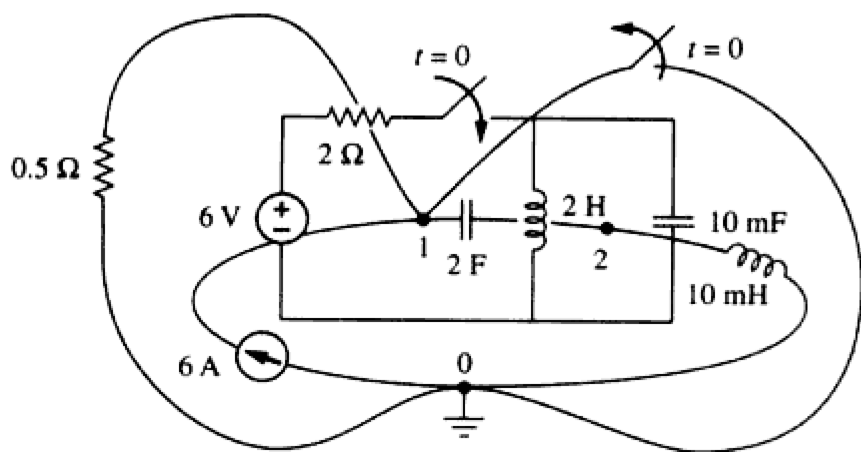
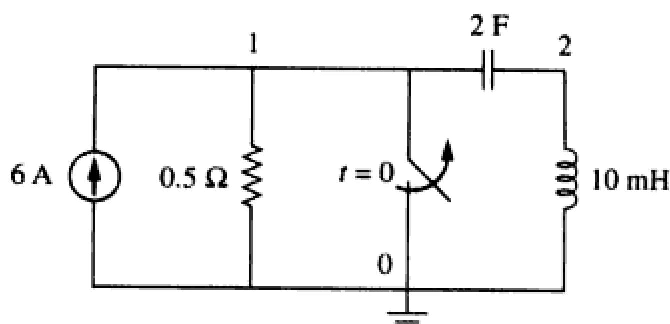


图 8-44 例题 8-14 的电路原理图

解 如图8-45a所示，首先在两个网孔中设置节点1与节点2，同时在该电路外设置对偶电路的地节点0。从一个节点到另一个节点画一条通过一个元件的连线，并用该元件的对偶元件取代这两个节点之间的连线。例如，节点1与节点2之间的连线通过2H的电感器，则应该在该连线上设置一个2F的电容器（即电感器的对偶元件）；节点1与节点0之间的连线通过一个6 V的电压源，则应该设置一个6 A的电流源。对所有元件进行相同的处理后，就可以得到如图8-45a所示电路的对偶电路，为清楚起见，将该对偶电路重画于图8-45b。



(a) 图 8-44 所示电路的对偶电路的建立过程



(b) 重画的对偶电路

图 8-45

练习题8-14 试画出如图8-46所示电路的对偶电路。

答 参见图8-47。

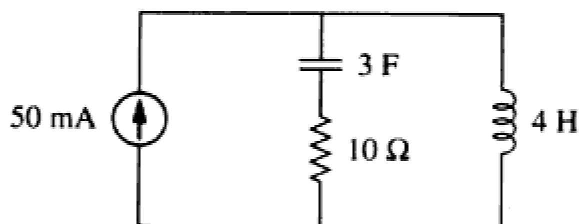


图 8-46 练习题 8-14 的电路原理图

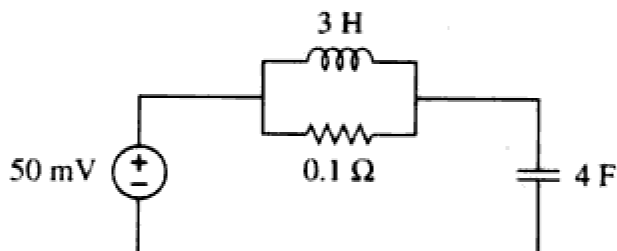


图 8-47 图 8-46 所示电路的对偶电路

例题8-15 试确定如图8-48所示电路的对偶电路。

解 在原电路的基础上构建对偶电路的过程如图8-49a所示。首先设置节点1，2，3与参考节点0的位置，连接节点1与节点2，连线穿过2 F的电容器，并用一个2 H的电感器将其取代。

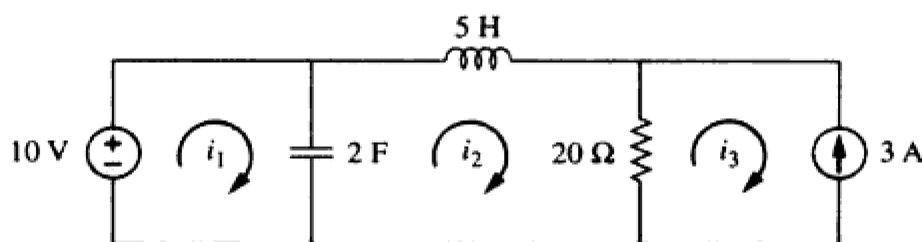
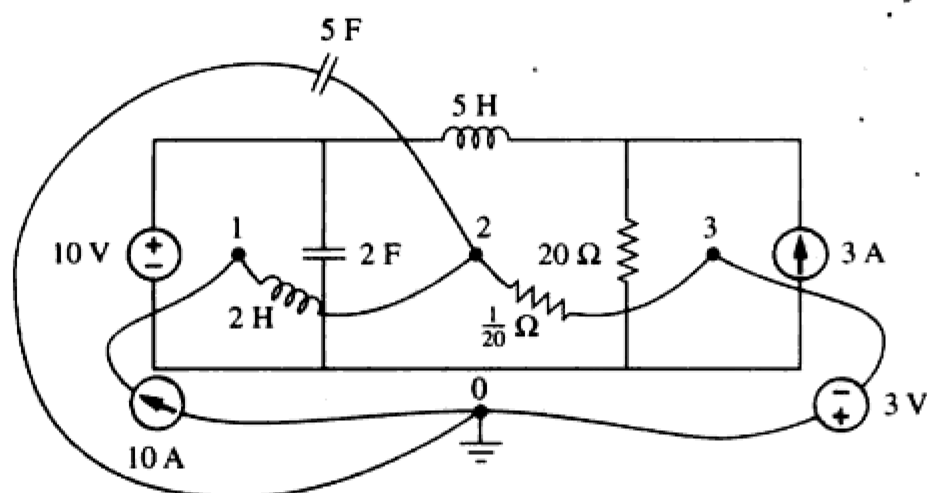
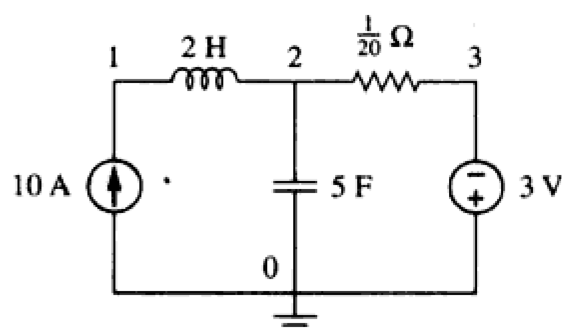


图 8-48 例题 8-15 的电路原理图

连接节点2与节点3，连线穿过20 Ω的电阻器，并用一个1/20 Ω的电阻器将其取代。对所有元件做相应的处理，就得到如图8-49a所示的结果，重画后的对偶电路如图8-49b所示。



(a) 图 8-48 所示电路的对偶电路的构造过程



(b) 重画的对偶电路

图 8-49 例题 8-15 的电路原理图

为了验证电压源的极性与电流源的方向，可以在如图8-48所示的原始电路中应用网孔电流i_1、i_2、i_3（均为顺时针方向）。10 V电压源引起正的网孔电流i_1，因此其对偶电流源是一个电流从节点0流向节点1的10 A电流源。同理，图8-48中的$i_3 = -3$ A，其对偶为图8-49b所示的$v_3 = -3$ V。

练习题8-15 试求如图8-50所示电路的对偶电路。

答 参见图8-51。

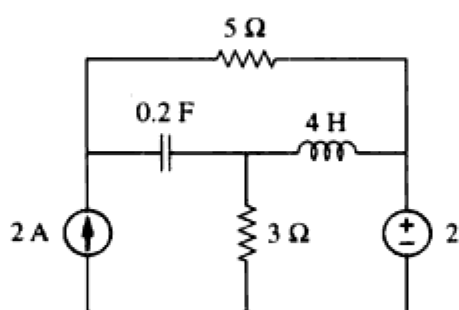


图 8-50 练习题 8-15 的电路原理图

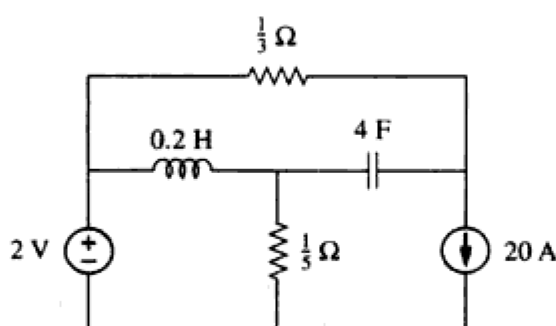


图 8-51 图 8-50 所示电路的对偶电路

8.11 †应用

RLC电路被广泛应用于控制电路和通信电路中，例如振铃电路、峰化电路（信号校正电路）、振荡电路、平滑电路与滤波器等。其中多数电路需在介绍了交流电源后才能接触到，本节仅讨论两个简单的应用，汽车点火系统与平滑电路。

8.11.1 汽车点火系统

7.9.4节曾将汽车点火系统作为充电系统讨论过，但它只是整个系统的一个组成部分。本节考虑该系统的另一个组成部分——发电系统。该系统的电路模型如图8-52所示，图中12 V电源是汽车电

池和交流发电机的外部模型，4 Ω电阻表示系统的导线电阻值，点火线圈建模为一个8 mH的电感器，1 μF电容器（称为汽车电容）与开关（称为电子点火器，breaking point或electronic ignition）相互并联。下面的例题将说明如图8-52所示的RLC电路如何产生高电压。

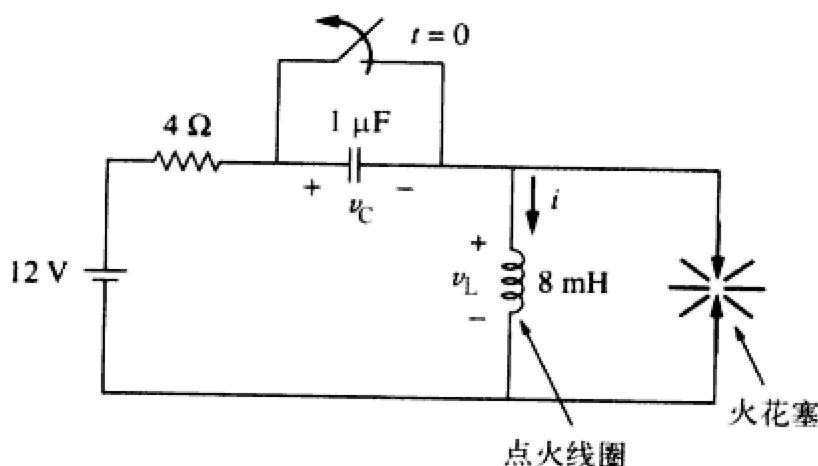


图 8-52 汽车点火电路

例题8-16 假定在$t=0$ 时刻之前，如图8-52中的开关是闭合的，试求$t>0$时电感电压v_L。

解 如果在$t=0$ 时刻之前开关闭合，且电路处于稳定状态，则：

$$i(0^-)=\frac{12}{4}=3\text{A}, \qquad v_C=(0^-)=0$$

当$t=0^+$时刻，开关断开，由连续性条件可知：

$$i(0^+)=3\text{A}, \qquad v_C(0^+)=0 \tag{8-16-1}$$

由$v_L(0^+)$即可求出初始条件$di(0^+)/dt$，在$t=0^+$时刻对电路网孔应用KVL得到：

$$-12+4i(0^+)+v_L(0^+)+v_C(0^+)=0$$

$$-12+4\times3+v_L(0^+)+0=0 \qquad \Rightarrow \qquad v_L(0^+)=0$$

因此，

$$\frac{di(0^+)}{dt}=\frac{v_L(0^+)}{L}=0 \tag{8-16-2}$$

当$t\to\infty$时，系统达到稳定状态，电容器相当于开路，于是，

$$i(\infty)=0 \tag{8-16-3}$$

当$t>0$时对电路网孔应用KVL可以得到：

$$12=Ri+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t i dt+v_C(0)$$

对上式各项求导可得：

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{Rdi}{Ldt}+\frac{i}{LC}=0 \tag{8-16-4}$$

按照8.3节介绍的步骤即可得到瞬态响应的形式，将$R=4\ \Omega$，$L=8$ mH以及$C=1$ μF代入后得到：

$$\alpha=\frac{R}{2L}=250, \qquad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=1.118\times10^4$$

由于$\alpha<\omega_0$，所以电路响应为欠阻尼响应，其阻尼自然频率为：

$$\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}\simeq\omega_0=1.118\times10^4$$

于是系统瞬态响应为：

$$i_t(t)=e^{-\alpha t}(A\cos\omega_d t+B\sin\omega_d t) \tag{8-16-5}$$

其中，A与B均为待定常数。电路的稳态响应为：

$$i_{ss}(t)=i(\infty)=0 \tag{8-16-6}$$

所以，系统的完全响应为：

$$i(t)=i_t(t)+i_{ss}(t)=\mathrm{e}^{-250t}(A\cos 11\ 180\,t+B\sin 11\ 180t) \tag{8-16-7}$$

下面确定常数A与B：

$$i(0)=3=A+0 \qquad \Rightarrow \qquad A=3$$

对式(8-16-7)求导可得：

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=-250\mathrm{e}^{-250t}(A\cos 11\ 180t+B\cos 11\ 180t)$$
$$+\mathrm{e}^{-250t}(-11\ 180A\sin 11\ 180t+11\ 180B\cos 11\ 180t)$$

令$t=0$，并结合式(8-16-2)可知：

$$0=-250\,A+11\ 180\,B \qquad \Rightarrow \qquad B=0.0671$$

因此，

$$i(t)=\mathrm{e}^{-250t}(3\cos 11\ 180\,t+0.0671\sin 11\ 180t) \tag{8-16-8}$$

于是，电感器两端的电压为：

$$v_{\mathrm{L}}(t)=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=-268\mathrm{e}^{-250t}\sin 11\ 180t \tag{8-16-9}$$

当正弦函数值为时，即$11\ 180\ t_0=\pi/2$或$t_0=140.5\ \mu s$时，该电压取得最大值，也就是说，在$t=t_0$时刻，电感器两端的电压达到峰值：

$$v_{\mathrm{L}}(t_0)=-268\mathrm{e}^{-250t_0}=-259\mathrm{V} \tag{8-16-10}$$

虽然该电压值远小于一般汽车点火所需的电压范围6 000～10 000 V，但是可以利用变压器(transformer)（将在第13章中讨论）将电感器电压提升到所需的电平。

练习题8-16　试求图8-52所示电路中，电容器两端的电压v_C，$t>0$。

答　$12-12\ \mathrm{e}^{250t}\cos 11\ 180\ t+267.7\ \mathrm{e}^{250t}\sin 11\ 180t$ V。

8.11.2　平滑电路

在典型的数字通信系统中，首先要对待发射信号进行取样。所谓取样是指选取待处理的信号样本的过程，从而实现无需处理整个信号的目的。将各样本转换为用脉冲序列表示的一个二进制数字，之后将这些脉冲序列通过诸如同轴电缆、双绞线或光纤等传输线发送出去。在接收端，将接收信号输入至数模转换器（D/A），其输出为“阶梯型”函数，即输出信号在各时间间隔内为常数。为了恢复所发送的模拟信号，需将其通过如图8-53所示的平滑电路予以平滑。RLC电路就是一种常用的平滑电路。

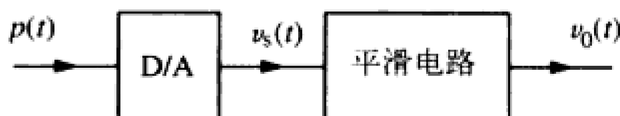
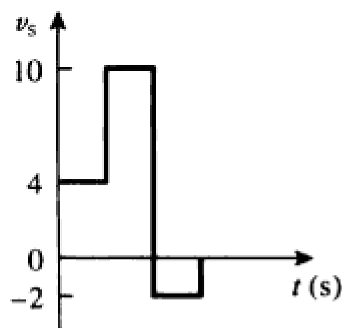
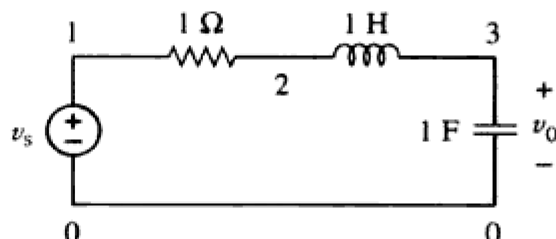


图 8-53　脉冲序列作用于数模（D/A）转换器后的输出施加给平滑电路

例题8-17　某D/A转换器的输出如图8-54a所示，如果采用如图8-54b所示的RLC电路作为平滑电路，试确定其输出电压$v_o(t)$。



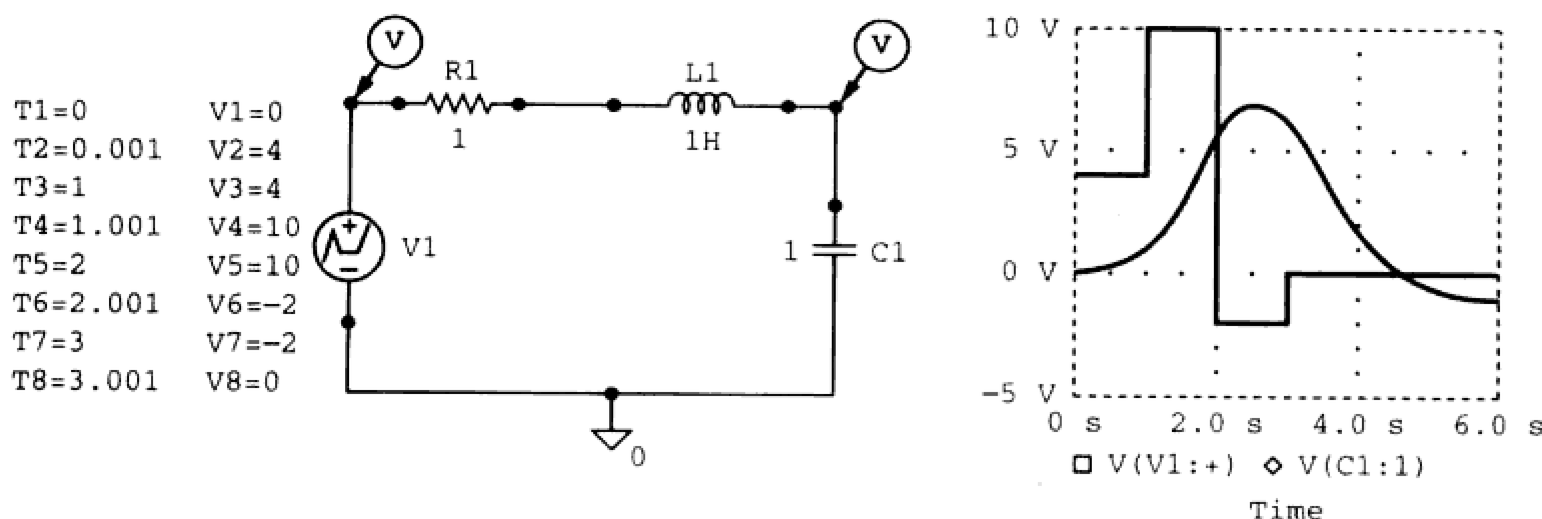
（a）D/A 转换器的输出



（b）RLC 平滑电路

图 8-54　例题 8-17 的图

解 此题最好用PSpice求解。电路原理图如图8-55a所示，图8-54a所示的脉冲信号可以用分段线性函数表示。V1的属性设置为T1＝0，V1＝0，T2＝0.001，V2＝4，T3＝1，V3＝4等。为了画出输入电压与输出电压的波形，需插入两个电压标记器，如图所示。选择"Analysis/Setup/Transient"菜单打开瞬态分析（Transient Analysis）对话框，并设定终止时间（Final Time）为6 s。保存原理图文件后，即可选择"Analysis/Simulate"菜单运行电路模拟程序，从而得到如图8-55b所示的波形。



（a）电路原理图　　（b）输入电压与输出电压

图 8-55　例题 8-17 的图

练习题8-17　如果D/A转换器的输出如图8-56所示，试重做例题8-17。

答　参见图8-57。

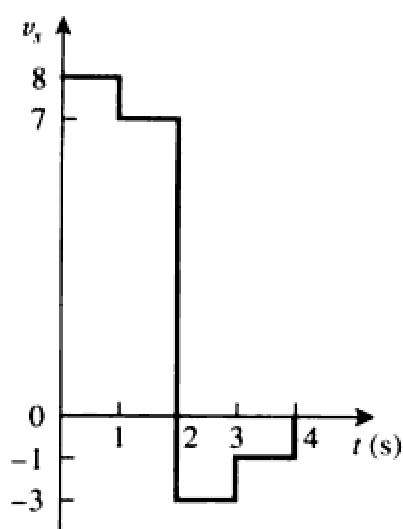


图 8-56　练习题 8-17 的波形图

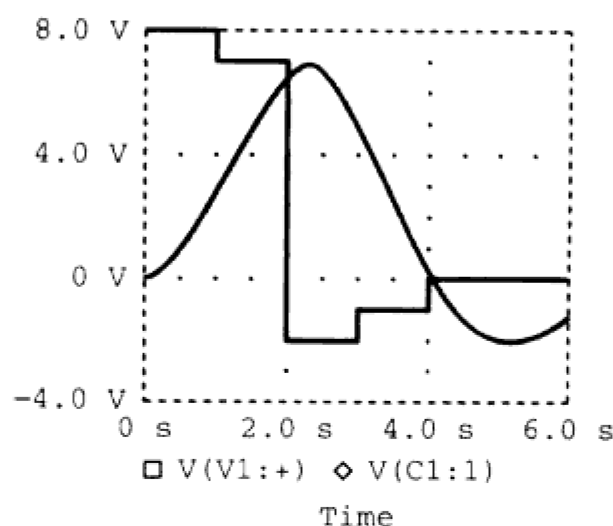


图 8-57　练习题 8-17 的结果

8.12　本章小结

（1）在二阶电路的分析中，初始值$x(0)$与$dx(0)/dt$以及终值$x(\infty)$的确定至关重要。

（2）由于描述RLC电路的方程为二阶微分方程，故RLC电路为二阶电路，其特征方程为$s^2+2\alpha s+\omega_0^2=0$，其中$\alpha$为阻尼因子，$\omega_0$为无阻尼自然频率。对于串联RLC电路而言，$\alpha=R/2L$，对于并联RLC电路而言，$\alpha=1/2RC$，这两种情况下的$\omega_0=1/\sqrt{LC}$。

（3）如果电路在开关闭合（或突然变化）之后不存在独立电源，则称该电路为无源激励的，其完全解为自然响应。

（4）按照电路特征方程的特征根的不同取值，RLC电路的自然响应可以分为过阻尼、欠阻尼和

临界阻尼三种情况。当两个特征根相等（即$s_1=s_2$或$\alpha=\omega_0$）时，电路的响应为临界阻尼响应；当两个特征根为不相等的实数（即$s_1\neq s_2$或$\alpha>\omega_0$）时，电路的响应为过阻尼响应；当两个特征根为共轭复数（即$s_1=s_2^*$或$\alpha<\omega_0$）时，电路的响应为欠阻尼响应。

（5）如果电路在开关闭合之后存在独立电源，则该电路的全解为瞬态响应与稳态响应之和。

（6）可以采与分析RC电路或RL电路相同的分析方法，利用PSpice分析RLC电路。

（7）如果描述一个电路的网孔方程与描述另一个电路的节点方程具有同样的形式，则称这两个电路互为对偶电路。由其中一个电路的分析结果就可以推出其对偶电路的分析结果。

（8）汽车点火电路与平滑电路是本章介绍的知识在实际应用中的两个典型实例。

复习题

8-1 对如图8-58所示的电路，$t=0$ 时刻（即开关闭合之前的瞬间）电容器两端的电压为：

（a）0 V （b）4 V （c）8 V （d）12 V

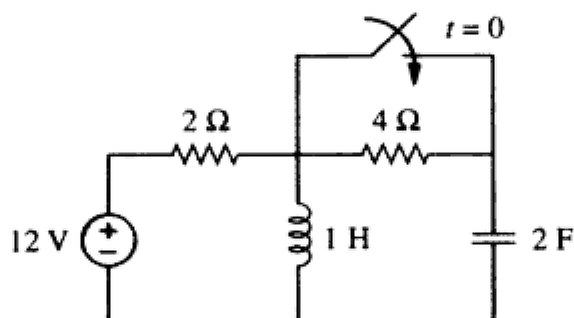


图 8-58 复习题 8-1 与复习题 8-2 的电路原理图

8-2 对如图8-58所示的电路，电感器的初始（$t=0$ 时刻）电流为：

（a）0 A （b）2 A （c）6 A （d）12 A

8-3 当二阶电路的输入端施加阶跃信号时，电路变量的终值可由下述哪种方法得到：

（a）用闭合电路取代电容器，用开路取代电感器

（b）用开路取代电容器，用闭合电路取代电感器

（c）上述两种方法均不能

8-4 如果某RLC电路特征方程的特征根为 −2、−3，则该电路的响应为：

（a）$(A\cos 2t+B\sin 2t)\,e^{3t}$

（b）$(A+2Bt)\,e^{3t}$

（c）$A\,e^{2t}+B\,t\,e^{3t}$

（d）$A\,e^{2t}+B\,e^{3t}$

其中，A、B均为常数。

8-5 在RLC串联电路中，设$R=0$，则响应为：

（a）过阻尼响应

（b）临界阻尼响应

（c）欠阻尼响应

（d）无阻尼响应

（e）以上选项均错误

8-6 在某RLC并联电路中，$L=2$ H，$C=0.25$ F，则能产生单位阻尼因子的电阻值为：

（a）0.5 Ω （b）1 Ω （c）2 Ω （d）4 Ω

8-7 对于如图8-59所示的RLC串联电路，其响应的类型为：

（a）过阻尼

（b）欠阻尼

（c）临界阻尼

（d）以上选项均错误

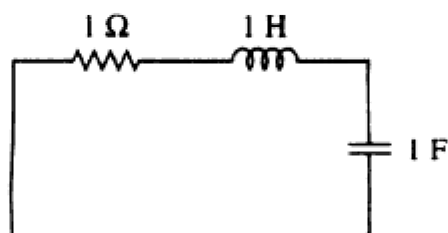


图 8-59 复习题 8-7 的电路原理图

8-8 对于如图8-60所示的RLC并联电路，其响应的类型为：

（a）过阻尼

（b）欠阻尼

（c）临界阻尼

（d）以上选项均错误

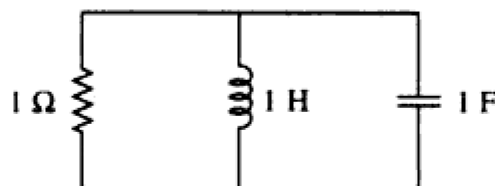


图 8-60 复习题 8-8 的电路原理图

8-9 试确定如图8-61所示各电路分别属于如下哪种类型：

（i）一阶电路

(ii) 二阶串联电路

(iii) 二阶并联电路

(iv) 以上选项均错误

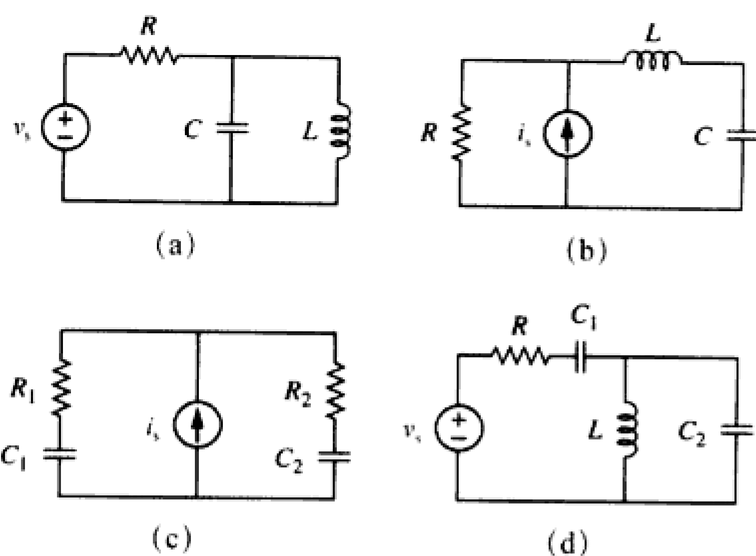


图 8-61　复习题 8-9 的电路原理图

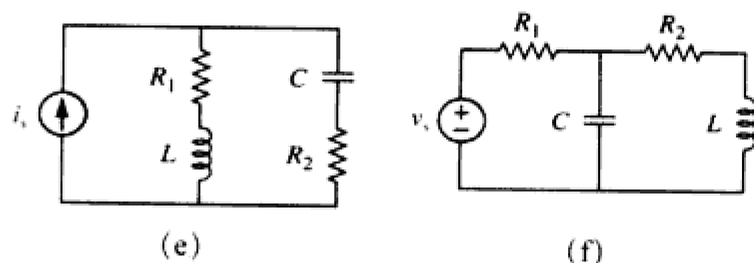


图 8-61　(续)

8-10　电路中电阻器的对偶元件为：

(a) 电导器　(b) 电感器　(c) 电容器

(d) 开路电路　(e) 短路电路

答案　8-1 a；8-2 c；8-3 b；8-4 d；8-5 d；8-6 c；8-7 b；8-8 b；8-9 (i) －c；(ii) －b，e，(iii) －a；(iV) －d，f，8-10 a。

习题

8.2 节

8-1　对于如图8-62所示电路，试求：

(a) $i(0^+)$与$v(0^+)$

(b) $di(0^+)/dt$与$dv(0^+)/dt$

(c) $i(\infty)$ 与$v(\infty)$

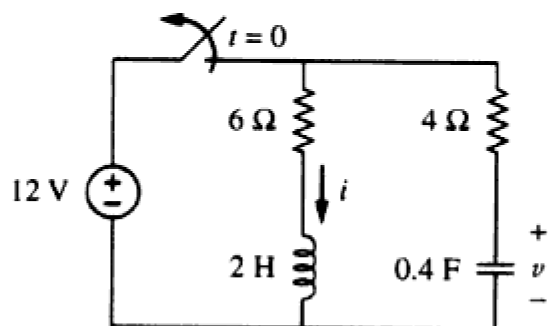


图 8-62　习题 8-1 的电路原理图

8-2　在如图8-63所示的电路中，试确定：

(a) $i_R(0^+)$，$i_L(0^+)$ 与$i_C(0^+)$

(b) $di_R(0^+)/dt$，$di_L(0^+)/dt$与$di_C(0^+)/dt$

(c) $i_R(\infty)$，$i_L(\infty)$ 与$i_C(\infty)$

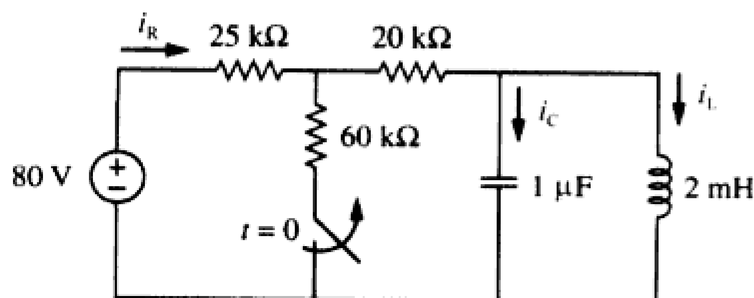


图 8-63　习题 8-2 的电路原理图

8-3　对于如图8-64所示电路，试计算：

(a) $i_L(0^+)$，$v_C(0^+)$与$v_R(0^+)$

(b) $di_L(0^+)/dt$，$dv_C(0^+)/dt$与$dv_R(0^+)/dt$

(c) $i_L(\infty)$，$v_C(\infty)$ 与$v_R(\infty)$

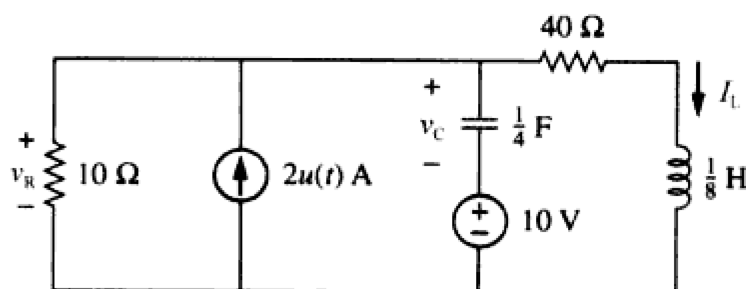


图 8-64　习题 8-3 的电路原理图

8-4　对于如图8-65所示电路，试求：

(a) $v(0^+)$与$i(0^+)$

(b) $dv(0^+)/dt$与$di(0^+)/dt$

(c) $v(\infty)$与$i(\infty)$

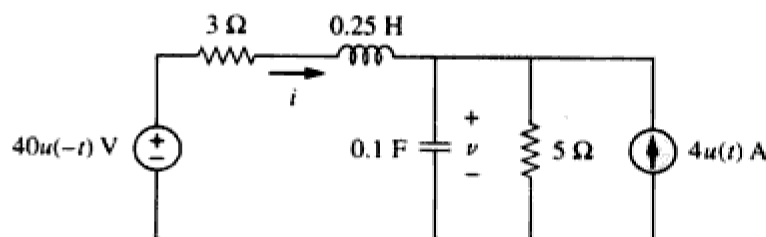


图 8-65　习题 8-4 的电路原理图

8-5　对于如图8-66所示电路，试确定：

(a) $i(0^+)$与$v(0^+)$

（b）$di(0^+)/dt$与$dv(0^+)/dt$

（c）$i(\infty)$与$v(\infty)$

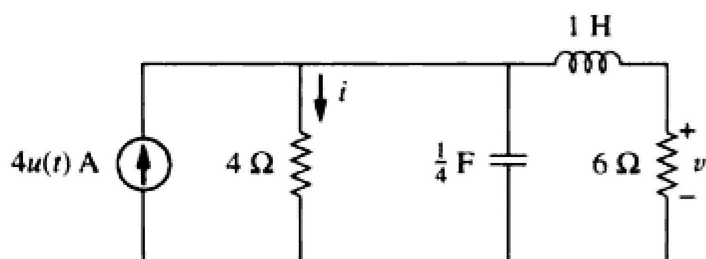


图 8-66　习题 8-5 的电路原理图

8-6　在如图8-67所示电路中，试求：

（a）$v_R(0^+)$与$v_L(0^+)$

（b）$dv_R(0^+)/dt$与$dv_L(0^+)/dt$

（c）$v_R(\infty)$ 与$v_L(\infty)$

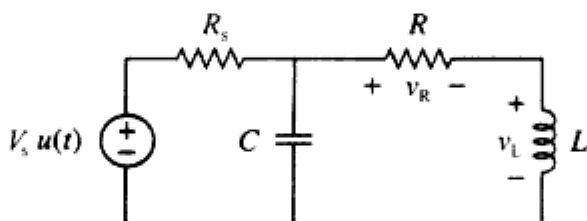


图 8-67　习题 8-6 的电路原理图

8.3 节

8-7　某RLC串联电路中，$R=10\ \text{k}\Omega$，$L=0.1\ \text{mH}$，$C=10\ \mu\text{F}$，试问该电路的响应表现为哪种阻尼类型？

8-8　描述某支路电流的微分方程如下：

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2}+4\frac{di(t)}{dt}+10i(t)=0$$

试确定：(a) 特征方程，(b) 该电路所表现的阻尼类型，(c) 初始条件为$i(0)=1$、$di(0)/dt=2$时的$i(t)$。

8-9　描述某RLC电路中电流的微分方程为：

$$\frac{d^2i}{dt^2}+10\frac{di}{dt}+25i=0$$

如果初始条件为$i(0)=10$，$di(0)/dt=0$，试求$t>0$时的$i(t)$。

8-10　描述某RLC网络中电压的微分方程为：

$$\frac{d^2v}{dt^2}+5\frac{dv}{dt}+4v=0$$

如果初始条件为$v(0)=0$，$dv(0)/dt=10$，试求$v(t)$。

8-11　描述某RLC电路自然响应的微分方程如下：

$$\frac{d^2v}{dt^2}+2\frac{dv}{dt}+v=0$$

如果初始条件为$v(0)=10$和$dv(0)/dt=0$，试求$v(t)$。

8-12　如果$R=20\ \Omega$，$L=0.6\ \text{H}$，试求满足如下条件的RLC串联电路的C值：

（a）过阻尼响应　（b）临阻尼响应

（c）欠阻尼响应

8-13　对如图8-68所示电路，试计算电路产生临界阻尼响应时对应的电阻值R。

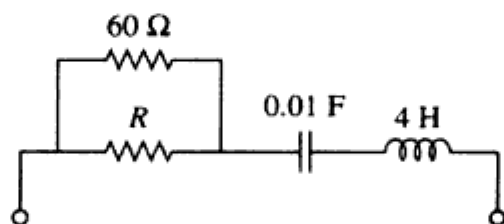


图 8-68　习题 8-13 的电路原理图

8-14　图8-69所示电路中的开关在$t=0$时刻从位置A转向位置B（注意，开关必须在与A点断开之前连接至B点，即先连后断开关），试求$t>0$时的$v(t)$。

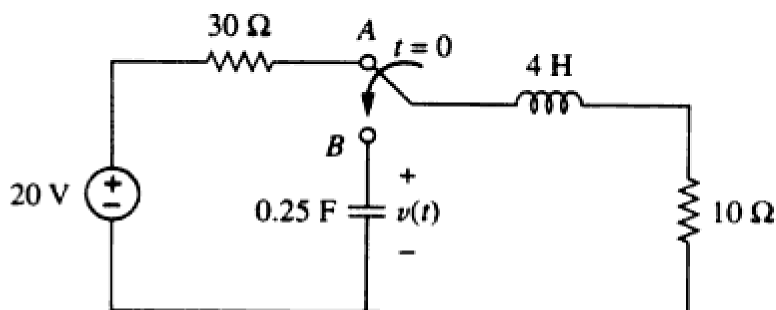


图 8-69　习题 8-14 的电路原理图

8-15　某RLC串联电路的响应为：

$v_C(t)=30-10\,e^{-20t}+30\,e^{-10t}\ \text{V}$

$i_L(t)=40\,e^{-20t}-60\,e^{-10t}\ \text{mA}$

其中，v_C与i_L分别为电容器两端的电压和流过电感器的电流，试确定R，L与C的值。

8-16　试求如图8-70所示电路在$t>0$时的求$i(t)$。

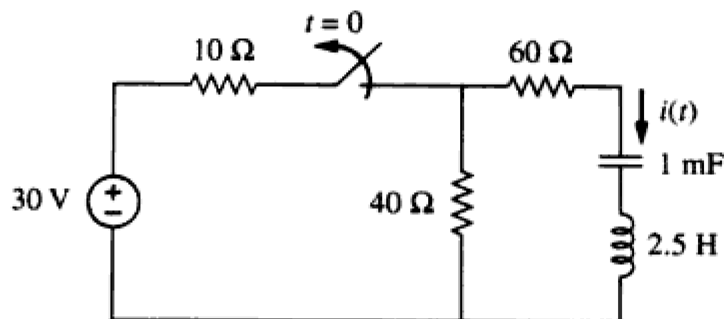


图 8-70　习题 8-16 的电路原理图

8-17 在如图8-71所示电路中，开关在$t=0$时刻从位置A切换至位置B，试求$t\geqslant 0$时的$v(t)$。

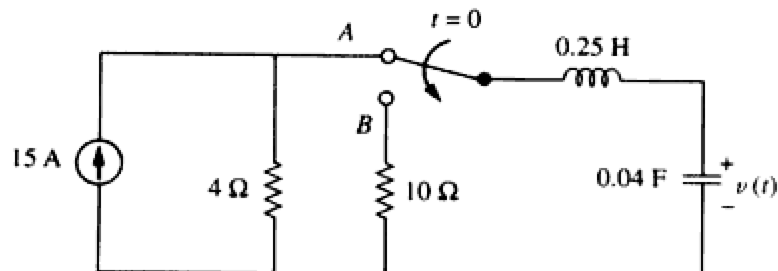


图 8-71 习题 8-17 的电路原理图

8-18 假定如图8-72所示电路在$t=0$ 时刻满足稳态条件，试求该电路中电容器两端的电压随时间t（$t>0$）变化的函数。

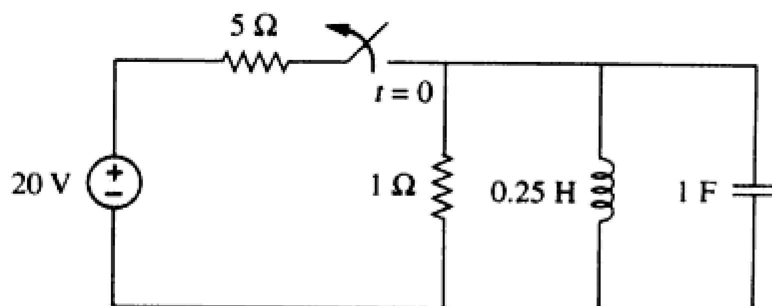


图 8-72 习题 8-18 的电路原理图

8-19 试确定如图8-73所示电路在$t>0$时的$v(t)$。

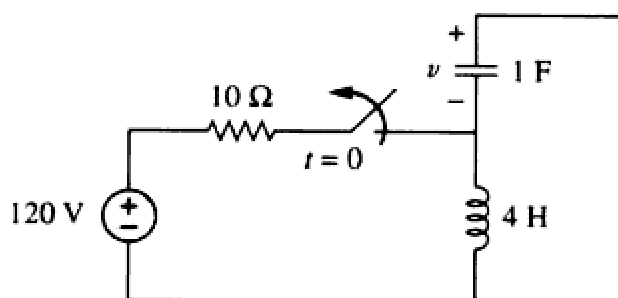


图 8-73 习题 8-19 的电路原理图

8-20 如图8-74所示电路中的开关已长时间闭合并在$t=0$时刻断开，试确定$t>0$时的$i(t)$。

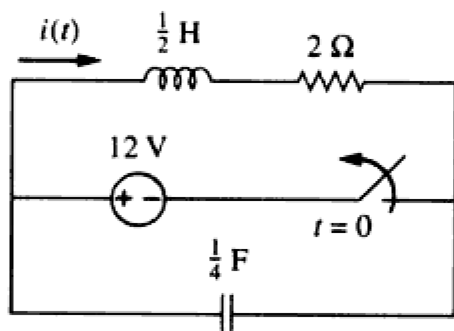


图 8-74 习题 8-20 的电路原理图

*8-21 试计算如图8-75所示电路在$t>0$时的$v(t)$。



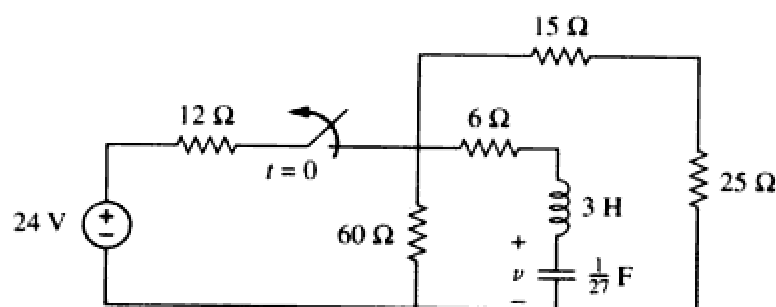


图 8-75 习题 8-21 的电路原理图

8.4 节

8-22 假定$R=2\ \text{k}\Omega$，试设计一个满足如下特征方程的RLC并联电路：

$$s^2+100s+10^6=0$$

8-23 对于如图8-76所示电路，试求该电路响应为单位阻尼系数（$\alpha=1$）的欠阻尼响应所需的C值。

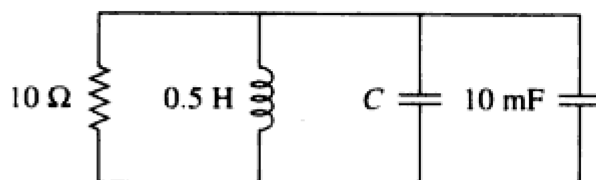


图 8-76 习题 8-23 的电路原理图

8-24 图8-77所示电路中的开关在$t=0$时刻从位置A转向位置B（注意，开关必须在与A点断开之前连接至B点，即先连后断开关），试求$t>0$时的$i(t)$。

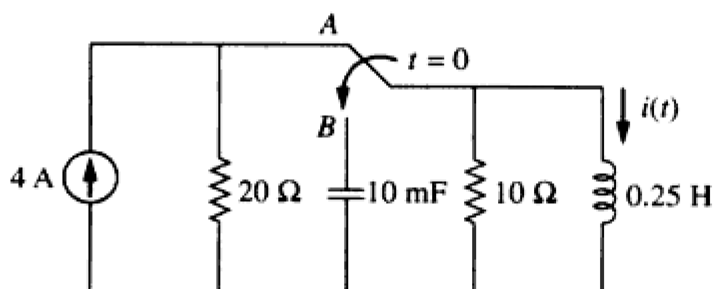


图 8-77 习题 8-24 的电路原理图

8-25 在如图8-78所示的电路中，试计算$t>0$时的$i_o(t)$与$v_o(t)$。

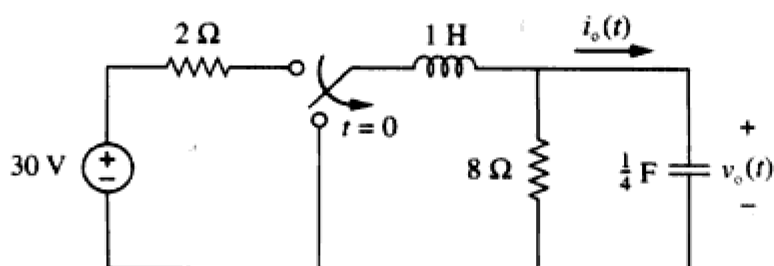


图 8-78 习题 8-25 的电路原理图

8.5 节

8-26 某RLC电路的阶跃响应可用如下微分方程描述：

$$\frac{d^2i}{dt^2}+2\frac{di}{dt}+5i=10$$

如果初始条件为$i(0)=2$，$d\,i(0)/dt=4$，试求$i(t)$。

8-27 某RLC电路的支路电压可用如下微分方程描述：

$$\frac{d^2v}{dt^2}+4\frac{dv}{dt}+8v=24$$

如果初始条件为$v(0)=0=dv(0)/dt$，试求$v(t)$。

8-28 描述某RLC串联电路的微分方程为：

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=2$$

假定$i(0)=1$，$di(0)/dt=0$，试求$L=0.5$ H，$R=4\ \Omega$，$C=0.2$ F时该电路的响应。

8-29 试求解满足特定初始条件的下列各微分方程：

(a) $d^2v/dt^2+4v=12$，$v(0)=0$，$d\,v(0)/dt=2$

(b) $d^2i/dt^2+5di/dt+4i=8$，$i(0)=-1$，$di(0)/dt=0$

(c) $d^2v/dt^2+2dv/dt+v=3$，$v(0)=5$，$dv(0)/t=1$

(d) $d^2i/dt^2+2di/dt+5i=10$，$i(0)=4$，$di(0)/dt=-2$

8-30 某RLC串联电路的阶跃响应为：

$v_C(t)=40-10e^{-2000t}-10\,e^{-4000t}$ V，$t>0$

$i_L(t)=3\,e^{-2000t}+6\,e^{-4000t}$ mA，$t>0$

(a) 试求C；

(b) 试确定该电路响应的阻尼类型。

8-31 对于图8-79所示电路，试求$v_L(0^+)$与$v_C(0^+)$。

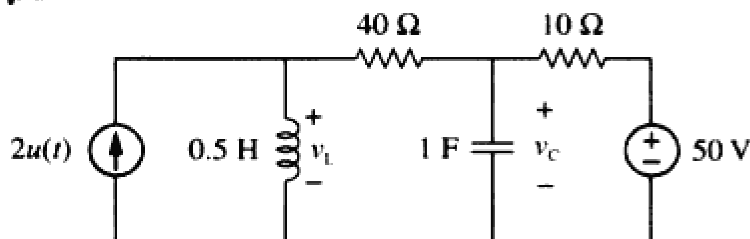


图 8-79 习题 8-31 的电路原理图

8-32 对于图8-80所示电路，试求$t>0$时的$v(t)$。

8-33 试求图8-81所示电路在$t>0$时的$v(t)$。

8-34 试计算图8-82所示电路在$t>0$时的$i(t)$。

8-35 试确定图8-83所示电路在$t>0$时的$v(t)$。

8-36 试确定图8-84所示电路在$t>0$时的$v(t)$与$i(t)$。

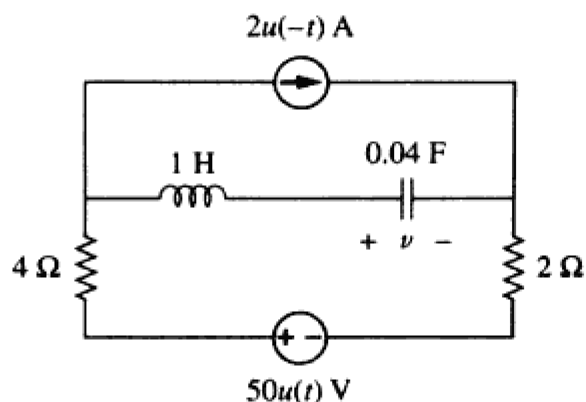


图 8-80 习题 8-32 的电路原理图

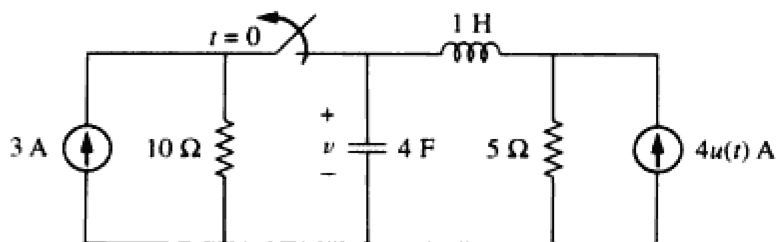


图 8-81 习题 8-33 的电路原理图

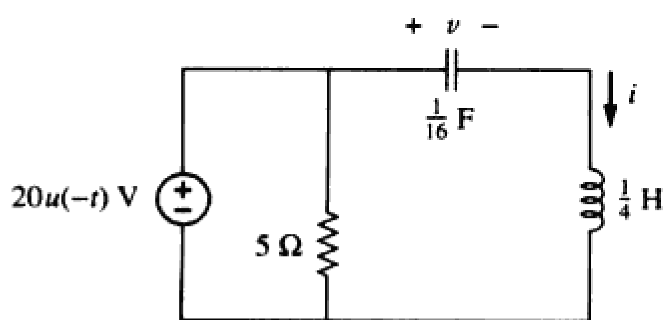


图 8-82 习题 8-34 的电路原理图

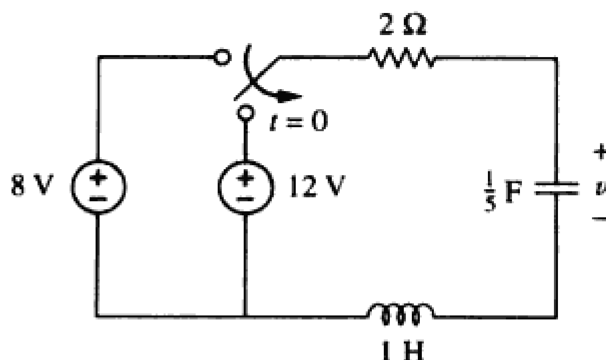


图 8-83 习题 8-35 的电路原理图

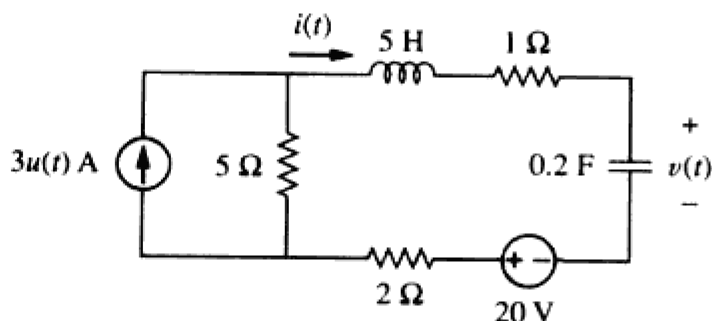


图 8-84　习题 8-36 的电路原理图

*8-37　对如图8-85所示的网络，试求$t>0$时的$i(t)$。

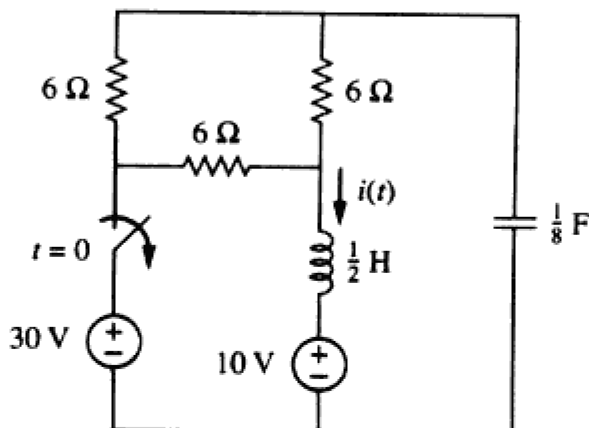


图 8-85　习题 8-37 的电路原理图

8-38　试计算图8-86所示电路在$t>0$时的$i(t)$。

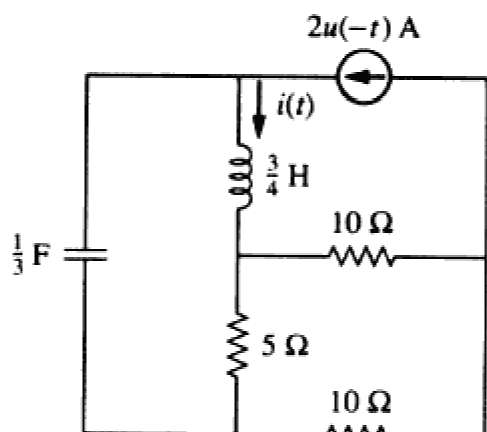


图 8-86　习题 8-38 的电路原理图

8-39　试确定图8-87所示电路在$t>0$时的$v(t)$。

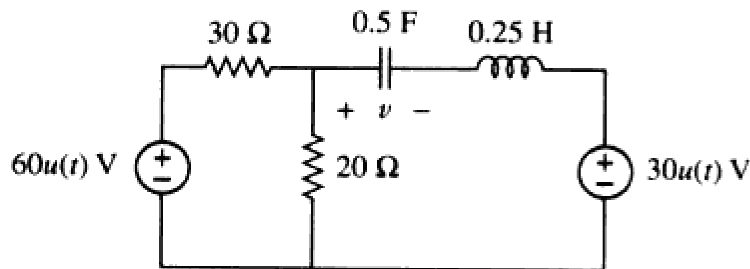


图 8-87　习题 8-39 的电路原理图

8-40　图8-88所示电路中的开关在时$t=0$刻由位置a切换至位置b，试确定$t>0$时的$i(t)$。

*8-41　对如图8-89所示的网络，试求$t>0$时的$i(t)$。

*8-42　对如图8-90所示的网络，试求$t>0$时的$v(t)$。

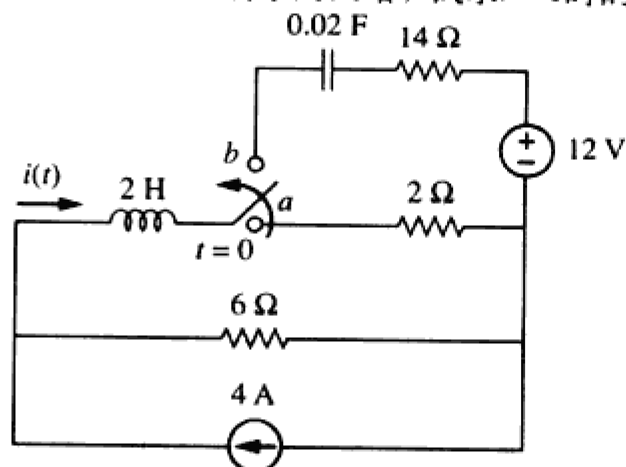


图 8-88　习题 8-40 的电路原理图

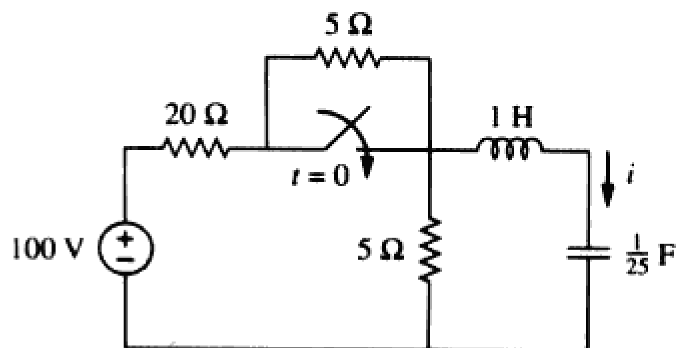


图 8-89　习题 8-41 的电路原理图

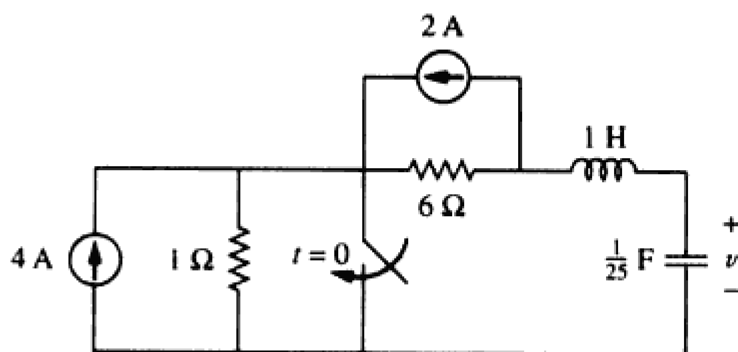


图 8-90　习题 8-42 的电路原理图

8-43　如图8-91所示电路达到稳定状态后，开关在$t=0$时刻断开，试确定使得$\alpha=8$ Np/s，$\omega_d=30$ rad/s的R与C的值。

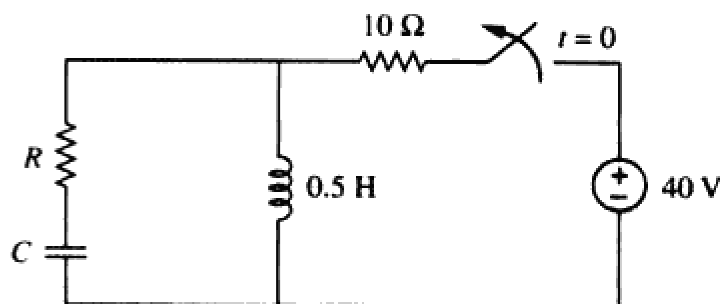


图 8-91　习题 8-43 的电路原理图

8-44　某RLC串联电路的参数如下：$R=1$ kΩ，$L=1$ H，$C=10$ nF，试问该电路表现为哪种类型的阻尼？

8.6 节

8-45　在如图8-92所示的电路中，假定$v(0)=0$ V，$i(0)=1$ A，试求$t>0$时的$v(t)$与$i(t)$。

8-46　试求图8-93所示电路在$t>0$时的$i(t)$。

8-47　试求图8-94所示电路的输出电压$v_o(t)$。

8-48　对于图8-95所示电路，试求$t>0$时的$i(t)$与$v(t)$。

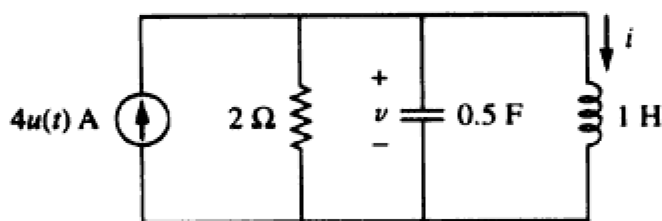


图 8-92　习题 8-45 的电路原理图

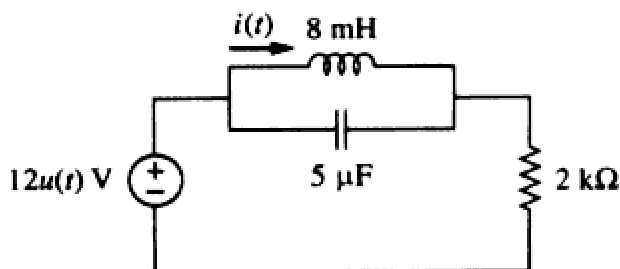


图 8-93　习题 8-46 的电路原理图

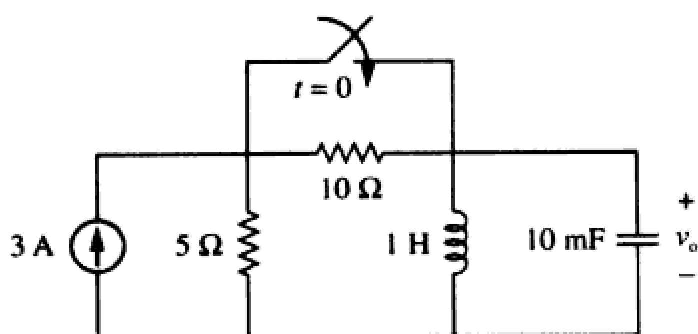


图 8-94　习题 8-47 的电路原理图

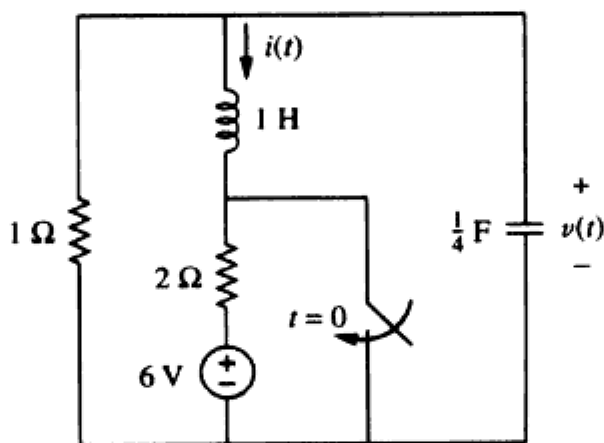


图 8-95　习题 8-48 的电路原理图

8-49　试确定图8-96所示电路在$t>0$时的$i(t)$。

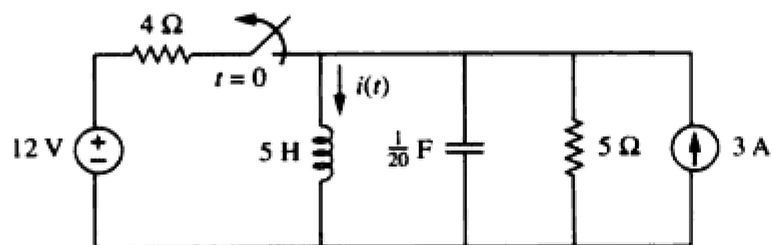


图 8-96　习题 8-49 的电路原理图

8-50　对于图8-97所示电路，试求$t>0$时的$i(t)$。

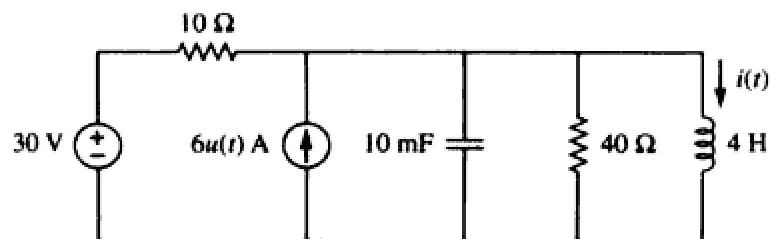


图 8-97　习题 8-50 的电路原理图

8-51　试求图8-98所示电路在$t>0$时的$v(t)$。

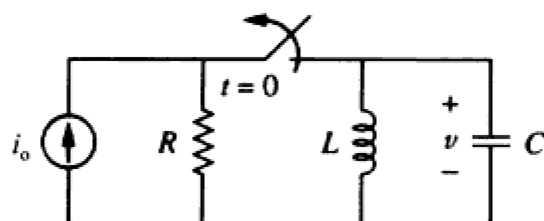


图 8-98　习题 8-51 的电路原理图

8-52　某RLC并联电路的阶跃响应为：

$$v=10+20e^{-300t}(\cos 400t-2\sin 400t)\ \text{V},\quad t\geqslant 0$$

当电感器为50 mH时，试求R与C的值。

8.7 节

8-53　图8-99所示电路的开关断开一天后，在$t=0$时刻闭合，试求$t>0$时描述$i(t)$的微分方程。

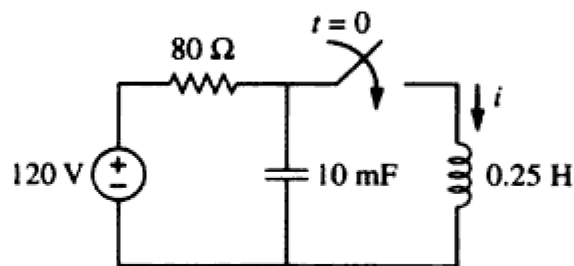


图 8-99　习题 8-53 的电路原理图

8-54　图8-100所示电路中的开关在$t=0$时刻由位置A转向位置B，试确定：(a) $i(0^+)$与$v(0^+)$；(b) $di(0^+)/dt$与$dv(0^+)/dt$；(c) $i(\infty)$与$v(\infty)$。

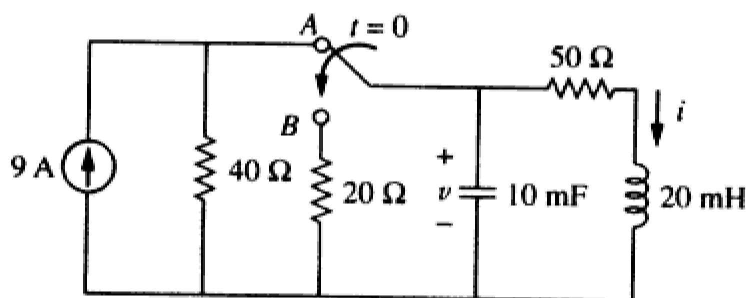


图 8-100 习题 8-54 的电路原理图

8-55 对于如图8-101所示电路，假定$v(0^+)=4$ V，$i(0^+)=2$ A，试求$t>0$时的$v(t)$。

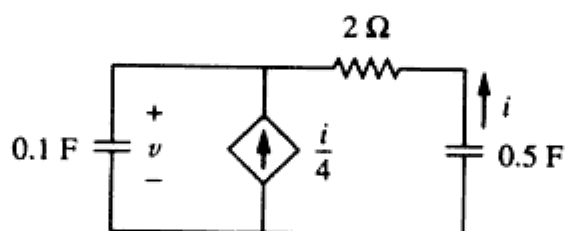


图 8-101 习题 8-55 的电路原理图

8-56 对于图8-102所示电路，试求$t>0$时的$i(t)$。

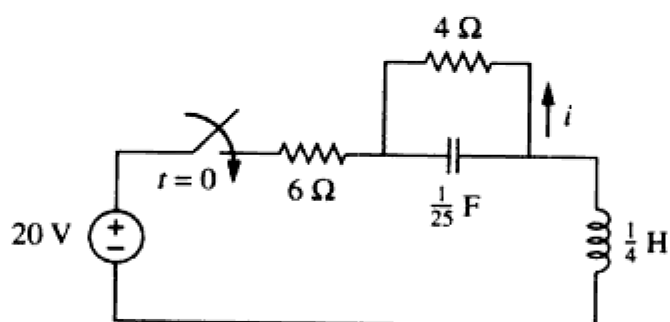


图 8-102 习题 8-56 的电路原理图

8-57 如果图8-103所示电路中的开关在$t=0$时刻之前长时间闭合，并在$t=0$时刻断开，试确定：(a) 该电路的特征方程，(b) $t>0$时的i_x与v_R。

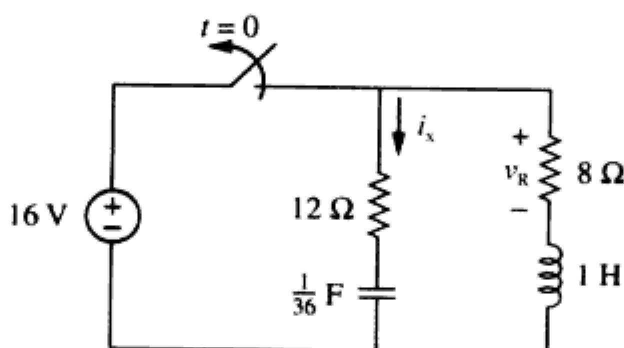


图 8-103 习题 8-57 的电路原理图

8-58 在如图8-104所示电路中，开关已长时间处于位置1，并在$t=0$时刻转向位置2，试求：(a) $v(0^+)$与$dv(0^+)/dt$；(b) $t\geq 0$时的$v(t)$。

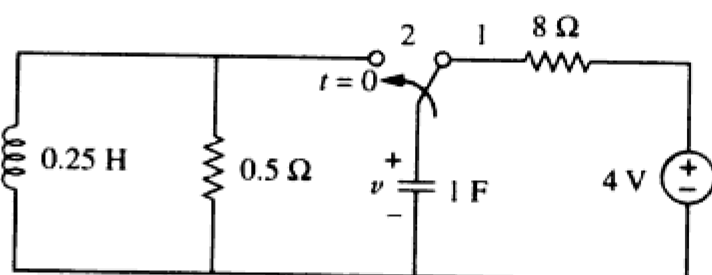


图 8-104 习题 8-58 的电路原理图

8-59 如图8-105所示电路中的先连后断开关在$t<0$时处于位置1，并在$t=0$时刻转向位置2，试确定$v(t)$。

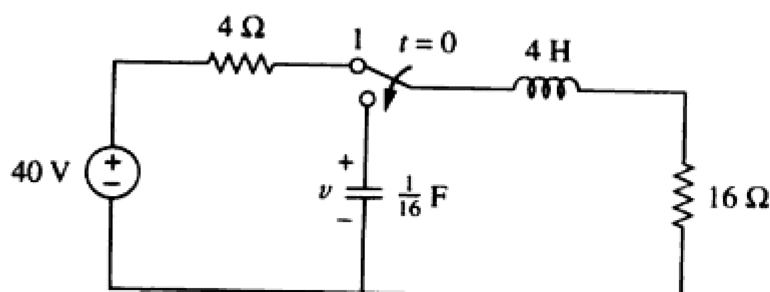


图 8-105 习题 8-59 的电路原理图

8-60 试确定如图8-106所示电路在$t>0$时的i_1与i_2。

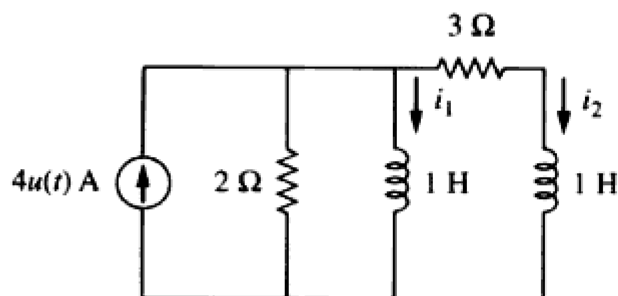


图 8-106 习题 8-60 的电路原理图

8-61 对于习题8-5中的电路，试求$t>0$时的i与v。

8-62 试求图8-107所示电路在$t>0$时的响应$v_R(t)$，假定$R=3\ \Omega$，$L=2$ H，$C=1/18$ F。

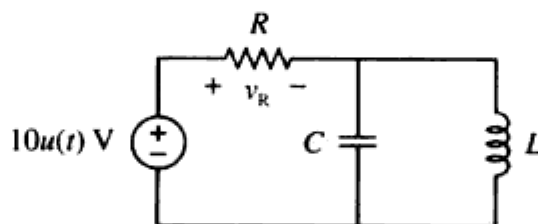


图 8-107 习题 8-62 的电路原理图

8.8 节

8-63 对于如图8-108所示的运算放大器电路，试求描述$i(t)$的微分方程。

8-64 对于如图8-109所示的运算放大器电路，试推导描述v_o与v_s间关系的微分方程。

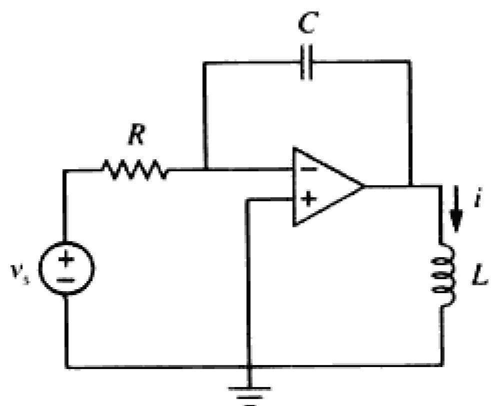


图 8-108　习题 8-63 的电路原理图

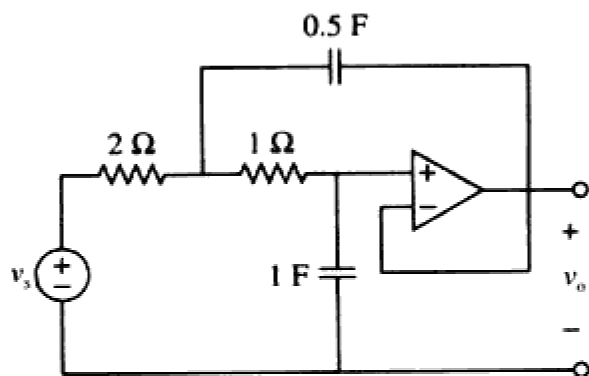


图 8-109　习题 8-64 的电路原理图

8-65　试确定如图8-110所示运算放大器电路的微分方程，如果$v_1(0^+) = 2$ V，$v_2(0^+) = 0$ V，试求$t > 0$时的v_o，假定$R = 100$ kΩ，$C = 1$ μF。

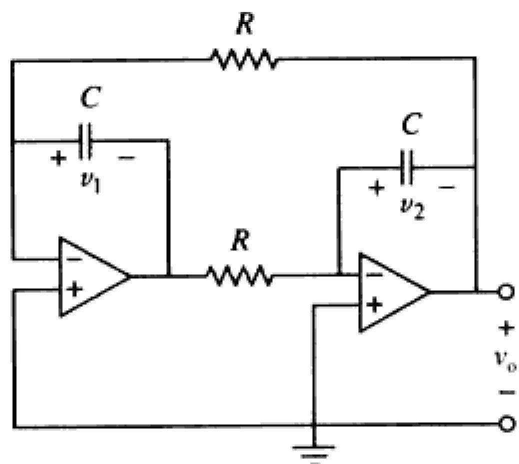


图 8-110　习题 8-65 的电路原理图

8-66　试确定如图8-111所示运算放大器电路中描述$v_o(t)$的微分方程。

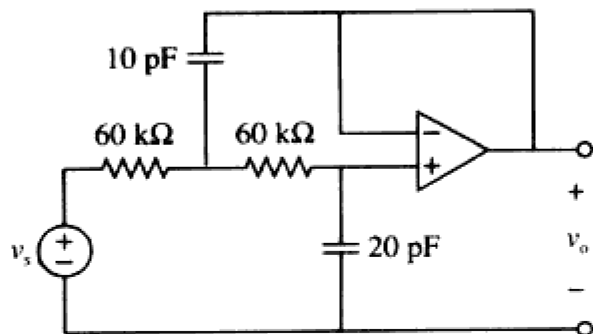


图 8-111　习题 8-66 的电路原理图

8-67　在如图8-112所示运算放大器电路中，试确定$t > 0$时的$v_o(t)$。假定$v_{in} = u(t)$ V，$R_1 = R_2 = 10$ k Ω，$C_1 = C_2 = 100$ μF。

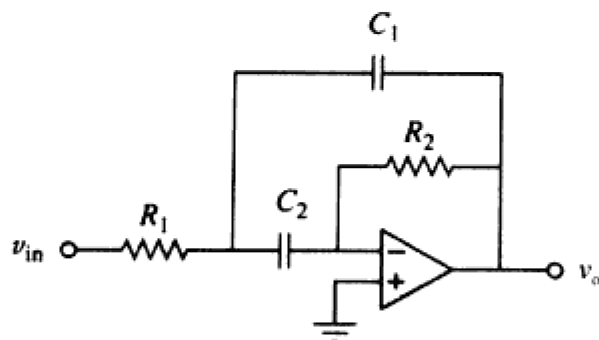


图 8-112　习题 8-67 的电路原理图

8.9 节



8-68　试利用PSpice确定如图8-113所示电路在$0 < t < 6$ s期间对阶跃函数$v_s = u(t)$的响应$v(t)$。

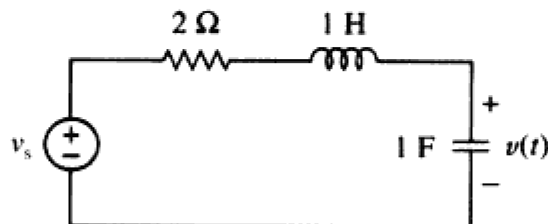


图 8-113　习题 8-68 的电路原理图

8-69　对于如图8-114所示的无源激励电路，试利用PSpice确定$0 < t < 20$ s时的$i(t)$，假定初始条件$v(0) = 30$ V，$i(0) = 2$ A。

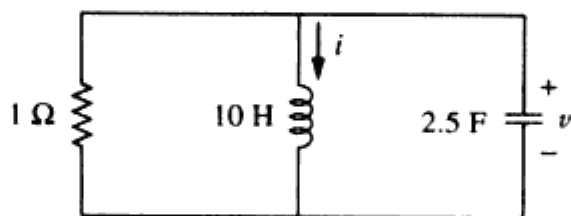


图 8-114　习题 8-69 的电路原理图

8-70　对于如图8-115所示电路，试利用PSpice确定$0 < t < 4$ s时的$v(t)$，假定电容器两端的电压与流过电感器的电流在$t = 0$时刻均为0。

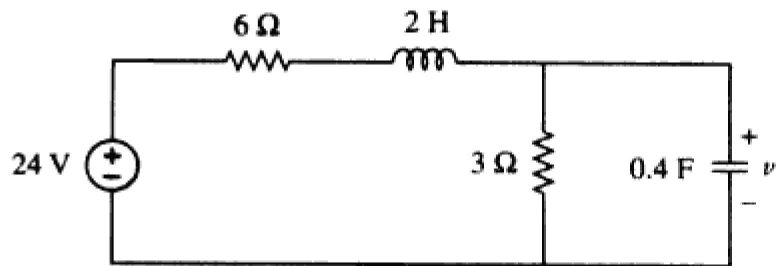


图 8-115　习题 8-70 的电路原理图

8-71　试利用PSpice确定如图8-116所示电路在$0 < t$

< 4 s时的$v(t)$。

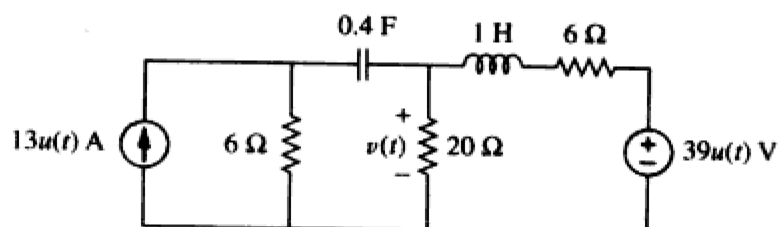


图 8-116 习题 8-71 的电路原理图

8-72 如图8-117所示电路中的开关已长时间处于位置1，并在$t=0$时刻转向位置2，试利用PSpice确定$0<t<0.2$ s时的$i(t)$。

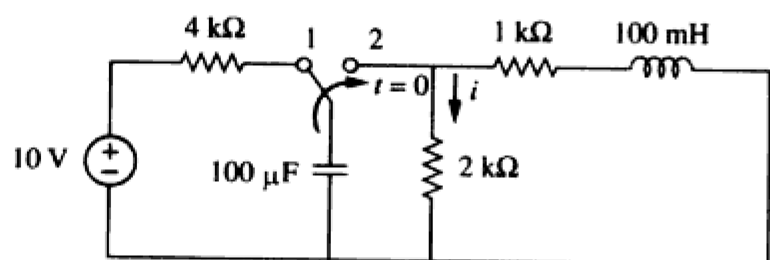


图 8-117 习题 8-72 的电路原理图

8-73 试利用PSpice重做习题8-25，画出$v_o(t)$在$0<t<4$ s时的波形。

8.10 节

8-74 对偶电路的构建过程如图8-118a所示，重新绘制的对偶电路如图8-118b所示。

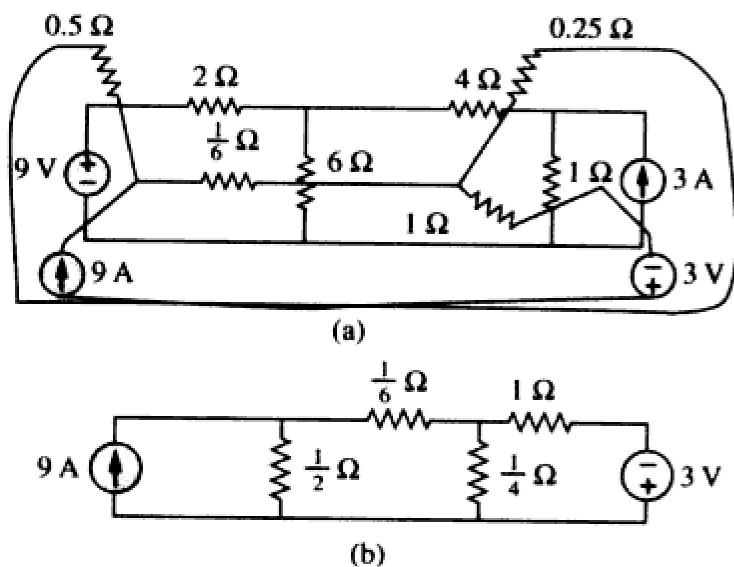


图 8-118 习题 8-74 的电路原理图

8-75 试确定如图8-119所示电路的对偶电路。

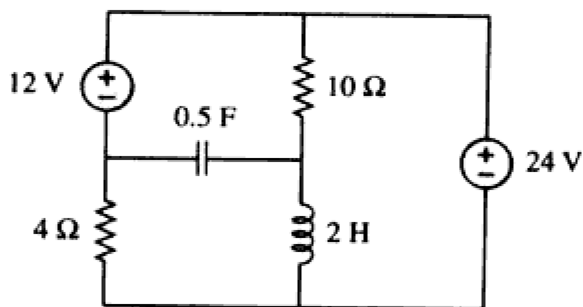


图 8-119 习题 8-75 的电路原理图

8-76 试确定如图8-120所示电路的对偶电路。

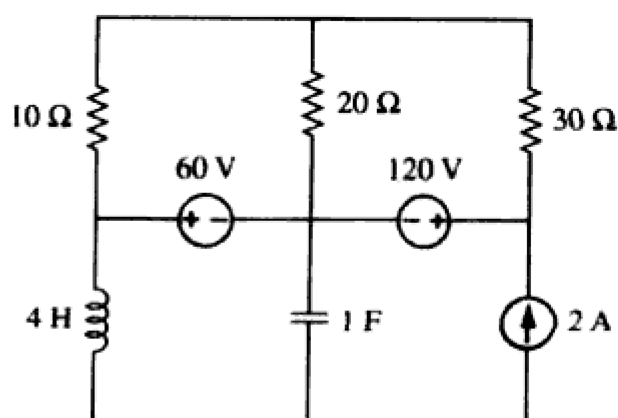


图 8-120 习题 8-76 的电路原理图

8-77 试确定如图8-121所示电路的对偶电路。

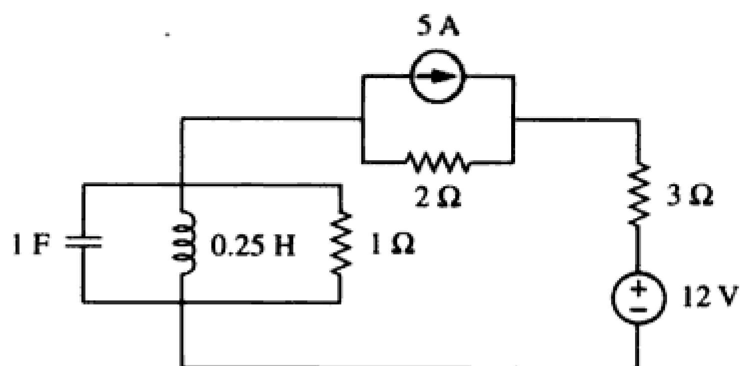


图 8-121 习题 8-77 的电路原理图

8.11 节

8-78 汽车气囊触发器的电路模型如图8-122所示。设$R=3\ \Omega$，$C=1/30$ F，$L=60$ mH，试确定开关由A转向B后，触发器两端电压达到第一个峰值所需的时间。

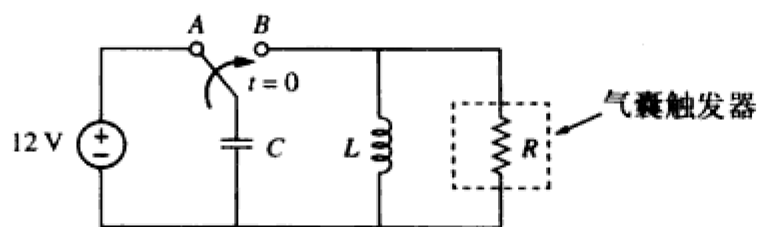


图 8-122 习题 8-78 的电路原理图

8-79 某负载可以建模为一个250 mH的电感器与一个16 Ω电阻器的并联，需在该负载两端连接一个电容使得该电路网络在60 Hz频率处产生临界阻尼响应，试计算该电容器的电容。

综合题

8-80 某机械系统可以建模为一个RLC串联电路。如果要求产生时间常数分别为0.1 ms和0.5 ms的过阻尼响应，且采用一个50 kΩ的串联电阻，试求L与C的值。

8-81 某波形图可以采用一个由RLC并联电路构成的二阶系统充分地模拟，如果要求在200 Ω电阻器两端产生欠阻尼电压响应，阻尼频率为4 kHz且电路的时间常数为0.25 s，试求所需的电容值C和电感值L。

8-82 如图8-123所示电路是一个用于医学院学生研究痉挛现象的模仿人体功能的电子模拟器，相应的模拟量如下：

C_1 = 药液量

C_2 = 特定区域内的血流量

R_1 = 药物进入到血液通道的电阻

R_2 = 排泄器官（如肾）的电阻

v_o = 药剂量的初始浓度

$v(t)$ = 血液中药量的百分比

已知$C_1 = 0.5\ \mu F$，$C_2 = 5\ \mu F$，$R_1 = 5\ M\Omega$，$R_2 = 2.5\ M\Omega$, $v_0 = 60\ u(t)$ V, 求$t > 0$时的$v(t)$。

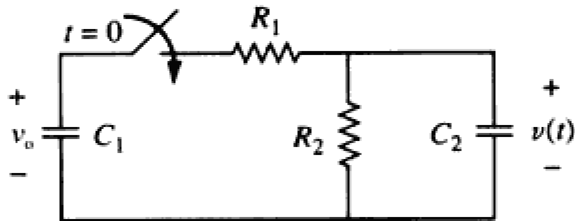


图 8-123 习题 8-82 的电路原理图

8-83 图8-124所示为典型的隧道二极管振荡器电路，二极管可建模为一个非线性电阻，满足$i_D = f(v_D)$，即流过该二极管的电流是其两端电压的非线性函数。试推导该电路中v与i_D满足的微分方程。

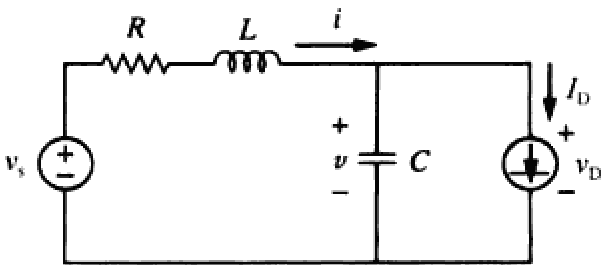


图 8-124 习题 8-83 的电路原理图

第二篇

交 流 电 路

第9章　正弦交流电路与相量

无知而不知者是愚人——躲开他；无知而知之者是孩童——教育他；知之而不知者，在熟睡——唤醒他；知之而知之者，是智者——追随他。

——波斯格言

提高技能，拓展职业生涯

“在多学科团队中发挥作用的能力”对于职业工程师而言是极为重要的。工程师很少独立地从事某项工作，他们通常是某个团队的组成部分，在团队中工作。需要提醒学生的是，你并不需要与团队中的任何人一样，只要能够成为团队的成功人士即可。



团队中通常包括许多具有不同学科背景的工程师个体，以及诸如市场、金融等非工程学科的人士。

学生通过在所选课程的学习小组中的工作就可以很容易地培养并增强这方面的技能。显然，在非工程课程学习小组以及非本专业工程课程学习小组的工作，同样会帮助学生获得在多学科团队中工作的宝贵经验。

历史人物

尼古拉·特斯拉（Nikola Tesla，1856—1943）与乔治·威斯丁豪斯（George Westinghouse，1846—1914）提出了电能传输与配送的重要模式——交流电。



乔治·威斯丁豪斯

如今，交流发电已经成为电能在大范围高效而经济传输的重要形式，然而，在19世纪末期，交流电与直流电哪种电能传输形式更好一直是争论的热点，双方都有强有力的支持者。直流电一方的倡导者托马斯·爱迪生因其大量卓越的贡献而赢得了极高的尊敬。正是由于特斯拉的成功才使交流发电得到认可，而交流发电真正的商业成功则是源于乔治·威斯丁豪斯及其领导的包括特斯拉在内的杰出团队。另外两个有影响的名字是斯科特（C. F. Scott）与拉曼（B. G. Lamme）。

对交流发电的早期成功做出重要贡献的是特斯拉于1888年获得的多相交流电动机的专利。感应电动机和多相发电与配电系统的成功实现使交流电注定成为主要的能源形式。

9.1　引言

到目前为止，前面各章主要限于讨论直流电路，即由恒定电源（时不变电源）激励的电路。为简单起见，同时也是出于教学和历史发展的考虑，限定电路的强迫函数为直流电源。从历史发展的角度来看，在19世纪末之前，直流电源一直是提供电力的主要方式。到19世纪末，直流电与交流电之争开始显现，双方都有相应的电气工程师作为支持者，但由于交流电在长距离传送中更为高效、经济，二者之争最终以交流电系统的胜利而告终。因此，本教材也按照历史事件的发展顺序，首先

介绍直流电源的有关内容。

下面开始介绍电源电压或电源电流随时间变化的电路分析问题，本章专门讨论正弦时变激励，即激励为正弦信号的电路分析。

正弦信号是指具有正弦或余弦函数形式的信号。

正弦电流通常称为*交流电*（alternating current，ac）。这种电流以规则的时间间隔出现极性反转，并交替地表现出正值和负值。由正弦电流源或正弦电压源激励的电路称为*交流电路*（ac circuit）。

之所以对正弦交流电路感兴趣，原因很多。首先，许多自然现象本身呈现出正弦特性。例如钟摆的运动、琴弦的振动、海洋表面的波纹、欠阻尼二阶系统的自然响应等均呈现正弦波动的特性，而这些仅仅是自然现象的小部分实例。其次，正弦信号易于产生和传输，世界各国输送给家庭、工厂、实验室等的供电电压均呈正弦交流形式。同时，正弦信号也是通信系统和电力工业系统中主要的信号传输形式。再次，由傅里叶分析可知，任何实际的周期信号都可以表示为许多正弦信号之和，因此，在周期信号分析中，正弦信号起着重要的作用。最后，正弦信号在数学上易于处理，其导数与积分仍然是正弦信号。正是基于上述原因，我们说正弦信号是电路分析中一个极为重要的函数。

与第7章和第8章介绍的阶跃函数类似，正弦强迫函数也会引起瞬态响应与稳态响应。其中瞬态响应随时间而消失，最终仅存在稳态响应，当瞬态响应与稳态响应相比可以忽略时，则称电路工作在正弦稳定状态下。本章讨论的主要内容即*正弦稳态响应*（sinusoidal steady-state response）。

本章首先介绍正弦信号与相量的基本知识，之后介绍阻抗与导纳的概念，接着将直流电路中介绍过的基尔霍夫定律和欧姆定律等基本电路定律引入交流电路。最后讨论交流电路在移相器电路和桥式电路中的应用。

9.2 正弦信号

正弦电压可以表示为：

$$v(t) = V_m \sin \omega t \tag{9-1}$$

其中，

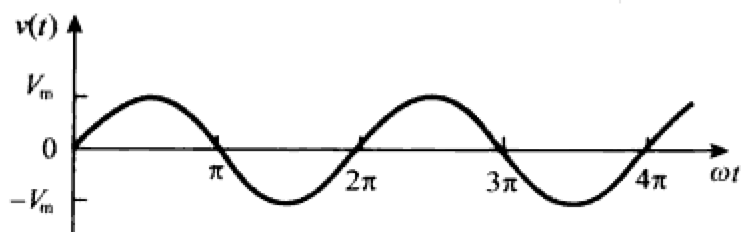
V_m = 正弦电压的*幅度或振幅*（amplitude）

ω = *角频率*（angular frequency），单位为rad/s

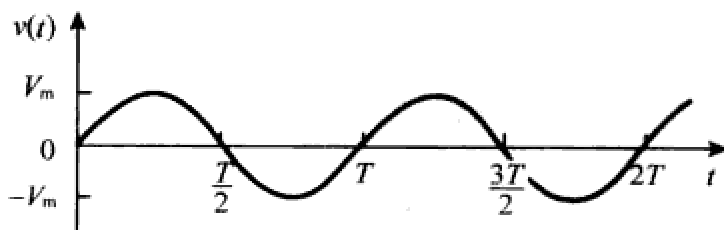
ωt = 正弦电压的*辐角*（argument）

该正弦电压$v(t)$与其辐角ωt之间的函数关系如图9-1a所示，$v(t)$与时间t之间的函数关系如图9-1b所示。显然，该正弦电压每隔T秒就会重复一遍，所以称T为该正弦电压的*周期*（period）。由图9-1所示的两个波形可知，$\omega T = 2\pi$，即：

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \tag{9-2}$$



(a) 辐角 ωt 的函数



(b) 时间 t 的函数

图 9-1 $V_m \sin\omega t$ 的波形图

将式(9-1)中的t用$t+T$取代，即可证明$v(t)$每隔T秒重复一次，即：

$$v(t+T)=V_m\sin\omega(t+T)=V_m\sin\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)$$
$$=V_m\sin(\omega t+2\pi)=V_m\sin\omega t=v(t) \tag{9-3}$$

因此，

$$v(t+T)=v(t) \tag{9-4}$$

也就是说，在$t+T$和t两个时刻，v取值相同，因此称$v(t)$是周期性的（periodic）。一般而言，

周期函数是指对所有时间t和所有整数n，满足条件$f(t)=f(t+nT)$的函数。

如上所述，周期函数的周期T是指一个完整循环的时间或者说每个循环的秒数，周期的倒数是指每秒的循环个数，称为正弦信号的循环频率（cyclic frequency）f。因此，

$$\boxed{f=\frac{1}{T}} \tag{9-5}$$

显然，由式(9-2)与式(9-5)可以得到：

$$\omega=2\pi f \tag{9-6}$$

其中，ω的单位为弧度每秒（rad/s），f的单位为赫兹（Hz）。

频率f的单位是以德国物理学家赫兹（1857—1894）的名字命名的。

历史人物



赫兹（Heinrich Rudorf Hertz，1857—1894），德国实验物理学家，证明了电磁波遵循与光波相同的基本定律。他的研究工作证实了詹姆斯·克拉克·麦克斯韦（James Clerk Maxwell）于1864年提出的著名理论以及电磁波存在的预言。

赫兹出生在德国汉堡的一个富裕家庭，进入柏林大学读书，并师从著名物理学家赫尔曼·冯·赫尔姆霍茨（Hermann von Helmholtz）攻读博士学位。之后在卡尔斯鲁厄大学担任教授，并开始了对电磁波的研究与探索。赫兹成功地产生并检测到电磁波，并成为首位证明光是一种电磁能量的科学家。1877年，赫兹首先发现了分子结构中电子的光电效应。虽然赫兹的一生仅短短37年，但他对电磁波的发现为电磁波成功用于无线电、电视、通信系统等领域铺平了道路。后人将频率的单位以他的名字命名，就是为了纪念赫兹做出的杰出贡献。

下面考虑正弦电压的一般表达式：

$$v(t)=V_m\sin(\omega t+\phi) \tag{9-7}$$

其中，$(\omega t+\phi)$为辐角，ϕ为相位（phase），辐角与相位的单位均为弧度或度。

下面考察如图9-2所示的两个正弦电压信号$v_1(t)$与$v_2(t)$：

$$v_1(t)=V_m\sin\omega t \quad 和 \quad v_2(t)=V_m\sin(\omega t+\phi) \tag{9-8}$$

图9-2中v_2的起点在时间上先发生，因此称v_2超前于（lead）v_1相位ϕ或者称v_1滞后于（lag）v_2相位ϕ。如果$\phi\neq 0$，则称v_1与v_2不同相（out of phase）。如果$\phi=0$，则称v_1与v_2同相（in phase），即二者到达最小值和最大值的时刻完全相同。以上对v_1与v_2进行比较的条件是二者具有相同的频率，但未必具有相同的幅度。

正弦信号既可以用正弦函数（sin）表示，也可以用余弦函数（cos）表示。对两个正弦信号进行比较时，将二者表示为幅度为正的正弦函数或余弦函数会比较方便。在表示正弦信号时通常会用到如下三角函数恒等式：

$$\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B \tag{9-9}$$

利用上述恒等式容易证明：

$$\begin{aligned} \sin(\omega t \pm 180°) &= -\sin\omega t \\ \cos(\omega t \pm 180°) &= -\cos\omega t \\ \sin(\omega t \pm 90°) &= \pm\cos\omega t \\ \cos(\omega t \pm 90°) &= \mp\sin\omega t \end{aligned} \tag{9-10}$$

利用上述关系即可将正弦函数转换为余弦函数，或者反之。

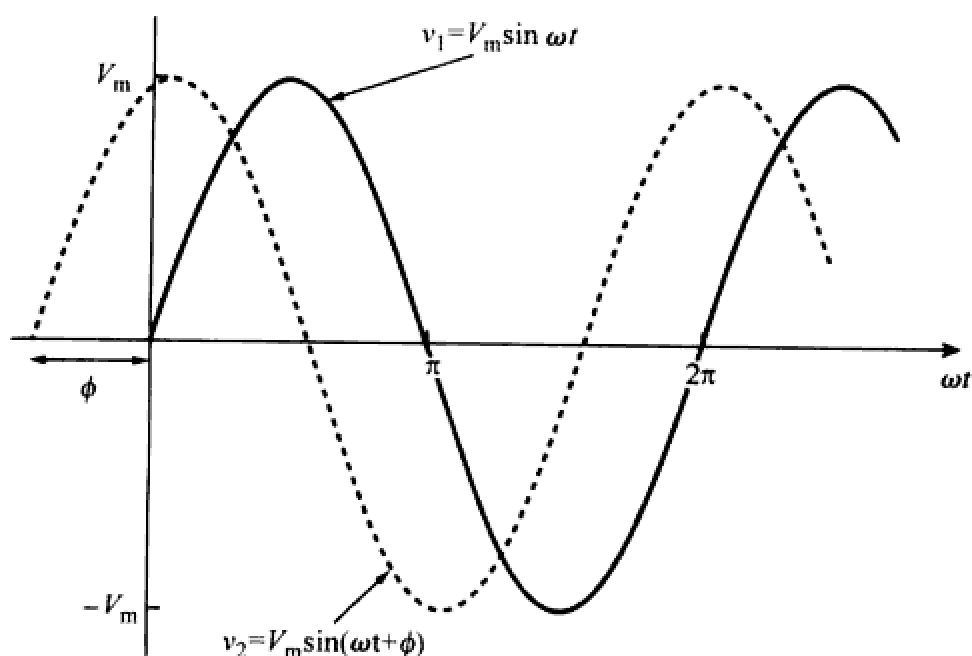
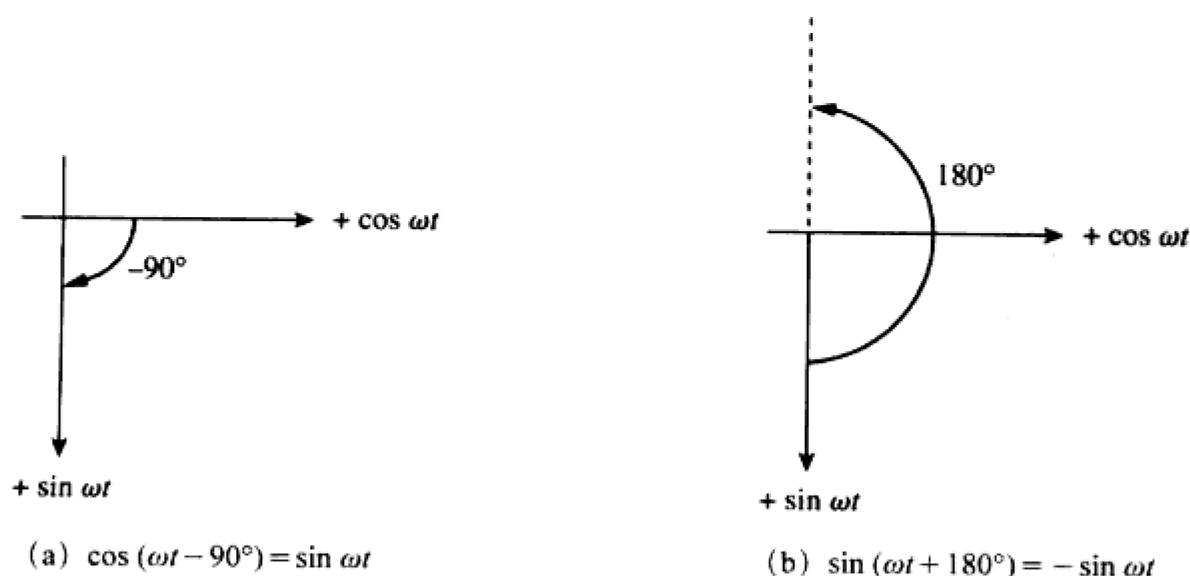


图 9-2 具有不同相位的两个正弦电压信号

除利用式(9-9)与式(9-10)给出的三角恒等式表示正弦函数之间的关系外，还可以采用图形法对正弦信号进行联系和比较。在如图9-3a所示的坐标系中，水平轴表示余弦分量的幅度，垂直轴（箭头向下）表示正弦分量的幅度。角度的正负与常用的极坐标系规定相同，即从水平轴开始逆时针为正。这种图形表示方法可用于确定两个正弦信号之间的关系，例如，由图9-3a可见，$\cos\omega t$的辐角减去90°就得到$\sin\omega t$，即$\cos(\omega t - 90°) = \sin\omega t$。类似地，$\sin\omega t$的辐角加上180°就得到$-\sin\omega t$，即$\sin(\omega t - 180°) = -\sin\omega t$，如图9-3b所示。



（a）$\cos(\omega t - 90°) = \sin\omega t$ （b）$\sin(\omega t + 180°) = -\sin\omega t$

图 9-3 联系余弦函数与正弦函数的图形方法

当一个信号具有正弦形式，另一个信号具有余弦形式，且二者频率相同时，还可利用上述图形方法实现这两个同频正弦信号的相加运算。如图9-4a所示，要实现信号$A\cos\omega t$与$B\sin\omega t$的相加运算，

其中A为$\cos\omega t$的幅度，B为$\sin\omega t$的幅度，则相加后用余弦函数表示的正弦信号的幅度和相位可以用三角关系得到，即：

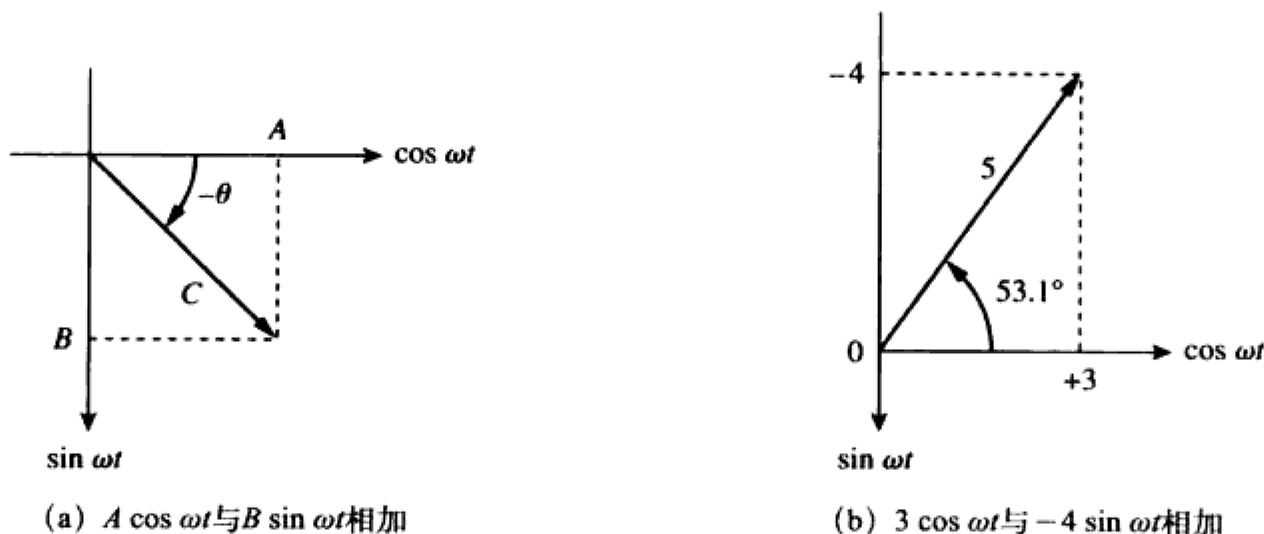
$$A\cos\omega t + B\sin\omega t = C\cos(\omega t-\theta) \tag{9-11}$$

其中，

$$C=\sqrt{A^2+B^2},\quad \theta=\tan^{-1}\frac{B}{A} \tag{9-12}$$

例如，$3\cos\omega t$与$-4\sin\omega t$相加的图形表示如图9-4所示，由此可以得到：

$$3\cos\omega t-4\sin\omega t=5\cos(\omega t+53.1°) \tag{9-13}$$



（a）$A\cos\omega t$与$B\sin\omega t$相加　　（b）$3\cos\omega t$与$-4\sin\omega t$相加

图　9-4

与式(9-9)、式(9-10)给出的三角恒等式相比，上述图形方法的优点是无需记忆。但是，一定不要将图形法中的正弦坐标轴和余弦坐标轴与下一节即将讨论的复数坐标轴混淆。对于图9-3与图9-4还应该注意的是，虽然垂直坐标轴的正方向通常是向上的，但在图形法中余弦函数的正方向是向下的。

例题9-1　试求正弦信号$v(t)=12\cos(50t+10°)$的幅度、相位、周期和频率。

解　幅度为$V_m=12$ V，

相位为$\phi=10°$，

角频率为$\omega=50$ rad/s，

周期为$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{50}=0.1257$ s，

频率为$f=\dfrac{1}{T}=7.958$ Hz。

练习题9-1　已知正弦信号$5\sin(4\pi t-60°)$，试计算其幅度、相位、角频率、周期和频率。

答　5，$-60°$，12.57 rad/s，0.5 s，2 Hz。

例题9-2　试计算$v_1=-10\cos(\omega t+50°)$与$v_2=12\sin(\omega t-10°)$之间的相位角，并说明哪一个信号超前。

解　下面采用三种方法计算相位，前两种方法利用三角恒等式，第三种方法为图形法。

方法1：为了比较v_1与v_2，必须将二者表达为相同的形式。如果用幅度为正的余弦函数表示，则有：

$$v_1=-10\cos(\omega t+50°)=10\cos(\omega t+50°-180°)$$

$$v_1=10\cos(\omega t-130°)\quad 或\quad v_1=10\cos(\omega t+230°) \tag{9-2-1}$$

而且，

$$v_2 = 12\sin(\omega t - 10°) = 12\cos(\omega t - 10° - 90°)$$

$$v_2 = 12\cos(\omega t - 100°) \tag{9-2-2}$$

由式(9-2-1)与式(9-2-2)可以推出，v_1与v_2之间的相位差为30°，可以将v_2写成：

$$v_2 = 12\cos(\omega t - 130° + 30°) \quad 或 \quad v_2 = 12\cos(\omega t + 260°) \tag{9-2-3}$$

比较式(9-2-1)与式(9-2-3)可知，v_2比v_1超前30°。

方法2：将v_1利用正弦函数表示为：

$$v_1 = -10\cos(\omega t + 50°) = 10\sin(\omega t + 50° - 90°)$$
$$= 10\sin(\omega t - 40°) = 10\sin(\omega t - 10° - 30°)$$

而$v_2 = 12\sin(\omega t - 10°)$。比较二者可知，$v_1$较$v_2$滞后30°，与$v_2$较$v_1$超前30°是一样的。

方法3：可将v_1看成是相移为+50°的−10 $\cos\omega t$，如图9-5所示，类似地，可将v_2看作是相移为−10°的12 $\sin\omega t$。由图9-5显然可见，v_2超前v_1的相位为30°，即90° − 50° − 10° = 30°。

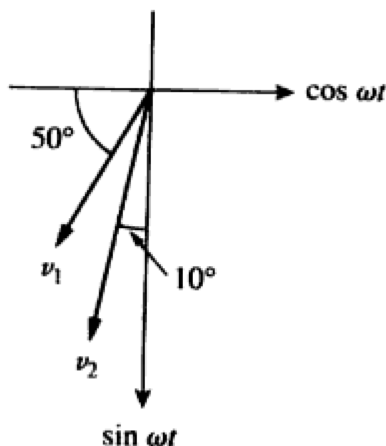


图 9-5　例题 9-2 的图

练习题9-2　试求$i_1 = -4\sin(377t + 25°)$与$i_2 = 5\cos(377t - 40°)$之间的相位角，并判断i_1是超前还是滞后于i_2。

答　155°，i_1超前于i_2。

9.3 相量

正弦信号可以很容易地用相量来表示，相量要比正弦函数和余弦函数处理起来更为方便。

相量是一个表示正弦信号的幅度和相位的复数。

相量提供了一种分析由正弦电源激励的线性电路的简单方法，否则这类电路的求解将难以处理，利用相量求解交流电路的概念是由斯坦梅茨于1893年首次提出的。在完整地定义相量并将其用于电路分析之前，需要彻底地复习有关复数的知识。

查尔斯·普洛特斯·斯坦梅茨（Charles Proteus Steinmetz, 1865—1923）是一位德裔奥地利数学家和电气工程师。

历史人物

查尔斯·普洛特斯·斯坦梅茨(Charles Proteus Steinmetz, 1865—1923)，德裔奥地利数学家和工程师，在交流电路的分析中引入了相量方法（本章将予以介绍），并以其在磁滞理论方面的出色研究而闻名。



斯坦梅茨出生于德国的布雷斯劳，一岁时就失去了母亲。青年时期由于他的政治活动被迫离开德国，当时，他在布雷斯劳大学即将完成其数学博士论文。他移居瑞士后不久又去了美国，并于1893年受雇于通用电气公司，同年，他发表了一篇论文，首次将复数应用于交流电路的分析中；他一生出版了多部教科书，基于那篇论文的一部著作《交流现象的理论与计算》于1897年由麦格劳−希尔（McGraw-Hill）出版社出版。1901年斯坦梅茨成为美国电气工程协会（即后来的IEEE）的主席。

复数z的直角坐标形式为：

$$z = x + \mathrm{j}y \tag{9-14a}$$

其中，$\mathrm{j} = \sqrt{-1}$，x是z的实部，y是z的虚部。这里变量x与y并不表示在二维矢量分析中的具体位置，

而是复数z在复平面上的实部和虚部。尽管如此，复数运算与二维矢量运算之间仍然存在一定的相似性。

复数z也可以表示为极坐标形式或指数形式：

$$z = r\angle\phi = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi} \tag{9-14b}$$

其中，r为z的模值，ϕ为z的相位。至此，我们得到复数z的三种表示形式：

$$\begin{aligned} &z = x + \mathrm{j}y && \text{直角坐标形式} \\ &z = r\angle\phi && \text{极坐标形式} \\ &z = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi} && \text{指数形式} \end{aligned} \tag{9-15}$$

直角坐标形式与极坐标形式之间的关系如图9-6所示，图中x轴表示复数z的实部，y轴表示复数z的虚部。给定x与y，即可得到r与ϕ：

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{9-16a}$$

另一方面，如果已知r与ϕ，也可以求得x与y：

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi \tag{9-16b}$$

于是，复数z可以写作：

$$\boxed{z = x + \mathrm{j}y = r\angle\phi = r(\cos\phi + \mathrm{j}\sin\phi)} \tag{9-17}$$

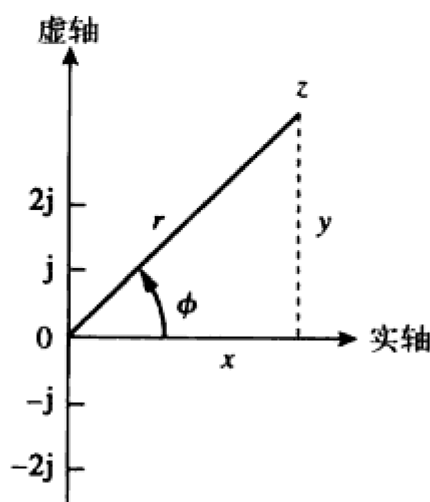


图 9-6 复数 $z = x + \mathrm{j}y = r\angle\phi$ 的表示方法

复数的加减运算利用直角坐标表示更为方便，而乘除运算则用极坐标更好。已知复数，

$$z = x + \mathrm{j}y = r\angle\phi, \quad z_1 = x_1 + \mathrm{j}y_1 = r_1\angle\phi_1$$
$$z_2 = x_2 + \mathrm{j}y_2 = r_2\angle\phi_2$$

则有如下运算公式：

加法：

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{j}(y_1 + y_2) \tag{9-18a}$$

减法：

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \mathrm{j}(y_1 - y_2) \tag{9-18b}$$

乘法：

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \angle\phi_1 + \phi_2 \tag{9-18c}$$

除法：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\angle\phi_1 - \phi_2 \tag{9-18d}$$

倒数：

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{r}\angle-\phi \tag{9-18e}$$

平方根：

$$\sqrt{z}=\sqrt{r}\angle\phi/2 \tag{9-18f}$$

共轭复数：

$$z^*=x-\mathrm{j}y=r\angle-\phi=r\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi} \tag{9-18g}$$

由式(9-18e)可以看出：

$$\frac{1}{\mathrm{j}}=-\mathrm{j} \tag{9-18h}$$

以上均为必须了解的复数的基本性质。

相量表示的依据是欧拉恒等式。一般而言，

$$\boxed{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\phi}=\cos\phi\pm\mathrm{j}\sin\phi} \tag{9-19}$$

上式表明可以将$\cos\phi$与$\sin\phi$分别看作$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$的实部与虚部，即：

$$\cos\phi=\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}) \tag{9-20a}$$

$$\sin\phi=\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}) \tag{9-20b}$$

其中，Re与Im分列表示实部运算（real part of）与虚部运算（imaginary part of）。已知正弦信号$v(t)=V_m\cos(\omega t+\phi)$，则利用式(9-20a)可将$v(t)$表示为：

$$v(t)=V_m\cos(\omega t+\phi)=\mathrm{Re}(V_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\phi)}) \tag{9-21}$$

即

$$v(t)=\mathrm{Re}(V_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) \tag{9-22}$$

因此，

$$\boxed{v(t)=\mathrm{Re}(\mathbf{V}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})} \tag{9-23}$$

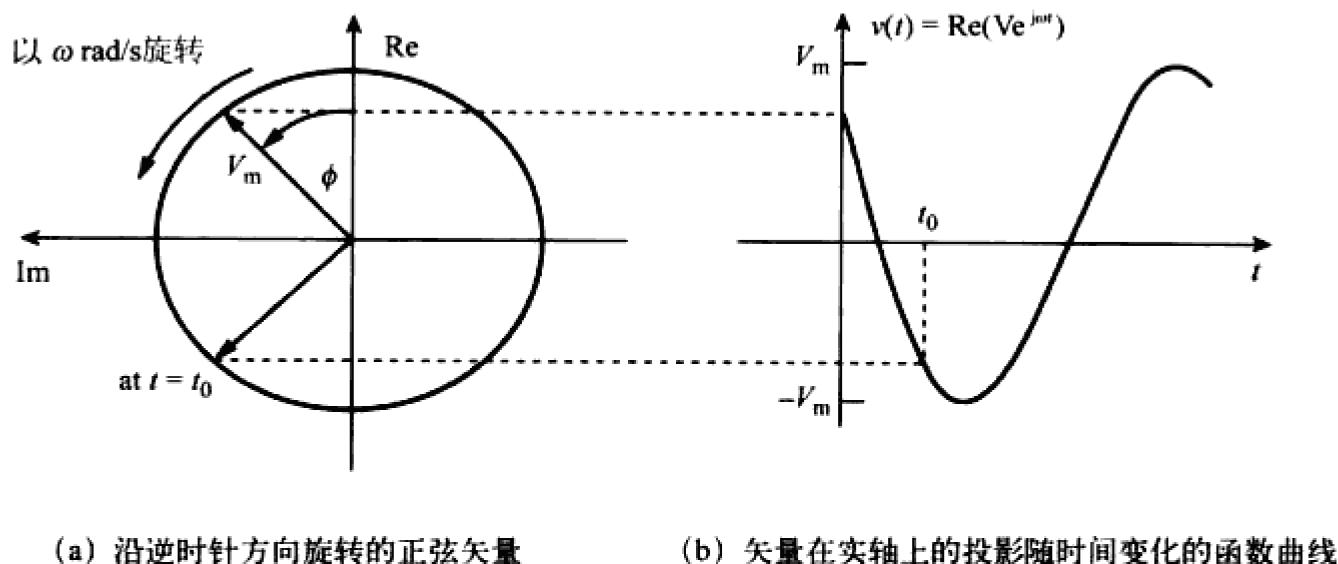
其中，

$$\mathbf{V}=V_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}=V_m\angle\phi \tag{9-24}$$

于是，$\mathbf{V}$称为正弦信号$v(t)$的相量表示（phasor representation）。换句话说，相量就是正弦信号的幅度与相位的复数表示。式(9-20a)或式(9-20b)均可用于推导相量的概念，但习惯上通常采用式(9-20a)作为标准形式。

相量可以看作是省略了时间依赖关系的正弦信号的等效数学表达式。

理解式(9-23)与式(9-24)的一种方法是在复平面上画出正弦矢量（sinor）$\mathbf{V}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}=V_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\phi)}$，随着时间的增加，该正弦矢量在半径为$V_m$的圆周上，沿逆时针方向以角速度$\omega$做圆周运动，如图9-7a所示。$v(t)$可以看作是正弦矢量$\mathbf{V}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$在实轴上的投影，如图9-7b所示。正弦矢量在$t=0$时刻的值就是正弦信号$v(t)$的相量$\mathbf{V}$，正弦矢量也可以看作是旋转相量。所以，只要将正弦信号表示为一个相量，其中便隐含了$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$项。因此，在进行相量运算时，切记相量的频率$\omega$是非常重要的，否则，就会出现严重的错误。



(a) 沿逆时针方向旋转的正弦矢量　　(b) 矢量在实轴上的投影随时间变化的函数曲线

图 9-7　$Ve^{j\omega t}$的表示方法

如果利用正弦函数取代余弦函数表示相量，则 $v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi) = \text{Im}(V_m e^{j(\omega t+\phi)})$，并且对应的相量与式(9-24)具有相同的形式。

式(9-23)表明，要得到对应于已知相量$\boldsymbol{V}$的正弦信号，只需用时间因子$e^{j\omega t}$乘以该相量后取实部即可。相量作为一个复数，同样可以表示为直角坐标形式、极坐标形式和指数形式。相量也有模值和相位（即"方向"），因此与矢量具有类似的特性，常用黑斜体字母表示。例如，相量$\boldsymbol{V} = V_m \angle \phi$ 与$\boldsymbol{I} = \text{Im} \angle -\theta$ 的图形表示如图9-8所示。这种相量的图形表示法称为相量图(phasor diagram)。

通常采用小写斜体字母，例如 z，表示复数，采用黑斜体字母，如 $\boldsymbol{V}$，表示相量，因为相量与矢量是类似的。

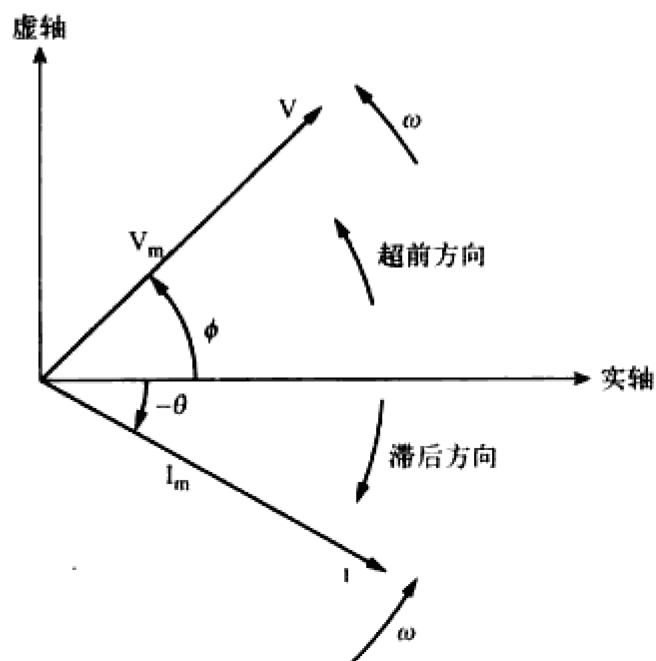


图 9-8　$\boldsymbol{V} = V_m \angle \phi$ 与 $\boldsymbol{I} = \text{Im} \angle -\theta$ 的相量图表示

式(9-21)～式(9-23)表明，求取与正弦信号相对应的相量时，首先要将正弦信号表示为余弦函数形式，以便将正弦信号写成复数的实部，之后去掉时间因子$e^{j\omega t}$，其余部分即对应于正弦信号的相量。去掉时间因子，即可将正弦信号从时域转换到相量域，该转换关系可以归纳为：

$$\underset{\text{(时域表示)}}{v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\text{(相量域表示)}}{\boldsymbol{V} = V_m \angle \phi} \tag{9-25}$$

已知正弦信号$v(t) = V_m\cos(\omega t + \phi)$，则其对应的相量为$\boldsymbol{V} = V_m \angle \phi$，以表格形式表示的式(9-25)如表9-1所示，表中不但给出来余弦函数对应的相量，而且给出了正弦函数对应的向量。由式(9-25)可见，确定正弦信号的相量表示时，只需将该信号表示为余弦函数形式，之后取其幅度和相位即可。反过来，如果已知相量，也可以将该相量在时域表示为余弦函数形式，该余弦函数的幅度与相量的幅度相等，辐角等于ωt加上相量的相位角。这种在不同的域表示信息的思想对于整个工程领域而言是至关重要的。

表 9-1 正弦信号－相量的转换关系

时域表示	相量域表示
$V_m\cos(\omega t+\phi)$	$V_m\angle\phi$
$V_m\sin(\omega t+\phi)$	$V_m\angle\phi-90^\circ$
$I_m\cos(\omega t+\theta)$	$I_m\angle\theta$
$I_m\sin(\omega t+\theta)$	$I_m\angle\theta-90^\circ$

注意，在式(9-25)中去掉了频率（或时间）因子$e^{j\omega t}$，因为ω是常量，所以在相量域表示中没有明确写出频率。然而，电路的响应仍然取决于频率ω，因此，相量域通常也称为频率域。

由式(9-23)与式(9-24)可知$v(t)=\mathrm{Re}(\boldsymbol{V}e^{j\omega t})=V_m\cos(\omega t+\phi)$，因此，

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt}&=-\omega V_m\sin(\omega t+\phi)=\omega V_m\cos(\omega t+\phi+90^\circ)\\&=\mathrm{Re}(\omega V_m e^{j\omega t}e^{j\phi}e^{j90^\circ})=\mathrm{Re}(j\omega \boldsymbol{V}e^{j\omega t})\end{aligned} \tag{9-26}$$

这说明$v(t)$的导数被转换为相量域中的$j\omega\boldsymbol{V}$，即：

$$\underset{\text{(时域)}}{\frac{dv}{dt}} \Leftrightarrow \underset{\text{(相量域)}}{j\omega\boldsymbol{V}} \tag{9-27}$$

正弦信号的微分等效于其对应的相量乘以$j\omega$。

类似地，$v(t)$的积分被转换为相量域中的$\boldsymbol{V}/\omega t$，即：

$$\underset{\text{(时域)}}{\int v\,dt} \Leftrightarrow \underset{\text{(相量域)}}{\frac{\boldsymbol{V}}{j\omega}} \tag{9-28}$$

正弦信号的积分等效于其对应的相量除以$j\omega$。

式(9-27)表明信号在时域中的微分，对应于相量域中乘以$j\omega$；而式(9-28)表明信号在时域中的积分，对应于相量域中除以$j\omega$。式(9-27)与式(9-28)在确定电路的稳态解时非常有用，而且无需知道所求电路变量的初始值，这也是相量的重要应用之一。

除了在时域微分与时域积分中的应用外，相量的另一重要应用是同频正弦信号的叠加，后面通过例题9-6可以很好地说明这种应用。

同频正弦信号的叠加等效于它们的对应相量叠加。

$v(t)$与$\boldsymbol{V}$之间的区别可归纳如下：

(1) $v(t)$是瞬时或时域表示，而$\boldsymbol{V}$是频域或相量域表示；

(2) $v(t)$是与时间有关的，而$\boldsymbol{V}$与时间无关（学生常常会忘记这一区别）；

(3) $v(t)$总是实数没有复数项，而$\boldsymbol{V}$通常为复数。

最后，必须牢记的是，相量分析仅适用于频率恒定的情况。即只有当两个或多个正弦信号具有相同的频率时，才能应用相量进行运算。

例题9-3 试计算如下复数的值：

(a) $(40\angle 50^\circ+20\angle -30^\circ)^{1/2}$

(b) $\dfrac{10\angle -30^\circ+(3-j4)}{(2+j4)(3-j5)^*}$

解 (a) 利用极坐标与直角坐标之间的转换关系可得：

$$40\angle 50^\circ=40(\cos 50^\circ+j\sin 50^\circ)=25.71+j30.64$$
$$20\angle -30^\circ=20[\cos(-30^\circ)+j\sin(-30^\circ)]=17.32-j10$$

相加后得到：

$$40\angle 50^\circ + 20\angle -30^\circ = 43.03 + \mathrm{j}20.64 = 47.72\angle 25.63^\circ$$

取其平方根后得到：

$$(40\angle 50^\circ + 20\angle -30^\circ)^{1/2} = 6.91\angle 12.81^\circ$$

（b）利用极坐标与直角坐标转换关系，经过相加、相乘和相除的运算，可得：

$$\frac{10\angle -30^\circ + (3-\mathrm{j}4)}{(2+\mathrm{j}4)(3-\mathrm{j}5)^*} = \frac{8.66 - \mathrm{j}5 + (3-\mathrm{j}4)}{(2+\mathrm{j}4)(3+\mathrm{j}5)}$$
$$= \frac{11.66 - \mathrm{j}9}{-14 + \mathrm{j}22} = \frac{14.73\angle -37.66^\circ}{26.08\angle 122.47^\circ}$$
$$= 0.565\angle -160.13^\circ$$

练习题9-3 试计算下列复数的值：

（a）$[(5+\mathrm{j}2)(-1+\mathrm{j}4) - 5\angle 60^\circ]^*$

（b）$\dfrac{10+\mathrm{j}5+3\angle 40^\circ}{-3+\mathrm{j}4} + 10\angle 30^\circ$

答 （a）$-15.5 - \mathrm{j}13.67$，（b）$8.293 + \mathrm{j}2.2$

例题9-4 试将下列正弦信号转换为相量：

（a）$i = 6\cos(50t - 40^\circ)$ A

（b）$v = -4\sin(30t + 50^\circ)$ V

解 （a）$i = 6\cos(50t - 40^\circ)$ 的相量为：

$$\boldsymbol{I} = 6\angle -40^\circ \mathrm{A}$$

（b）由于 $-\sin A = \cos(A + 90^\circ)$，则：

$$v = -4\sin(30t + 50^\circ) = 4\cos(30t + 50^\circ + 90^\circ) = 4\cos(30t + 140^\circ)\ \mathrm{V}$$

于是v的相量为：

$$\boldsymbol{V} = 4\angle 140^\circ \mathrm{V}$$

练习题9-4 试以相量来表示下列正弦量：

（a）$v = -7\cos(2t + 40^\circ)$ V

（b）$i = 4\sin(10t + 10^\circ)$ A

答 （a）$\boldsymbol{V} = 7\angle 220^\circ$ V，（b）$\boldsymbol{I} = 4\angle -80^\circ$A

例题9-5 试求如下相量所表示的正弦信号：

（a）$\boldsymbol{I} = -3 + \mathrm{j}4$ A

（b）$\boldsymbol{V} = \mathrm{j}8\mathrm{e}^{-\mathrm{j}20^\circ}$ V

解 （a）$\boldsymbol{I} = -3 + \mathrm{j}4 = 5\angle 126.87^\circ$，将其转换到时域，有：

$$i(t) = 5\cos(\omega t + 126.87^\circ)\ \mathrm{A}$$

（b）由于$\mathrm{j} = 1\angle 90^\circ$，所以，

$$\boldsymbol{V} = \mathrm{j}8\angle -20^\circ = (1\angle 90^\circ)(8\angle -20^\circ)$$
$$= 8\angle 90^\circ - 20^\circ = 8\angle 70^\circ \mathrm{V}$$

将其转到时域，可得：

$$v(t) = 8\cos(\omega t + 70^\circ)\ \mathrm{V}$$

练习题9-5 试求对应于如下相量的正弦信号：

（a）$\boldsymbol{V} = -10\angle 30^\circ$ V

（b）$\boldsymbol{I} = \mathrm{j}\,(5 - \mathrm{j}12)$ A

答 （a）$v(t) = 10\cos(\omega t + 210°)$ V，（b）$i(t) = 13\cos(\omega t + 22.62°)$ A

例题9-6 已知$i_1(t) = 4\cos(\omega t + 30°)$A，$i_2(t) = 5\sin(\omega t - 20°)$A，试求上述两信号之和。

解 本题用于说明相量的一个重要应用：用于计算同频正弦信号之和。电流$i_1(t)$为标准形式，其相量为：

$$\boldsymbol{I}_1 = 4\underline{/30°}$$

下面需将$i_2(t)$表示为余弦函数的标准形式，将正弦函数转换为余弦函数的方法是减去90°，于是：

$$i_2 = 5\cos(\omega t - 20° - 90°) = 5\cos(\omega t - 110°)$$

其相量为：

$$\boldsymbol{I}_2 = 5\underline{/-110°}$$

如果令$i = i_1 + i_2$，则有：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2 &= 4\underline{/30°} + 5\underline{/-110°}\\ &= 3.464 + \mathrm{j}2 - 1.71 - \mathrm{j}4.698 = 1.754 - \mathrm{j}2.698\\ &= 3.218\underline{/-56.97°}\mathrm{A}\end{aligned}$$

将上述结果转换到时域，得到：

$$i(t) = 3.218\cos(\omega t - 56.97°)\ \mathrm{A}$$

当然，也可以利用式(9-9)计算$i_1 + i_2$，但这种方法较为困难。

练习题9-6 如果$v_1 = -10\sin(\omega t + 30°)$ V，$v_2 = 20\cos(\omega t - 45°)$ V，试求$V = v_1 + v_2$。

答 $v(t) = 10.66\cos(\omega t - 30.95°)$ V。

例题9-7 试利用相量方法，确定由如下微积分方程描述的电路中的电流$i(t)$：

$$4i + 8\int i\,\mathrm{d}t - 3\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 50\cos(2t + 75°)$$

解 首先将方程中的每一项都由时域转换到相量域。利用式(9-27)与式(9-28)即可得到该方程的相量形式：

$$4\boldsymbol{I} + \frac{8\boldsymbol{I}}{\mathrm{j}\omega} - 3\,\mathrm{j}\omega\boldsymbol{I} = 50\underline{/75°}$$

但由于$\omega = 2$，所以：

$$\boldsymbol{I}(4 - \mathrm{j}4 - \mathrm{j}6) = 50\underline{/75°}$$

$$\boldsymbol{I} = \frac{50\underline{/75°}}{4 - \mathrm{j}10} = \frac{50\underline{/75°}}{10.77\underline{/-68.2°}} = 4.642\underline{/143.2°}\mathrm{A}$$

将上述相量转换到时域，有：

$$i(t) = 4.642\cos(2t + 143.2°)\ \mathrm{A}$$

需要注意的是，这仅仅是电路的稳态解，无需知道其初始值即可求解。

练习题9-7 试利用相量方法，确定由如下微积分方程描述的电路中的电压$v(t)$。

$$2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 5v + 10\int v\,\mathrm{d}t = 20\cos(5t - 30°)$$

答 $v(t) = 2.12\cos(5t - 80°)$ V。

9.4 电路元件的相量关系

至此我们已经掌握了如何在相量域或频域中表示电压和电流，读者自然会问，如何将相量方法应用于包含无源元件R、L、C的电路中呢？回答这个问题所需要做的，就是要将电路中各元件的电

压–电流关系由时域转换到频域。转换时仍需遵循无源符号规约。

首先介绍电阻器。如果流过电阻器R的电流为$i = I_m\cos(\omega t+\phi)$，则由欧姆定律可知，其两端的电压为：

$$v = iR = RI_m\cos(\omega t+\phi) \tag{9-29}$$

该电压的相量表示为：

$$\boldsymbol{V} = RI_m\angle\phi \tag{9-30}$$

而电流的相量表示为$\boldsymbol{I} = I_m\angle\phi$，因此，

$$\boldsymbol{V} = R\boldsymbol{I} \tag{9-31}$$

上式表明，电阻器在相量域中的电压–电流关系服从欧姆定律，与时域的情况相同，图9-9给出了相量域中电阻器的电压–电流关系。由式(9-31)可以看出，电阻器的电压与电流是同相的，如图9-10的相量图所示。

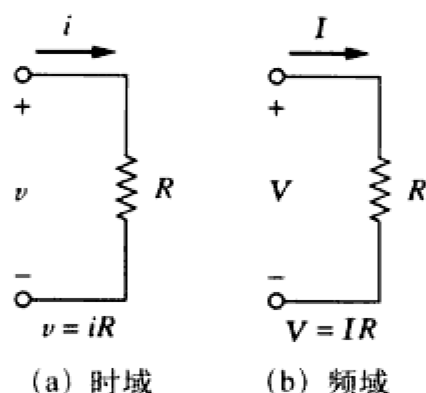


图 9-9 电阻器的电压–电流关系

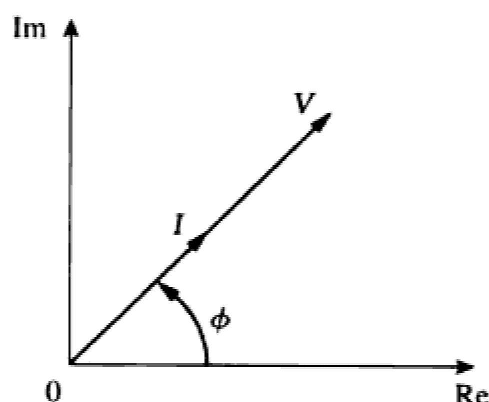


图 9-10 电阻器的相量图

对于电感器而言，假定流过电感器的电流为$i = I_m\cos(\omega t+\phi)$，则电感器两端的电压为：

$$v = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\omega LI_m\sin(\omega t+\phi) \tag{9-32}$$

由式(9-10)可知$-\sin A = \cos(A+90°)$，于是电感器两端的电压可以写为：

$$v = \omega LI_m\cos(\omega t+\phi+90°) \tag{9-33}$$

转换为相量，得到：

$$\boldsymbol{V} = \omega LI_m e^{j(\phi+90°)} = \omega LI_m e^{j\phi}e^{j90°} = \omega LI_m\angle\phi+90° \tag{9-34}$$

而$I_m\angle\phi = \boldsymbol{I}$，且由式(9-19)可知$e^{j90°} = j$，因此，

$$\boldsymbol{V} = j\omega L\boldsymbol{I} \tag{9-35}$$

上式表明，电感器两端电压的幅度为ωLI_m，相位为$\phi+90°$。电压与电流的相位差为90°，并且电流滞后于电压90°。图9-11给出了电感器的电压–电流关系，图9-12所示为二者的相量图。

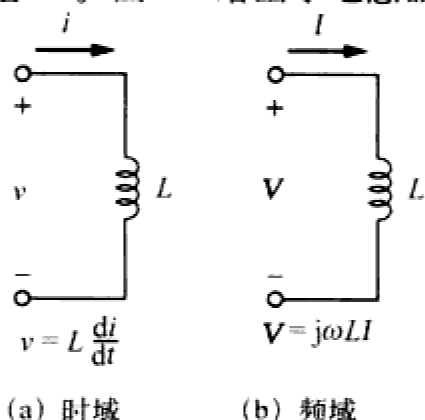


图 9-11 电感器的电压–电流关系

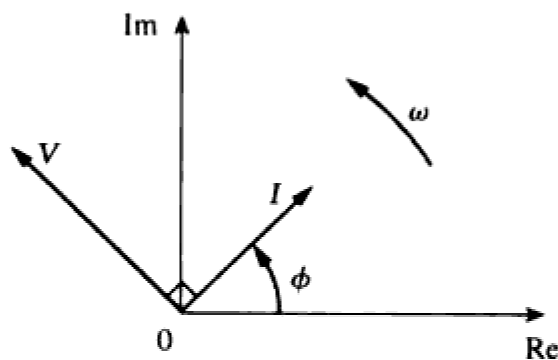


图 9-12 电感器的相量图，$\boldsymbol{I}$滞后于$\boldsymbol{V}$

虽然说电感器的电压超前于电流 90°同样是正确的，但习惯上通常说电流相对于电压的相位关系。

对于电容器C而言，假定电容器两端的电压为$v = V_m\cos(\omega t + \phi)$，则流过电容器的电流为：

$$i = C\frac{dv}{dt} \tag{9-36}$$

按照分析电感器的步骤，或者将式(9-27)用于式(9-36)，可以得到：

$$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C} \tag{9-37}$$

式(9-37)表明，对于电容器而言，电压与电流的相位差为90°，且电流超前于电压90°。图9-13给出了电容器的电压－电流关系，图9-14所示为二者的相量图。表9-2总结了电路无源元件的时域与相量域表示。

表 9-2 电压−电流关系总结

元　件	时　域	频　域
R	$V = Ri$	$\mathbf{V} = R\mathbf{I}$
L	$v = L\frac{di}{dt}$	$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$
C	$i = C\frac{dv}{dt}$	$v = \frac{I}{j\omega C}$

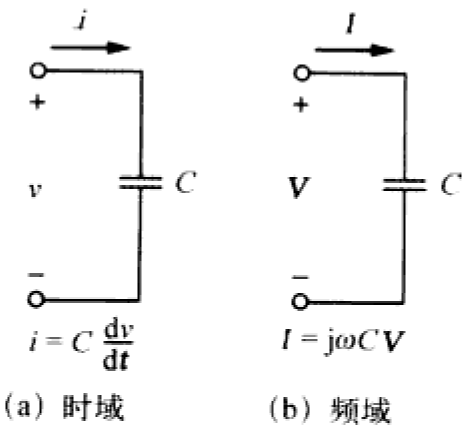


图 9-13 电感器的电压－电流关系

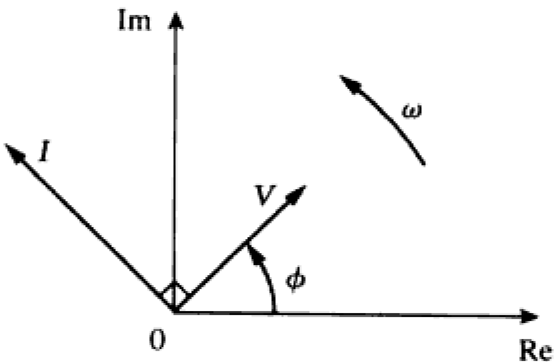


图 9-14 电容器的相量图，$\mathbf{I}$超前于$\mathbf{V}$

例题9-8 将电压$v = 12\cos(60t + 45°)$作用在0.1 H电感器两端，试求流过该电感器的稳态电流。

解 对于电感器而言，$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$，其中$\omega = 60$ rad/s，并且$\mathbf{V} = 12\underline{/45°}$ V。于是，

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{j\omega L} = \frac{12\underline{/45°}}{j60 \times 0.1} = \frac{12\underline{/45°}}{6\underline{/90°}} = 2\underline{/-45°}\text{A}$$

将该电流转换到时域，得到：

$$i(t) = 2\cos(60t - 45°) \quad \text{A}$$

练习题9-8 将电压$v = 6\cos(100t - 30°)$作用在50 μF电容器两端，试计算流过该电容器的电流。

答 $30\cos(100t + 60°)$ mA。

9.5 阻抗与导纳

前一节介绍了三个无源元件R、L、C的电压－电流关系为：

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I}, \quad \mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}, \quad \mathbf{V}\frac{\mathbf{I}}{j\omega C} \tag{9-38}$$

利用相量电压与相量电流之比表示上述方程可得：

$$\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{I}}=R,\quad \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{I}}=\mathrm{j}\omega L,\quad \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{I}}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \tag{9-39}$$

由以上三个表达式，即可得到任一种无源元件欧姆定律的相量形式，即：

$$\boxed{\boldsymbol{Z}=\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{I}}\quad 或\quad \boldsymbol{V}=\boldsymbol{Z}\boldsymbol{I}} \tag{9-40}$$

其中，$\boldsymbol{Z}$是一个与频率有关的量，称为阻抗（impedance），单位为欧姆。

电路的阻抗是指相量电压$\boldsymbol{V}$与相量电流$\boldsymbol{I}$之比，单位为欧姆。

阻抗表示电路对正弦电流的阻碍程度。虽然阻抗是两个相量之比，但它本身不是相量，因为阻抗并非与依正弦规律变化的量相对应。

由式(9-39)可以得到电阻器、电感器与电容器的阻抗。表9-3总结了这些元件的阻抗与导纳。由表可知：$\boldsymbol{Z}_L=\mathrm{j}\omega L$，$\boldsymbol{Z}_C=-\mathrm{j}/\omega C$。下面考虑角频率的两个极端情况，当$\omega=0$（即为直流源）时，$\boldsymbol{Z}_L=0$，$\boldsymbol{Z}_C\to\infty$，证实了以前学过的知识，电感器对直流相当于短路，电容器对直流相当于开路；当$\omega\to\infty$（即高频情况）时，$\boldsymbol{Z}_L\to\infty$，$\boldsymbol{Z}_C=0$，表明对高频而言，电感器相当于开路，电容器相当于短路。图9-15图示说明了上述两种极端情况。

表 9-3 无源元件的阻抗与导纳

元件	阻抗	导纳
R	$\boldsymbol{Z}=R$	$\boldsymbol{Y}=\frac{1}{R}$
L	$\boldsymbol{Z}=\mathrm{j}\omega L$	$\boldsymbol{Y}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}$
C	$\boldsymbol{Z}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$	$\boldsymbol{Y}=\mathrm{j}\omega C$

图 9-15 直流与高频时的等效电路

阻抗作为一个复数，可以用直角坐标形式表示为：

$$\boldsymbol{Z}=R+\mathrm{j}X \tag{9-41}$$

其中，$R=\mathrm{Re}\,\boldsymbol{Z}$为电阻（restistance），$X=\mathrm{Im}\,\boldsymbol{Z}$为电抗（reactance）。电抗$X$可以为正值，也可以为负值。如果$X$为正值，则称阻抗为感性的，如果$X$为负值，则称阻抗为容性的。因此，阻抗$\boldsymbol{Z}=R+\mathrm{j}X$称为是感性（inductive）阻抗或滞后阻抗，因为流过该阻抗的电流滞后于该阻抗两端的电压。而阻抗$\boldsymbol{Z}=R-\mathrm{j}X$则称为是容性（capacitive）阻抗或超前阻抗，因为流过该阻抗的电流超前于该阻抗两端的电压。阻抗、电阻、电抗的单位均为欧姆。阻抗也可以表示为极坐标形式：

$$\boldsymbol{Z}=|\boldsymbol{Z}|\angle\theta \tag{9-42}$$

比较式(9-41)与式(9-42)可以推出：

$$\boxed{\boldsymbol{Z}=R+\mathrm{j}X=|\boldsymbol{Z}|\angle\theta} \tag{9-43}$$

其中，

$$|\boldsymbol{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{X}{R} \tag{9-44}$$

且

$$R = |\boldsymbol{Z}|\cos\theta \qquad X = |\boldsymbol{Z}|\sin\theta \tag{9-45}$$

有时候采用阻抗的倒数，即导纳（admittance）运算起来比较方便。

导纳$\boldsymbol{Y}$定义为阻抗的倒数，单位为西门子（S）。

元件（或电路）的导纳$\boldsymbol{Y}$等于流过该元件（或电路）的相量电流与该元件（或电路）两端的相量电压之比。即：

$$\boxed{\boldsymbol{Y} = \frac{1}{\boldsymbol{Z}} = \frac{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{V}}} \tag{9-46}$$

由式(9-39)可以得到电阻器、电感器与电容器的导纳，表9-3已将其总结在内。导纳$\boldsymbol{Y}$作为一个复数，可以表示为：

$$\boxed{\boldsymbol{Y} = G + \mathrm{j}B} \tag{9-47}$$

其中，$G = \mathrm{Re}\boldsymbol{Y}$ 称为电导，而 $B = \mathrm{Im}\boldsymbol{Y}$ 称为电纳。导纳、电导与电纳的单位均为西门子（或姆欧）。由式(9-41)与式(9-47)可得：

$$G + \mathrm{j}B = \frac{1}{R + \mathrm{j}X} \tag{9-48}$$

分母有理化后得到：

$$G + \mathrm{j}B = \frac{1}{R + \mathrm{j}X}\cdot\frac{R - \mathrm{j}X}{R - \mathrm{j}X} = \frac{R - \mathrm{j}X}{R^2 + X^2} \tag{9-49}$$

由实部、虚部分别对应相等，得到：

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \qquad B = -\frac{X}{R^2 + X^2} \tag{9-50}$$

由此可见，$G \neq 1/R$，这与纯电阻电路不同。当然，如果$X = 0$，则有$G = 1/R$。

例题9-9 试求如图9-16所示电路的$v(t)$与$i(t)$。

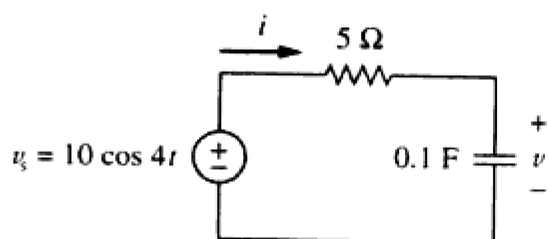


图 9-16 例题 9-9 的电路原理图

解 由电压源$v_s = 10\cos 4t$，$\omega = 4$，可得：

$$\boldsymbol{V}\mathrm{s} = 10\underline{/0^\circ}\ \mathrm{V}$$

其阻抗为：

$$\boldsymbol{Z} = 5 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = 5 + \frac{1}{\mathrm{j}4\times 0.1} = 5 - \mathrm{j}2.5\Omega$$

于是电流为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I} &= \frac{\boldsymbol{V}\mathrm{s}}{\boldsymbol{Z}} = \frac{10\underline{/0^\circ}}{5 - \mathrm{j}2.5} = \frac{10(5 + \mathrm{j}2.5)}{5^2 + 2.5^2} \\ &= 1.6 + \mathrm{j}0.8 = 1.789\underline{/26.57^\circ}\mathrm{A}\end{aligned} \tag{9-9-1}$$

电容器两端的电压为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{Z}_\mathrm{C} &= \frac{\boldsymbol{I}}{\mathrm{j}\omega C} = \frac{1.789\underline{/26.57^\circ}}{\mathrm{j}4\times 0.1} \\ &= \frac{1.789\underline{/26.57^\circ}}{0.4\underline{/90^\circ}} = 4.47\underline{/-63.43^\circ}\ \mathrm{V}\end{aligned} \tag{9-9-2}$$

将式(9-9-1)与式(9-9-2)中的$\boldsymbol{I}$与$\boldsymbol{V}$转换到时域，得到：

$$i(t) = 1.789\cos(4t + 26.57°)\ \text{A}$$
$$v(t) = 4.47\cos(4t - 63.43°)\ \text{V}$$

可以看出，$i(t)$超前于$v(t)$ 90°，与预期相一致。

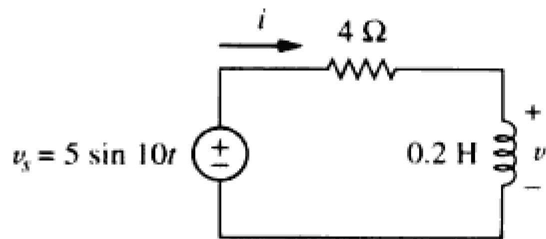


图 9-17 练习题 9-9 的电路原理图

练习题9-9 试确定如图9-17所示电路中的$v(t)$与$i(t)$。

答 $2.236\sin(10t + 63.43°)$ V，$1.118\sin(10t - 26.57°)$ A。

9.6 †频域中的基尔霍夫定律

在频域中进行电路分析时，必须利用基尔霍夫电流定律和电压定律。因此，本节将推导这两个定律在频域中的形式。

对于KVL而言，设v_1，v_2，…，v_n为闭合回路中的电压，则有：

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 0 \tag{9-51}$$

在正弦稳定状态下，各电压可以用余弦函数表示，于是，式（9－51）变为：

$$V_{m1}\cos(\omega t + \theta_1) + V_{m2}\cos(\omega t + \theta 2) + \cdots + V_{mn}\cos(\omega t + \theta_n) = 0 \tag{9-52}$$

也可以写为：

$$\text{Re}(V_{m1}e^{j\theta_1}e^{j\omega t}) + \text{Re}(V_{m2}e^{j\theta_2}e^{j\omega t}) + \cdots + \text{Re}(V_{mn}e^{j\theta_n}e^{j\omega t}) = 0$$

即：

$$\text{Re}[(V_{m1}e^{j\theta_1} + V_{m2}e^{j\theta_2} + \cdots + V_{mn}e^{j\theta_n})e^{j\omega t}] = 0 \tag{9-53}$$

如果令$\boldsymbol{V}_k = V_m e^{j\theta_k}$ 则有：

$$\text{Re}[(\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2 + \cdots + \boldsymbol{V}_n)e^{j\omega t}] = 0 \tag{9-54}$$

由于$e^{j\omega t} \neq 0$，所以，

$$\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2 + \cdots + \boldsymbol{V}_n = 0 \tag{9-55}$$

表明基尔霍夫电压定律对于相量依然成立。

按照类似的推导过程，可以证明基尔霍夫电流定律同样对相量成立。如果令i_1，i_2，…，i_n为t时刻流入或流出网络中一个闭合面积的电流，则有：

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_n = 0 \tag{9-56}$$

如果$\boldsymbol{I}_1$，$\boldsymbol{I}_2$，…，$\boldsymbol{I}_n$为正弦信号i_1，i_2，…，i_n的相量形式，则：

$$\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2 + \cdots + \boldsymbol{I}_n = 0 \tag{9-57}$$

此即频域中的基尔霍夫电流定律。

一旦证明了KCL与KVL在频域中成立，即可很容易地进行电路分析，如阻抗合并、节点分析与网孔分析、迭加定理以及电源转换等。

9.7 阻抗合并

考虑如图9-18所示的N个串联阻抗，流过各阻抗的电流为同一电流$\boldsymbol{I}$。沿该回路应用KVL，可得：

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2 + \cdots + \boldsymbol{V}_N = \boldsymbol{I}(\boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2 + \cdots + \boldsymbol{Z}_N) \tag{9-58}$$

输入端的等效阻抗为：

$$\boldsymbol{Z}_{eq} = \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2 + \cdots + \boldsymbol{Z}_N$$

即：

$$\boxed{Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_N} \tag{9-59}$$

上式表明，串联阻抗的总阻抗，即等效阻抗，等于各个单独阻抗之和。这与电阻串联的结论是类似的。

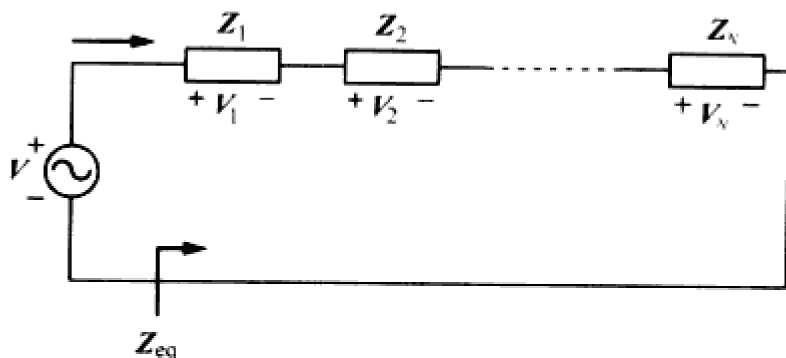


图 9-18 N 个阻抗的串联

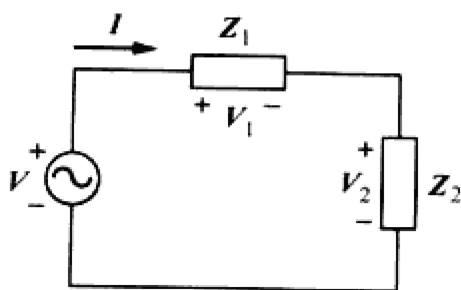


图 9-19 分压原理

如果$N=2$，如图9-19所示，则流过阻抗的电流为：

$$I = \frac{V}{Z_1 + Z_2} \tag{9-60}$$

由于$V_1 = Z_1 I$，$V_2 = Z_2 I$，所以：

$$\boxed{V_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}V, \quad V_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}V} \tag{9-61}$$

此即分压（voltage-division）公式。

同理，可以得到如图9-20所示的N个并联阻抗的等效阻抗或等效导纳，各阻抗两端的电压是相同的，对顶部节点应用KCL，可以得到：

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_N = V\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_N}\right) \tag{9-62}$$

其等效阻抗为：

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{I}{V} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_N} \tag{9-63}$$

等效导纳为：

$$\boxed{Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N} \tag{9-64}$$

上式表明，并联导纳的等效导纳等于各导纳之和。

当$N=2$时，如图9-21所示，其等效阻抗为：

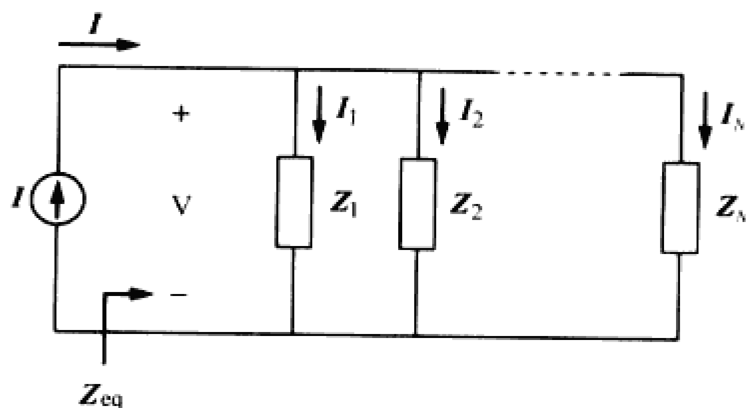


图 9-20 N 个阻抗的并联

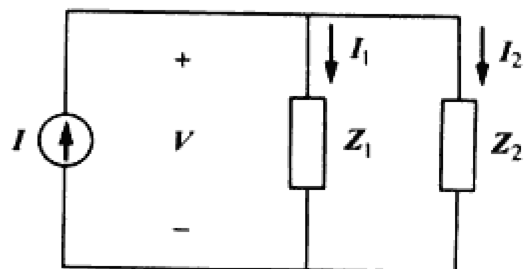


图 9-21 分流原理

$$Z_{eq} = \frac{1}{Y_{eq}} = \frac{1}{Y_1 + Y_2} = \frac{1}{1/Z_1 + 1/Z_2} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{9-65}$$

又因为

$$V = IZ_{eq} = I_1 Z_1 = I_2 Z_2$$

因此，流过各阻抗的电流为：

$$I_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} I, \qquad I_2 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} I \tag{9-66}$$

此即分流（current-division）原理。

电阻电路中的Δ－Y与Y－Δ转换同样适用于阻抗电路。对于如图9-22所示的阻抗电路，其变换公式如下。

Y－Δ的转换：

$$\begin{aligned} Z_a &= \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1} \\ Z_b &= \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2} \\ Z_c &= \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_3} \end{aligned} \tag{9-67}$$

图 9-22 叠加的 Y 网络与Δ网络

Δ－Y的转换：

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z_b Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c} \\ Z_2 &= \frac{Z_c Z_a}{Z_a + Z_b + Z_c} \\ Z_3 &= \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b + Z_c} \end{aligned} \tag{9-68}$$

在Δ电路或Y电路中，如果其三条支路上的阻抗均相等，则称该Δ电路或Y电路为平衡的。

如果Δ－Y电路是平衡的，则式(9-67)与式(9-68)变为：

$$Z_{\Delta} = 3Z_{Y} \qquad 或 \qquad Z_{Y} = \frac{1}{3} Z_{\Delta} \tag{9-69}$$

其中，$Z_Y = Z_1 = Z_2 = Z_3$，$Z_\triangle = Z_a = Z_b = Z_c$。

通过本节的学习可知，之前学习的分压原理、分流原理、电路化简、阻抗等效以及Y−Δ转换等均适用于交流电路。第10章还将证明，与在直流电路分析中的应用相同，诸如迭加原理、节点分析法、网孔分析法、电源转换、戴维南定理以及诺顿定理等电路分析方法同样适用于交流电路的分析。

例题9-10 试求如图9-23所示电路的输入阻抗，假定电路的工作角频率为$\omega = 50$ rad/s。

解 设：

$Z_1 = 2$ mF电容器的阻抗

$Z_2 = 3\ \Omega$电阻器与10mF电容器串联的阻抗

$Z_3 = 0.2$ H电感器与8 Ω电阻器串联的阻抗

则有：

图 9-23 例题 9-10 的电路原理图

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j50\times 2\times 10^{-3}} = -j10\Omega$$

$$Z_2 = 3 + \frac{1}{j\omega C} = 3 + \frac{1}{j50\times 10\times 10^{-3}} = (3-j2)\Omega$$

$$Z_3 = 8 + j\omega L = 8 + j50\times 0.2 = (8+j10)\Omega$$

于是，输入阻抗为：

$$Z_{in} = Z_1 + Z_2 \parallel Z_3 = -j10 + \frac{(3-j2)(8+j10)}{11+j8}$$

$$= -j10 + \frac{(44+j14)(11-j8)}{11^2+8^2} = -j10 + 3.22 - j1.07\Omega$$

因此，

$$Z_{in} = 3.22 - j11.07\ \Omega$$

练习题9-10 试确定如图9-24所示电路在$\omega = 10$ rad/s时的输入阻抗。

答 32.38 − j73.76 Ω。

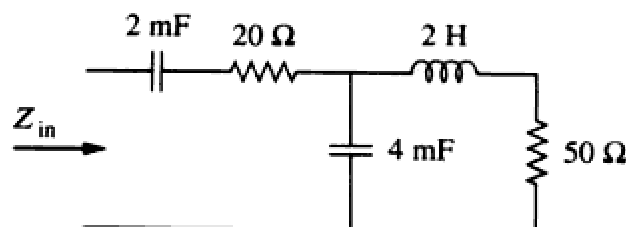


图 9-24 练习题 9-10 的电路原理图

例题9-11 试确定如图9-25所示电路中的$v_o(t)$。

解 为了进行频域分析，首先必须将如图9-25所示的时域电路转换为如图9-26所示的相量域等效电路。转换过程如下：

$$v_s = 20\cos(4t - 15°) \quad \Rightarrow \quad V_s = 20\angle -15°\ V, \quad \omega = 4$$

$$10\text{mF} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j4\times 10\times 10^{-3}} = -j25\Omega$$

$$5\text{H} \quad \Rightarrow \quad j\omega L = j4\times 5 = j20\Omega$$

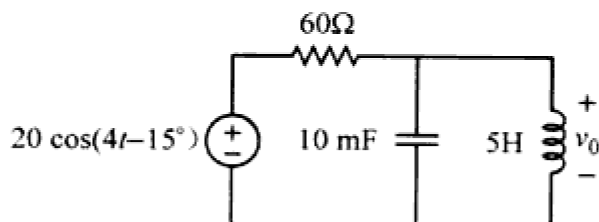


图 9-25 例题 9-11 的电路原理图

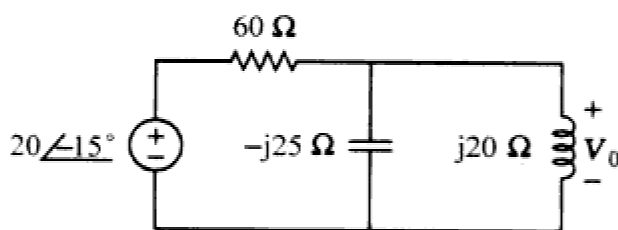


图 9-26 图 9-25 所示电路的频域等效电路

令：

$\boldsymbol{Z}_1 = 60\ \Omega$ 电阻器的阻抗
$\boldsymbol{Z}_2 = 10\text{mF}$ 电容器与 5 H 电感器的并联阻抗

则：$\boldsymbol{Z}_1 = 60\ \Omega$，且

$$\boldsymbol{Z}_2 = -\text{j}25 \parallel \text{j}20 = \frac{-\text{j}25 \times \text{j}20}{-\text{j}25 \times \text{j}20} = \text{j}100\Omega$$

由分压原理，可得：

$$\boldsymbol{V}_\text{o} = \frac{\boldsymbol{Z}_2}{\boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2}\boldsymbol{V}_\text{s} = \frac{\text{j}100}{60 + \text{j}100}(20\angle -15^\circ)$$
$$= (0.8575\angle 30.96^\circ)(20\angle -15^\circ) = 17.15\angle 15.96^\circ \text{V}$$

将其转换到时域得到：

$$v_\text{o}(t) = 17.15\cos(4t + 15.96^\circ)\ \text{V}$$

练习题9-11　试计算如图9-27所示电路中的v_o。
答　$v_\text{o}(t) = 7.071\cos(10t - 60^\circ)$ V。

例题9-12　试求如图9-28所示电路中的电流$\boldsymbol{I}$。

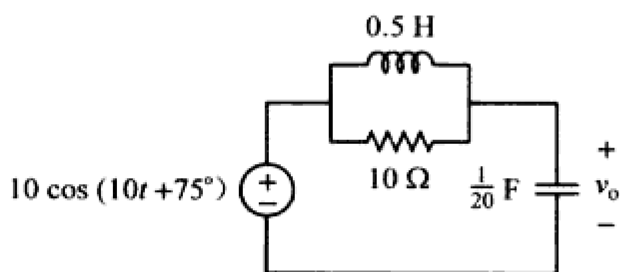


图9-27　练习题9-11的电路原理图

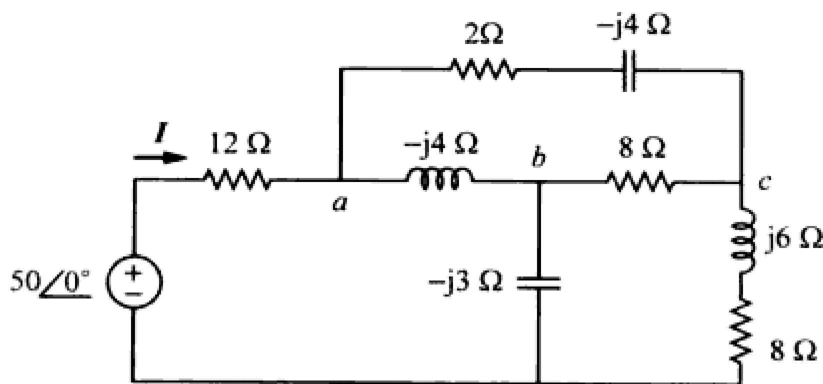


图9-28　例题9-12的电路原理图

解　电路中与节点a，b，c相连接的Δ网路可以转换为如图9-29所示的Y网络。利用式(9-68)可以求出该Y网络中的各阻抗为：

$$\boldsymbol{Z}_\text{an} = \frac{\text{j}4(2 - \text{j}4)}{\text{j}4 + 2 - \text{j}4 + 8} = \frac{4(4 + \text{j}2)}{10} = (1.6 + \text{j}0.8)\Omega$$

$$\boldsymbol{Z}_\text{bn} = \frac{\text{j}4(8)}{10} = \text{j}3.2\Omega \qquad \boldsymbol{Z}_\text{cn} = \frac{8(2 - \text{j}4)}{10} = (1.6 - \text{j}3.2)\Omega$$

电源两端的总阻抗为：

$$\boldsymbol{Z} = 12 + \boldsymbol{Z}_\text{an} + (\boldsymbol{Z}_\text{bn} - \text{j}3) \parallel (\boldsymbol{Z}_\text{cn} + \text{j}6 + 8)$$
$$= 12 + 1.6 + \text{j}0.8 + (\text{j}0.2) \parallel (9.6 + \text{j}2.8)$$
$$= 13.6 + \text{j}0.8 + \frac{\text{j}0.2(9.6 + \text{j}2.8)}{9.6 + \text{j}3}$$
$$= 13.6 + \text{j}1 = 13.64\angle -4.204^\circ\ \Omega$$

所求的电流为：

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{Z}} = \frac{50\angle 0^\circ}{13.64\angle 4.204^\circ} = 3.666\angle -4.204^\circ\ \text{A}$$

练习题9-12　试求如图9-30所示电路中的$\boldsymbol{I}$。

答 6.364/3.802° A。

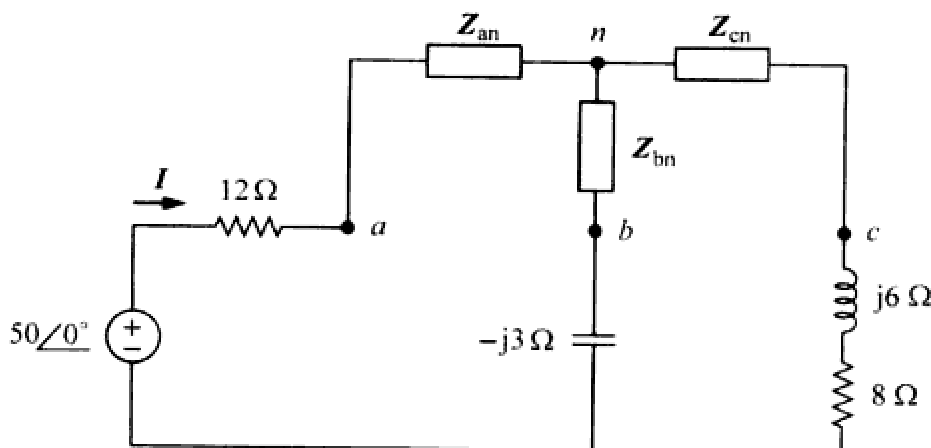


图 9-29 图 9-28 所示电路经Δ−Y 转换后的电路

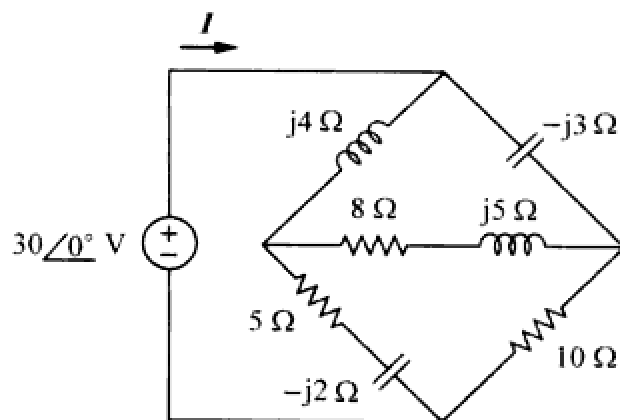


图 9-30 练习题 9-12 的电路原理图

9.8 †应用

本书第7章与第8章已经介绍了RC、RL和RLC电路在直流电路中的应用实例，这些电路同样可以用于交流电路中，例如可用于耦合电路、移相电路、滤波器、振荡电路、交流电桥电路和变压器等，具体应用不胜枚举。稍后会考虑其中的一些应用，本节仅讨论两个简单实例：RC移相电路与交流电桥电路。

9.8.1 移相器

移相电路通常用于校正电路中已经存在的不必要的相移或者用于产生某种特定的效果，采用RC电路即可达到这一目的，因为该电路中的电容器会使得电路电流超前于激励电压。两种常用的RC电路如图9-31所示（RL电路或任意电抗性电路也可以用作移相电路，达到同样的目的）。



图 9-31 RC 串联移相电路

在如图9-31a所示电路中，电流$\boldsymbol{I}$超前于激励电压$\boldsymbol{V}_i$相位角θ，$0 < \theta < 90°$，θ的大小取决于R和C的值。如果$X_C = 1/\omega C$，则电路的总阻抗为$\boldsymbol{Z} = R + \mathrm{j}\,X_C$，且其相移为：

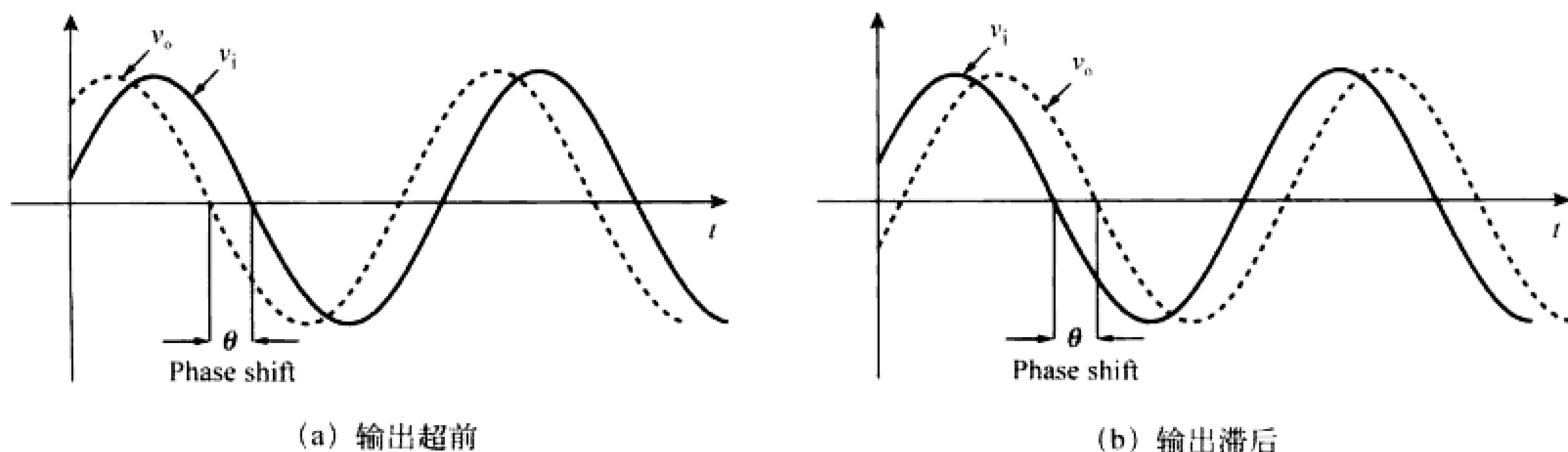
$$\theta = \tan^{-1}\frac{X_C}{R} \tag{9-70}$$

上式表明，相移的大小取决于R与C的值以及工作频率。由于电阻器两端的输出电压$\boldsymbol{V}_o$与电流同相，所以$\boldsymbol{V}_o$超前于（正相移）$\boldsymbol{V}_i$，如图9-32a所示。

在如图9-31a所示电路中，输出为电容器两端的电压。电流$\boldsymbol{I}$超前于输入电压$\boldsymbol{V}_i$相位角θ，但是电容器两端的输出电压$v_o(t)$滞后于（负相移）输入电压$v_i(t)$，如图9-32b所示。

应该注意的是，如图9-31所示的简单RC电路也可以用作分压电路，因此，当相移θ趋近于90°时，其输出电压$\boldsymbol{V}_o$也趋近于零。正是基于上述原因，仅在所需的相移量很小时才使用这类简单的RC电路。如果要求相移量大于60°，则可以将简单的RC电路级联起来，从而使得级联后的总相移量等于单个相移之和。实际上，除非采用运算放大器将前后级隔离开，否则由于后级作为前级的负载，会导致各

级的相移并不相等。



（a）输出超前

（b）输出滞后

图 9-32 RC 电路中的相移

例题9-13 试设计一个可以提供90°超前相位的RC电路。

解 如果在某特定频率处，选择电路元件具有相等的欧姆值，例如$R=|X_C|=20\ \Omega$，则由式(9-70)可知，相移量恰好为45°。将两个如图9-31a所示的RC电路级联起来，就得到如图9-33所示的电路，该电路提供了90°的正相移或相位超前，下面就会予以证明。利用串–并联合并方法，可以得到如图9-33所示电路的阻抗$\boldsymbol{Z}$为：

$$\boldsymbol{Z}=20\,\|\,(20-\mathrm{j}20)=\frac{20(20-\mathrm{j}20)}{40-\mathrm{j}20}=12-\mathrm{j}4\Omega \tag{9-13-1}$$

由分压公式可得：

$$\boldsymbol{V}_1\frac{\boldsymbol{Z}}{\boldsymbol{Z}-\mathrm{j}20}\boldsymbol{V}_\mathrm{i}=\frac{12-\mathrm{j}4}{12-\mathrm{j}24}\boldsymbol{V}_\mathrm{i}=\frac{\sqrt{2}}{3}\angle 45°\boldsymbol{V}_\mathrm{i} \tag{9-13-2}$$

且

$$\boldsymbol{V}_\mathrm{o}=\frac{20}{20-\mathrm{j}20}\boldsymbol{V}_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\angle 45°\boldsymbol{V}_1 \tag{9-13-3}$$

将式(9-13-2)代入式(9-13-3)得到：

$$\boldsymbol{V}_\mathrm{o}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\angle 45°\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\angle 45°\,\boldsymbol{V}_\mathrm{i}\right)=\frac{1}{3}\angle 90°\boldsymbol{V}_\mathrm{i}$$

因此，输出较输入超前90°，但其幅度只是输入的33%。

练习题9-13 试设计一个RC电路，实现输出电压相位较输入电压相位滞后90°，如果将均方根值为10 V的交流电压作用于该电路，试求输出电压为多少？

答 电路的典型设计如图9-34所示，输出电压为3.33 V rms。

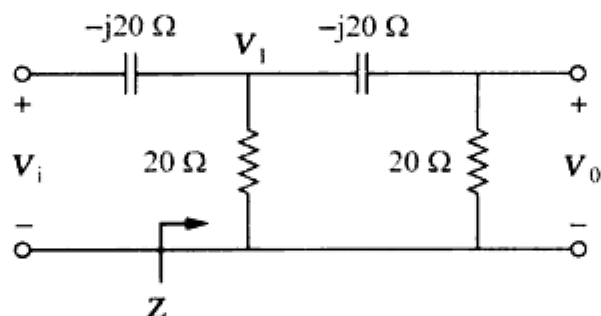


图 9-33 例题 9-13 的电路原理图：90°超前移相的 RC 移相电路

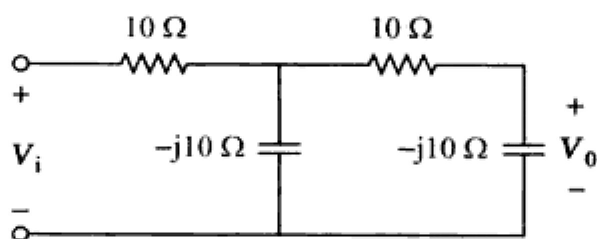


图 9-34 练习题 9-13 的电路原理图

例题9-14 对如图9-35a所示的RL电路，试计算该电路在频率为2 kHz时的相移量。

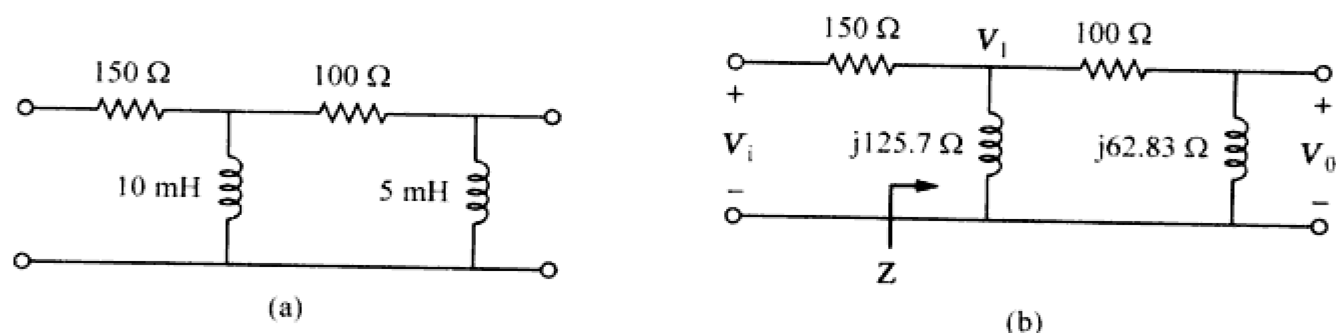


图 9-35 例题 9-14 的电路原理图

解 当频率为2 kHz时，10 mH与5 mH电感器对应的阻抗为：

$$10\text{mH} \quad \Rightarrow \quad X_L = \omega L = 2\pi\times2\times10^3\times10\times10^{-3} = 40\pi = 125.7\Omega$$

$$5\text{mH} \quad \Rightarrow \quad X_L = \omega L = 2\pi\times2\times10^3\times5\times10^{-3} = 20\pi = 62.83\Omega$$

在如图9-35b所示电路中，阻抗$\boldsymbol{Z}$为j125.7 Ω与100 + j62.83 Ω的并联，因此，

$$\boldsymbol{Z} = \text{j}125.7 \,\|\, (100+\text{j}62.83) = \frac{\text{j}125.7(100+\text{j}62.83)}{100+\text{j}188.5} = 69.56\underline{/60.1^\circ}\,\Omega \tag{9-14-1}$$

利用分压公式得到：

$$\boldsymbol{V}_1 = \frac{\boldsymbol{Z}}{\boldsymbol{Z}+150}\boldsymbol{V}_i = \frac{69.56\underline{/60.1^\circ}}{184.7+\text{j}60.3}\boldsymbol{V}_j = 0.3582\underline{/42.02^\circ}\,\boldsymbol{V}_i \tag{9-14-2}$$

且

$$\boldsymbol{V}_o = \frac{\text{j}62.832}{100+\text{j}62.832}\boldsymbol{V}_1 = 0.532\underline{/57.86^\circ}\,\boldsymbol{V}_1 \tag{9-14-3}$$

将式(9-14-2)与式(9-14-3)合并后可得：

$$\boldsymbol{V}_o = (0.532\underline{/57.86^\circ})(0.3582\underline{/42.02^\circ})\boldsymbol{V}_i = 0.1906\underline{/100^\circ}\,\boldsymbol{V}_i$$

上式表明，输出电压的幅度仅为输入电压幅度的19%，但相位较输入超前100°。如果在该电路终端连接一个负载，则负载将会影响相移量。

练习题9-14 对于如图9-36所示的RL电路，如果输入电压V_i为1 V，试求输出电压在频率为5 kHz时的幅度和相移，并确定相移是超前还是滞后。

答 0.172，120.4°，滞后。

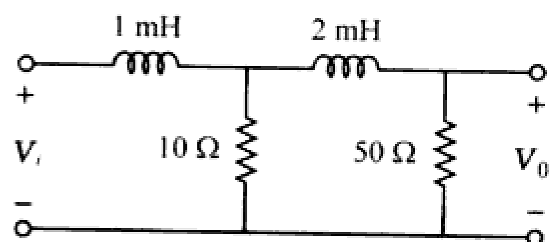


图 9-36 练习题 9-14 的电路原理图

9.8.2 交流电桥

交流电桥电路用于测量电感器的电感量L或电容器的电容量C，与测量未知电阻的惠斯登电桥（参见4.10节）形式类似、原理相同。但是在测量L与C时，需要用交流电源和交流电表来取代检流计，交流电表可以是灵敏的交流安培表或交流伏特表。

交流电桥电路的一般形式如图9-37所示。当无电流流过交流电表时，该电桥是平衡的，意味着$\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{V}_2$。由分压原理可知：

$$V_1=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}V_s=V_2=\frac{Z_x}{Z_3+Z_x}V_s \tag{9-71}$$

因此，

$$\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{Z_x}{Z_3+Z_x}\Rightarrow Z_2Z_3=Z_1Z_x \tag{9-72}$$

即

$$\boxed{Z_x=\frac{Z_3}{Z_1}Z_2} \tag{9-73}$$

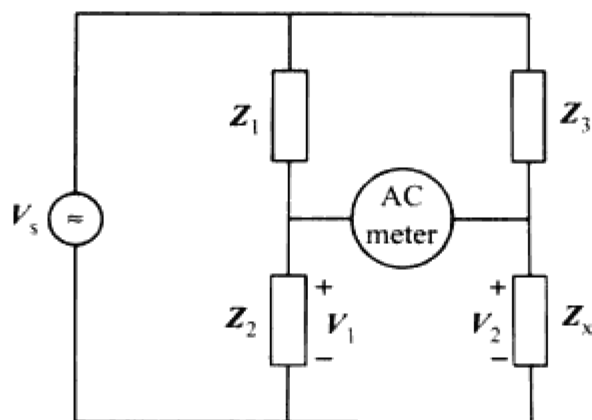


图 9-37　交流电桥的一般形式

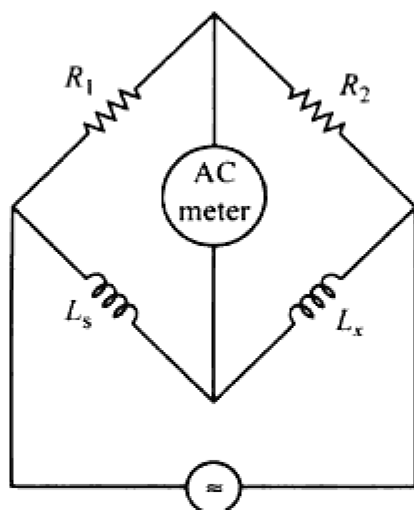
此即交流电桥电路的平衡方程，与式(4-30)表示的电阻电桥平衡方程类似，只是用Z取代了R。

用于测量L与C的交流电桥电路如图9-38所示，图中L_x与C_x分别为待测未知电感与电容，而L_s与C_s分别为标准电感与电容（其值已知，且具有很高精度）。在图示两种情况下，通过改变两个电阻器R_1与R_2的值使得交流电表读数为零，从而使电桥进入平衡状态。由式(9-73)可以得到：

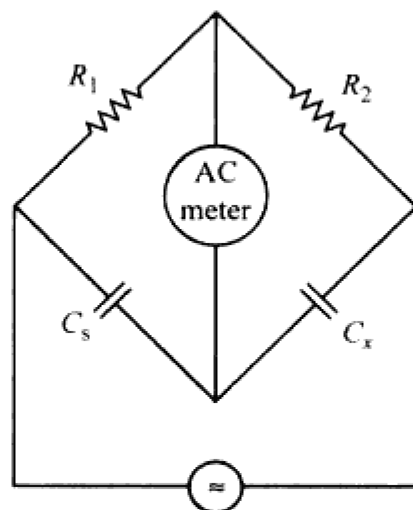
$$L_x=\frac{R_2}{R_1}L_s \tag{9-74}$$

且

$$C_x=\frac{R_1}{R_2}C_s \tag{9-75}$$



（a）用于测量 L



（b）用于测量 C

图 9-38　专用交流电桥

注意，图9-38所示交流电桥的平衡并不取决于交流电源的频率f，因为式(9-74)与式(9-75)中未出现频率f。

例题9-15　在如图9-37所示的交流电桥电路中，当Z_1为1 kΩ电阻器，Z_2为4.2 kΩ电阻器，Z_3为1.5 MΩ电阻器与12 pF电容器的并联，且$f=2$ kHz时，该电桥达到平衡。试求：（a）组成Z_x的串联元件；（b）组成Z_x的并联元件。

解　（1）**明确**问题。本例题所要求解的电路已阐述清楚。

（2）**表述**对问题的理解。本例题要求确定使得给定量平衡的未知元件，由于该电路存在并联等效和串联等效，需将两者均求出。

（3）确定**可选解**。虽然求解未知量的方法不止一种，但直接法最佳。一旦得到答案，即可通过节点分析等手算方法或者利用PSpice进行验证。

（4）**尝试**问题的解。

由式(9-73)可得：

$$Z_x = \frac{Z_3}{Z_1} Z_2 \tag{9-15-1}$$

其中，$Z_x = R_x + jX_x$，

$$Z_1 = 1000\ \Omega, \qquad Z_2 = 4200\ \Omega \tag{9-15-2}$$

且

$$Z_3 = R_3 \parallel \frac{1}{j\omega C_3} = \frac{\dfrac{R_3}{j\omega C_3}}{R_3 + 1/j\omega C_3} = \frac{R_3}{1 + j\omega R_3 C_3}$$

由于$R_3 = 1.5\ \text{M}\Omega$，$C_3 = 12\ \text{pF}$，于是，

$$Z_3 = \frac{1.5\times10^6}{1 + j2\pi\times2\times10^3\times1.5\times10^6\times12\times10^{-12}} = \frac{1.5\times10^6}{1 + j0.2262}$$

即

$$Z_3 = 1.427 - j0.3228\text{M}\Omega \tag{9-15-3}$$

（a）假定Z_x由串联元件组成，将式(9-15-2)与式(9-15-3)代入式(9-15-1)，可得：

$$\begin{aligned} R_x + jX_x &= \frac{4200}{1000}(1.427 - j0.3228)\times10^6 \\ &= (5.993 - j1.356)\text{M}\Omega \end{aligned} \tag{9-15-4}$$

由实部与虚部分别对应相等可得$R_x = 5.993\ \text{M}\Omega$，且容性电抗为：

$$X_x = \frac{1}{\omega C} = 1.356\times10^6$$

即

$$C = \frac{1}{\omega X_x} = \frac{1}{2\pi\times2\times10^3\times1.356\times10^6} = 58.69\text{pF}$$

（b）Z_x与式(9-15-4)保持不变，但R_x与X_x为并联关系，假定RC进行并联合并，则有：

$$\begin{aligned} Z_x &= (5.993 - j1.356)\text{M}\Omega \\ &= R_x \parallel \frac{1}{j\omega C_x} = \frac{R_x}{1 + j\omega R_x C_x} \end{aligned}$$

由实部与虚部分别对应相等可得：

$$R_x = \frac{\text{Real}(Z_x)^2 + \text{Imag}(Z_x)^2}{\text{Real}(Z_x)} = \frac{5.993^2 + 1.356^2}{5.993} = \mathbf{6.3M\Omega}$$

$$\begin{aligned} C_x &= -\frac{\text{Imag}(Z_x)}{\omega[\text{Real}(Z_x)^2 + \text{Imag}(Z_x)^2]} \\ &= -\frac{-1.356}{2\pi(2000)(5.917^2 + 1.356^2)} = \mathbf{2.852\mu F} \end{aligned}$$

（5）**评价**得到的结果。下面利用PSpice验证结果的正确性，对等效电路运行PSpice程序，在电路的“电桥”部分开路，并施加10V输入电压，在“电桥”输出端得到相对于电路参考点的电压如下：

```
FREQ          VM($N_0002)      VP($N_0002)
2.000E+03     9.993E+00        -8.634E-03
2.000E+03     9.993E+00        -8.637E-03
```

由于电压基本相同，所以对于连接电桥两端的任意元件而言，无可测电流流过“电桥”部分，从而得到所期望的平衡电桥。这表明我们已经正确地确定了未知量。

对于上述运算而言，还存在一个非常重要的问题！能猜测出是什么问题吗？通过以上计算过程得到的是理想的“理论”解，但对于实际系统而言，并不是一个很好的答案。上下两条支路的阻抗差别过大，在实际电桥电路中无法接受。对于高精度测量而言，总阻抗大小至少要在同一数量级。为了提高本题解的精度，建议将上面支路阻抗的大小增加到500 kΩ至1.5 MΩ。对于实际系统中存在的另一个问题是：这些阻抗的大小在实际测量时同样会造成严重的问题，因此必须利用适当的仪器以达到使电路负载（可能会改变实际的电压读数）最小的目的。

（6）对结果是否满意？通过前面的步骤已经求出了未知量并进行了验证，说明结果有效，可以将上述求解过程作为本题的答案。

练习题9-15 在如图9-37所示的交流电桥电路中，当$\boldsymbol{Z}_1$为4.8 kΩ电阻器，$\boldsymbol{Z}_2$为10 Ω电阻器与0.25 μH电感器的串联，$\boldsymbol{Z}_3$为12 kΩ电阻器，且$f = 6$MHz时，电桥达到平衡状态，试确定组成$\boldsymbol{Z}_x$的串联元件值。

答 25Ω电阻器与0.625 μH电感器串联。

9.9 本章小结

（1）正弦信号是具有正弦函数或余弦函数形式的信号，其一般表达式为：

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

其中，V_m为幅度（或振幅），$\omega = 2\pi f$为角频率，$(\omega t + \phi)$为辐角，ϕ为相位。

（2）相量是一个表示正弦信号幅度与相位的复数。给定正弦信号$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$，其相量$\boldsymbol{V}$为：

$$\boldsymbol{V} = V_m \angle \phi$$

（3）在交流电路中，电压相量与电流相量在任何时刻均存在固定的关系。如果$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v)$表示元件两端的电压，$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$表示流过该元件的电流，则对于电阻元件而言，$\phi_i = \phi_v$，对于电容元件而言，$\phi_i$较$\phi_v$超前90°，对于电感元件而言，$\phi_i$较$\phi_v$滞后90°。

（4）电路的阻抗$\boldsymbol{Z}$等于该电路两端的电压相量与流过它的电流相量之比：

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{I}} = R(\omega) + \mathrm{j}X(\omega)$$

导纳$\boldsymbol{Y}$是阻抗的倒数：

$$\boldsymbol{Y} = \frac{1}{\boldsymbol{Z}} = G(\omega) + \mathrm{j}B(\omega)$$

串并联的阻抗合并方法与串并联电阻的合并方法相同，即串联时阻抗相加，并联时导纳相加。

（5）电阻器的阻抗为$\boldsymbol{Z} = R$，电感器的阻抗为$\boldsymbol{Z} = \mathrm{j}X = \mathrm{j}\omega L$，电容器的阻抗为$\boldsymbol{Z}_C = -\mathrm{j}X = -1/\mathrm{j}\omega C$。

（6）电路的基本定律（欧姆定律和基尔霍夫定律）同样适用于交流电路，其形式与直流电路中的基本定律相同，即：

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{ZI}$$

$$\sum \boldsymbol{I}_k = 0 \quad \text{(KCL)}$$

$$\sum \boldsymbol{V}_k = 0 \quad \text{(KVL)}$$

（7）分压/分流原理、阻抗/导纳的串联/并联合并、电路的化简以及Y-Δ转换等方法均适用于交流电路的分析。

（8）交流电路可应用于移相电路与电桥电路中。

复习题

9-1 下列哪一项不能正确地表示正弦信号$A\cos\omega t$？

（a）$A\cos 2\pi f(t)$ （b）$A\cos(2\pi t/T)$ （c）$A\cos\omega(t-T)$ （d）$A\sin(\omega t - 90°)$

9-2 以固定间隔重复本身的函数称为：

（a）相量　（b）谐波
（c）周期性的　（d）电抗

9-3　下列频率中，哪一个的周期较短？
（a）1 krad/s　（b）1 kHz

9-4　如果$v_1 = 30\ \sin\ (\omega t + 10°)$，$v_2 = 20\ \sin\ (\omega t - 50°)$，下述哪项叙述是正确的？
（a）v_1超前v_2　（b）v_2超前v_1　（c）v_2滞后v_1
（d）v_1滞后v_2　（e）v_1与v_2同相

9-5　电感器两端的电压较流过它的电流超前90°。
（a）正确　（b）错误

9-6　阻抗的虚部称为：
（a）电阻　（b）导纳　（c）电纳
（d）电导　（e）电抗

9-7　电容器的阻抗随频率的增加而增加。
（a）正确　（b）错误

9-8　如图9-39所示电路在什么频率下的输出电压$v_o(t)$等于输入电压$v(t)$？
（a）0 rad/s　（b）1 rad/s　（c）4 rad/s
（d）∞ rad/s　（e）哪个都不是

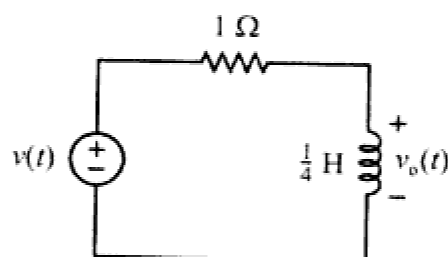


图 9-39　复习题 9-8 的电路原理图

9-9　某RC串联电路的$|V_R| = 12\ V$，$|V_C| = 5\ V$，则其供电电压的幅度为：
（a）−7 V　（b）7 V　（c）13 V　（d）17 V

9-10　某RLC串联电路的$R = 30\ \Omega$，$X_C = -50\ \Omega$，$X_L = 90\ \Omega$，则该电路的阻抗为：
（a）$30 + j140\ \Omega$　（b）$30 + j40\ \Omega$　（c）$30 - j40\ \Omega$
（d）$-30 - j40\ \Omega$　（e）$-30 + j40\Omega$

答案　9-1 d；9-2 c；9-3 b；9-4 b；d；9-5 a；9-6 e；9-7 b；9-8 d；9-9 c；9-10 b。

习题

9.2 节

9-1　已知正弦电压$v(t) = 50\cos(30t + 10°)$，试求：
（a）振幅V_m，（b）周期T，（c）频率f，
（d）$t = 10$ ms时的$v(t)$。

9-2　某线性电路中的电流源为

$$i_s = 8\cos(500\pi t - 25°)\ A$$

（a）该电流的振幅为多少？
（b）角频率为多少？
（c）试求该电流的频率。
（d）试计算$t = 2$ms时的i_s。

9-3　试将如下函数表达为余弦函数形式：
（a）$4\sin(\omega t - 30°)$　（b）$-2\sin 6t$
（c）$-10\sin(\omega t + 20°)$

9-4　（a）试将$v = 8\cos(7t + 15°)$表达为正弦函数形式。
（b）试将$i = -10\sin(3t - 85°)$变换为余弦函数形式。

9-5　已知$v_1 = 20\ \sin\ (\omega t + 60°)$，$v_2 = 60\cos\ (\omega t - 10°)$，试确定这两个正弦信号之间的相位角，并指出哪一个是滞后的。

9-6　对于如下各组正弦信号，试确定哪一个是超前的，超前多少？
（a）$v(t) = 10\cos(4t - 60°)$，$i(t) = 4\sin(4t + 50°)$
（b）$v_1(t) = 4\cos(377t + 10°)$，$v_2(t) = -20\cos 377t$
（c）$x(t) = 13\cos 2t + 5\sin 2t$，$y(t) = 15\cos(2t - 11.8°)$

9.3 节

9-7　如果$f(\phi) = \cos\phi + j\sin\phi$，试证明$f(\phi) = e^{j\phi}$。

9-8　试计算下列各复数，并将计算结果表示为直角坐标形式。
（a）$\dfrac{15\angle 45°}{3 - j4} + j2$
（b）$\dfrac{8\angle -20°}{(2+j)(3-j4)} + \dfrac{10}{-5+j12}$
（c）$10 + (8\angle 50°)(5 - j12)$

9-9　试计算下列各复数，并将计算结果表示为极坐标形式。
（a）$5\angle 30°\left(6 - j8 + \dfrac{3\angle 60°}{2+j}\right)$
（b）$\dfrac{(10\angle 60°)(35\angle -50°)}{(2+j6)-(5+j)}$

9-10　已知复数$z_1 = 6 - j8$，$z_2 = 8\angle -30°$，$z_3 = e^{-j120°}$，试求：
（a）$z_1 + z_2 + z_3$，

(b) $\dfrac{z_1z_2}{z_3}$

9-11 试求如下信号对应的相量：

(a) $v(t)=21\cos(4t-15°)$ V

(b) $i(t)=-8\sin(10t+70°)$ mA

(c) $v(t)=120\sin(10t-50°)$ V

(d) $i(t)=-60\sin(30t+10°)$ mA

9-12 设$\boldsymbol{X}=8\angle 40°$，$\boldsymbol{Y}=10\angle -30°$，试计算以下各量并将计算结果表示为极坐标形式：

(a) $(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})\boldsymbol{X}^*$ (b) $(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y})^*$ (c) $(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})/\boldsymbol{X}$

9-13 试计算如下各复数：

(a) $\dfrac{2+\mathrm{j}3}{1-\mathrm{j}6}+\dfrac{7-\mathrm{j}8}{-5+\mathrm{j}11}$

(b) $\dfrac{(5\angle 10°)(10\angle -40°)}{(4\angle -80°)(-6\angle 50°)}$

(c) $\begin{vmatrix}2+\mathrm{j}3 & -\mathrm{j}2\\ -\mathrm{j}2 & 8-\mathrm{j}5\end{vmatrix}$

9-14 试简化如下各表达式：

(a) $\dfrac{(5-\mathrm{j}6)-(2+\mathrm{j}8)}{(-3+\mathrm{j}4)(5-\mathrm{j})+(4-\mathrm{j}6)}$

(b) $\dfrac{(240\angle 75°+160\angle -30°)(60-\mathrm{j}80)}{(67+\mathrm{j}84)(20\angle 32°)}$

(c) $\left(\dfrac{10+\mathrm{j}20}{3+\mathrm{j}4}\right)^2\sqrt{(10+\mathrm{j}5)(16-\mathrm{j}20)}$

9-15 试计算如下各行列式的值：

(a) $\begin{vmatrix}10+\mathrm{j}6 & 2-\mathrm{j}3\\ -5 & -1+\mathrm{j}\end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix}20\angle -30° & -4\angle -10°\\ 16\angle 0° & 3\angle 45°\end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix}1-\mathrm{j} & -\mathrm{j} & 0\\ \mathrm{j} & 1 & -\mathrm{j}\\ 1 & \mathrm{j} & 1+\mathrm{j}\end{vmatrix}$

9-16 试将如下各正弦信号转换为相量：

(a) $-10\cos(4t+75°)$

(b) $5\sin(20t-10°)$

(c) $4\cos 2t+3\sin 2t$

9-17 两个电压v_1与v_2相互串联时，其和为$v=v_1+v_2$。如果$v_1=10\cos(50t-\pi/3)$ V，$v_2=12\cos(50t+30°)$V，试求v。

9-18 试求如下各相量所对应的正弦信号。

(a) $\boldsymbol{V}_1=60\angle 15°$ V，$\omega=1$

(b) $\boldsymbol{V}_2=6+\mathrm{j}8$ V，$\omega=40$

(c) $\boldsymbol{I}_1=2.8\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/3}$ A，$\omega=377$

(d) $\boldsymbol{I}_2=-0.5-\mathrm{j}1.2$ A，$\omega=10^3$

9-19 试利用相量计算如下各式的值：

(a) $3\cos(20t+10°)-5\cos(20t-30°)$

(b) $40\sin 50t+30\cos(50t-45°)$

(c) $20\sin 400t+10\cos(400t+60°)-5\sin(400t-20°)$

9-20 某线性网络的输入电流为$4\cos(\omega t+20°)$ A，输出电压为$10\cos(\omega t+110°)$ V，试确定相应的阻抗。

9-21 试简化如下各式：

(a) $f(t)=5\cos(2t+15°)-4\sin(2t-30°)$

(b) $g(t)=8\sin t+4\cos(t+50°)$

(c) $h(t)=\int_0^t(10\cos 40t+50\sin 40t)\mathrm{d}t$

9-22 某交流电压为$v(t)=20\cos(5t-30°)$ V，试利用相量计算：

$$10v(t)+4\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-2\int_{-\infty}^{t}v(t)\mathrm{d}t$$

假定$t=-\infty$时的积分值为0。

9-23 试利用相量分析计算如下各式。

(a) $v=50\cos(\omega t+30°)+30\cos(\omega t-90°)$ V

(b) $i=15\cos(\omega t+45°)-10\sin(\omega t+45°)$ A

9-24 试利用相量法确定下列微积分方程中的$v(t)$。

(a) $v(t)+\int v\,\mathrm{d}t=10\cos t$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+5v(t)+4\int v\,\mathrm{d}t=20\sin(4t+10°)$

9-25 试利用相量法确定下列方程中的$i(t)$。

(a) $2\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+3i(t)4\cos(2t-45°)$

(b) $10\int i\,\mathrm{d}t+\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+6i(t)=5\cos(5t+22°)$

9-26 某RLC串联电路的回路方程为：

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+2i+\int_{-\infty}^{t}i\,\mathrm{d}t=\cos 2t$$

假定$t=-\infty$时的积分值为0，试利用相量法求$i(t)$。

9-27 某RLC并联电路的节点方程为：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+50v+100\int v\,\mathrm{d}t=110\cos(377t-10°)$$

假定$t=-\infty$时的积分值为0，试利用相量法确定$v(t)$。

9.4 节

9-28 试确定流过一个与电压源$v_s = 110\cos 377t$ V相连接的8 Ω电阻器的电流。

9-29 如果流过一个2 μF电容器的电流为$i = 4\sin(10^6 t + 25°)$ A，试求该电容器两端的瞬时电压。

9-30 将电压$v(t) = 100\cos(60t + 20°)$ V作用于相互并联的40 kΩ电阻器与50 μF电容器两端，试求流过该电阻器与电容器的稳态电流。

9-31 某RLC串联电路中，$R = 80\ \Omega$，$L = 240$ mH，$C = 5$ mF，如果输入电压为$v(t) = 10\cos 2t$，试求流过该电路的电流。

9-32 对于如图9-40所示的网络，试求负载电流I_L。

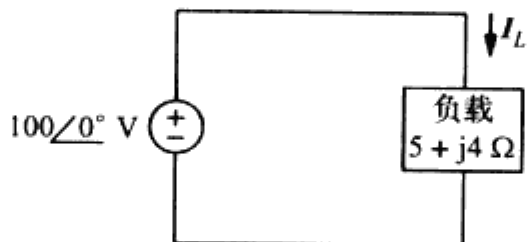


图 9-40 习题 9-32 的电路原理图

9-33 某RL串联电路接到110 V交流电源上，如果电阻器两端的电压为85 V，试求电感器两端的电压。

9-34 角频率ω取何值时，图9-41所示电路的强迫响应v_o为零？

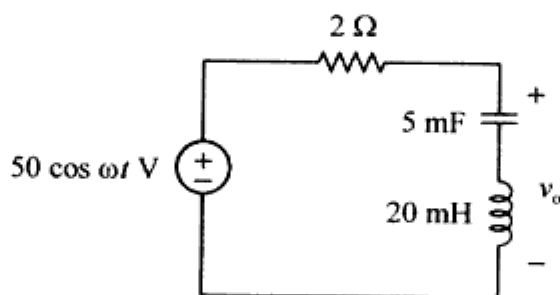


图 9-41 习题 9-34 的电路原理图

9.5 节

9-35 在如图9-42所示电路中，试求$v_s(t) = 50\cos 200t$ V时的电流i。

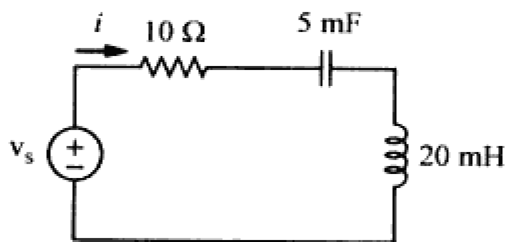


图 9-42 习题 9-35 的电路原理图

9-36 在如图9-43所示电路中，试求$v_s = 60\cos(200t - 10°)$ V时的电流i。

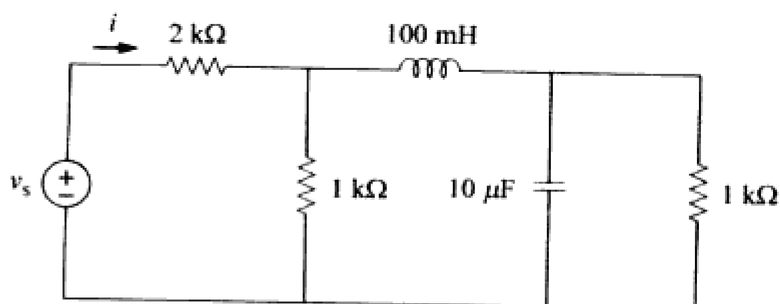


图 9-43 习题 9-36 的电路原理图

9-37 试确定如图9-44所示电路中的导纳$\boldsymbol{Y}$。

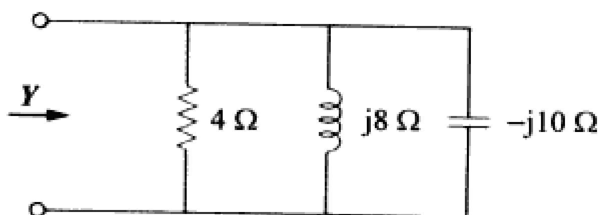
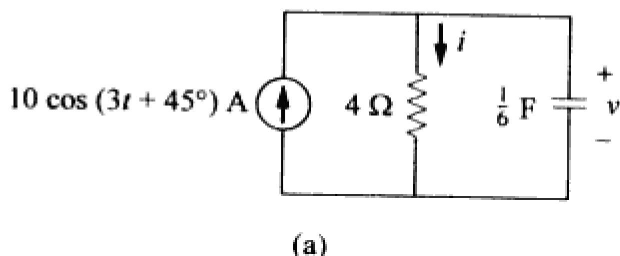
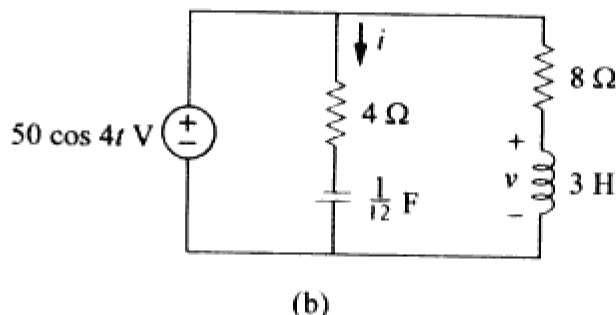


图 9-44 习题 9-37 的电路原理图

9-38 试求如图9-45所示各电路中的$i(t)$与$v(t)$。



(a)



(b)

图 9-45 习题 9-38 的电路原理图

9-39 对如图9-46所示电路，试求$\boldsymbol{Z}_{eq}$，并利用该结果计算电流$\boldsymbol{I}$，假定$\omega = 10$ rad/s。

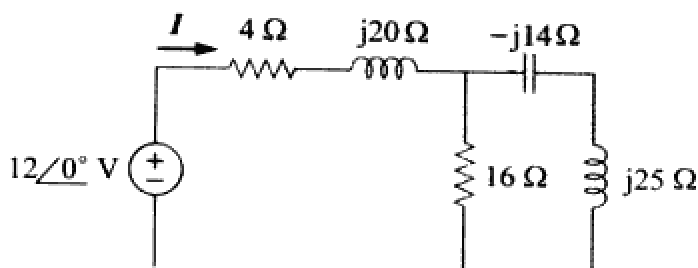


图 9-46 习题 9-39 的电路原理图

9-40 试求如图9-47所示电路在下列几种情况下的

i_o：

（a）$\omega = 1$ rad/s　（b）$\omega = 5$ rad/s

（c）$\omega = 10$ rad/s

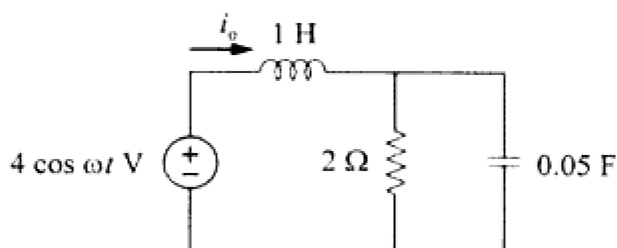


图 9-47　习题 9-40 的电路原理图

9-41　试求如图9-48所示RLC电路中的$v(t)$。

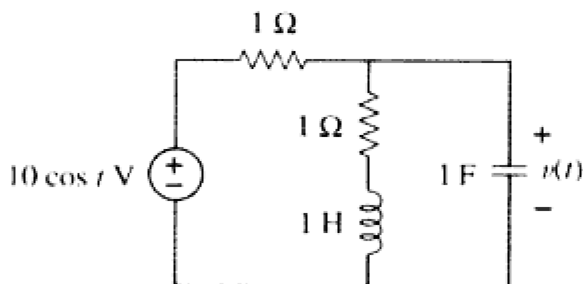


图 9-48　习题 9-41 的电路原理图

9-42　试计算如图9-49所示电路中的$v_o(t)$。

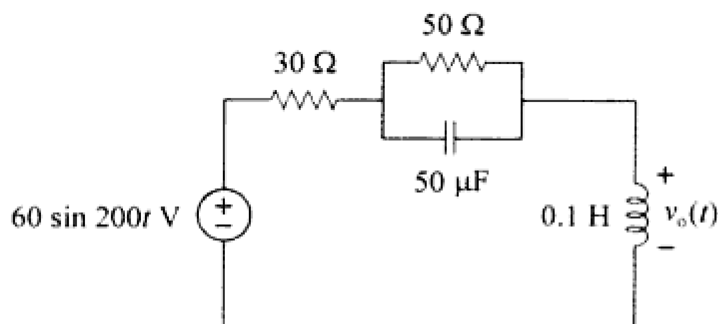


图 9-49　习题 9-42 的电路原理图

9-43　试计算如图9-50所示电路中的$\boldsymbol{I}_o$。

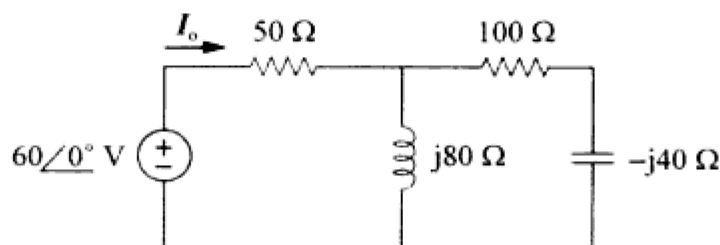


图 9-50　习题 9-43 的电路原理图

9-44　试计算如图9-51所示电路中的$i(t)$。

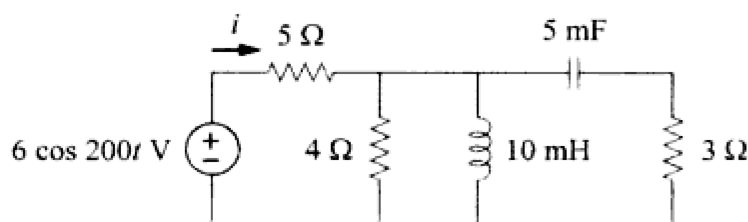


图 9-51　习题 9-44 的电路原理图

9-45　试求如图9-52所示网络中的电流$\boldsymbol{I}_o$。

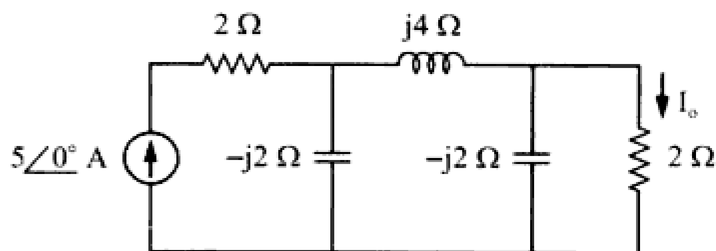


图 9-52　习题 9-45 的电路原理图

9-46　如果如图9-53所示电路中的$i_s = 5\ \cos(10\ t + 40°)$，试求$i_o$。

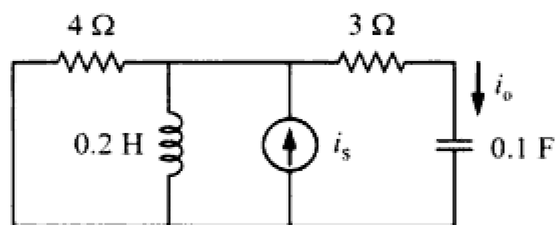


图 9-53　习题 9-46 的电路原理图

9-47　试确定如图9-54所示电路中$i_s(t)$ 的值。

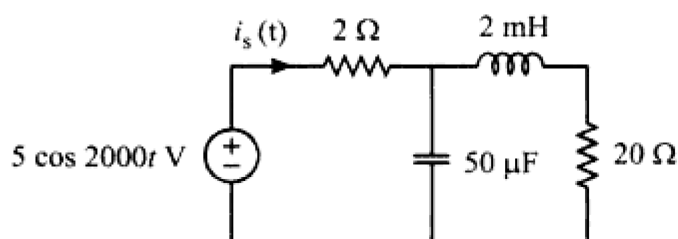


图 9-54　习题 9-47 的电路原理图

9-48　如果图9-55所示电路中的$v_s(t) = 20\ \sin(100\ t - 40°)$，试确定$i_x(t)$。

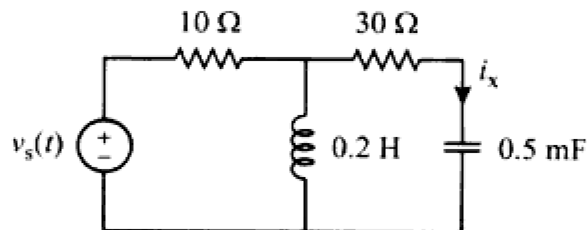


图 9-55　习题 9-48 的电路原理图

9-49　如果流过图9-56所示电路中1 Ω电阻器的电流为0.5 sin200t A，试求$v_s(t)$。

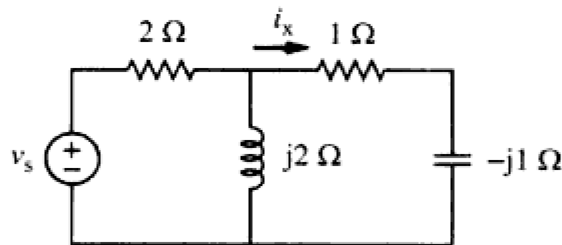


图 9-56　习题 9-49 的电路原理图

9-50 试确定如图9-57所示电路中的v_x，假定$i_s(t)=5\cos(100t+40°)$ A。

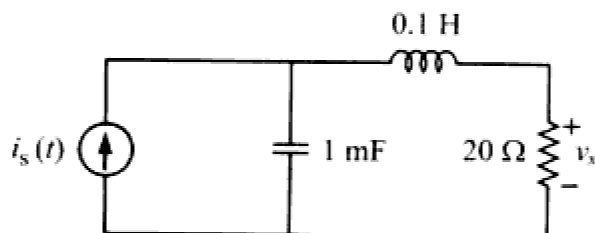


图 9-57 习题 9-50 的电路原理图

9-51 如果图9-57所示电路中2 Ω电阻器两端的电压v_o为$10\cos 2t$ V，试求i_s。

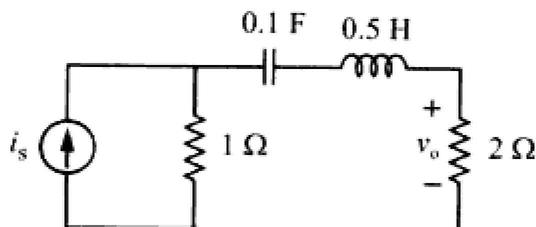


图 9-58 习题 9-51 的电路原理图

9-52 如果图9-59所示电路中的$V_o=8\angle 30°$ V，试求I_s。

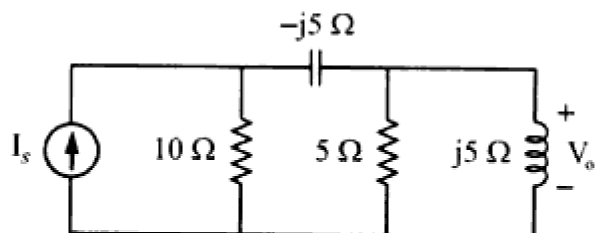


图 9-59 习题 9-52 的电路原理图

9-53 试求如图9-60所示电路中的电流I_o。

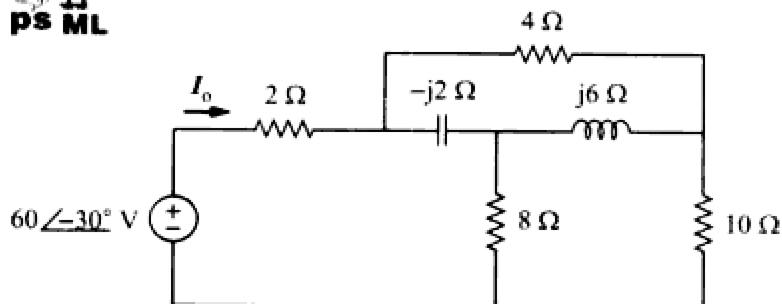


图 9-60 习题 9-53 的电路原理图

9-54 在如图9-61所示电路中，如果$I_o=2\angle 0°$ A，试求V_s。

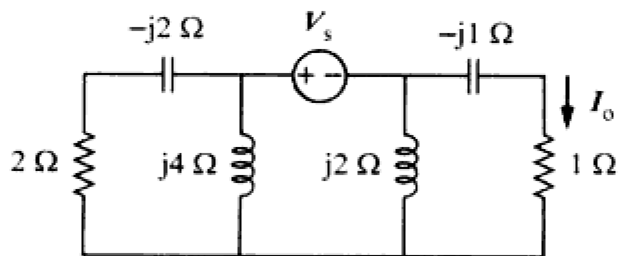


图 9-61 习题 9-54 的电路原理图

*9-55 试求如图9-62所示网络的Z，假定$V_o=4\angle 0°$ V。

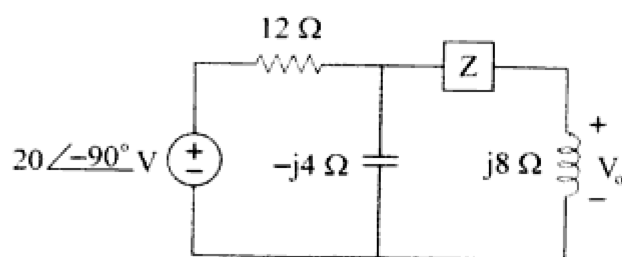


图 9-62 习题 9-55 的电路原理图

9.7 节

9-56 试确定如图9-63所示电路在$\omega=377$ rad/s时的输入阻抗。

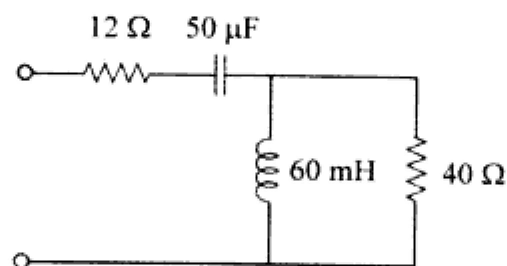


图 9-63 习题 9-56 的电路原理图

9-57 试确定如图9-64所示电路在$\omega=1$ rad/s时的输入导纳。

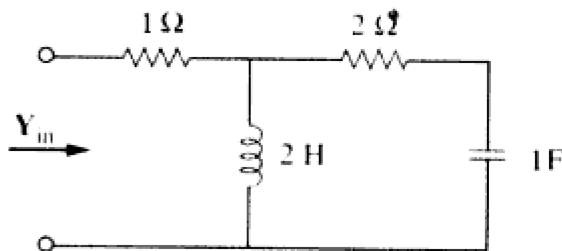


图 9-64 习题 9-57 的电路原理图

9-58 试求如图9-65所示电路在$\omega=10$ krad/s时的等效阻抗。

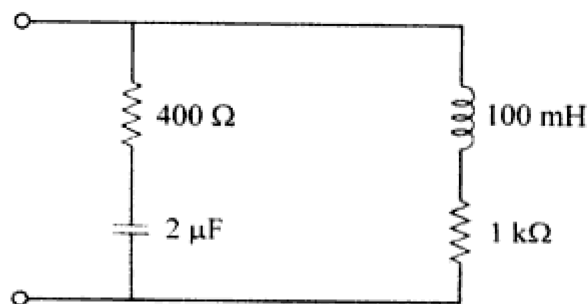


图 9-65 习题 9-58 的电路原理图

9-59 试求如图9-66所示网络在$\omega=10$ rad/s时的输入阻抗Z_{in}。

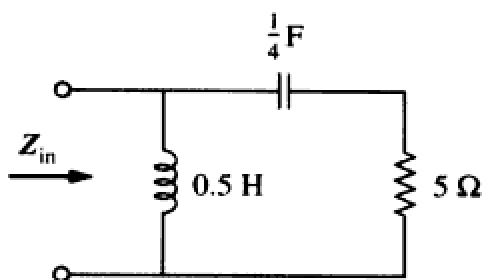


图 9-66 习题 9-59 的电路原理图

9-60 试确定如图9-67所示电路中的Z_{in}。

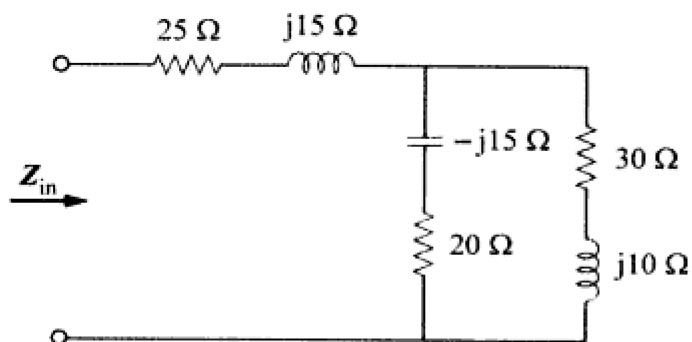


图 9-67 习题 9-60 的电路原理图

9-61 试求如图9-68所示电路的Z_{eq}。

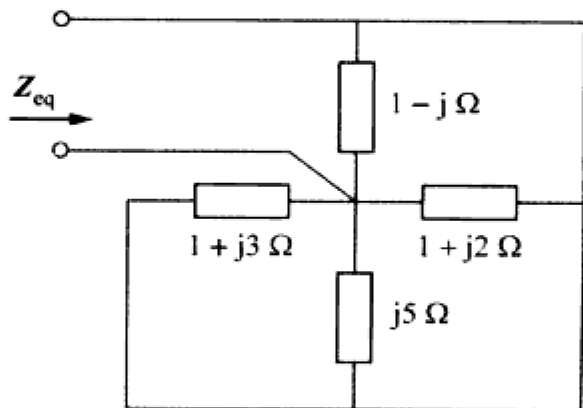


图 9-68 习题 9-61 的电路原理图

9-62 试求如图9-69所示电路在$\omega = 10$ krad/s时的输入阻抗Z_{in}。

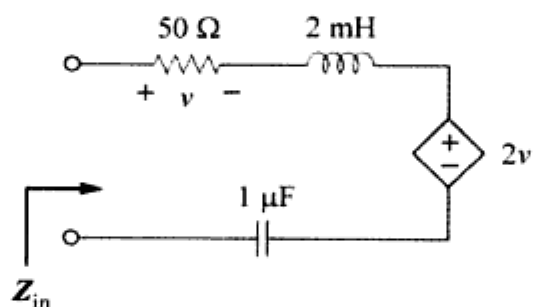


图 9-69 习题 9-62 的电路原理图

9-63 如图9-70所示电路，试求Z_T的值。

9-64 试求如图9-71所示电路的Z_T与I。

9-65 试确定如图9-72所示电路的Z_T与I。

9-66 对如图9-73所示电路，试计算Z_T与V_{ab}。

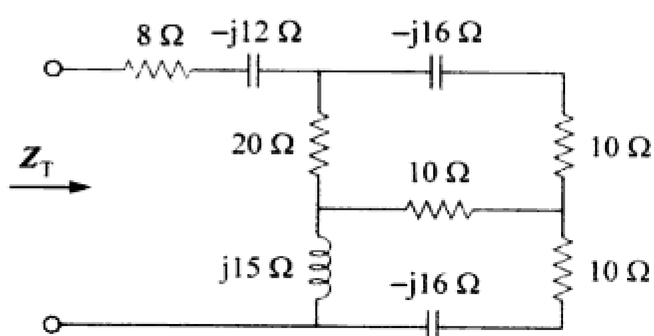


图 9-70 习题 9-63 的电路原理图

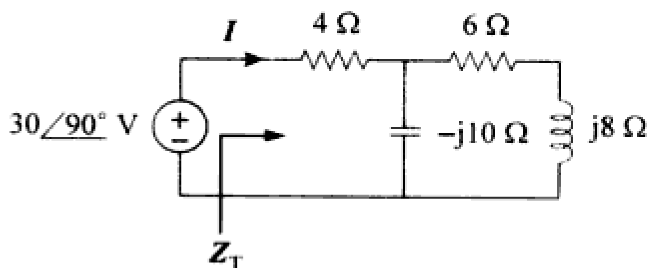


图 9-71 习题 9-64 的电路原理图

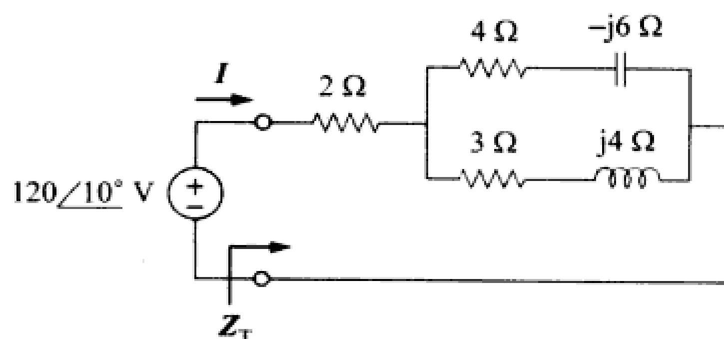


图 9-72 习题 9-65 的电路原理图

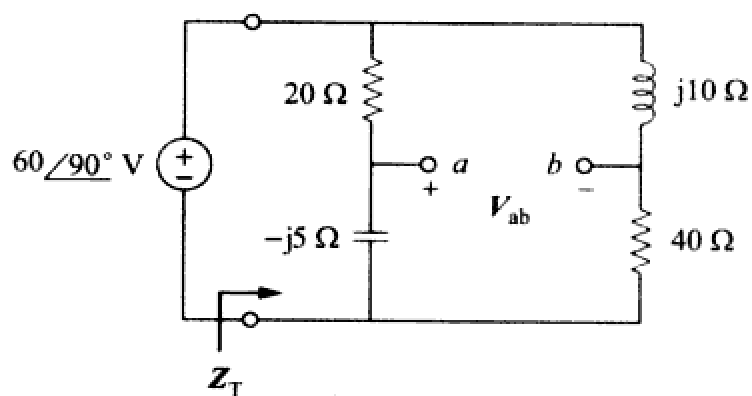


图 9-73 习题 9-66 的电路原理图

9-67 如果$\omega = 10^3$ rad/s，试求如图9-74所示各电路的输入导纳。

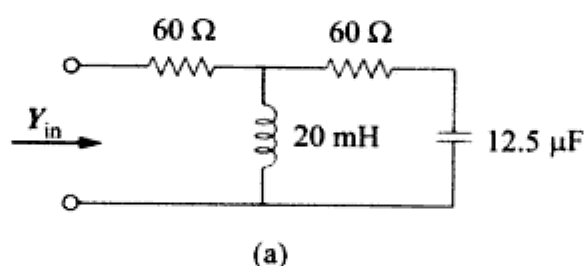


图 9-74 习题 9-67 的电路原理图

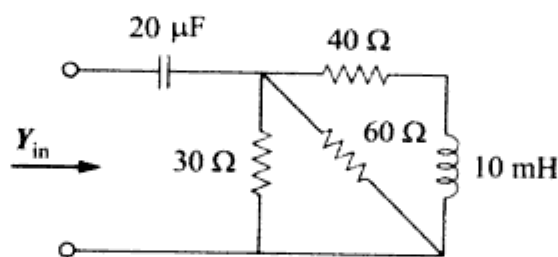


图 9-74 (续)

9-68 试确定如图9-75所示电路的Y_{eq}。

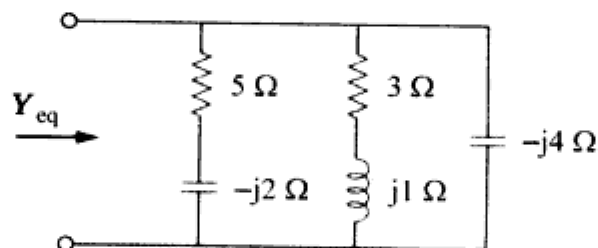


图 9-75 习题 9-68 的电路原理图

9-69 试求如图9-76所示电路的等效导纳Y_{eq}。

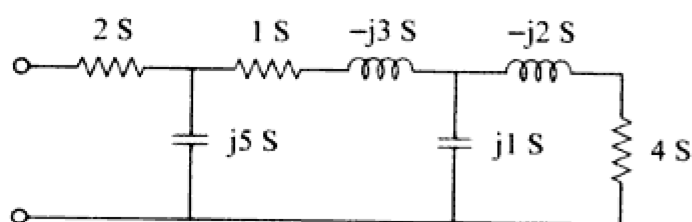


图 9-76 习题 9-69 的电路原理图

9-70 试求如图9-77所示电路的等效阻抗。

ML

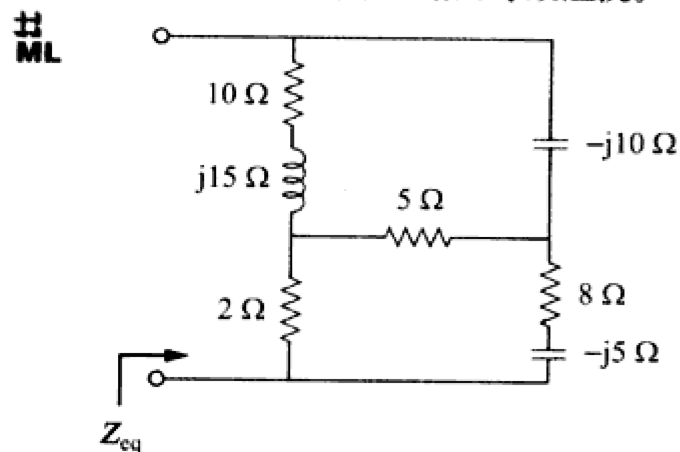


图 9-77 习题 9-70 的电路原理图

9-71 试确定如图9-78所示电路的等效阻抗。

ML

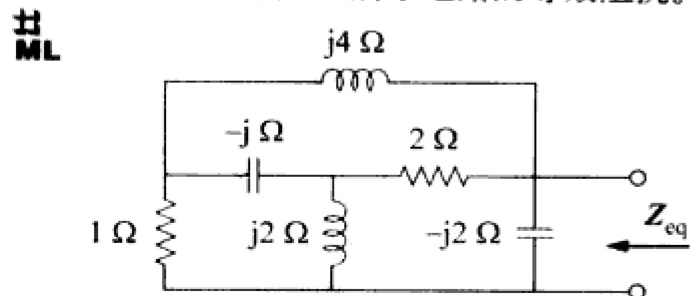


图 9-78 习题 9-71 的电路原理图

9-72 试计算如图9-79所示网络的Z_{ab}值。

ML

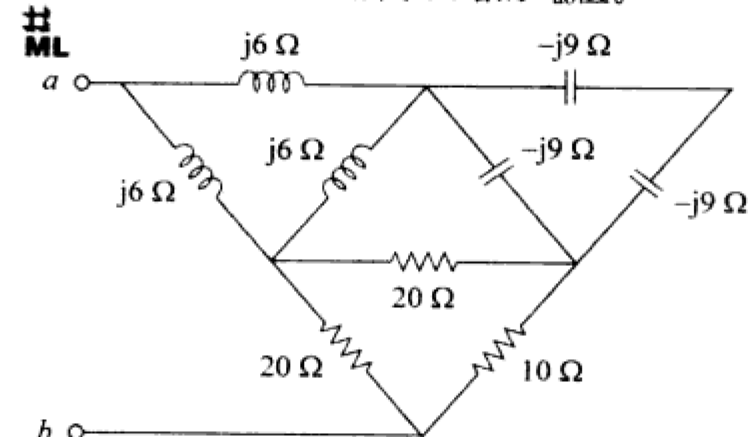


图 9-79 习题 9-72 的电路原理图

9-73 试确定如图9-80所示电路的等效阻抗。

ML

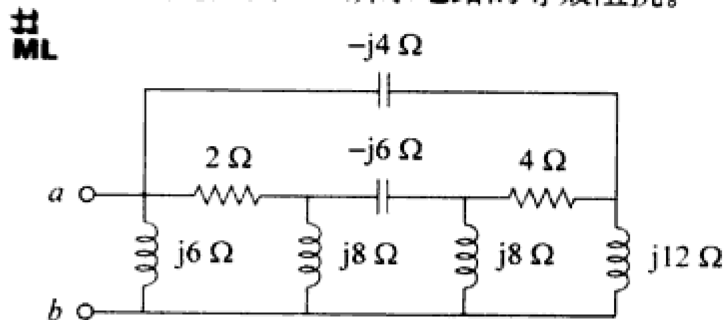


图 9-80 习题 9-73 的电路原理图

9.8 节

9-74 试设计一个RL电路，实现90°超前相移。

e2d

9-75 试设计一个电路，将正弦电压输入转换为余弦电压输出。

e2d

9-76 对如下各组信号，试确定v_1超前还是滞后v_2，以及超前或滞后的相角大小。

(a) $v_1 = 10\cos(5t - 20°)$，$v_2 = 8\sin 5t$

(b) $v_1 = 19\cos(2t + 90°)$，$v_2 = 6\sin 2t$

(c) $v_1 = -4\cos 10t$，$v_2 = 15\sin 10t$

9-77 对如图9-81所示的RC电路。

(a) 试计算频率为2 MHz时的相移；

(b) 试求相移为45°时的频率。

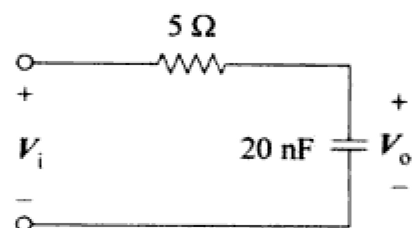


图 9-81 习题 9-77 的电路原理图

9-78 阻抗为8 + j6 Ω的线圈与容抗X相串联后，再与电阻器R相并联，如果该电路的等效阻抗为$5\angle 0°$ Ω，试求R与X的值。

9-79 (a) 试计算如图9-82所示电路的相移。

(b) 说明相移是超前还是滞后(输出相对于输入的相移)。

(c) 当输入为120 V时，试确定输出的幅度。

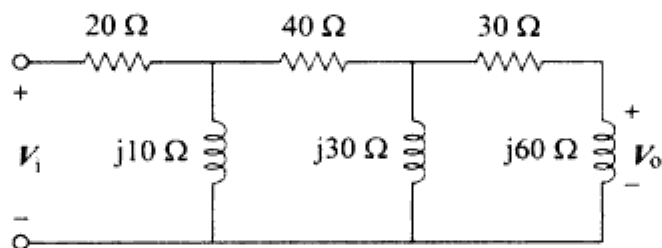


图 9-82 习题 9-79 的电路原理图

9-80 考虑如图9-83所示的移相电路，设频率为60Hz时，$V_i = 120$ V。试求：

(a) 当R为最大值时的V_o；

(b) 当R为最小值时的V_o；

(c) 产生45°相移时的R值。

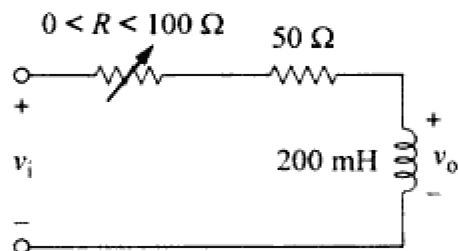


图 9-83 习题 9-80 的电路原理图

9-81 当$R_1 = 400\ \Omega$，$R_2 = 600\ \Omega$，$R_3 = 1.2\ \text{k}\Omega$，$C_2 = 0.3\ \mu\text{F}$时，如图9-37所示的交流电桥平衡，试求$R_x$与$C_x$。假定$R_2$与$C_2$相互串联。

9-82 当$R_1 = 100\ \Omega$，$R_2 = 2\ \text{k}\Omega$，$C_s = 40\ \mu\text{F}$时，电容电桥平衡，试求待测电容器的电容值C_x为多少?

9-83 当$R_1 = 1.2\ \text{k}\Omega$，$R_2 = 500\ \Omega$，$L_s = 250\ \text{mH}$时，电感电桥平衡，试求待测电感器的电感值$L_x$为多少?

9-84 如图9-84所示的交流电桥称为麦克斯韦电桥(Maxwell bridge)，可用于精确测量线圈的电感与电阻，其中C_s为标准电容，试证明电桥平衡时，如下关系式成立：

$$L_x = R_2R_3C_s \quad 和 \quad R_x = \frac{R_2}{R_1}R_3$$

试求$R_1 = 40\ \text{k}\Omega$，$R_2 = 1.6\ \text{k}\Omega$，$R_3 = 4\ \text{k}\Omega$，$C_s = 0.45\ \mu\text{F}$时的$L_x$与$R_x$。

9-85 如图9-85所示的交流电桥称为维恩电桥(Wien birdge)，可用于测量电源的频率。试证明电桥平衡时，所测得的频率为：

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_2R_4C_2C_4}}$$

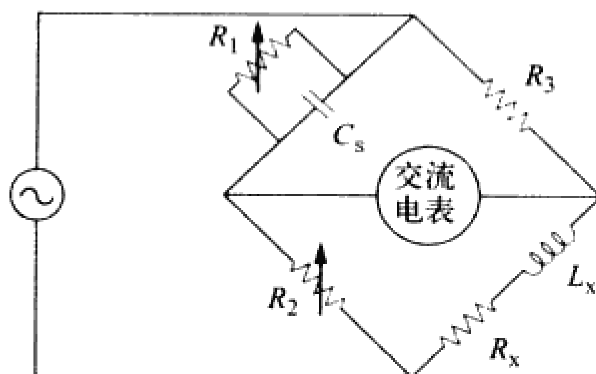


图 9-84 习题 9-84 的电路原理图：麦克斯韦电桥

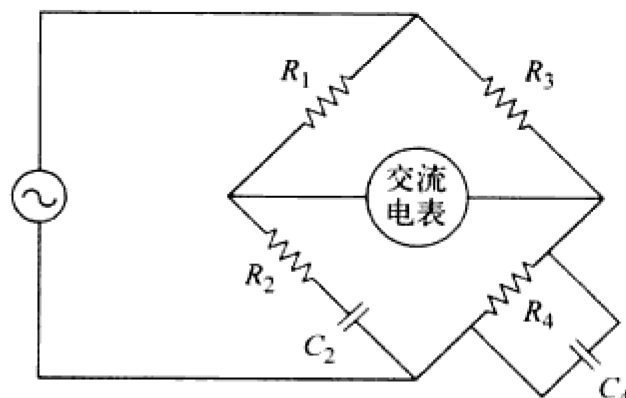


图 9-85 习题 9-85 的电路原理图：维恩电桥

综合题

9-86 如图9-86所示的电路为用于电视接收机的电路，试求该电路的总阻抗。

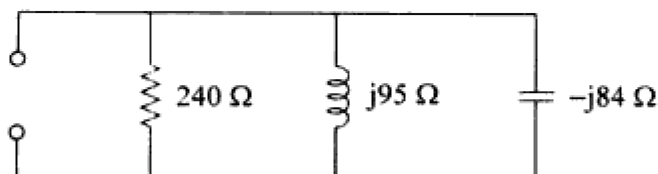


图 9-86 习题 9-86 的电路原理图

9-87 如图9-87所示网络为某工业电子传感器电路的组成部分，试求该电路在2 kHz时的总阻抗。

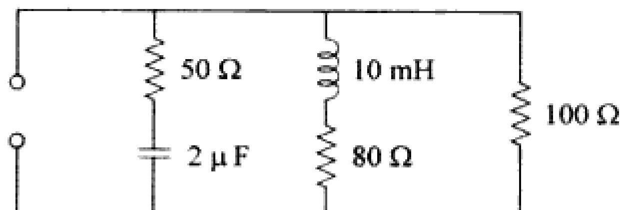


图 9-87 习题 9-87 的电路原理图

9-88 某串联音频电路如图9-88所示，

(a) 试问该电路的阻抗为多少？

(b) 如果频率减半，试问该电路的阻抗为多少？

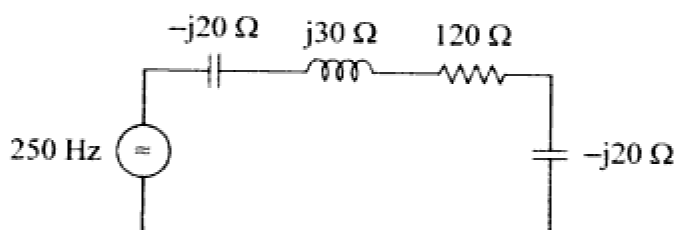


图 9-88 习题 9-88 的电路原理图

9-89 某工业负载可建模为如图9-89所示电容器与电阻器的串联组合。试计算该串联电路两端应连接多大的电感值L，才能在50 kHz频率处使得网络阻抗呈电阻性。

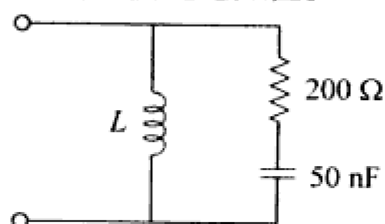


图 9-89 习题 9-89 的电路原理图

9-90 某工业线圈可建模为电感器L与电阻器R的串联组合，如图9-90所示。当电路工作在稳定状态下，工作频率为60 Hz时，利用交流电压表测得的正弦信号幅度为：

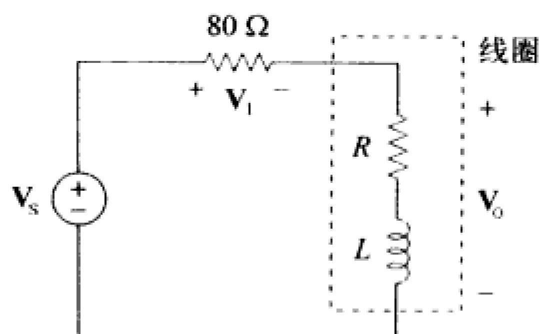


图 9-90 习题 9-90 的电路原理图

$|V_s| = 145\text{V}$，$|V_1| = 50\text{ V}$，$|V_o| = 110\text{ V}$，

试利用上述测量结果确定L与R的值。

9-91 如图9-91所示为一个电感器与一个电阻器的并联组合，如果要求该并联组合串联一个电容器，使得网络阻抗在10MHz频率处呈电阻性。试问所需的C值为多少？

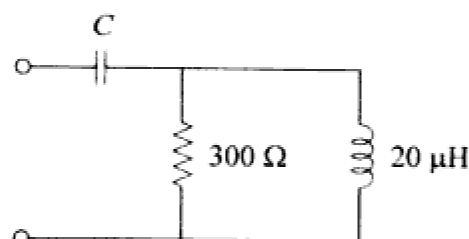


图 9-91 习题 9-91 的电路原理图

9-92 某传输线的串联阻抗为$\boldsymbol{Z} = 100\angle 75^\circ\ \Omega$，分流导纳为$\boldsymbol{Y} = 450\angle 48^\circ\ \mu\text{S}$。试求：(a) 特性阻抗$\boldsymbol{Z}_o = \sqrt{Z/Y}$；(b) 传播常数$\gamma = \sqrt{ZY}$。

9-93 某功率传输系统的模型如图9-92所示，已知：

源电压$\boldsymbol{V}_s = 115\angle 0^\circ\text{ V}$，

源阻抗$\boldsymbol{Z}_s = 1 + \text{j}\,0.5\ \Omega$，

线阻抗$\boldsymbol{Z}_l = 0.4 + \text{j}\,0.3\ \Omega$，

负载阻抗$\boldsymbol{Z}_L = 23.2 + \text{j}\,18.9\ \Omega$，

试求负载电流$\boldsymbol{I}_L$。

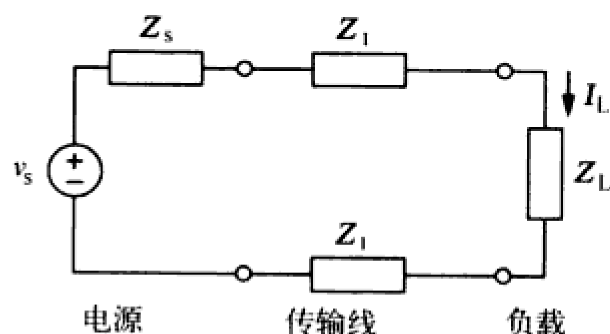


图 9-92 习题 9-93 的电路原理图

第10章　正弦稳态分析

我的朋友分为三类，爱我的人、恨我的人和对我漠不关心的人。爱我的人让我学会温柔善良，恨我的人让我学会小心谨慎，对我漠不关心的人让我学会独立。

——J. E. Dinger

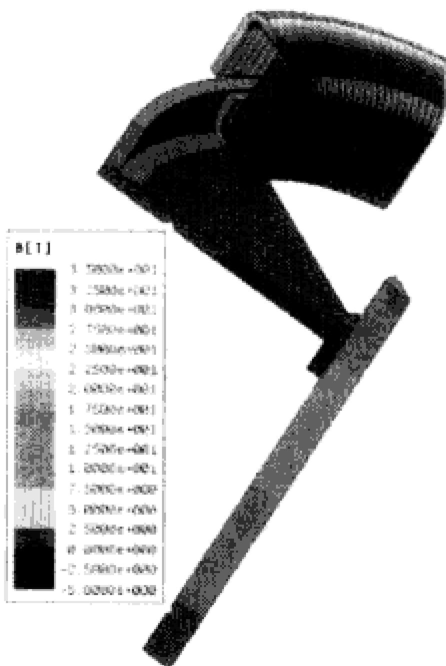
扩展职业生涯

软件工程领域的职业生涯

软件工程是指在计算机程序的设计、构建以及验证过程中处理科学计算的实际应用问题，以及开发、处理和维护相关文档的工程领域。软件工程是电子工程的一个分支，随着需要采用各类软件包执行程序任务的学科越来越多，以及可编程微电子系统的应用越来越广泛，软件工程也变得日益重要。

不能将软件工程师的角色与计算机科学家的角色相混淆。软件工程师是一个实践工作者，而不是理论家。软件工程师必须具备良好的计算机编程技能，熟悉编程语言，特别是熟悉应用日益普及的C++语言。由于软件与硬件密切是相关的，因此，软件工程师必须全面掌握硬件设计的相关知识。最重要的是，软件工程师还应该具备一定的与所开发的软件具体应用的领域相关的专业知识。

总之，软件工程领域为乐于从事编程和软件包开发的人士提供了广阔的职业空间，大量有趣的、具有挑战性的机遇都青睐受过研究生教育的人，同样，更高的回报总是属于那些准备充分的人。



建模软件的输出

10.1　引言

在第9章我们已经学习了利用相量法确定电路对正弦输入信号的强迫响应或稳态响应的过程，并且证明了欧姆定律与基尔霍夫定律同样适用于交流电路。本章将介绍如何利用节点分析法、网孔分析法、戴维南定理、诺顿定理、叠加原理以及电源变换等分析交流电路。由于这些方法已经在直流电路的分析中讲解过，因此本章的重点在于举例说明。

分析交流电路通常包括三个步骤。

分析交流电路的步骤：

(1) 将电路转换到相量域或频域。

(2) 利用相应的电路分析方法（节点分析法、网孔分析法、叠加原理等）求解电路。

(3) 将所求得的相量转换到时域。

如果所求解的问题已经明确在频域中，则无需进行步骤（1）。在步骤（2）中，分析方法与直流电路的分析方法相同，只是在交流电路分析中出现了复数运算的问题。掌握了第9章的知识，步骤（3）就变得易于处理了。

本章最后介绍如何应用PSpice软件求解交流电路，并将交流电路分析方法应用于两个实际的交流电路中：振荡器与交流晶体管电路。

利用相量实现交流电路的频域分析要比在时域中分析电路容易得多。

10.2 节点分析法

节点分析法的基础是基尔霍夫电流定律。正如9.6节所述，由于KCL同样适用于相量，因此，可以利用节点分析法求解交流电路。下面通过例题予以说明。

例题10-1 试利用节点分析法求如图10-1所示电路中的i_x。

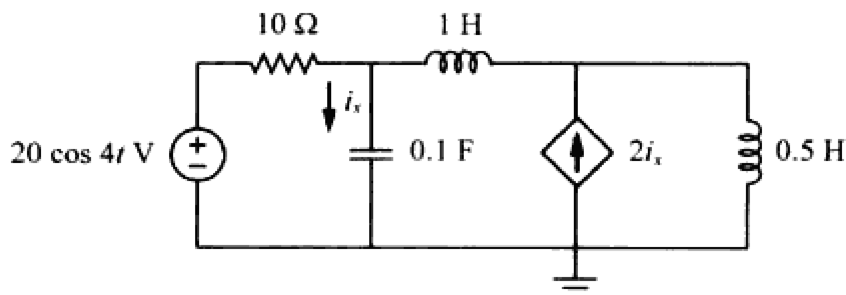


图 10-1 例题 10-1 的电路原理图

解 首先将该电路转换到频域：

$$20\cos 4t \Rightarrow 20\angle 0^\circ,\ \omega = 4\ \text{rad/s}$$

$$1\ \text{H} \Rightarrow \text{j}\omega L = \text{j}4$$

$$0.5\ \text{H} \Rightarrow \text{j}\omega L = \text{j}2$$

$$0.1\ \text{F} \Rightarrow \frac{1}{\text{j}\omega C} = -\text{j}2.5$$

于是，得到频域中的等效电路如图10-2所示。

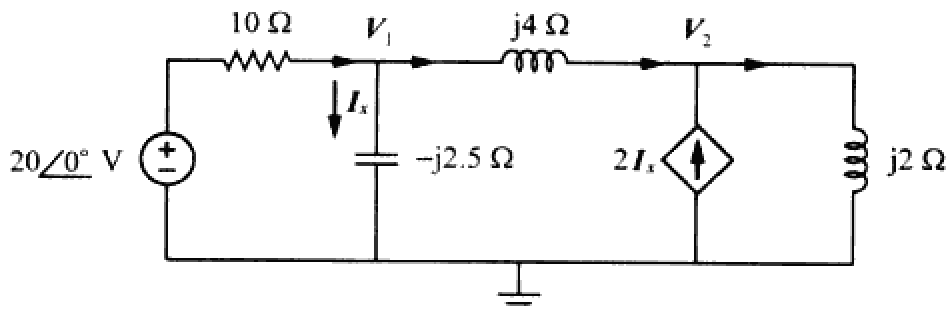


图 10-2 图 10-1 所示电路的频域等效电路

在节点1处应用KCL，得到：

$$\frac{20 - V_1}{10} = \frac{V_1}{-\text{j}2.5} + \frac{V_1 - V_2}{\text{j}4}$$

即

$$(1 + \text{j}1.5)V_1 + \text{j}2.5V_2 = 20 \tag{10-1-1}$$

在节点2处有：

$$2I_x + \frac{V_1 - V_2}{\text{j}4} = \frac{V_2}{\text{j}2}$$

但$I_x = V_1/-\text{j}\,2.5$，将其代入后可得：

$$\frac{2V_1}{-\text{j}2.5} + \frac{V_1 - V_2}{\text{j}4} = \frac{V_2}{\text{j}2}$$

化简后得到：

$$11\boldsymbol{V}_1+15\boldsymbol{V}_2=0 \tag{10-1-2}$$

将式(10-1-1)与式(10-1-2)写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} 1+\mathrm{j}1.5 & \mathrm{j}2.5 \\ 11 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1 \\ \boldsymbol{V}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

相关的行列式为：

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1+\mathrm{j}1.5 & \mathrm{j}2.5 \\ 11 & 15 \end{vmatrix}=15-\mathrm{j}5$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 20 & \mathrm{j}2.5 \\ 0 & 15 \end{vmatrix}=300,\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1+\mathrm{j}1.5 & 20 \\ 11 & 0 \end{vmatrix}=-220$$

$$\boldsymbol{V}_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{300}{15-\mathrm{j}5}=18.97\angle 18.43^\circ\ \mathrm{V}$$

$$\boldsymbol{V}_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-220}{15-\mathrm{j}5}=13.91\angle 198.3^\circ\ \mathrm{V}$$

于是，电流$\boldsymbol{I}_x$为：

$$\boldsymbol{I}_x=\frac{\boldsymbol{V}_1}{-\mathrm{j}2.5}=\frac{18.97\angle 18.43^\circ}{2.5\angle -90^\circ}=7.59\angle 108.4^\circ\ \mathrm{A}$$

将上述结果转换到时域，可得：

$$i_x=7.59\cos(4t+108.4^\circ)\mathrm{A}$$

练习题10-1 试利用节点分析法求如图10-3所示电路中的v_1与v_2。

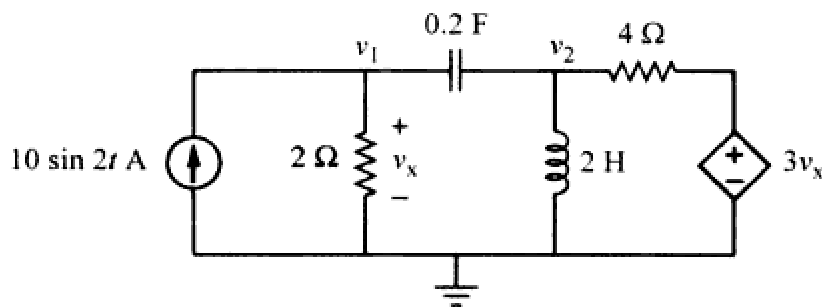


图 10-3 练习题 10-1 的电路原理图

答 $v_1(t)=11.32\sin(2t+60.01^\circ)$ V，$v_2(t)=33.02\sin(2t+57.12^\circ)$ V。

例题10-2 试计算如图10-4所示电路中的$\boldsymbol{V}_1$与$\boldsymbol{V}_2$。

解 节点1与节点2组成一个超节点（广义节点），如图10-5所示。在该超节点处应用KCL，得到：

$$3=\frac{\boldsymbol{V}_1}{-\mathrm{j}3}+\frac{\boldsymbol{V}_2}{\mathrm{j}6}+\frac{\boldsymbol{V}_2}{12}$$

即

$$36=\mathrm{j}4\boldsymbol{V}_1+(1-\mathrm{j}2)\boldsymbol{V}_2 \tag{10-2-1}$$

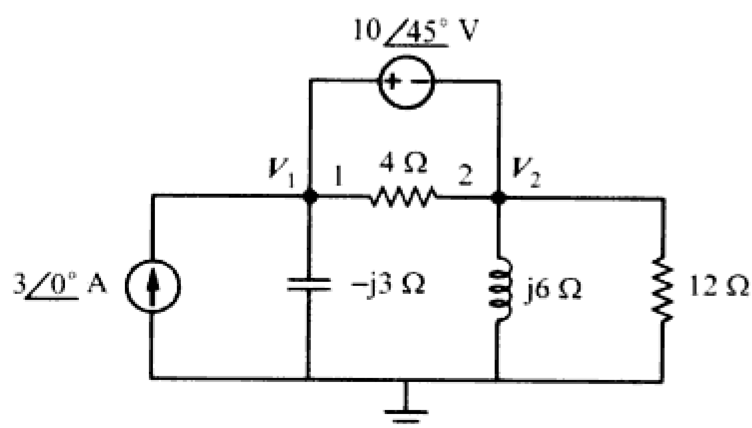


图 10-4 例题 10-2 的电路原理图

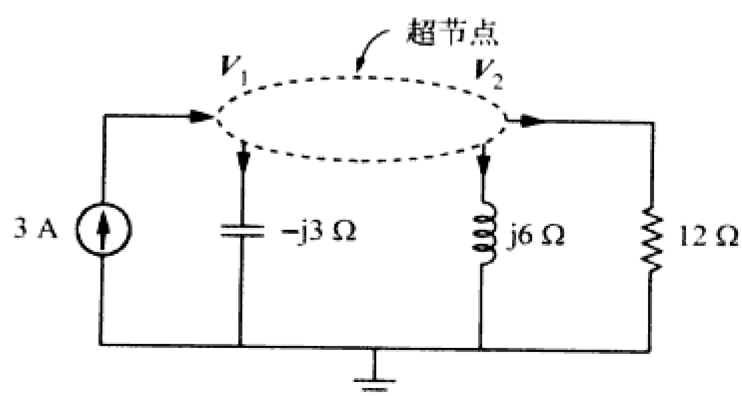


图 10-5 图 10-4 所示电路中的超节点

但电压源连接在节点1与节点2之间的，于是：

$$\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{V}_2+10\underline{/45^\circ} \tag{10-2-2}$$

将式(10-2-2)代入式(10-2-1)，得到：

$$36-40\underline{/135^\circ}=(1+\mathrm{j}2)\boldsymbol{V}_2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V}_2=31.41\underline{/-87.18^\circ}\ \mathrm{V}$$

由式(10-2-2)可得：

$$\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{V}_2+10\underline{/45^\circ}=25.78\underline{/-70.48^\circ}\ \mathrm{V}$$

练习题10-2 试计算如图10-6所示电路中的$\boldsymbol{V}_1$与$\boldsymbol{V}_2$。

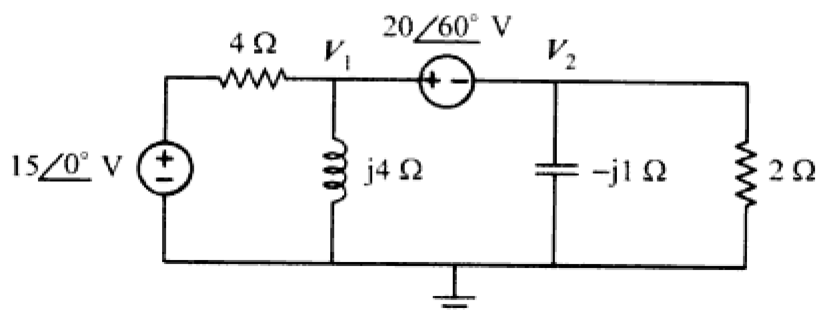


图 10-6 练习题 10-2 的电路原理图

答 $\boldsymbol{V}_1=19.36\underline{/69.67^\circ}$ V，$\boldsymbol{V}_2=3.376\underline{/165.7^\circ}$ V。

10.3 网孔分析法

网孔分析法的基础是基尔霍夫电压定律。9.6节已经说明了KVL对于交流电路的有效性，下面通过举例予以说明。需要注意的是，网孔分析法本质上仅适用于平面电路。

例题10-3 试利用网孔分析法确定如图10-7所示电路中的电流$\boldsymbol{I}_o$。

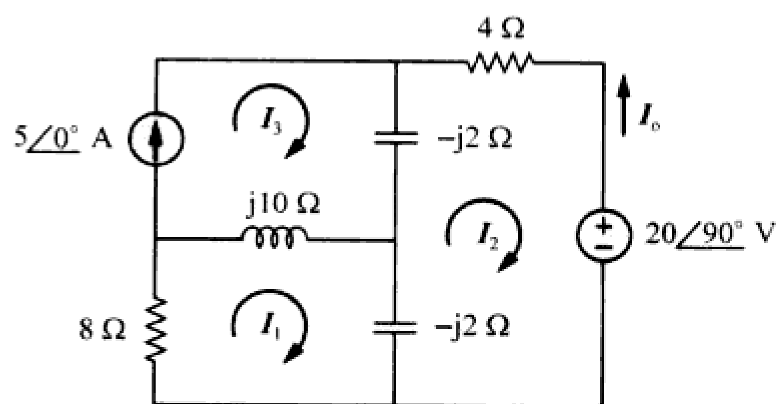


图 10-7 例题 10-3 的电路原理图

解 对网孔1应用KVL，可得：

$$(8+\mathrm{j}10-\mathrm{j}2)\boldsymbol{I}_1-(-\mathrm{j}2)\boldsymbol{I}_2-\mathrm{j}10\boldsymbol{I}_3=0 \tag{10-3-1}$$

对网孔2应用KVL，可得：

$$(4-\mathrm{j}2-\mathrm{j}2)\boldsymbol{I}_2-(-\mathrm{j}2)\boldsymbol{I}_1-(-\mathrm{j}2)\boldsymbol{I}_3+20\underline{/90^\circ}=0 \tag{10-3-2}$$

对网孔3而言，$\boldsymbol{I}_3=5$，将其代入式(10-3-1)与式(10-3-2)，得到：

$$(8+\mathrm{j}8)\ \boldsymbol{I}_1+\mathrm{j}2\ \boldsymbol{I}_2=\mathrm{j}50 \tag{10-3-3}$$

$$\mathrm{j}2\ \boldsymbol{I}_1+(4-\mathrm{j}4)\ \boldsymbol{I}_2=-\mathrm{j}20-\mathrm{j}10 \tag{10-3-4}$$

将式(10-3-3)与式(10-3-4)写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} 8+\mathrm{j}8 & \mathrm{j}2 \\ \mathrm{j}2 & 4-\mathrm{j}4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 \\ \boldsymbol{I}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathrm{j}50 \\ -\mathrm{j}30 \end{bmatrix}$$

相关的行列式为：

$$\Delta=\begin{vmatrix} 8+\mathrm{j}8 & \mathrm{j}2 \\ \mathrm{j}2 & 4-\mathrm{j}4 \end{vmatrix}=32(1+\mathrm{j})(1-\mathrm{j})+4=68$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 8+\mathrm{j}8 & \mathrm{j}50 \\ \mathrm{j}2 & -\mathrm{j}30 \end{vmatrix}=340-\mathrm{j}240=416.17\angle -35.22^\circ$$

$$\boldsymbol{I}_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{416.17\angle -35.22^\circ}{68}=6.12\angle -35.22^\circ\ \mathrm{A}$$

所求的电流为：

$$\boldsymbol{I}_o=-\boldsymbol{I}_2=6.12\angle 144.78^\circ \mathrm{A}$$

练习题10-3 试利用网孔分析法求图10-8所示电路中的$\boldsymbol{I}_o$。

答 $1.194\angle 65.45^\circ$ A。

例题10-4 试利用网孔分析法求解如图10-9所示电路中的$\boldsymbol{V}_o$。

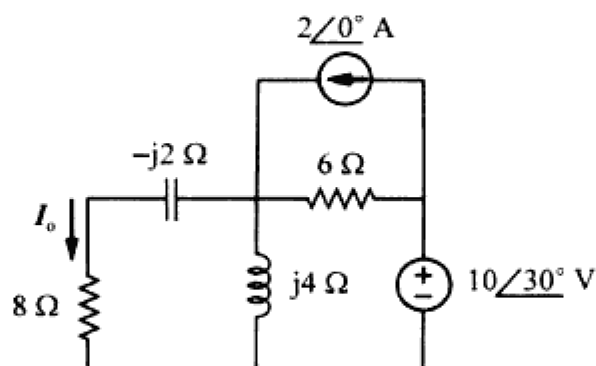


图 10-8 练习题 10-3 的电路原理图

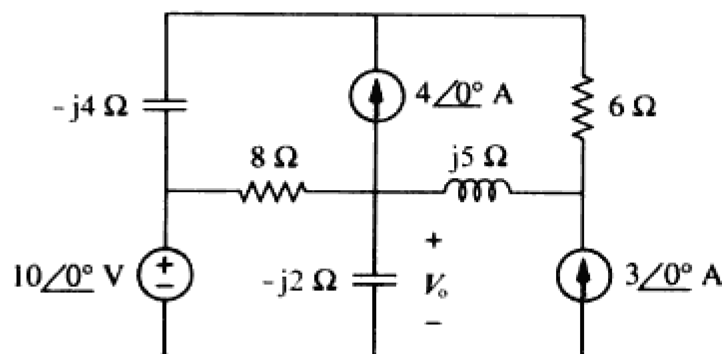


图 10-9 例题 10-4 的电路原理图

解 由于网孔3与网孔4之间包括电流源，所以网孔3与网孔4组成一个超网孔（广义网孔），如图10-10所示。对网孔1运用KVL，可得：

$$-10+(8-\mathrm{j}2)\,\boldsymbol{I}_1-(-\mathrm{j}2)\,\boldsymbol{I}_2-8\boldsymbol{I}_3=0$$

即

$$(8-\mathrm{j}2)\,\boldsymbol{I}_1+\mathrm{j}2\,\boldsymbol{I}_2-8\,\boldsymbol{I}_3=10 \tag{10-4-1}$$

对于网孔2，有：

$$\boldsymbol{I}_2=-3 \tag{10-4-2}$$

对于超网孔，有：

$$(8-\mathrm{j}4)\,\boldsymbol{I}_3-8\,\boldsymbol{I}_1+(6+\mathrm{j}5)\,\boldsymbol{I}_4-\mathrm{j}5\,\boldsymbol{I}_2=0 \tag{10-4-3}$$

由于网孔3与网孔4之间存在电流源，因此在节点A处，有：

$$\boldsymbol{I}_4=\boldsymbol{I}_3+4 \tag{10-4-4}$$

方法1：将上述四个方程的求解通过消元化简为两个方程。

将式(10-4-1)与式(10-4-2)合并后得到：

$$(8-\mathrm{j}2)\,\boldsymbol{I}_1-8\,\boldsymbol{I}_3=10+\mathrm{j}\,6 \tag{10-4-5}$$

将式(10-4-2)～式(10-4-4)合并后得到：

$$-8\,\boldsymbol{I}_1+(14+\mathrm{j}\,)\,\boldsymbol{I}_3=-24-\mathrm{j}35 \tag{10-4-6}$$

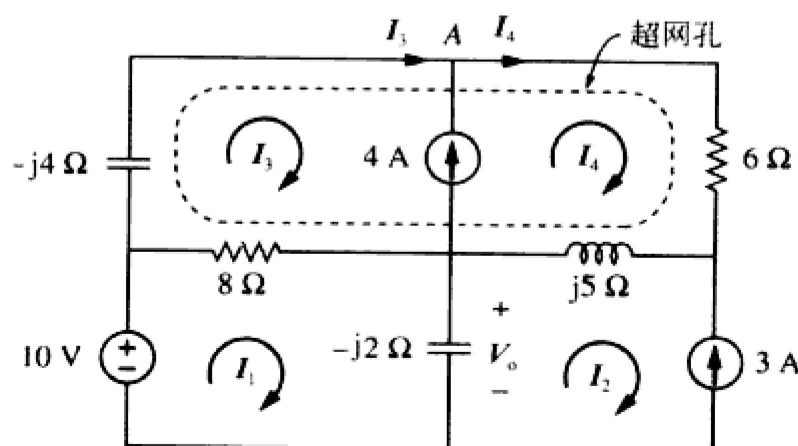


图 10-10 图 10-9 所示电路的分析

由式(10-4-5)与式(10-4-6)可得矩阵方程为：

$$\begin{bmatrix} 8-\mathrm{j}2 & -8 \\ -8 & 14+\mathrm{j} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 \\ \boldsymbol{I}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10+\mathrm{j}6 \\ -24-\mathrm{j}35 \end{bmatrix}$$

相关的行列式为：

$$\Delta=\begin{vmatrix} 8-\mathrm{j}2 & -8 \\ -8 & 14+\mathrm{j} \end{vmatrix}=112+\mathrm{j}8-\mathrm{j}28+2-64=50-\mathrm{j}20$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 10+\mathrm{j}6 & -8 \\ -24-\mathrm{j}35 & 14+\mathrm{j} \end{vmatrix}=140+\mathrm{j}10+\mathrm{j}84-6-192-\mathrm{j}280$$
$$=-58-\mathrm{j}186$$

于是，电流$\boldsymbol{I}_1$为：

$$\boldsymbol{I}_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-58-\mathrm{j}186}{50-\mathrm{j}20}=3.618\underline{/274.5^\circ}\ \mathrm{A}$$

所求的电压$\boldsymbol{V}_o$为：

$$\boldsymbol{V}_o=-\mathrm{j}2(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{I}_2)=-\mathrm{j}2(3.618\underline{/274.5^\circ}+3)$$
$$=-7.2134-\mathrm{j}6.568=9.756\underline{/222.32^\circ}\mathrm{V}$$

方法2：利用MATLAB求解式(10-4-1)～式(10-4-4)，首先将上述四个方程写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} 8-\mathrm{j}2 & \mathrm{j}2 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & -\mathrm{j}5 & 8-\mathrm{j}4 & 6+\mathrm{j}5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 \\ \boldsymbol{I}_2 \\ \boldsymbol{I}_3 \\ \boldsymbol{I}_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{10-4-7a}$$

即

$$\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{B}$$

求$\boldsymbol{A}$的逆矩阵即可得到$\boldsymbol{I}$：

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \tag{10-4-7b}$$

以下为利用MATLAB求解的程序和得到的结果：

```
>> A=[(8-j*2)    j*2      -8          0;
        0          1        0          0;
       -8         -j*5     (8-j*4)    (6+j*5);
        0          0        -1         1];
>>B=[10  -3  0  4]';
>>I=inv(A)*B
I=
```

```
   0.2828-3.6069i
   -3.0000
   -1.8690-4.4276i
   2.1310-4.4276i
>>Vo=-2*j*(I(1)-I(2))
Vo=
   -7.2138-6.5655i
```

与采用方法一得到的结果相同。

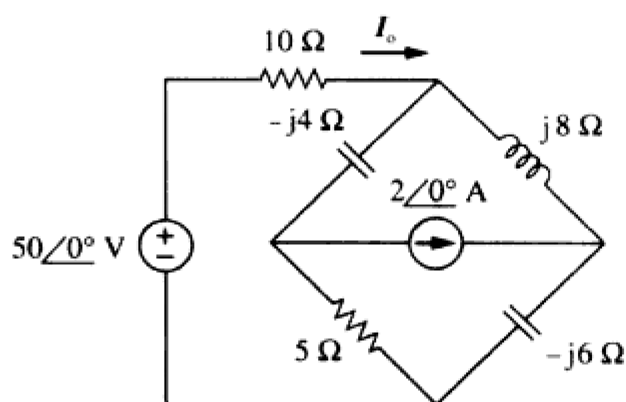


图 10-11 练习题 10-4 的电路原理图

练习题10-4 试计算如图10-11所示电路中的电流I_o。

答 5.075/5.943° A。

10.4 叠加原理

由于交流电路是线性电路，所以叠加原理在交流电路中的应用与在直流电路中的应用是相同的。如果电路中包括以不同频率工作的若干个电源，叠加原理的应用则变得更为重要。在这种情况下，由于阻抗取决于频率，因此对于不同的频率必须采用不同的频域电路，总响应则是时域中各单个响应之和。在相量域或频域中叠加响应是不正确的，为什么呢？因为在正弦分析中，指数因子$e^{j\omega t}$是隐含的，即对于不同的角频率ω，该指数因子是变化的，因此，在相量域中不同频率响应的叠加是没有任何意义的。于是，当电路中包括以不同频率工作的电源时，必须在时域中完成各频率响应的叠加。

例题10-5 试利用叠加原理确定如图10-7所示电路中的I_o。

解 令

$$I_o = I'_o + I''_o \tag{10-5-1}$$

其中，I'_o与I''_o分别为由电压源与电流源引起的电流。为了求解I'_o，考虑如图10-12a所示的电路。如果设Z为-j2与8+j10的并联阻抗，则有：

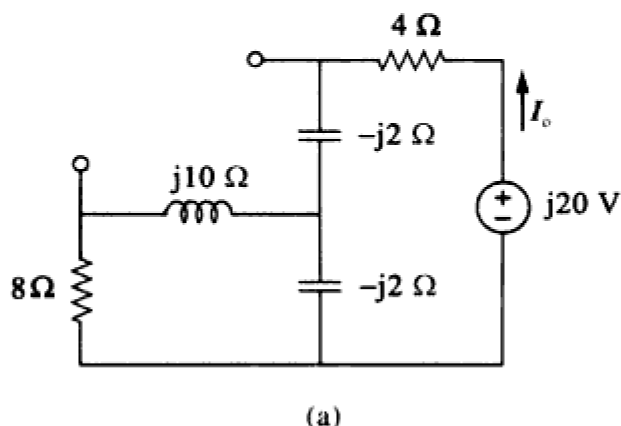
$$Z = \frac{-j2(8+j10)}{-2j+8+j10} = 0.25 - j2.25$$

于是，电流I'_o为：

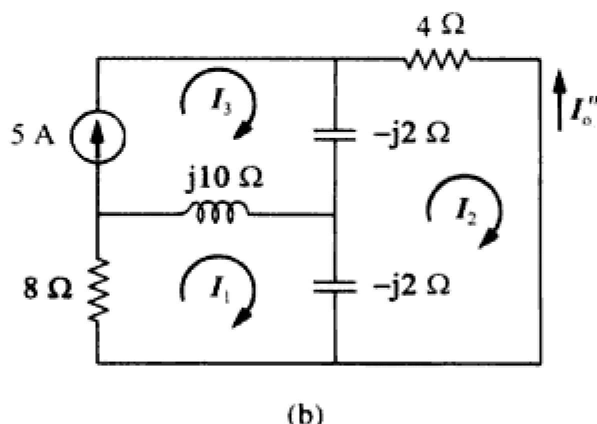
$$I'_o = \frac{j20}{4-j2+Z} = \frac{j20}{4.25-j4.25}$$

即

$$I'_o = -2.353 + j2.353 \tag{10-5-2}$$



(a)



(b)

图 10-12 用于求解例题 10-5 的电路原理图

为了求解I''_o，考虑如图10-12b所示电路。对于网孔1，有：

$$(8+j8)I_1-j10I_3+j2I_2=0 \tag{10-5-3}$$

对于网孔2，有：

$$(4-j4)I_2+j2I_1+j2I_3=0 \tag{10-5-4}$$

对于网孔3，有：

$$I_3=5 \tag{10-5-5}$$

由式(10-5-4)与式(10-5-5)可得：

$$(4-j4)I_2+j2I_1+j10=0$$

利用I_2表示I_1，有：

$$I_1=(2+j2)I_2-5 \tag{10-5-6}$$

将式(10-5-5)与式(10-5-6)代入式(10-5-3)得到：

$$(8+j8)[(2+j2)I_2-5]-j50+j2I_2=0$$

即

$$I_2=\frac{90-j40}{34}=2.647-j1.176$$

于是，电流I''_o为：

$$I''_o=-I_2=-2.647+j1.176 \tag{10-5-7}$$

由式(10-5-2)与式(10-5-7)可得：

$$I_o=I'_o+I''_o=-5+j3.529=6.12\underline{/144.78^\circ}\text{ A}$$

与例题10-3得到的结果相一致。可以看出，利用叠加原理求解本例并非最佳方法，似乎利用叠加原理求解要比用原电路求解复杂一倍。然而，从下面例题10-6可以看到，利用叠加原理求解该例则是最方便的办法。

练习题10-5 试利用叠加原理求解如图10-8所示电路中的I_o。

答 $1.194\underline{/65.45^\circ}$ A。

例题10-6 试利用叠加原理求解如图10-13所示电路中的v_o。

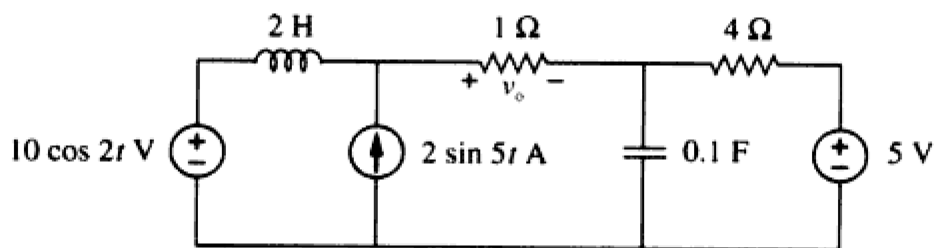


图 10-13 例题 10-6 的电路原理图

解 本题的电路工作在三个不同的频率（直流电压源的$\omega=0$）下，求解本例的一种方法是利用叠加原理，将所求的响应分解为三个单一频率响应的叠加。因此，设：

$$v_o=v_1+v_2+v_3 \tag{10-6-1}$$

其中，v_1为由5 V直流电压源引起的响应，v_2为由10 cos 2t V电压源引起的响应，v_3为由2 sin 5 t A电流源引起的响应。

为了求出v_1，需将除5 V直流电源以外的其他电源均设置为零。我们知道在稳定状态下，电容器对直流相当于开路，电感器对直流相当于短路，或者从另一个角度讲，由于$\omega=0$，所以$j\omega L=0$，$1/j\omega C=\infty$。此时的等效电路如图10-14a所示。由分压原理可知：

$$-v_1=\frac{1}{1+4}(5)=1\text{V} \tag{10-6-2}$$

为了求出v_2，需将5 V直流电源与2 sin 5 *t* A电流源设置为零，并将该电路转换到频域：

$$10\ \cos\ 2t \ \Rightarrow\ 10\underline{/0^\circ},\ \omega = 2\ \text{rad/s}$$

$$2\text{H} \ \Rightarrow\ \text{j}\omega L = \text{j}4\ \Omega$$

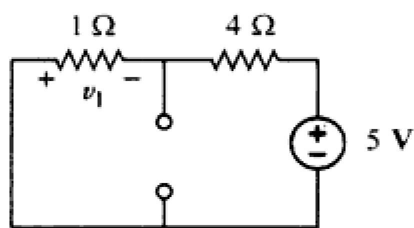
$$0.1\text{F} \ \Rightarrow\ \frac{1}{\text{j}\omega C} = -\text{j}5\ \Omega$$

此时的等效电路如图10-14b所示。设：

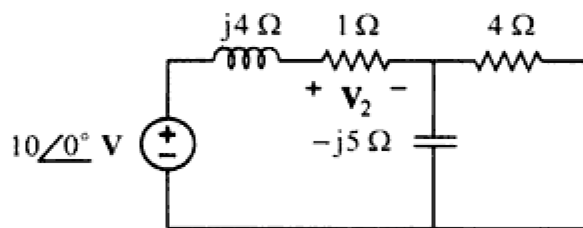
$$\boldsymbol{Z} = -\text{j}5 \parallel 4 = \frac{-\text{j}5\times 4}{4-\text{j}5} = 2.439 - \text{j}1.951$$

由分压原理可知：

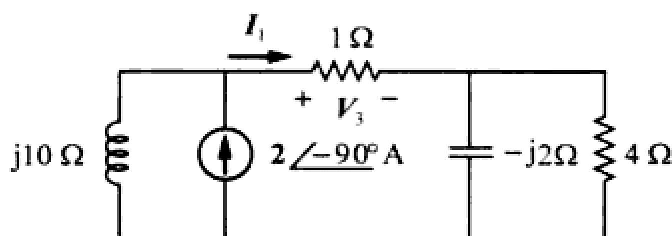
$$\boldsymbol{V}_2 = \frac{1}{1+\text{j}4+\boldsymbol{Z}}(10\underline{/0^\circ}) = \frac{10}{3.439+\text{j}2.049} = 2.498\underline{/-30.79^\circ}$$



（a）将除 5 V 直流电源以外的其他电源均设置为零



（b）将除交流电压源以外的其他电源均设置为零



（c）将除交流电流源以外的其他电源均设置为零

图 10-14 用于求解例题 10-6 图的电路原理图

变换到时域为：

$$v_2 = 2.498\cos(2t - 30.79^\circ) \tag{10-6-3}$$

为了求出v_3，需将两个电压源均设置为零，并将相应的电路转换到频域。

$$2\sin 5t \ \Rightarrow\ 2\underline{/-90^\circ},\quad \omega = 5\ \text{rad/s}$$

$$2\text{H} \ \Rightarrow\ \text{j}\omega L = \text{j}10\Omega$$

$$0.1\text{F} \ \Rightarrow\ \frac{1}{\text{j}\omega C} = -\text{j}2\Omega$$

此时的等效电路如图10-14c所示。设：

$$\boldsymbol{Z}_1 = -\text{j}2 \parallel 4 = \frac{-\text{j}2\times 4}{4-\text{j}2} = 0.8 - \text{j}1.6\Omega$$

由分流原理可知：

$$\boldsymbol{I}_1 = \frac{\text{j}10}{\text{j}10+1+\boldsymbol{Z}_1}(2\underline{/-90^\circ})\text{A}$$

$$\boldsymbol{V}_3 = \boldsymbol{I}_1 \times 1 = \frac{\text{j}10}{1.8+\text{j}8.4}(-\text{j}2) = 2.328\underline{/-80^\circ}\text{V}$$

转换到时域为：

$$v_3 = 2.33\cos(5t - 80°) = 2.33\sin(5t + 10°)\ \text{V} \tag{10-6-4}$$

将式(10-6-2)～式(10-6-4)代入式(10-6-1)，可得：

$$v_o(t) = -1 + 2.498\cos(2t - 30.79°) + 2.33\sin(5t + 10°)\ \text{V}$$

练习题10-6 试利用叠加原理计算如图10-15所示电路中的v_o。

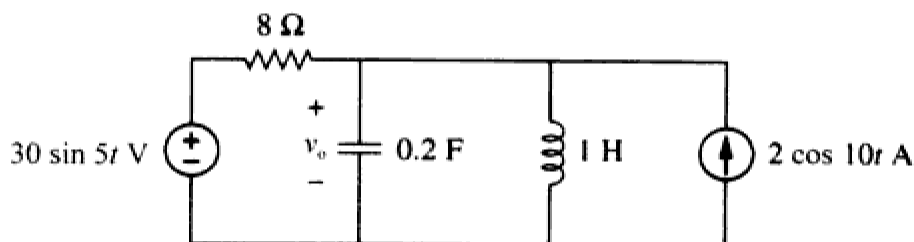


图 10-15 练习题 10-6 的电路原理图

答 $4.631\sin(5t - 81.12°) + 1.051\cos(10t - 86.24°)$ V。

10.5 电源变换

如图10-16所示，频域中的电源变换包括将与阻抗串联的电压源转换为与阻抗并联的电流源，或反之。下面在学习由一种类型的电源转换为另一种类型的电源时，必须牢记如下关系：

$$\boxed{\mathbf{V}_s = \mathbf{Z}_s\mathbf{I}_s \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{I}_s = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}_s}} \tag{10-1}$$

图 10-16 电源变换

例题10-7 试利用电源变换方法计算如图10-17所示电路中的$\mathbf{V}_x$。

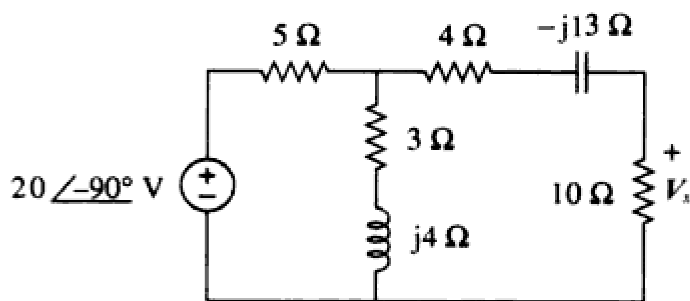


图 10-17 例题 10-7 的电路原理图

解 将图中的电压源转换为电流源，得到如图10-18a所示的电路，图中，

$$\mathbf{I}_s = \frac{20\angle -90°}{5} = 4\angle -90° = -\text{j}4\text{A}$$

5 Ω电阻与(3＋j4)阻抗并联后，得到：

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{5(3 + \text{j}4)}{8 + \text{j}4} = 2.5 + \text{j}1.25\Omega$$

再将电流源转换为电压源，得到如图10-18b所示的电路，图中，

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{I}_s\mathbf{Z}_1 = -\text{j}4(2.5 + \text{j}1.25) = 5 - \text{j}10\ \text{V}$$

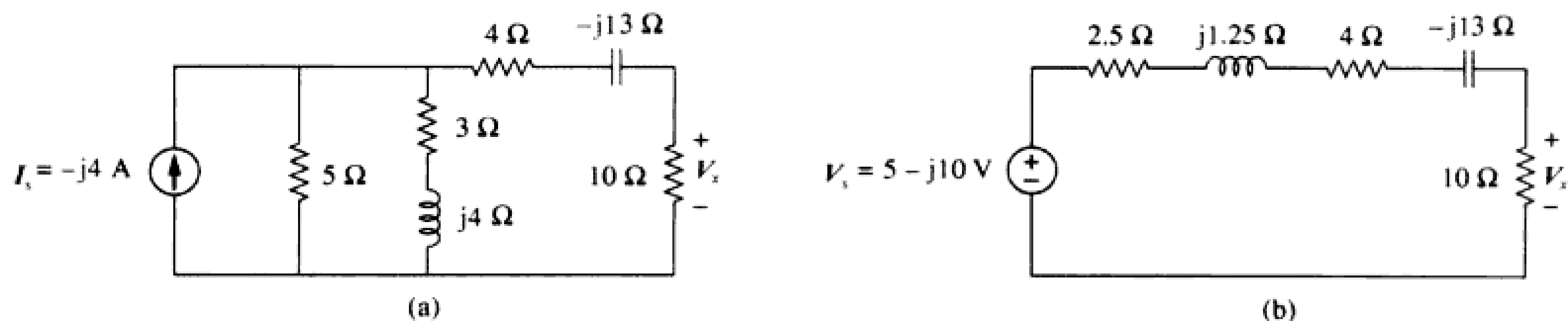


图 10-18 用于求解图 10-17 所示电路的原理图

由分压原理可知：

$$V_x = \frac{10}{10 + 2.5 + j1.25 + 4 - j13}(5 - j10) = 5.519\underline{/-28^\circ}\ \text{V}$$

练习题10-7 试利用电源变换的概念求解如图10-19所示电路中的I_o。

答 $3.288\underline{/99.46^\circ}$ A。

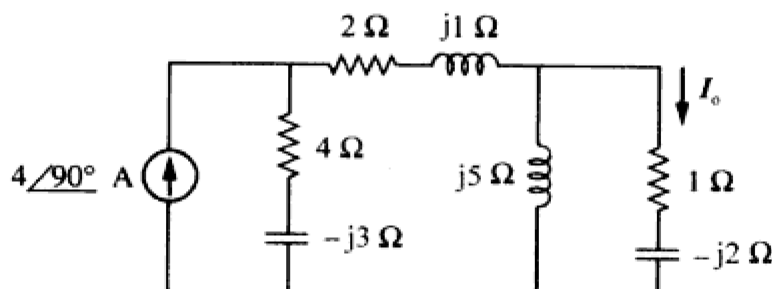


图 10-19 练习题 10-7 的电路原理图

10.6 戴维南等效电路与诺顿等效电路

戴维南定理与诺顿定理在交流电路中的应用与在直流电路中的应用是相同的，唯一的不同只是需要进行复数运算。戴维南等效电路的频域形式如图10-20所示，图中的线性电路用一个电压源和与之相串联的一个阻抗来取代。诺顿等效电路的频域形式如图10-21所示，图中的线性电路用一个电流源和与之相并联的一个阻抗来取代。必须牢记的是，上述两种等效电路之间的关系为：

$$\boxed{V_{Th} = Z_N I_N, \quad Z_{Th} = Z_N} \tag{10-2}$$

恰好是前一节介绍的电源变换关系，其中V_{Th}为开路电压，I_N为短路电流。

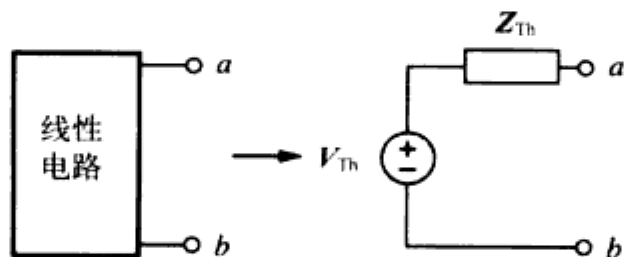


图 10-20 戴维南等效电路

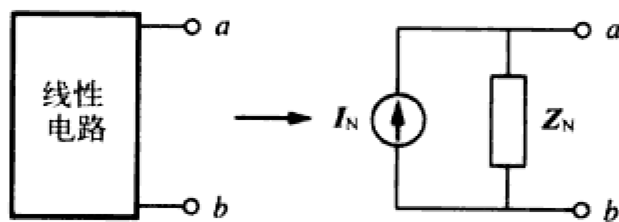


图 10-21 诺顿等效电路

如果电路中包括以不同频率工作的电源（如例题10-6），必须针对各个频率确定其戴维南等效电路或诺顿等效电路。这样就会得到若干个完全不同的等效电路，每一个对应于一个不同的频率，而不是由等效电源和等效阻抗组成的一个等效电路。

例题10-8 试确定如图10-22所示电路在端口$a-b$处的戴维南等效电路。

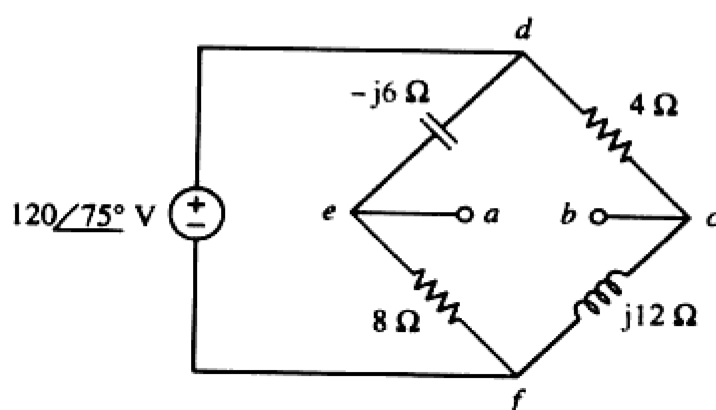


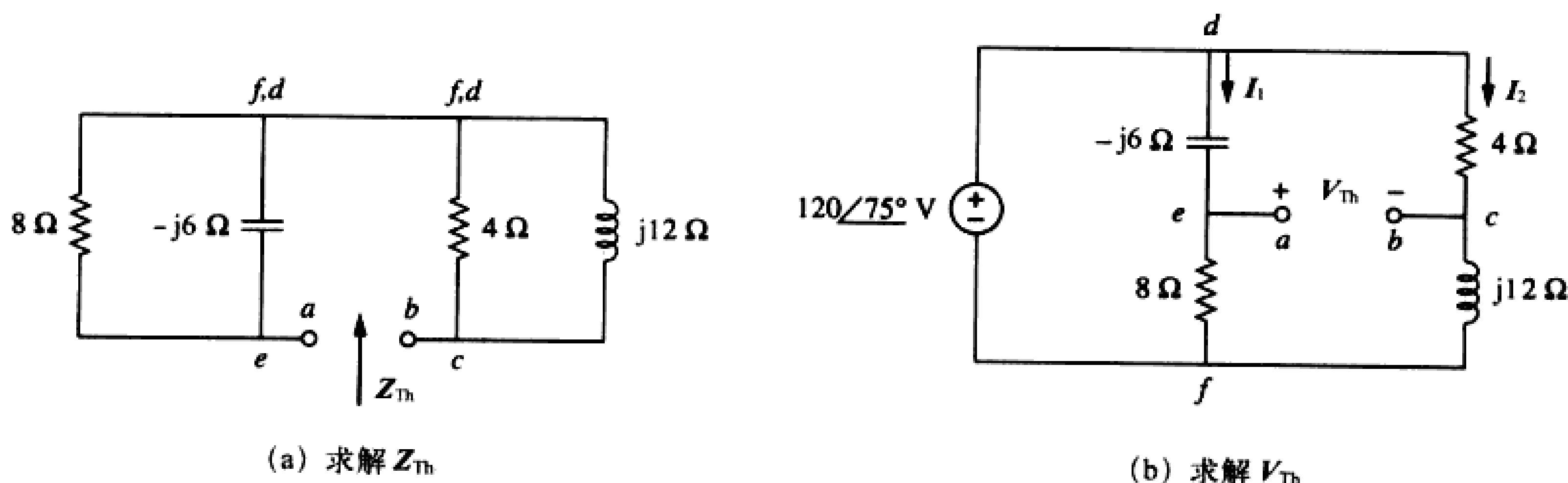
图 10-22 例题 10-8 的电路原理图

解 将电压源设置为零即可求出$\boldsymbol{Z}_{Th}$。如图10-23a所示，8 Ω电阻与−j6 Ω电抗相并联，于是，合并后的阻抗为：

$$\boldsymbol{Z}_1 = -j6 \parallel 8 = \frac{-j6 \times 8}{8 - j6} = 2.88 - j3.84\Omega$$

同理，4Ω电阻与j12 Ω电抗相并联，合并后的阻抗为：

$$\boldsymbol{Z}_2 = 4 \parallel j12 = \frac{j12 \times 4}{4 + j12} = 3.6 + j1.2\Omega$$



(a) 求解$\boldsymbol{Z}_{Th}$ (b) 求解$\boldsymbol{V}_{Th}$

图 10-23 用于求解图 10-22 所示电路的原理图

戴维南阻抗为$\boldsymbol{Z}_1$与$\boldsymbol{Z}_2$的串联，即：

$$\boldsymbol{Z}_{Th} = \boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2 = 6.48 - j2.64\ \Omega$$

为了求解$\boldsymbol{V}_{Th}$，考虑如图10-23b所示电路，图中$\boldsymbol{I}_1$与$\boldsymbol{I}_2$分别为：

$$\boldsymbol{I}_1 = \frac{120\angle 75^\circ}{8 - j6}\text{A}, \quad \boldsymbol{I}_2 = \frac{120\angle 75^\circ}{4 + j12}\text{A}$$

沿图10-23b所示电路中的回路$bcdeab$应用KVL，得到：

$$\boldsymbol{V}_{Th} - 4\boldsymbol{I}_2 + (-j6)\boldsymbol{I}_1 = 0$$

于是，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_{Th} &= 4\boldsymbol{I}_2 + j6\boldsymbol{I}_1 = \frac{480\angle 75^\circ}{4 + j12} + \frac{720\angle 75^\circ + 90^\circ}{8 - j6} \\ &= 37.95\angle 3.43^\circ + 72\angle 201.87^\circ \\ &= -28.936 - j24.55 = 37.95\angle 220.31^\circ\ \text{V}\end{aligned}$$

练习题10-8 试求如图10-24所示电路在端口$a-b$处的戴维南等效电路。

答 $\boldsymbol{Z}_{Th} = 12.4 - j3.2\ \Omega$，$\boldsymbol{V}_{Th} = 18.97\angle -51.57^\circ$ V。

例题10-9 试求如图10-25所示电路从端口$a-b$看进去的戴维南等效电路。

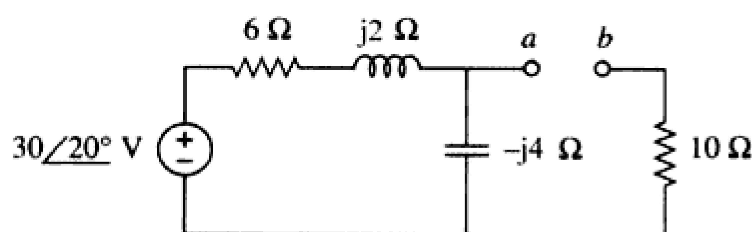


图 10-24 练习题 10-8 的电路原理图

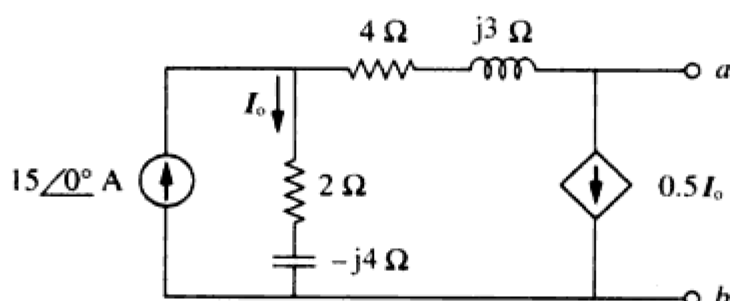


图 10-25 例题 10-9 的电路原理图

解 为了求出$\boldsymbol{V}_{Th}$，对如图10-26a所示电路中的节点1应用KCL，可得：

$$15 = \boldsymbol{I}_o + 0.5\,\boldsymbol{I}_o \;\Rightarrow\; \boldsymbol{I}_o = 10\text{ A}$$

对如图10-26a所示电路的右边回路应用KVL，得到：

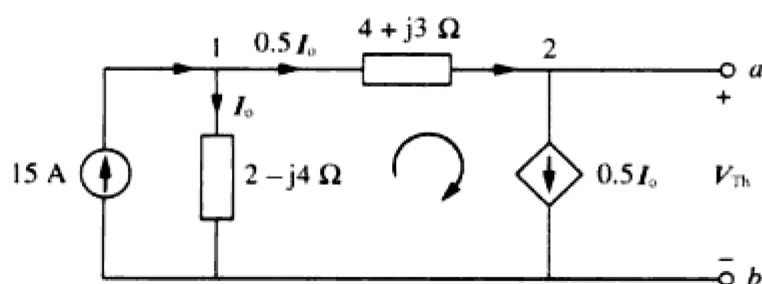
$$-\boldsymbol{I}_o(2-\text{j}4) + 0.5\,\boldsymbol{I}_o(4+\text{j}3) + \boldsymbol{V}_{Th} = 0$$

即：

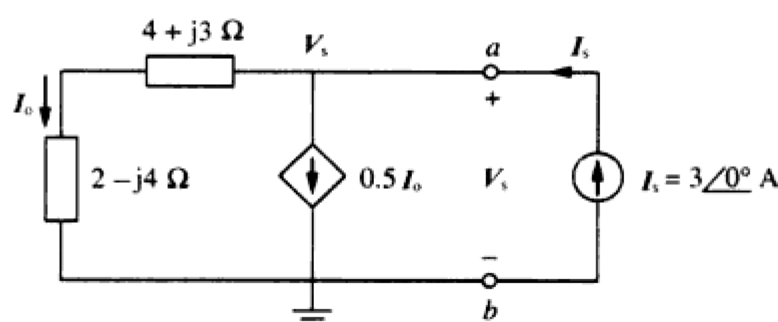
$$\boldsymbol{V}_{Th} = 10(2-\text{j}4)\; -5(4+\text{j}3) = -\text{j}55$$

于是，戴维南电压为：

$$\boldsymbol{V}_{Th} = 55\underline{/-90^\circ}\text{ V}$$



（a）求解 $\boldsymbol{V}_{Th}$



（b）求解 $\boldsymbol{Z}_{Th}$

图 10-26 用于求解图 10-25 所示电路的原理图

为了求出$\boldsymbol{Z}_{Th}$，需将独立电源去掉，由于存在受控电流源，所以需要在端口$a-b$处连接一个3A的电流源（这里的3 A是为了运算方便任意选取的，是一个可以被离开节点的总电流整除的数），如图10-26b所示。在节点处应用KCL，可得：

$$3 = \boldsymbol{I}_o + 0.5\,\boldsymbol{I}_o \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{I}_o = 2\text{ A}$$

对图10-26b中的外围回路应用KVL，有：

$$\boldsymbol{V}_s = \boldsymbol{I}_o(4+\text{j}3+2-\text{j}4) = 2(6-\text{j})$$

于是，戴维南阻抗为：

$$\boldsymbol{Z}_{Th} = \frac{\boldsymbol{V}_s}{\boldsymbol{I}_s} = \frac{2(6-\text{j})}{3} = 4-\text{j}0.6667\Omega$$

练习题10-9 试确定如图10-27所示电路从端口$a-b$看进去的戴维南等效电路。

答 $\boldsymbol{Z}_{Th} = 4.473\underline{/-7.64^\circ}\,\Omega$，$\boldsymbol{V}_{Th} = 7.35\underline{/72.9^\circ}\text{ V}$。

例题10-10 试利用诺顿定理确定如图10-28所示电路中的电流$\boldsymbol{I}_o$。

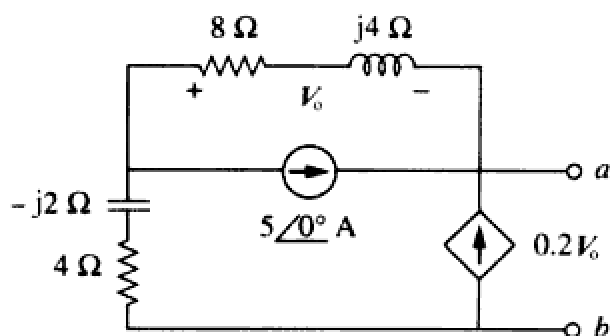


图 10-27 练习题 10-9 的电路原理图

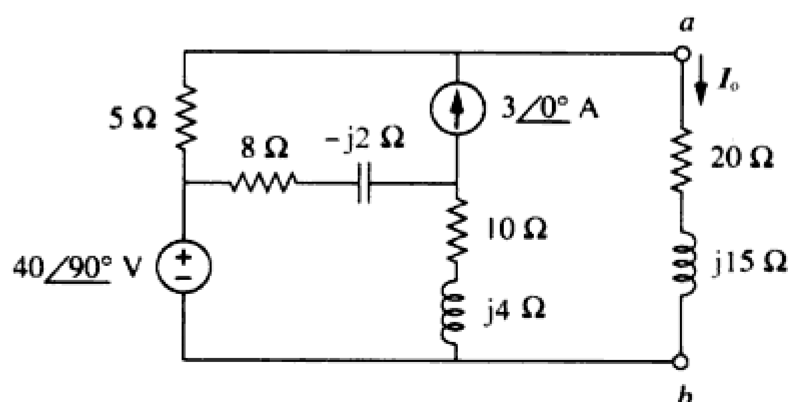


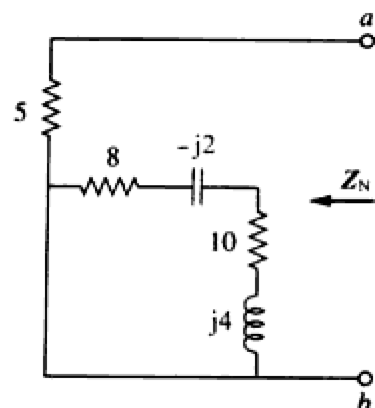
图 10-28 例题 10-10 的电路原理图

解 首先要确定端口$a-b$处的诺顿等效电路。$\boldsymbol{Z}_N$的求法与$\boldsymbol{Z}_{Th}$的求法相同，将各电源设置为零，得到如图10-29a所示电路，图中阻抗(8−j2)与(10+j4)被短路了，于是：

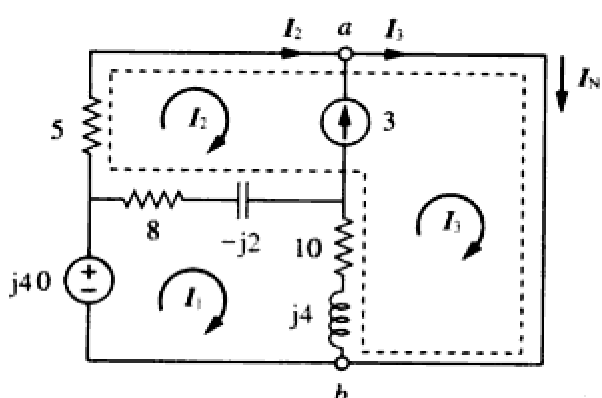
$$\boldsymbol{Z}_N = 5\Omega$$

为了求出$\boldsymbol{I}_N$，将端口$a-b$短路，如图10-29b所示，利用网孔分析法求解。由于网孔2与网孔3之间存在电流源，所以网孔2与网孔3形成一个超网孔。对于网孔1，有：

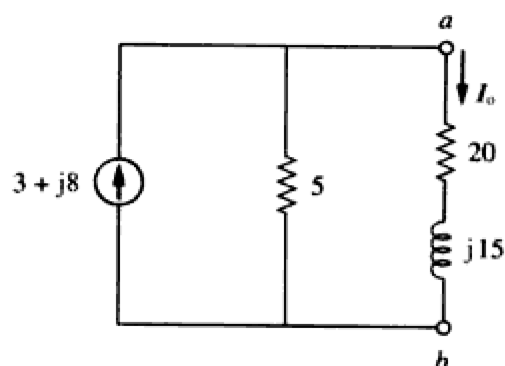
$$-j40 + (18+j2)\boldsymbol{I}_1 - (8-j2)\boldsymbol{I}_2 - (10+j4)\boldsymbol{I}_3 = 0 \tag{10-10-1}$$



(a) 求解 $\boldsymbol{Z}_N$



(b) 求解 $\boldsymbol{V}_N$



(c) 计算 $\boldsymbol{I}_o$

图 10-29 用于求解图 10-28 所示电路的原理图

对于超网孔，有：

$$(13-j2)\boldsymbol{I}_2 + (10+j4)\boldsymbol{I}_3 - (18+j2)\boldsymbol{I}_1 = 0 \tag{10-10-2}$$

由于网孔2与网孔3之间电流源的存在，于是在节点a处有：

$$\boldsymbol{I}_3 = \boldsymbol{I}_2 + 3 \tag{10-10-3}$$

将式(10-10-1)和式(10-10-2)相加，得到：

$$-j40 + 5\boldsymbol{I}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{I}_2 = j8$$

由式(10-10-3)可得：

$$\boldsymbol{I}_3 = \boldsymbol{I}_2 + 3 = 3 + j8$$

于是，诺顿电流为：

$$\boldsymbol{I}_N = \boldsymbol{I}_3 = (3+j8)\,\text{A}$$

图10-29c给出了诺顿等效电路以及端口$a-b$两端的负载阻抗。由分流原理，可得：

$$\boldsymbol{I}_o = \frac{5}{5+20+j15}\boldsymbol{I}_N = \frac{3+j8}{5+j3} = 1.465\underline{/38.48^\circ}\,\text{A}$$

练习题10-10 试确定如图10-30所示电路从端口$a-b$看进去的诺顿等效电路，并利用所求出的等效电

路求出$\boldsymbol{I}_o$。

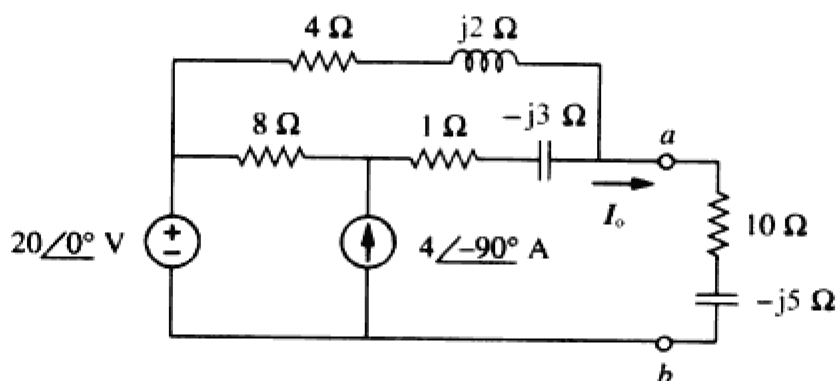


图 10-30 练习题 10-10 的电路原理图

答 $Z_N = 3.176 + j0.706\ \Omega$，$\boldsymbol{I}_N = 8.396\underline{/-32.68^\circ}$ A，$\boldsymbol{I}_o = 1.971\underline{/-2.101^\circ}$ A

10.7 交流运算放大器电路

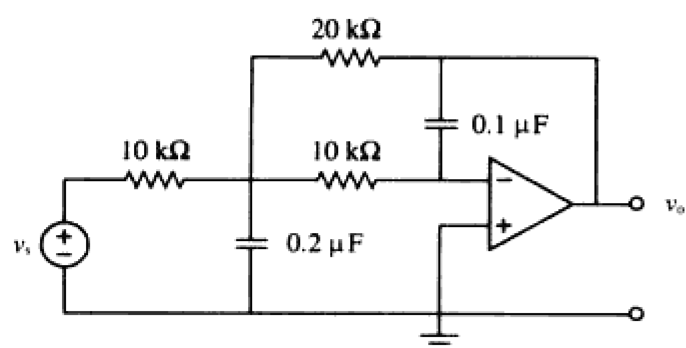
只要运算放大器工作在线性区域，10.1节介绍的分析交流电路的三个步骤就同样适用于运算放大器电路。按照惯例，假定运算放大器是理想的（参见5.2节），正如第5章所讨论的，分析运算放大器电路的关键是牢记理想运算放大器的两个重要特性：

（1）运算放大器的输入端无电流流入。

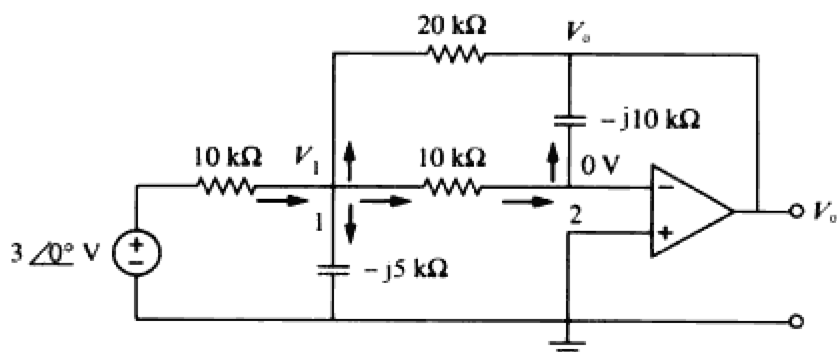
（2）运算放大器输入端的电压为零。

下面举例说明交流运算放大器电路的分析。

例题10-11 试确定如图10-31a所示运算放大器电路的$v_o(t)$，假定$v_s(t) = 3\cos 1000\,t$ V。



（a）原始时域电路



（b）频域等效电路

图 10-31 例题 10-11 的电路原理图

解 首先将电路转换到频域，如图10-31b所示，图中$\boldsymbol{V}_s = 3\underline{/0^\circ}$，$\omega = 1000$ rad/s。在节点1处应用KCL，得到：

$$\frac{3\underline{/0^\circ} - \boldsymbol{V}_1}{10} = \frac{\boldsymbol{V}_1}{-j5} + \frac{\boldsymbol{V}_1 - 0}{10} + \frac{\boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_o}{20}$$

即：

$$6 = (5 + j4)\,\boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_o$$

在节点2处应用KCL得到：

$$\frac{\boldsymbol{V}_1 - 0}{10} = \frac{0 - \boldsymbol{V}_o}{-j10}$$

即：

$$\boldsymbol{V}_1 = -j\boldsymbol{V}_o$$

将式(10-11-2)代入式(10-11-1)有：

$$6=-\mathrm{j}(5+\mathrm{j}4)\boldsymbol{V}_o-\boldsymbol{V}_o=(3-\mathrm{j}5)\boldsymbol{V}_o$$

$$\boldsymbol{V}_o=\frac{6}{3-\mathrm{j}5}=1.029\angle 59.04^\circ$$

于是，

$$v_o(t)=1.029\cos(1000t+59.04^\circ)\ \mathrm{V}$$

练习题10-11 试求如图10-32所示运算放大器电路的v_o与i_o，假定$v_s=2\cos 5000t$ V。

答 $0.667\sin 5000t$ V，$66.67\sin 5000t$ μA。

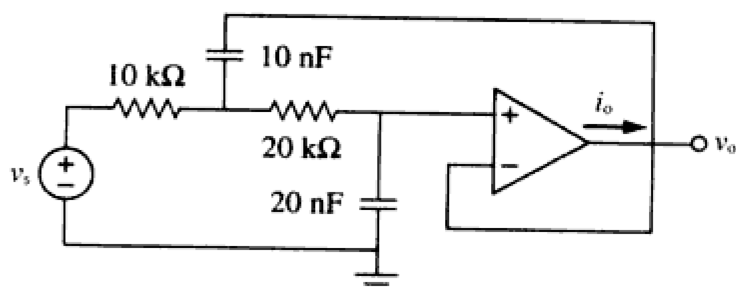


图 10-32 练习题 10-11 的电路原理图

例题10-12 试计算如图10-33所示电路的闭环增益与相移，假定$R_1=R_2=10$ kΩ，$C_1=2$ μF，$C_2=1$ μF，$\omega=200$ rad/s。

解 图中反馈阻抗和输入阻抗分别为：

$$\boldsymbol{Z}_f=R_2\left\|\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}=\frac{R_2}{1+\mathrm{j}\omega R_2C_2}\right.$$

$$\boldsymbol{Z}_i=R_1+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}=\frac{1+\mathrm{j}\omega R_1C_1}{\mathrm{j}\omega C_1}$$

由于图10-33所示电路是一个反相放大器，因此其闭环增益为：

$$\boldsymbol{G}=\frac{\boldsymbol{V}_o}{\boldsymbol{V}_s}=-\frac{\boldsymbol{Z}_f}{\boldsymbol{Z}_i}=\frac{-\mathrm{j}\omega C_1R_2}{(1+\mathrm{j}\omega R_1C_1)(1+\mathrm{j}\omega R_2C_2)}$$

将给定的R_1、R_2、C_1、C_2、ω值代入后得到：

$$\boldsymbol{G}=\frac{-\mathrm{j}4}{(1+\mathrm{j}4)(1+\mathrm{j}2)}=0.434\angle 130.6^\circ$$

于是，该运算放大器电路的闭环增益为0.434，相移为130.6°。

练习题10-12 试求如图10-34所示电路的闭环增益与相移，假定$R=10$ kΩ，$C=1$ μF，$\omega=1000$ rad/s。

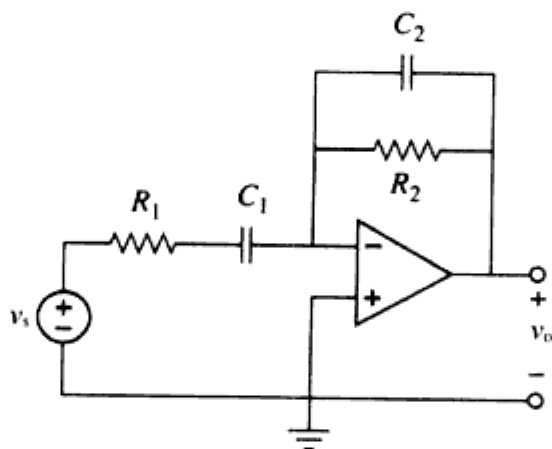


图 10-33 例题 10-12 的电路原理图

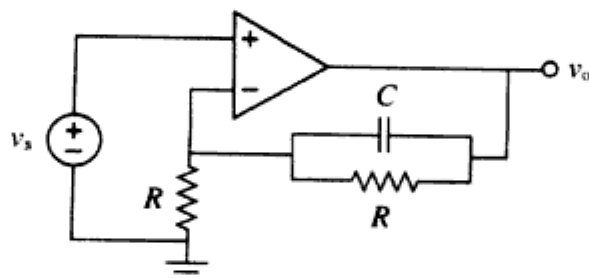


图 10-34 练习题 10-12 的电路原理图

答 1.015，−5.599°。

10.8 基于 PSpice 的交流电路分析

PSpice软件为交流电路分析中繁杂的复数运算提供了极大的方便。利用PSpice分析交流电路的过程与分析直流电路的过程基本相同。交流电路分析是在相量域或频域中进行的，所有电源必须具有相同的频率。虽然PSpice中的交流分析包括AC Sweep命令，但本章所涉及的交流电路分析仅限于单

个频率$f=\omega/2\pi$。PSpice的输出文件包括电压相量与电流相量，如果需要，还可以利用输出文件中的电压与电流计算出阻抗。

例题10-13　试利用PSpice确定如图10-35所示电路中的v_o与i_o。

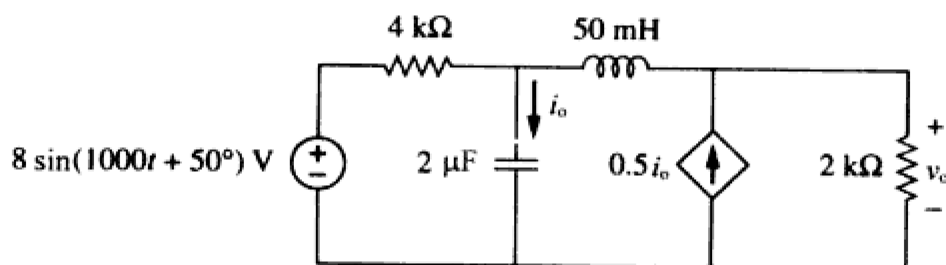


图 10-35　例题 10-13 的电路原理图

解　首先将正弦函数转换为余弦函数，得到：

$$8\sin(1000t+50°)=8\cos(1000t+50°-90°)=8\cos(1000t-40°)$$

由ω可求出频率为：

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1000}{2\pi}=159.155\text{Hz}$$

该电路的原理图如图10-36所示。注意，图中连接的电流控制电流源F1使得电流从节点0流向节点3，从而与图10-35所示原始电路的电流方向保持一致。由于本例仅需求出v_o与i_o的幅度和相位，因此需将IPRINT与VPRINT1的属性分别设置为AC = *yes*，MAG = *yes*，PHASE = *yes*。对于单一频率分析而言，选择菜单Analysis/Setup/AC Sweep，并在对话框中键入Total Pts = 1，Start Freq = 159.155，Final Freq = 159.155。保存电路之后，即可运行Analysis/Simulate对电路进行模拟。输出文件除包括伪元件IPRINT与VPRINT1的属性外，还包括电源频率：

```
FREQ          IM(V_PRINT3)     IP(V_PRINT3)
1.592E+02     3.264E-03        -3.743E+01
FREQ          VM(3)            VP(3)
1.592E+02     1.550E+00        -9.518E+01
```

由输出文件可得：

$$\mathbf{V}_o=1.55\underline{/-95.18°}\text{ V},\quad \mathbf{I}_o=3.264\underline{/-37.43°}\text{ mA}$$

将上述相量转换到时域，得到：

$$v_o=1.55\cos(1000t-95.18°)=1.55\sin(1000t-5.18°)\text{ V}$$

和

$$i_o=3.264\cos(1000t-37.43°)\text{ mA}$$

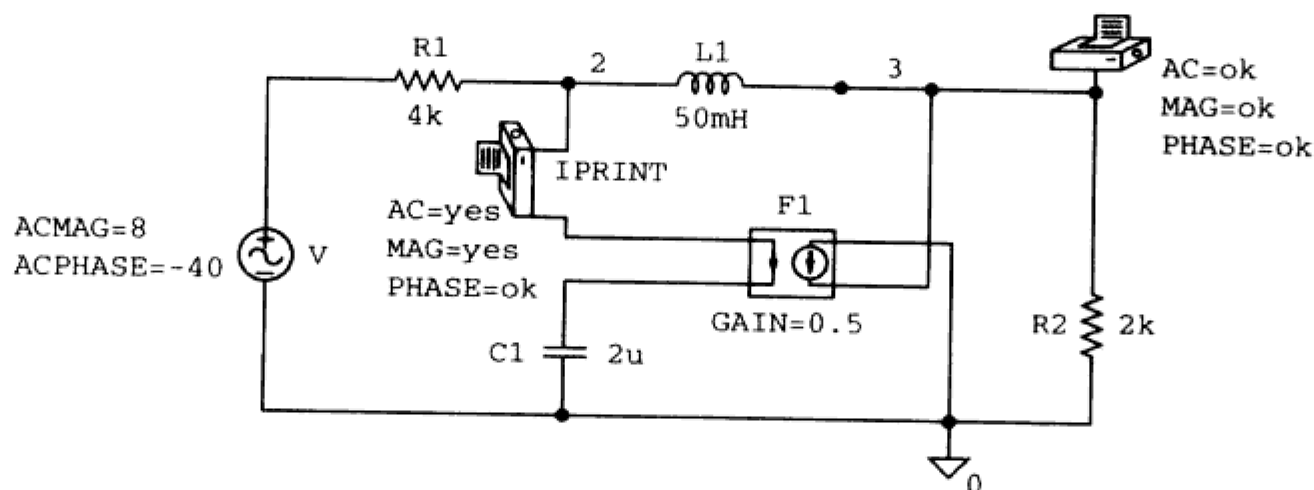


图 10-36　图 10-35 所示电路的原理图

练习题10-13 试利用PSpice确定如图10-37所示电路中的v_o与i_o。

答 0.2682 cos(3000 t−154.6°) V，0.544 cos(3000 t−55.12°) mA。

例题10-14 试求如图10-38所示电路中的V_1与V_2。

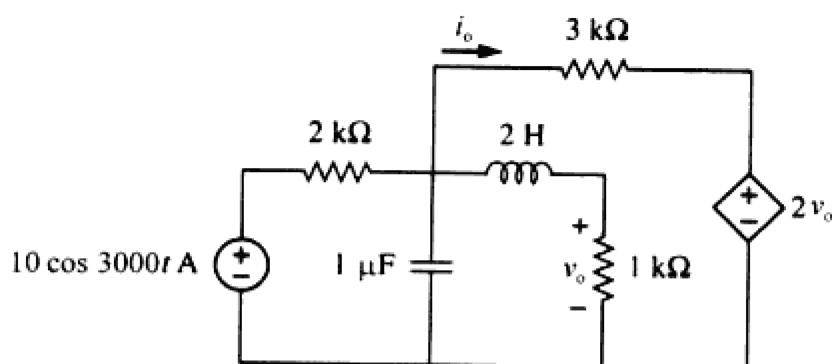


图 10-37 见练习题 10-13

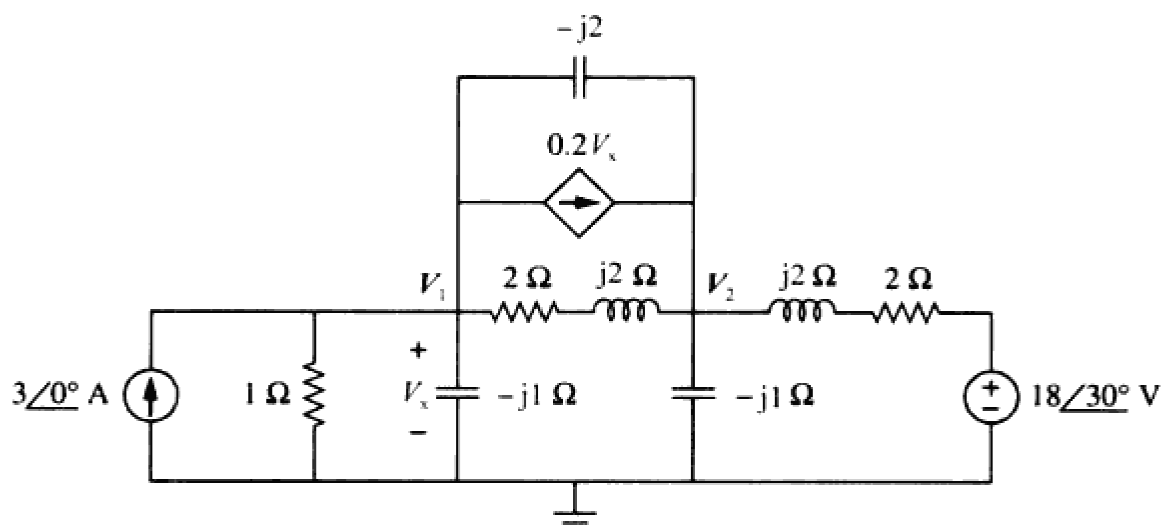


图 10-38 例题 10-14 的电路原理图

解 （1）**明确**问题。本例题所要解决的问题已阐述清楚。需要再次强调的是，这一步骤花费的时间必将节省后续计算的时间！可能出现的问题是，如果本题的参数不全，就需要问清楚命题者相应参数的位置。如果问不到结果，则需假定参数在什么位置，之后阐明所做出的处理及其原因。

（2）**表述**对问题的理解。已知电路为一个频域中的电路，而且未知节点电压V_1与V_2同样为频域量。显然，需要在频域中求解这些未知量。

（3）确定**可选**解。求解本例的方法有两种，即直接利用节点分析法求解，或者利用PSpice软件求解。由于本例是在10.8节中出现的，因此就选择PSpice求解V_1与V_2。之后再利用节点分析法验证所得到的答案。

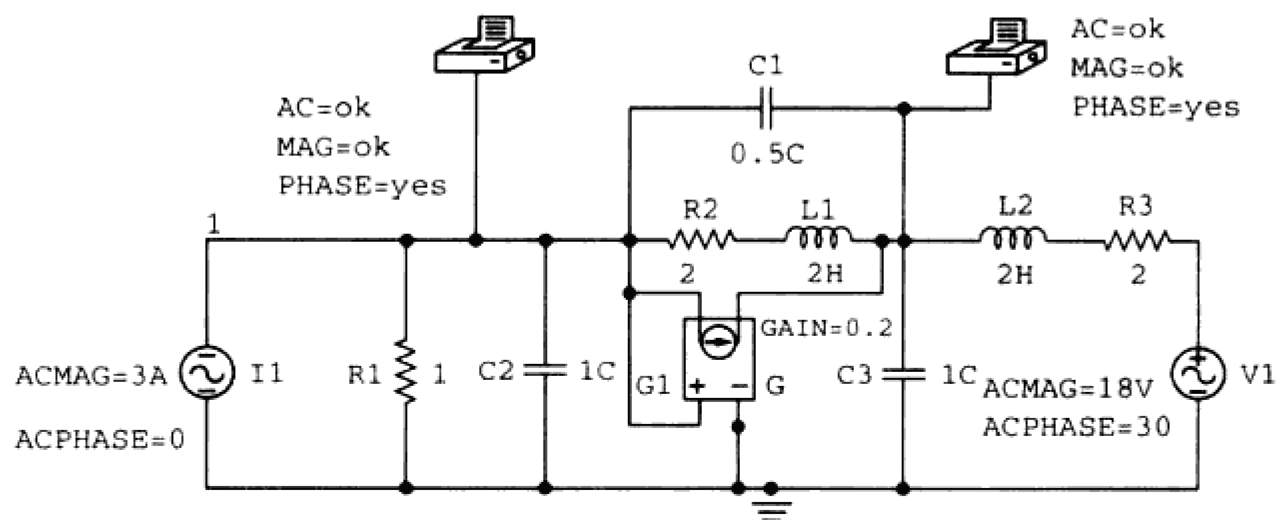


图 10-39 图 10-38 所示电路的原理图

(4) **尝试**问题的解。

图10-35所示电路为时域电路，而图10-38所示电路则为频域电路。由于未给定工作频率，而利用PSpice分析电路时又需要确定一个工作频率，所以可选择一个与给定阻抗相一致的任意工作频率，例如，当选择$\omega = 1$ rad/s时，相应的工作频率为$f = \omega/2\pi = 0.15916$ Hz。于是可以求得电容值($C = 1/\omega X_C$)与电感值 ($L = X_L/\omega$)。由上述变化所得到的原理图如图10-39所示，为了便于连线，将电压控制电流源$G1$与$(2+j2)$ Ω阻抗位置互换。可以看出，$G1$的电流方向是从节点1流向节点3，而控制电压则是电容器$C2$两端的电压，与图10-38要求的一致。伪元件VPRINT1的属性设置已在图中标明。对于单一频率分析而言，选择Analysis/Setup/AC Sweep菜单，并在对话框中键入Total Pts = 1，Start Freq = 0.15916，Final Freq = 0.15916。保存电路之后，执行Analysis/Simulate命令对电路进行模拟，得到如下输出文件：

```
FREQ          VM(1)          VP(1)
1.592E-01     2.708E+00      -5.673E+01
FREQ          VM(3)          VP(3)
1.592E-01     4.468E+00      -1.026E+02
```

由此可求出：

$$\mathbf{V}_1 = 2.708\underline{/-56.74^\circ}\ \text{V} \quad 及 \quad \mathbf{V}_2 = 6.911\underline{/-80.72^\circ}\ \text{V}$$

(5) **评价**得到的结果。必须接受的最为重要的经验之一是，利用诸如PSpice这样的分析软件进行电路分析时，仍然需要验证结果的正确性。出现错误的机会很多，包括遇到PSpice的bug而导致不正确的结果。

如何验证所得到的结果呢？显然，可以利用节点分析法重新求解本例，或者利用MATLAB重新计算，看是否得到相同的结果。这里采用另一种方法进行验证：写出节点方程，并将PSpice计算的结果代入，看节点方程是否成立。

该电路的节点方程如下，注意，方程中已经将$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_x$代入受控源：

$$-3 + \frac{\mathbf{V}_1 - 0}{1} + \frac{\mathbf{V}_1 - 0}{-\text{j}1} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{2+\text{j}2} + 0.2\mathbf{V}_1 + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{-\text{j}2} = 0$$

$$(1 + \text{j} + 0.25 - \text{j}0.25 + 0.2 + \text{j}0.5)\mathbf{V}_1$$

$$-(0.25 - \text{j}0.25 + \text{j}0.5)\mathbf{V}_2 = 3$$

$$(1.45 + \text{j}1.25)\mathbf{V}_1 - (0.25 + \text{j}0.25)\mathbf{V}_2 = 3$$

$$1.9144\underline{/40.76^\circ}\,\mathbf{V}_1 - 0.3536\underline{/45^\circ}\,\mathbf{V}_2 = 3$$

下面即可将PSpice运算的结果代入方程中验证答案的正确性，即：

$$\begin{aligned}
&1.9144\underline{/40.76^\circ} \times 2.708\underline{/-56.74^\circ} - 0.3536\underline{/45^\circ} \times 6.911\underline{/-80.72^\circ}\\
&= 5.184\underline{/-15.98^\circ} - 2.444\underline{/-35.72^\circ}\\
&= 4.984 - \text{j}1.4272 - 1.9842 + \text{j}1.4269\\
&= 3 - \text{j}0.0003
\end{aligned}$$

(6) 对结果是否**满意**？虽然仅利用节点1的方程检验所得到的答案，但这足以说明由PSpice得到的结果的有效性，因此可以将上述求解过程作为本题的答案。

练习题10-14 试确定如图10-40所示电路中的$\mathbf{V}_x$与$\mathbf{I}_x$。

答 $9.842\underline{/44.78^\circ}$ V，$2.584\underline{/158^\circ}$ A。

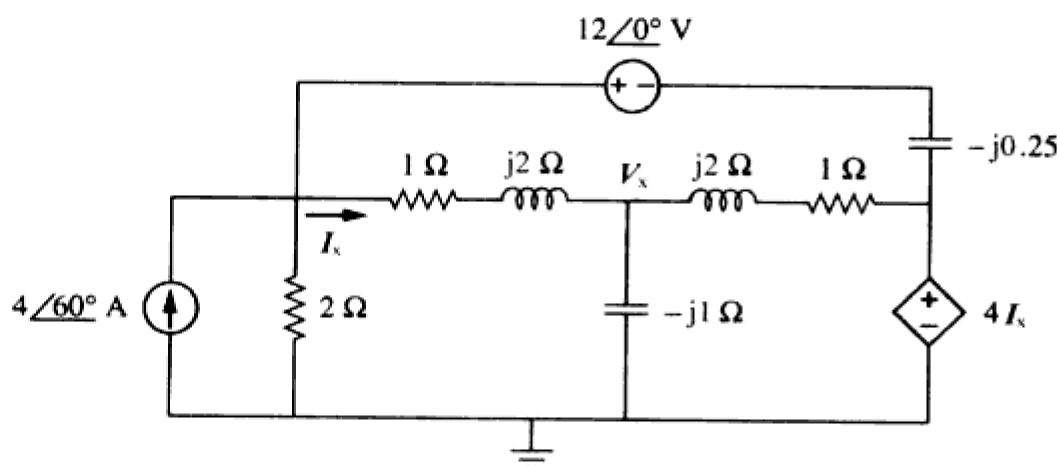


图 10-40 练习题 10-14 的电路原理图

10.9 †应用

本章所学的概念将在后续章节中计算电功率、确定频率响应时用到，同时还可以用于分析磁耦合电路、三相电路、交流晶体管电路、滤波器、振荡器和其他交流电路。本节将所学概念应用于两个实际的交流电路，即电容倍增器与正弦波振荡器。

10.9.1 电容倍增器

图10-41所示运算放大器电路称为电容倍增器（capacitance multiplier），之所以这样命名，稍后就会很清楚。该电路常用于集成电路中，当集成电路需要大电容时，通过该电路可以将一个小的物理电容C倍增为若干倍。图10-41所示电路的倍增因子高到1000。例如，10 pF电容器通过该电路后，其作用相当于100 nF电容器。

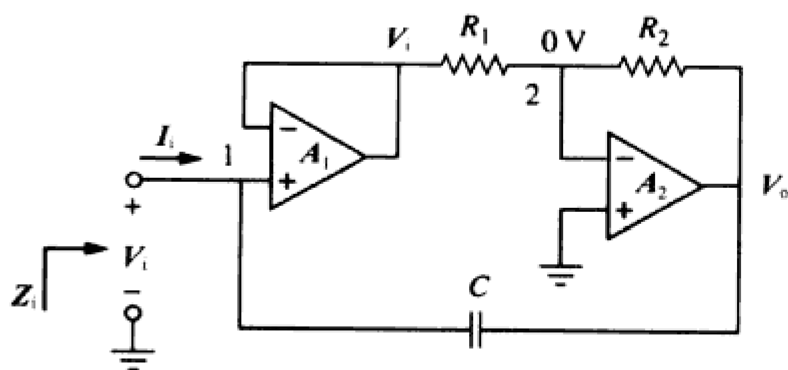


图 10-41 电容倍增器

在如图10-41所示电路中，第一级运算放大器为电压跟随器，而第二级则为反相放大器。电压跟随器将电路的电容与反相放大器负载隔离开来。因为无电流流入运算放大器的输入端，所以输入电流I_i流过反馈电容器，因此，在节点1处有：

$$I_i = \frac{V_i - V_o}{1/j\omega C} = j\omega C(V_i - V_o) \tag{10-3}$$

对节点2应用KCL，得到：

$$\frac{V_i - 0}{R_1} = \frac{0 - V_o}{R_2}$$

即

$$V_o = -\frac{R_2}{R_1}V_i \tag{10-4}$$

将式(10-4)代入式(10-3)得到：

$$I_i = j\omega C\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)V_i$$

即

$$\frac{I_i}{V_i} = j\omega\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)C \tag{10-5}$$

于是，输入阻抗为：

$$Z_i = \frac{V_i}{I_i} = \frac{1}{j\omega C_{eq}} \tag{10-6}$$

其中，

$$C_{eq} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)C \tag{10-7}$$

因此，适当地选取电阻值R_1与R_2，图10-41所示的运算放大器电路就可以在输入端与地之间产生一个有效电容量，其容值为实际电容C的若干倍。有效电容量的大小实际上受到反相输出电压的限制。因此，电容倍增因子越大，允许的输入电压就要越小，这样才能避免运算放大器进入饱和状态。

同理，也可以设计出用于模拟电感的运算放大器电路（参见习题10-89）以及实现电阻倍增的运算放大器电路。

例题10-15 试计算如图10-41所示电路中的C_{eq}，假定$R_1 = 10\ \text{k}\Omega$，$R_2 = 1\ \text{M}\Omega$，$C = 1\ \text{nF}$。

解 由式(10-7)可得：

$$C_{eq} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)C = \left(1 + \frac{1\times 10^6}{10\times 10^3}\right)1\text{nF} = 101\text{nF}$$

练习题10-15 试确定如图10-41所示运算放大器电路的等效电容，假定$R_1 = 10\ \text{k}\Omega$，$R_2 = 10\ \text{M}\Omega$，$C = 10\ \text{nF}$。

答 10 μF。

10.9.2 振荡器

我们知道，直流电可以用电池产生，那么，交流电如何产生呢？一种方法是利用振荡器(oscillator)，将直流电转换为交流电。

振荡器是一种以直流电驱动的，输出为交流波形的电路。

振荡器所需要的唯一外部电源就是直流供电电源。有趣的是，直流供电电源通常是将供电公司发出的交流电转换直流电得到的，为什么又要利用振荡器再一次将直流电转换为交流电呢？这是因为美国供电公司提供的交流电频率预定的为60 Hz（其他一些国家为50 Hz），而在电子电路、通信系统以及微波设备等大量实际应用中所需要的频率范围却是从0 GHz～10 GHz，甚至更高。因此，就需要利用振荡器来产生这些频率的交流信号。

频率 60 Hz 对应于角频率 $\omega = 2\pi f = 377$ rad/s。

为了使正弦波振荡器保持振荡，必须满足如下巴克豪森准则（Barkhausen Criteria）：

(1) 振荡器的总增益必须等于或大于1，因此，电路损耗必须通过放大设备予以补偿。

(2) 电路的总相移（从输入到输出再反馈到输入）必须为零。

常见的三种正弦波振荡器包括移相型振荡器、双T型振荡器和维恩桥式振荡器，本节仅讨论维恩桥式振荡器。

维恩桥式振荡器（Wien-bridge oscillator）被广泛应用于产生频率低于1 MHz的正弦波。它是一个仅由少量元件组成的RC运算放大器电路，便于调节，易于设计。如图10-42所示，这种振荡器主要由包括2条反馈支路的同相放大器组成：同相输入端的正反馈支路用于产生振荡，而反相输入端的负反馈支路则用于调整增益。如果定义RC串联阻抗与并联阻抗分别为Z_s与Z_p，则：

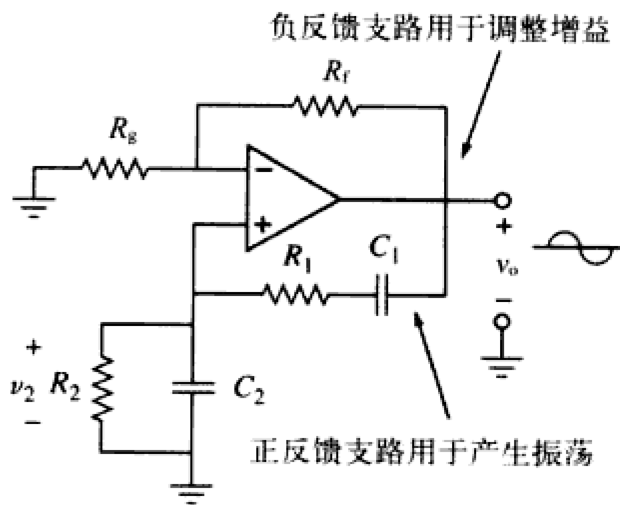


图 10-42 维恩桥式振荡器

$$Z_s = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = R_1 - \frac{j}{\omega C_1} \tag{10-8}$$

$$Z_p = R_2 \parallel \frac{1}{j\omega C_2} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2} \tag{10-9}$$

反馈系数为：

$$\frac{V_2}{V_o} = \frac{Z_p}{Z_s + Z_p} \tag{10-10}$$

将式(10-8)与式(10-9)代入式(10-10)，得到：

$$\begin{aligned}\frac{V_2}{V_o} &= \frac{R_2}{R_2 + \left(R_1 - \dfrac{j}{\omega C_1}\right)(1 + j\omega R_2 C_2)} \\ &= \frac{\omega R_2 C_1}{\omega(R_2 C_1 + R_1 C_1 + R_2 C_2) + j(\omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2 - 1)}\end{aligned} \tag{10-11}$$

为了满足巴克豪森准则二，V_2与V_o必须同相，这意味着式(10-11)的反馈系数必须为纯实数，也就是说，虚部必须为零。由虚部为零可以得到振荡频率ω_o为：

$$\omega_o^2 R_1 C_1 R_2 C_2 - 1 = 0$$

即

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \tag{10-12}$$

在许多实际应用中，$R_1 = R_2 = R$且$C_1 = C_2 = C$，于是有：

$$\omega_o = \frac{1}{RC} = 2\pi f_o \tag{10-13}$$

即

$$\boxed{f_o = \frac{1}{2\pi RC}} \tag{10-14}$$

将式(10-13)以及$R_1 = R_2 = R$，$C_1 = C_2 = C$代入式(10-11)，得到：

$$\frac{V_2}{V_o} = \frac{1}{3} \tag{10-15}$$

因此，为了满足巴克豪森准则一，运算放大器的补偿增益必须大于等于3，从而使总增益大于等于1。我们已经知道，对于同相放大器而言：

$$\frac{V_o}{V_2} = 1 + \frac{R_f}{R_g} = 3 \tag{10-16}$$

即

$$R_f = 2R_g \tag{10-17}$$

维恩桥式振荡器由于运算放大器所固有的延时，其振荡频率仅限于1 MHz或以下。

例题10-16 试设计一个振荡频率为100 kHz的维恩桥式电路。

解 由式(10-14)得到的电路时间常数为：

$$RC = \frac{1}{2\pi f_o} = \frac{1}{2\pi \times 100 \times 10^3} = 1.59 \times 10^{-6} \tag{10-16-1}$$

如果选择$R = 10\ \text{k}\Omega$，则由式(10-16-1)可得$C = 159\ \text{pF}$。由于增益必须为3，所以$R_f/R_g = 2$，可选择$R_f = 20\ \text{k}\Omega$，则$R_g = 10\ \text{k}\Omega$。

练习题10-16 在如图10-42所示的维恩桥式振荡器电路中，如果$R_1 = R_2 = 2.5\ \text{k}\Omega$，$C_1 = C_2 = 1\ \text{nF}$，试确定振荡器的振荡频率$f_o$。

答 63.66 kHz。

10.10 本章小结

(1) 由于KCL与KVL适用于电路的相量形式，所以节点电压分析法与网孔电流分析法同样可以用于分析交流电路。

(2) 在求解电路的稳态响应时，如果电路中包含不同频率的多个独立源，则必须分别考虑每个独立源。分析这类电路最基本的方法是采用叠加原理。对应于不同频率的相量电路必须单独求解，并将相应的响应转换为时域响应，电路总响则为各个相量电路的时域响应之和。

(3) 电源转换的概念同样适用于频域。

(4) 交流电路的戴维南等效电路，由等效电压源$\mathbf{V}_{Th}$和与之串联的戴维南阻抗$\mathbf{Z}_{Th}$组成。

(5) 交流电路的诺顿等效电路，由等效电流源$\mathbf{I}_N$和与之并联的诺顿阻抗$\mathbf{Z}_N$（$=\mathbf{Z}_{Th}$）组成。

(6) PSpice软件包是求解交流电路的一个简单而有力的工具，它极大地简化了电路稳态分析过程中遇到的繁杂的复数运算问题。

(7) 电容倍增器与交流振荡器是本章内容的两个典型应用实例。电容倍增器是一个运算放大器电路，所实现的等效电容是某实际电容容量的若干倍。振荡器则是利用直流输入产生交流输出的一种电路设备。

复习题

10-1 如图10-43所示电路中，电容器两端的电压$\mathbf{V}_o$为：

(a) $5\angle 0°$ V (b) $7.071\angle 45°$ V

(c) $7.071\angle -45°$ V (d) $5\angle -45°$ V

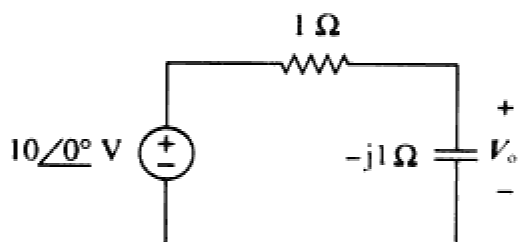


图 10-43 复习题 10-1 的电路原理图

10-2 如图10-44所示电路中电流$\mathbf{I}_o$为：

(a) $4\angle 0°$ A (b) $2.4\angle -90°$ A

(c) $0.6\angle 0°$ A (d) −1 A

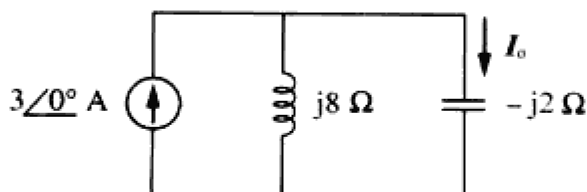


图 10-44 复习题 10-2 的电路原理图

10-3 利用节点分析法求出的图10-45所示电路中$\mathbf{V}_o$为：

(a) −24 V (b) −8 V

(c) 8 V (d) 24 V

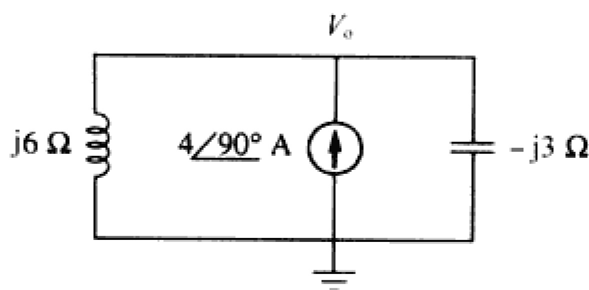


图 10-45 复习题 10-3 的电路原理图

10-4 在如图10-46所示电路中，电流$i(t)$为：

(a) $10\cos t$ A (b) $10\sin t$ A (c) $5\cos t$ A

(d) $5\sin t$ A (e) $4.472\cos(t-63.43°)$ A

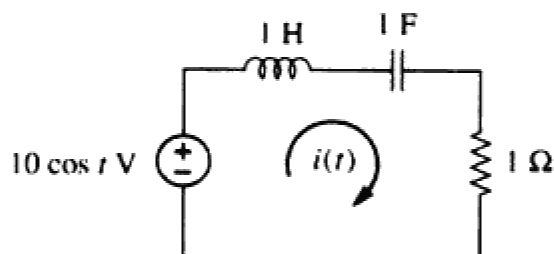


图 10-46 复习题 10-4 的电路原理图

10-5 在如图10-47所示电路中，两个电源具有不同的频率，试问电流$i_x(t)$可以用以下哪种方法求得？

(a) 电源变换 (b) 叠加原理
(c) PSpice软件包

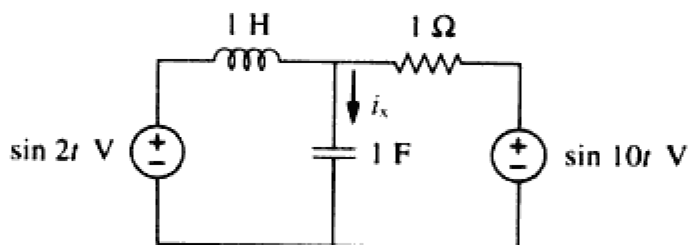


图 10-47 复习题 10-5 的电路原理图

10-6 对于如图10-48所示电路，端口$a-b$处的戴维南阻抗为：
(a) 1 Ω (b) 0.5−j0.5 Ω (c) 0.5+j0.5 Ω
(d) 1+j2 Ω (e) 1−j2 Ω

10-7 在如图10-48所示电路中，端口$a-b$处的戴维南电压为：
(a) $3.535\angle -45°$ V (b) $3.535\angle 45°$ V
(c) $7.071\angle -45°$ V (d) $7.071\angle 45°$ V

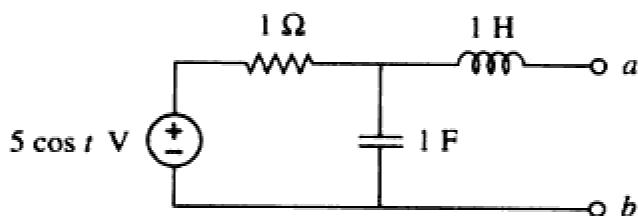


图 10-48 复习题 10-6 和 10-7 的电路原理图

10-8 在如图10-49所示电路中，端口$a-b$处的诺顿等效阻抗为：
(a) −j4 Ω (b) −j2 Ω
(c) j2 Ω (d) j4 Ω

10-9 如图10-49所示电路在端口$a-b$处的诺顿电流为：
(a) $1\angle 0°$ V (b) $1.5\angle -90°$ V
(c) $1.5\angle 90°$ V (d) $3\angle 90°$ V

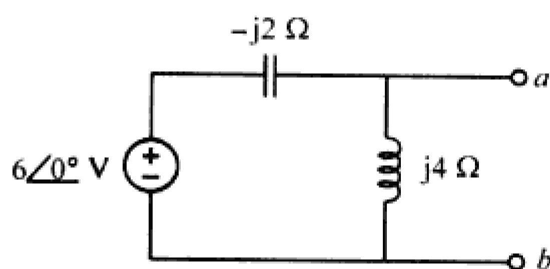


图 10-49 复习题 10-8 和 10-9 的电路原理图

10-10 PSpice软件包可以处理包括两个不同频率独立电源的电路。
(a) 正确 (b) 错误

答案 10-1 c；10-2 a；10-3 d；10-4 a；10-5 b；10-6 c；10-7 a；10-8 a；10-9 d；10-10b。

习题

10.2 节

10-1 试确定如图10-50所示电路中的i。

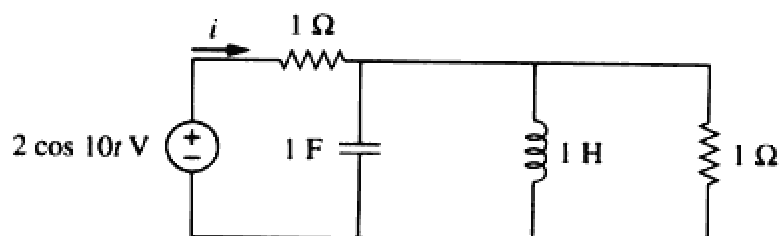


图 10-50 习题 10-1 的电路原理图

10-2 试利用节点分析法，确定如图10-51所示电路中的V_o。

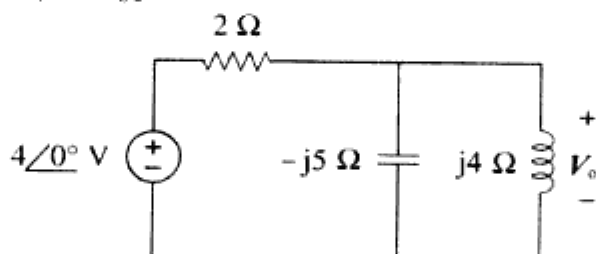


图 10-51 习题 10-2 的电路原理图

10-3 试确定如图10-52所示电路中的v_o。

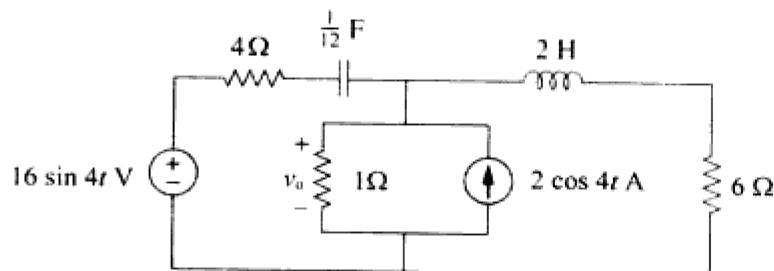


图 10-52 习题 10-3 的电路原理图

10-4 试确定如图10-53所示电路中的i_1。

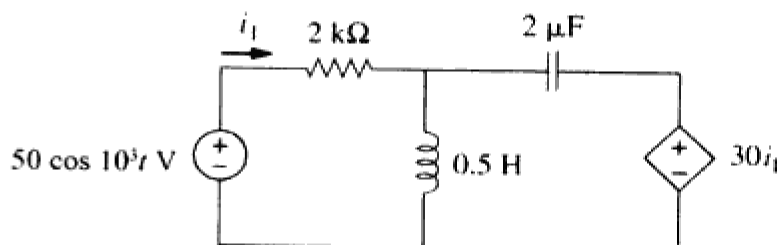


图 10-53 习题 10-4 的电路原理图

10-5 试求如图10-54所示电路中的i_o。

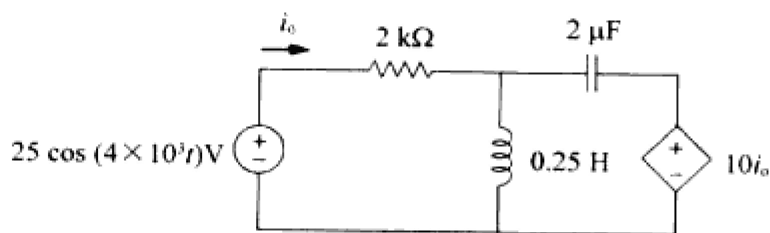


图 10-54 习题 10-5 的电路原理图

10-6 试确定如图10-55所示电路中的V_x。

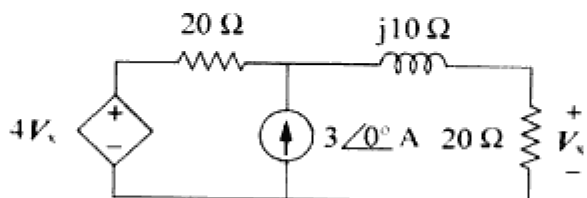


图 10-55 习题 10-6 的电路原理图

10-7 试利用节点分析法，求如图10-56所示电路中的V。

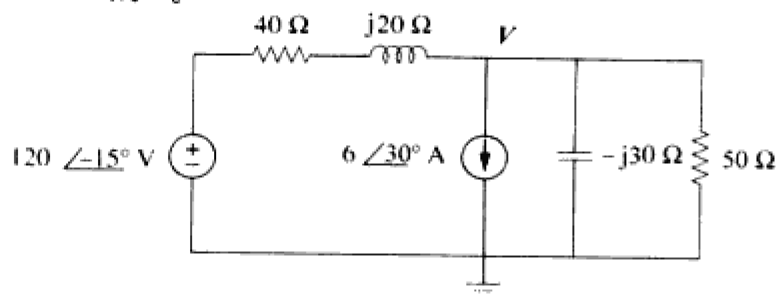


图 10-56 习题 10-7 的电路原理图

10-8 试利用节点分析法确定如图10-57所示电路中的i_o，假定$i_s = 6\cos(200t + 15°)$。

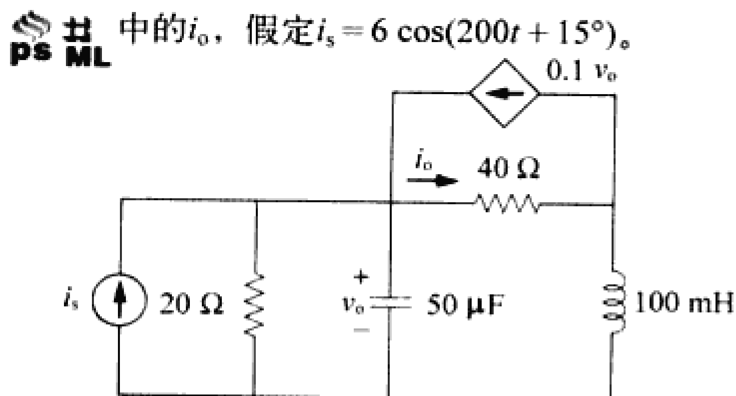


图 10-57 习题 10-8 的电路原理图

10-9 试利用节点分析法确定如图10-58所示电路中的v_o。

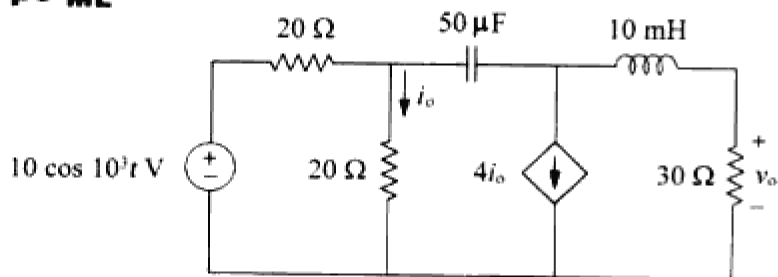


图 10-58 习题 10-9 的电路原理图

10-10 试利用节点分析法确定如图10-59所示电路中的v_o，假定$\omega = 2$ krad/s。

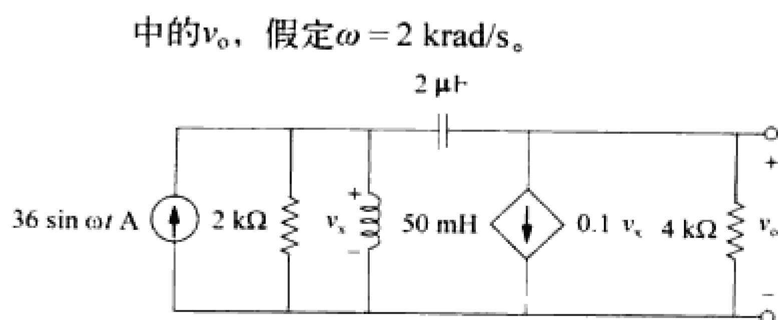


图 10-59 习题 10-10 的电路原理图

10-11 试利用节点分析法分析如图10-60所示电路，并确定电流I_o。

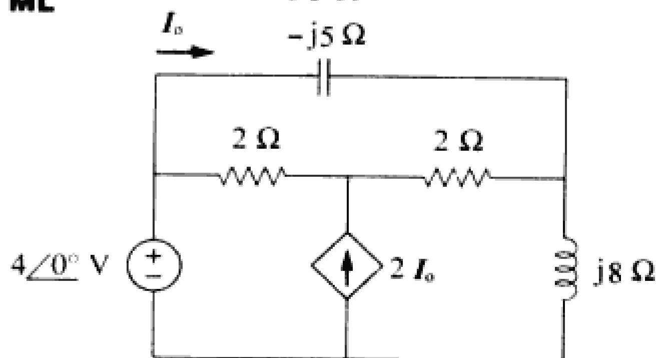


图 10-60 习题 10-11 的电路原理图

10-12 试利用节点分析法确定如图10-61所示电路中的i_o。

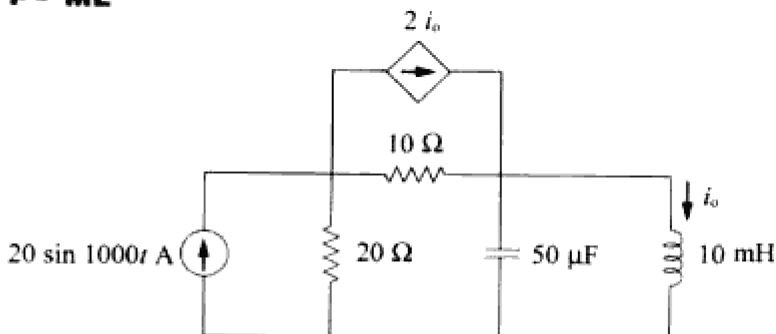


图 10-61 习题 10-12 的电路原理图

10-13 自行选择方法确定如图10-62所示电路中的V_x。

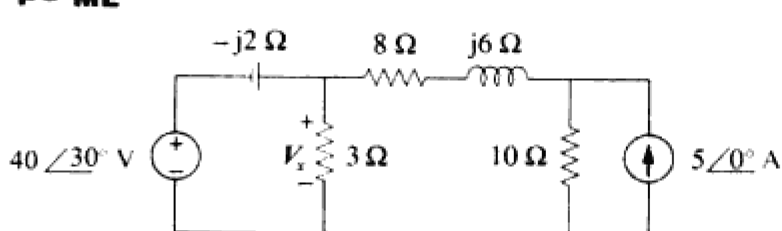


图 10-62 习题 10-13 的电路原理图

10-14 试利用节点分析法计算如图10-63所示电路中节点1与节点2的电压。

10-15 试利用节点分析法求解如图10-64所示电路中的电流I。

10-16 试利用节点分析法求解如图10-65所示电路

中的电压V_x。

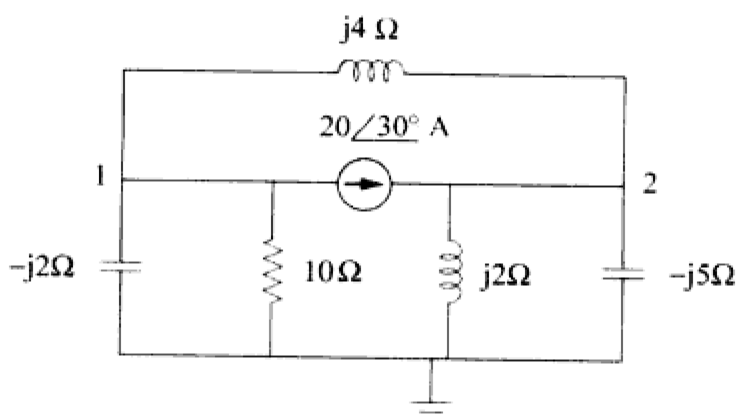


图 10-63 习题 10-14 的电路原理图

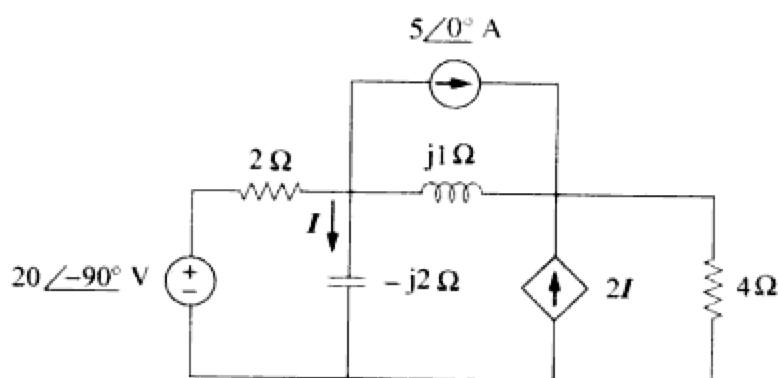


图 10-64 习题 10-15 的电路原理图

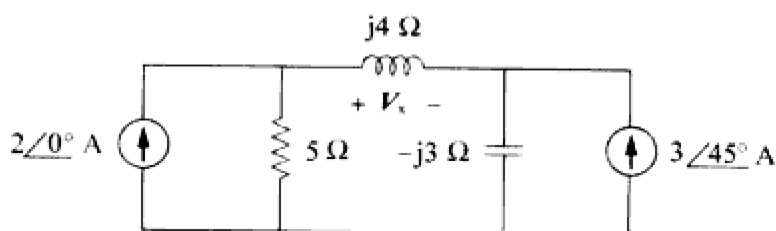


图 10-65 习题 10-16 的电路原理图

10-17 试利用节点分析法确定如图10-66所示电路中的电流I_o。

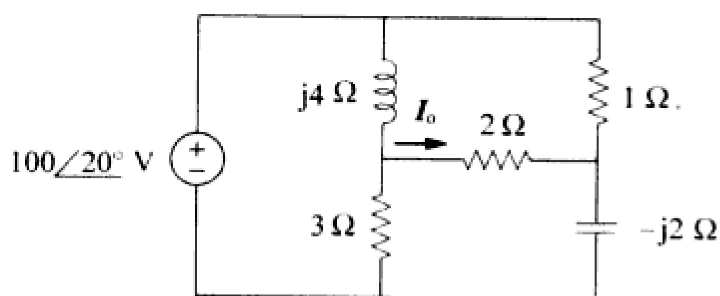


图 10-66 习题 10-17 的电路原理图

10-18 试利用节点分析法确定如图10-67所示电路中的电压V_o。

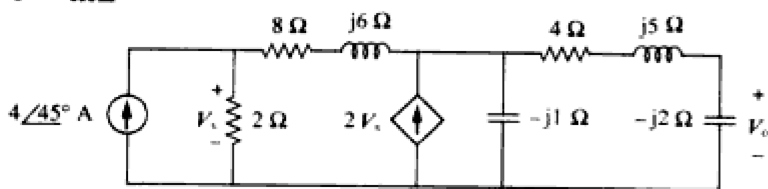


图 10-67 习题 10-18 的电路原理图

10-19 试利用节点分析法确定如图10-68所示电路中的电压V_o。

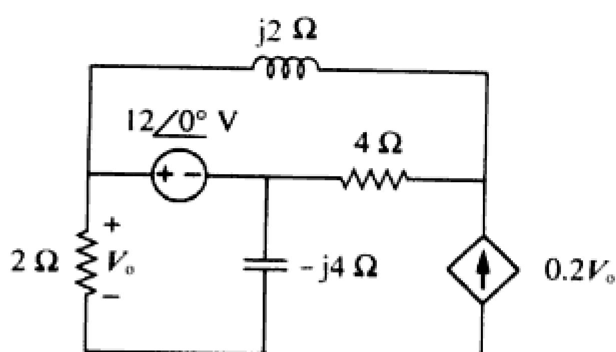


图 10-68 习题 10-19 的电路原理图

10-20 在如图10-69所示电路中，$v_s(t) = V_m \sin \omega t$，$v_o(t) = A\ \sin(\omega t + \phi)$，试推导$A$与$\phi$的表达式。

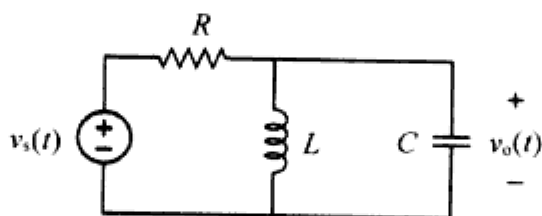


图 10-69 习题 10-20 的电路原理图

10-21 对如图10-70所示各电路，试求$\omega = 0$，$\omega \to \infty$以及$\omega^2 = 1/LC$时的V_o/V_i。

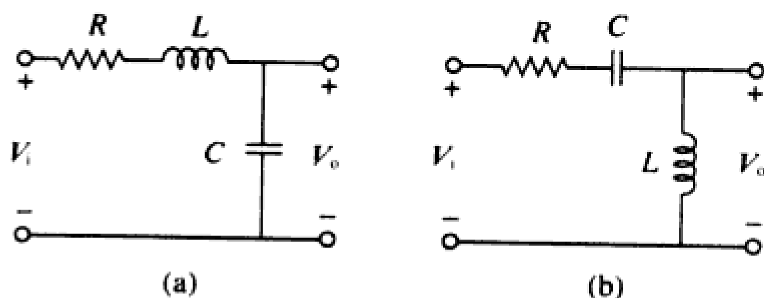


图 10-70 习题 10-21 的电路原理图

10-22 对如图10-71所示各电路，试确定V_o/V_s。

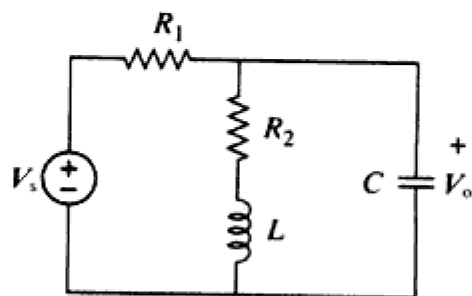


图 10-71 习题 10-22 的电路原理图

10-23 试利用节点分析法确定如图10-72所示电路中的电压V。

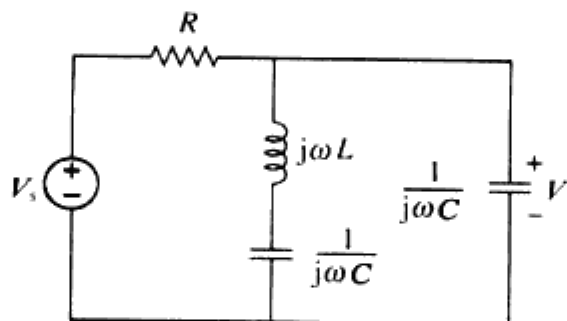


图 10-72 习题 10-23 的电路原理图

10.3 节

10-24 试利用网孔分析法求解习题10-2电路中的V_o。

10-25 ML 试利用网孔分析法求解如图10-73所示电路中的电流i_o。

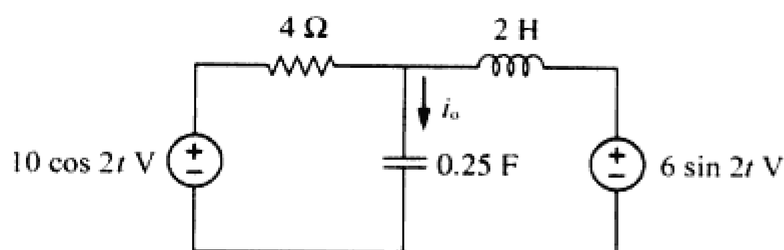


图 10-73 习题 10-25 的电路原理图

10-26 试利用网孔分析法求解如图10-74所示电路中的电流i_o。

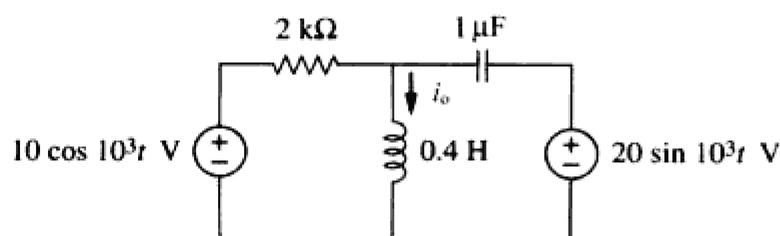


图 10-74 习题 10-26 的电路原理图

10-27 ML 试利用网孔分析法求解如图10-75所示电路中的电流I_1与I_2。

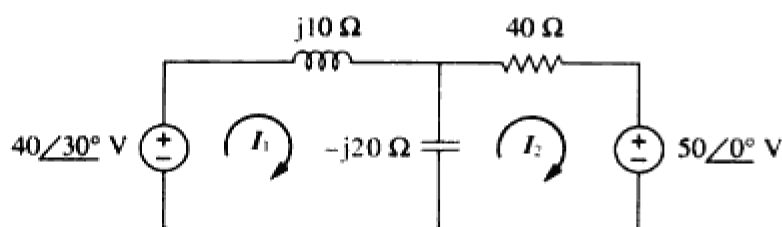


图 10-75 习题 10-27 的电路原理图

10-28 ML 在如图10-76所示电路中，假定$v_1 = 10\ \cos 4t$V，$v_2 = 20\cos(4t-30°)$，试确定网孔电流i_1与i_2。

10-29 ML 试利用网孔分析法求解如图10-77所示电路中的电流I_1与I_2。

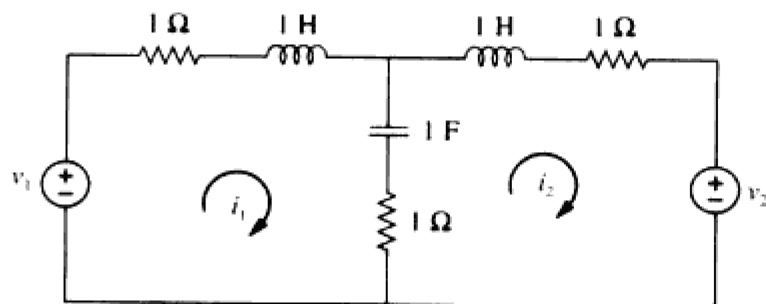


图 10-76 习题 10-28 的电路原理图

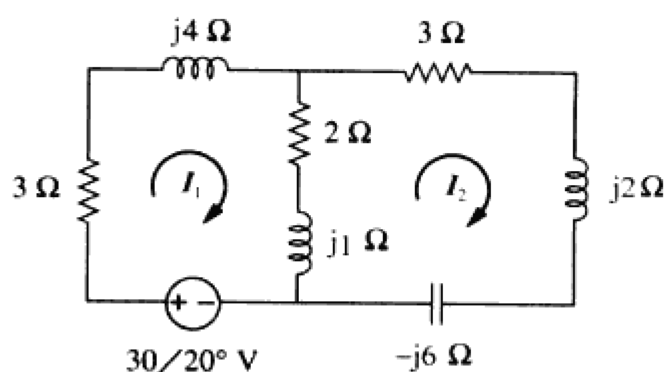


图 10-77 习题 10-29 的电路原理图

10-30 PS ML 试利用网孔分析法求解如图10-78所示电路中的v_o，假定$v_{s1} = 120\cos(100t + 90°)$ V，$v_{s2} = 80\cos 100t$ V。

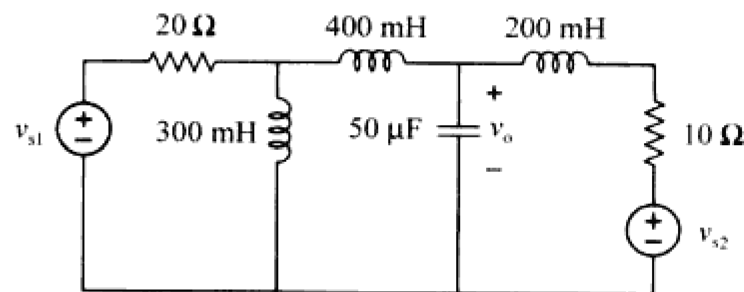


图 10-78 习题 10-30 的电路原理图

10-31 PS ML 试利用网孔分析法确定如图10-79所示电路中的电流I_o。

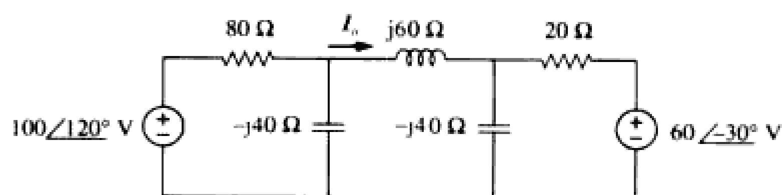


图 10-79 习题 10-31 的电路原理图

10-32 PS ML 试利用网孔分析法确定如图10-80所示电路中的V_o与I_o。

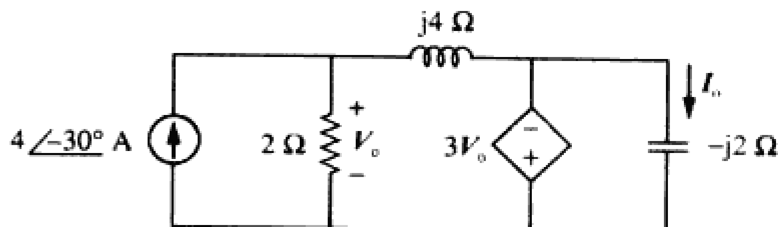


图 10-80 习题 10-32 的电路原理图

10-33 试利用网孔分析法计算习题10-15中的$\boldsymbol{I}$。

10-34 试利用网孔分析法求解图10-28所示电路（例题10-10）中的$\boldsymbol{I}_o$。

10-35 试利用网孔分析法计算图10-30所示电路（练习题10-10）中的$\boldsymbol{I}_o$。

10-36 试利用网孔分析法计算如图10-81所示电路中的$\boldsymbol{V}_o$。

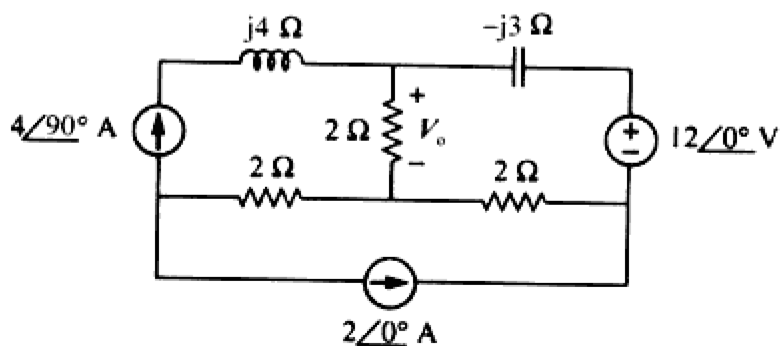


图 10-81 习题 10-36 的电路原理图

10-37 试利用网孔分析法求解如图10-82所示电路中的$\boldsymbol{I}_1$、$\boldsymbol{I}_2$与$\boldsymbol{I}_3$。

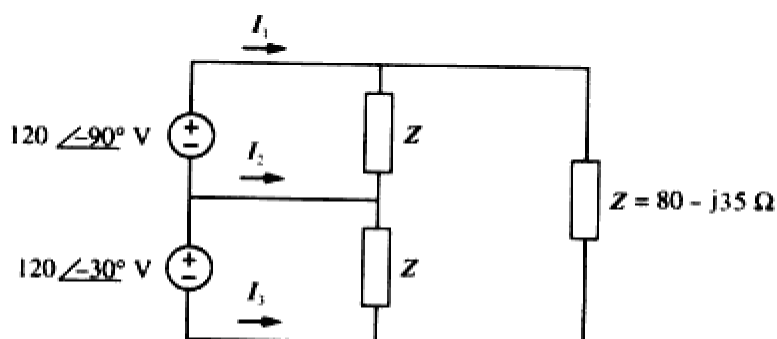


图 10-82 习题 10-37 的电路原理图

10-38 试利用网孔分析法求解如图10-83所示电路中的$\boldsymbol{I}_o$。

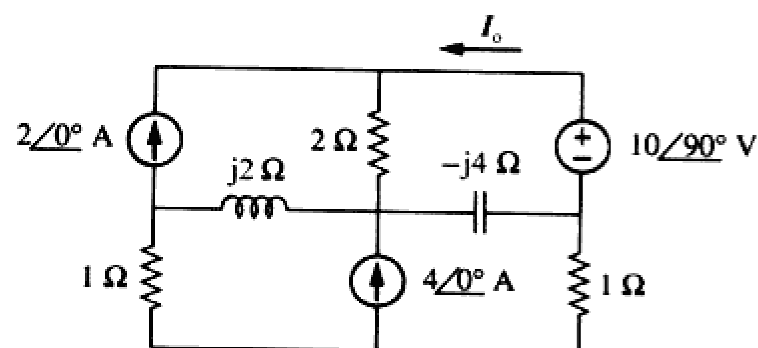


图 10-83 习题 10-38 的电路原理图

10-39 试求如图10-84所示电路中的$\boldsymbol{I}_1$、$\boldsymbol{I}_2$、$\boldsymbol{I}_3$与$\boldsymbol{I}_x$。

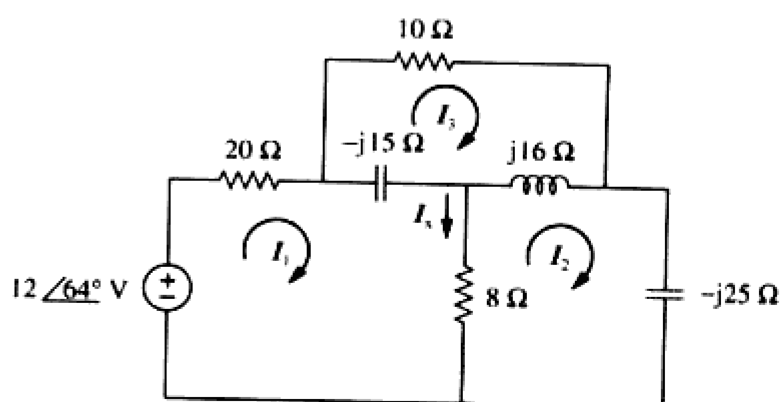


图 10-84 习题 10-39 的电路原理图

10.4 节

10-40 试利用叠加原理求解如图10-85所示电路中的i_o。

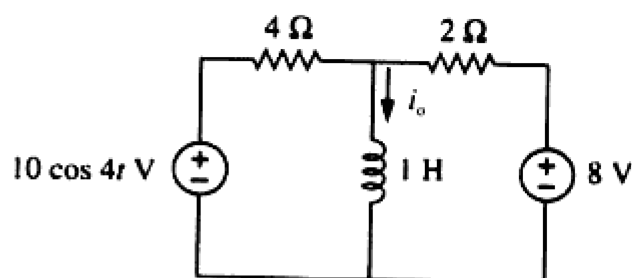


图 10-85 习题 10-40 的电路原理图

10-41 试求如图10-86所示电路中的v_o，假定$v_s = 6\cos 2t + 4\sin 4t$ V。

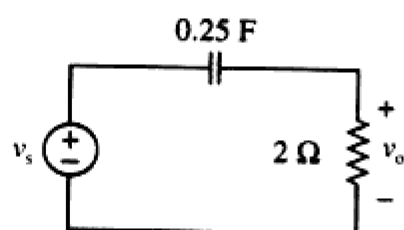


图 10-86 习题 10-41 的电路原理图

10-42 试求如图10-87所示电路中的$\boldsymbol{I}_o$。

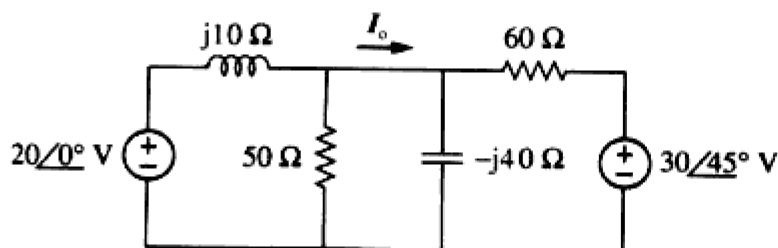


图 10-87 习题 10-42 的电路原理图

10-43 试利用叠加原理求解如图10-88所示电路中的i_x。

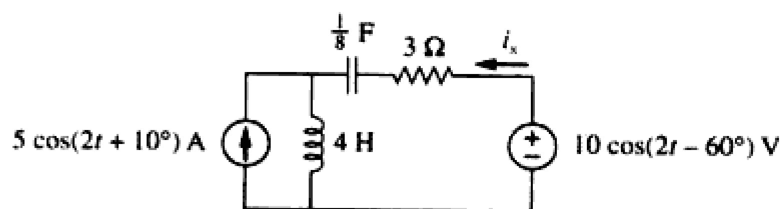


图 10-88 习题 10-43 的电路原理图

10-44 试利用叠加原理求解如图10-89所示电路中的v_x，假定$v_s = 50\sin 2t$ V，$i_s = 12\cos(6t+10°)$ A。

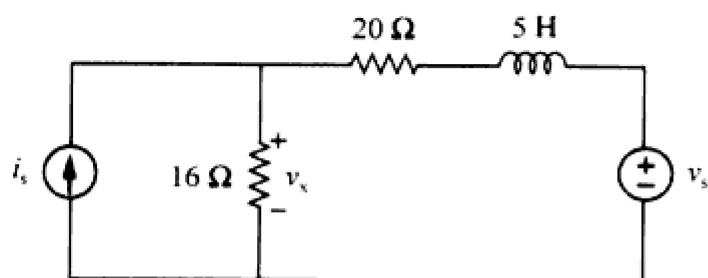


图 10-89 习题 10-44 的电路原理图

10-45 试利用叠加原理求解如图10-90所示电路中的$i(t)$。

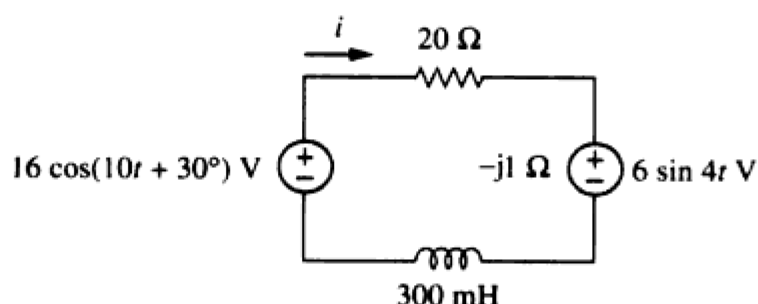


图 10-90 习题 10-45 的电路原理图

10-46 试利用叠加原理求解如图10-91所示电路中的$v_o(t)$。

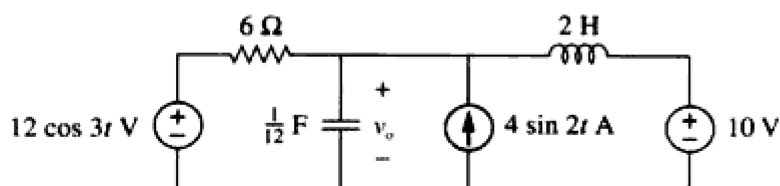


图 10-91 习题 10-46 的电路原理图

10-47 试利用叠加原理确定如图10-92所示电路中的i_o。

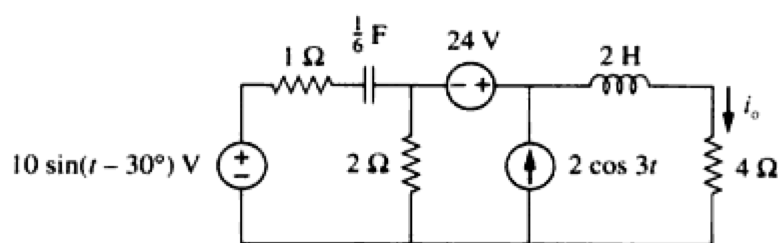


图 10-92 习题 10-47 的电路原理图

10-48 试利用叠加原理求解如图10-93所示电路中的i_o。

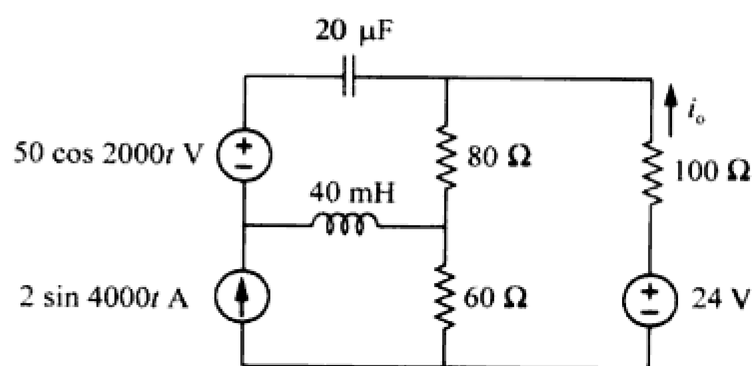


图 10-93 习题 10-48 的电路原理图

10.5 节

10-49 试利用电源变换方法求解如图10-94所示电路中的i。

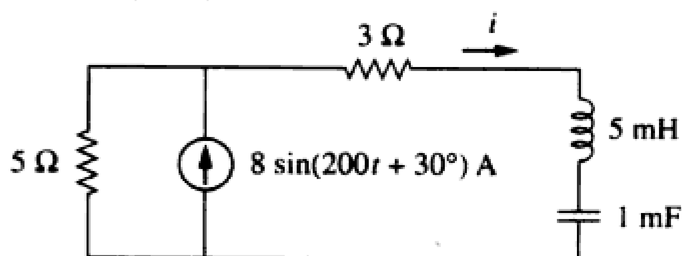


图 10-94 习题 10-49 的电路原理图

10-50 试利用电源变换方法求解如图10-95所示电路中的v_o。

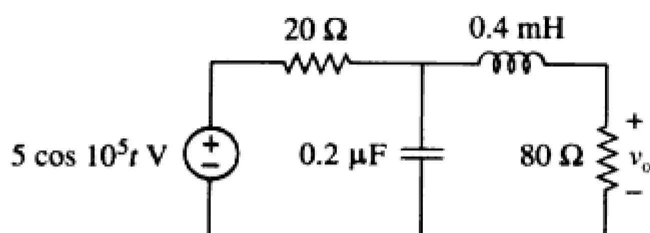


图 10-95 习题 10-50 的电路原理图

10-51 试利用电源变换方法求解习题10-42电路中的$\boldsymbol{I}_o$。

10-52 试利用电源变换方法求解如图10-96所示电路中的$\boldsymbol{I}_x$。

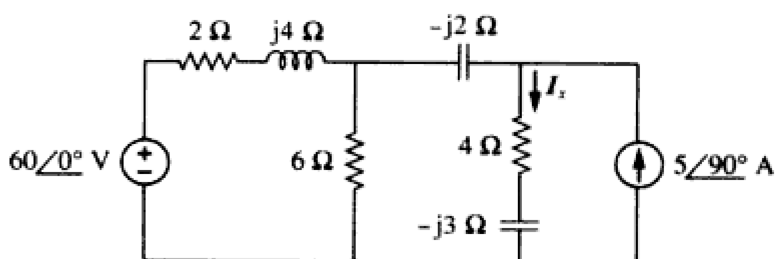


图 10-96 习题 10-52 的电路原理图

10-53 试利用电源变换方法求解如图10-97所示电路中的$\boldsymbol{V}_o$。

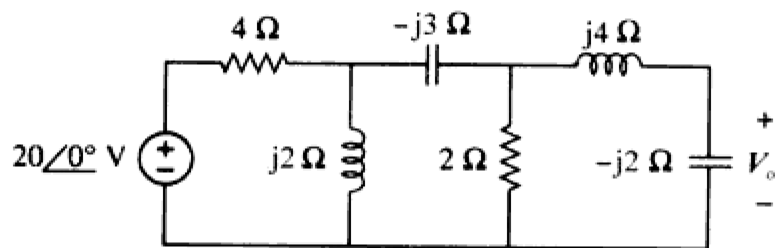
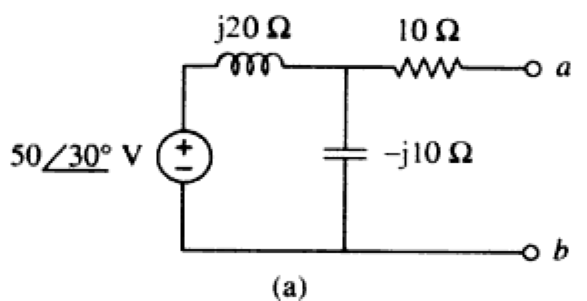


图 10-97 习题 10-53 的电路原理图

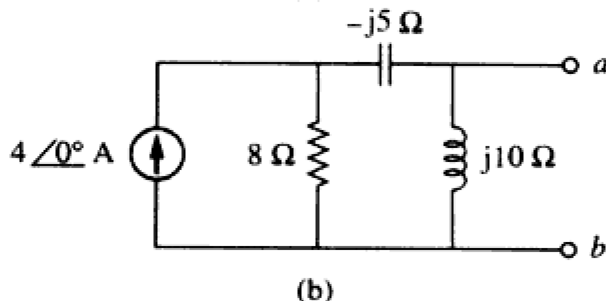
10-54 试利用电源变换方法重做习题10-7。

10.6 节

10-55 试求如图10-98所示各电路在端口$a-b$处的戴维南等效电路与诺顿等效电路。



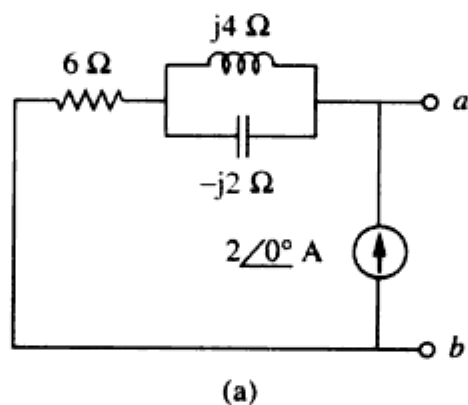
(a)



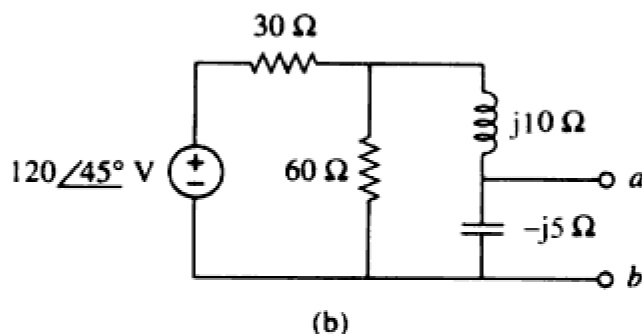
(b)

图 10-98 习题 10-55 的电路原理图

10-56 对如图10-99所示各电路，试求端口$a-b$处的戴维南等效电路与诺顿等效电路。



(a)



(b)

图 10-99 习题 10-56 的电路原理图

10-57 试求如图10-100所示电路的戴维南等效电路与诺顿等效电路。

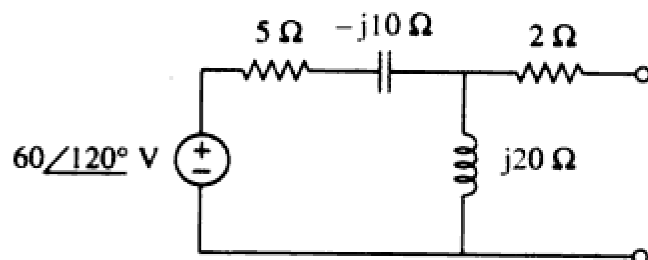


图 10-100 习题 10-57 的电路原理图

10-58 对如图10-101所示电路，试求端口$a-b$处的戴维南等效电路。

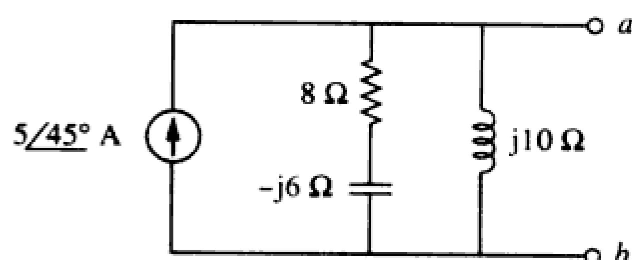


图 10-101 习题 10-58 的电路原理图

10-59 试计算如图10-102所示电路的输出阻抗。

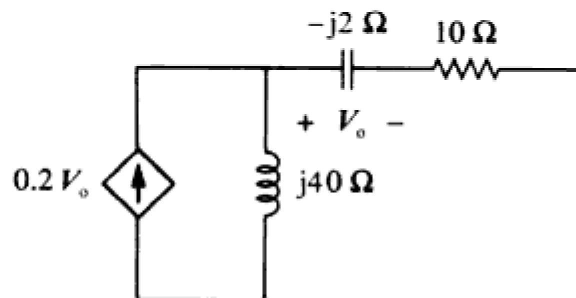


图 10-102 习题 10-59 的电路原理图

10-60 试求如图10-103所示电路从如下端口看进去的戴维南等效电路。

(a) 端口$a-b$，(b) 端口$c-d$

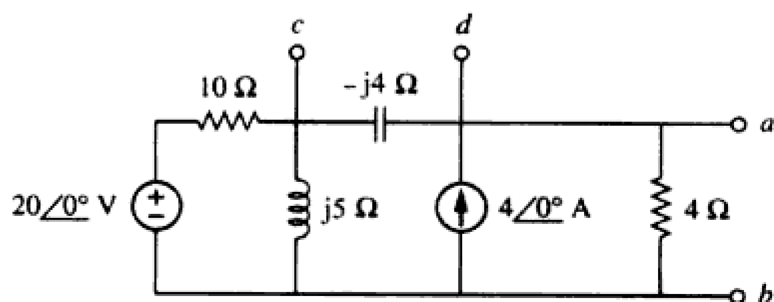


图 10-103 习题 10-60 的电路原理图

10-61 试求如图10-104所示电路在端口$a-b$处的戴维南等效电路。

10-62 试利用戴维南定理求解如图10-105所示电路中的v_o。

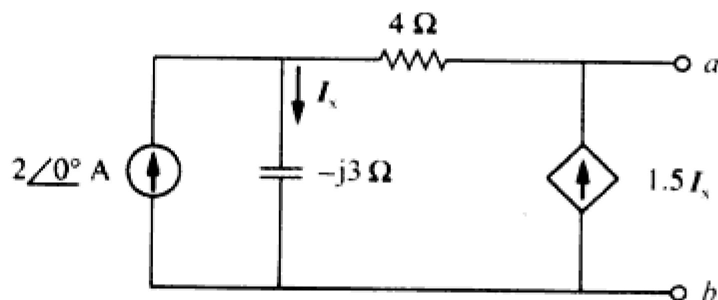


图 10-104 习题 10-61 的电路原理图

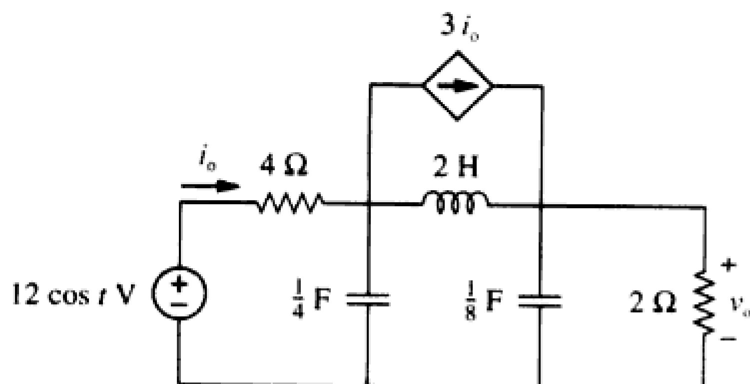


图 10-105 习题 10-62 的电路原理图

10-63 试确定如图10-106所示电路在端口$a-b$处的诺顿等效电路。

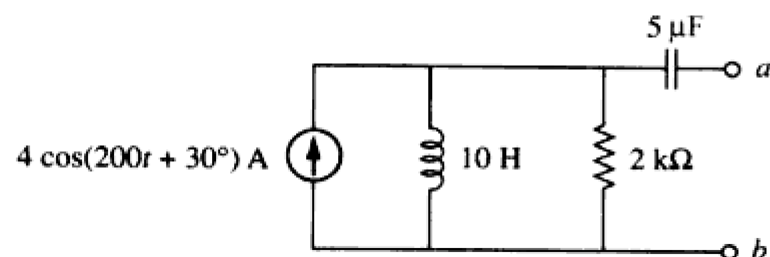


图 10-106 习题 10-63 的电路原理图

10-64 对如图10-107所示电路，试求端口$a-b$处的诺顿等效电路。

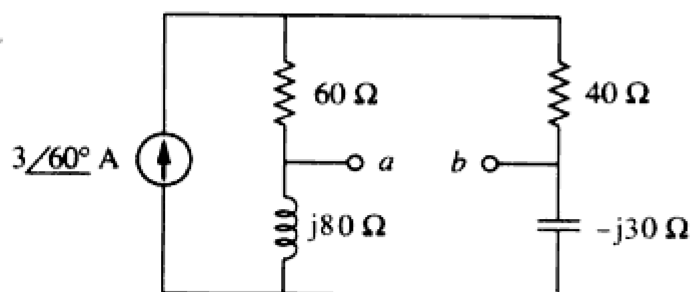


图 10-107 习题 10-64 的电路原理图

10-65 试利用诺顿定理计算如图10-108所示电路中的i_o。

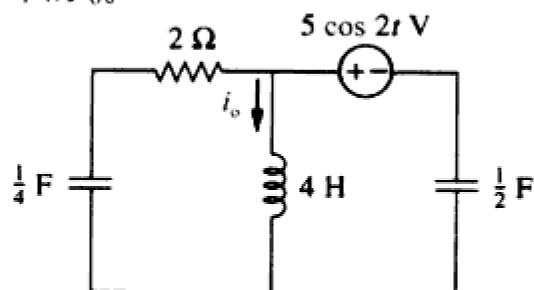


图 10-108 习题 10-65 的电路原理图

10-66 试确定如图10-109所示网络在端口$a-b$处的戴维南等效电路与诺顿等效电路。假定$\omega = 10$ rad/s。

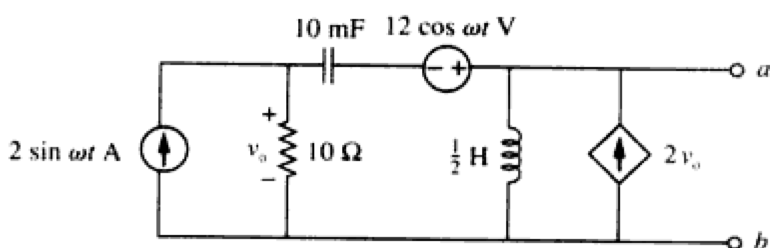


图 10-109 习题 10-66 的电路原理图

10-67 试求如图10-110所示电路在端口$a-b$处的戴维南等效电路与诺顿等效电路。

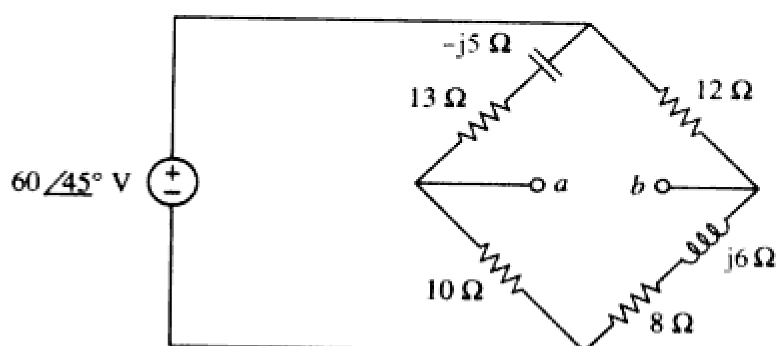


图 10-110 习题 10-67 的电路原理图

10-68 试求如图10-111所示电路在端口$a-b$处的戴维南等效电路。

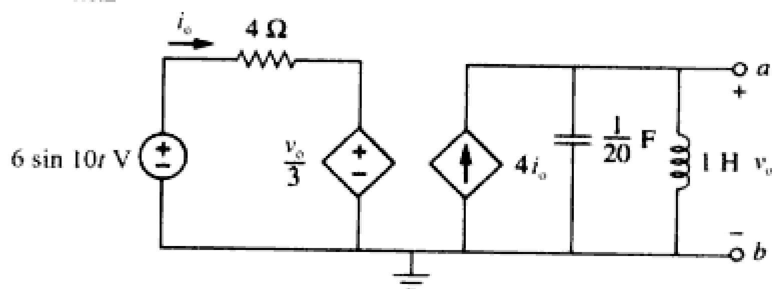


图 10-111 习题 10-68 的电路原理图

10.7节

10-69 对如图10-112所示的微分器电路，试确定V_o/V_s，并求出当$v_s(t) = V_m \sin \omega t$且$\omega = 1/RC$时的输出$v_o(t)$。

10-70 如图10-113所示电路为带有反馈电阻器的积分器，试计算$v_s = 2 \cos 4 \times 10^4 t$ V时的$v_o(t)$。

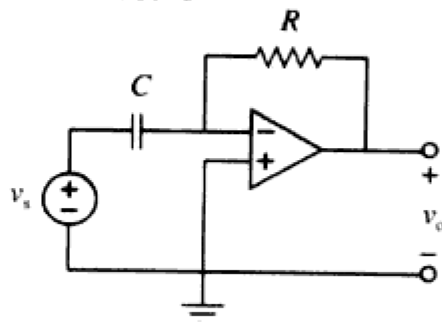


图 10-112 习题 10-69 的电路原理图

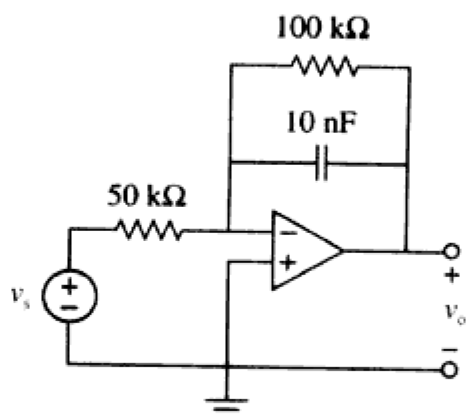


图 10-113 习题 10-70 的电路原理图

10-71 试求如图10-114所示运算放大器电路的v_o。

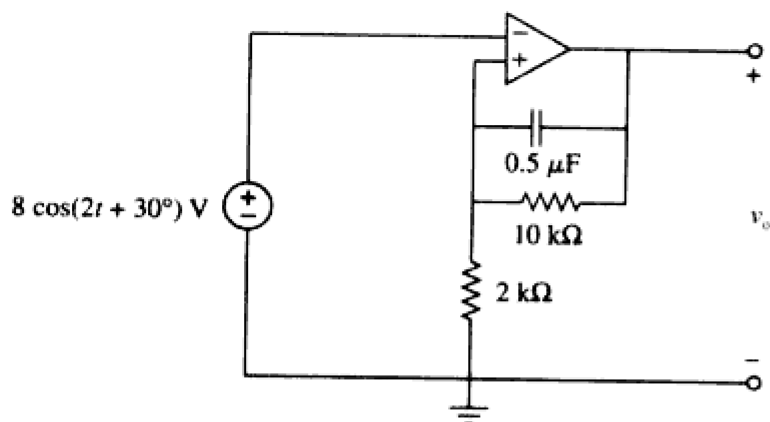


图 10-114 习题 10-71 的电路原理图

10-72 试计算如图10-115所示运算放大器电路在$v_s = 4\cos10^4 t$ V时的v_o。

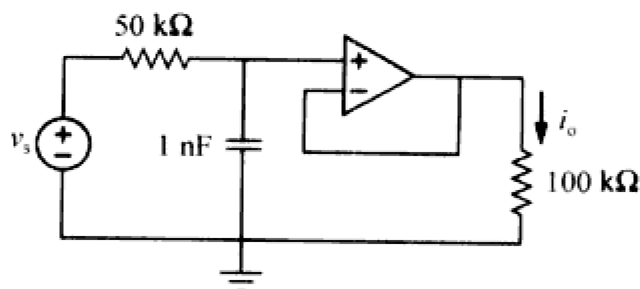


图 10-115 习题 10-72 的电路原理图

10-73 如果输入阻抗定义为$Z_{in} = V_s/I_s$，试求$R_1 = 10$ kΩ，$R_2 = 20$ kΩ，$C_1 = 10$ nF，$C_2 = 20$ nF，$\omega = 5000$ rad/s时如图10-116所示运算放大器电路的输入阻抗。

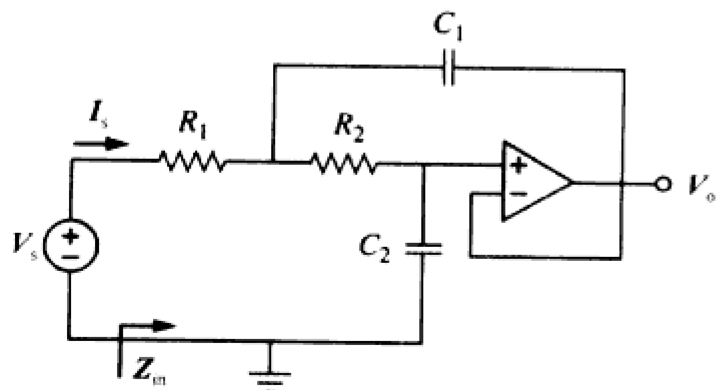


图 10-116 习题 10-73 的电路原理图

10-74 试计算如图10-117所示运算放大器电路的电压增益$A_v = V_o/V_s$，并求出$\omega = 0$，$\omega \to \infty$，$\omega = 1/R_1C_1$以及$\omega = 1/R_2C_2$四种情况下的A_v。

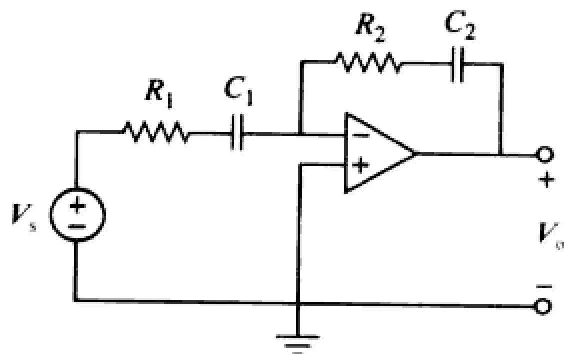


图 10-117 习题 10-74 的电路原理图

10-75 在如图10-118所示运算放大器电路中，如果$C_1 = C_2 = 1$ nF，$R_1 = R_2 = 100$ kΩ，$R_3 = 20$ kΩ，$R_4 = 40$ kΩ，$\omega = 2000$ rad/s，试求闭环增益与输出电压相对于输入电压的相移。

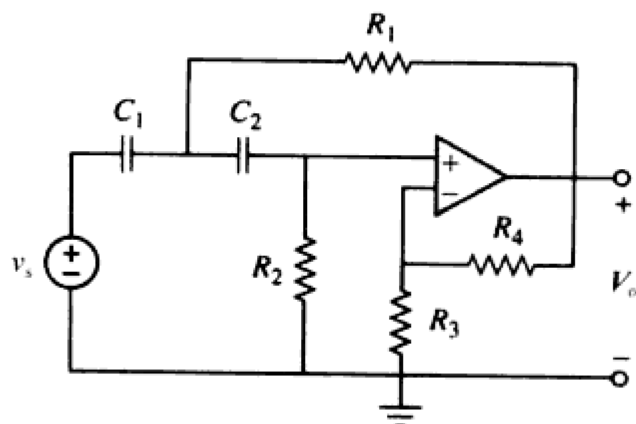


图 10-118 习题 10-75 的电路原理图

10-76 试确定如图10-119所示运算放大器电路中的V_o与I_o。

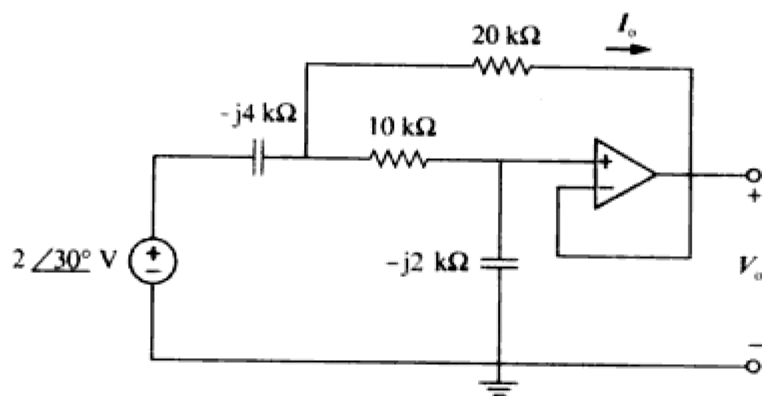


图 10-119 习题 10-76 的电路原理图

10-77 试计算如图10-120所示运算放大器电路的闭环增益V_o/V_s。



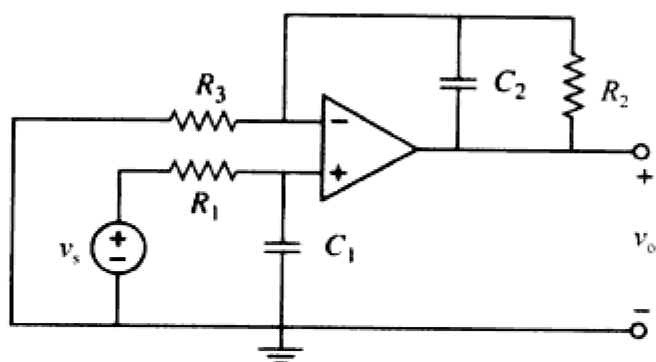


图 10-120　习题 10-77 的电路原理图

10-78　试确定如图10-121所示运算放大器电路的 $v_o(t)$。

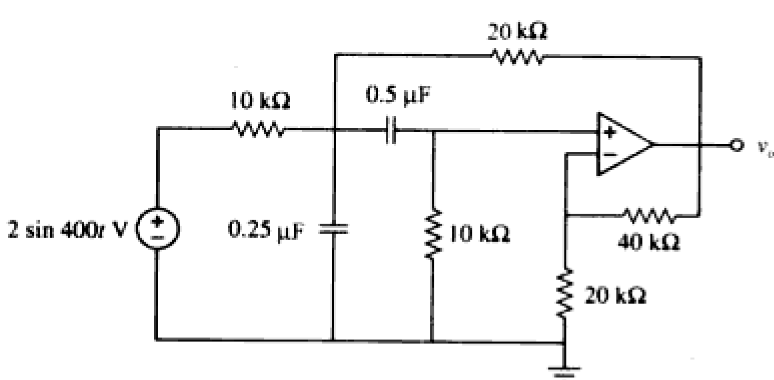


图 10-121　习题 10-78 的电路原理图

10-79　试确定如图10-122所示运算放大器电路的 $v_o(t)$。

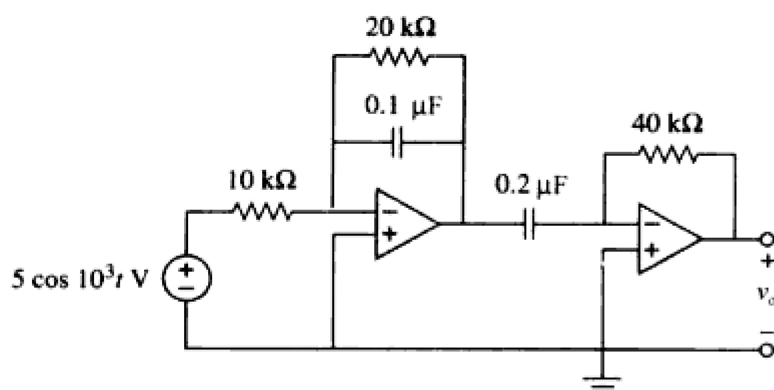


图 10-122　习题 10-79 的电路原理图

10-80　试确定如图10-123所示运算放大器电路在 v_s=4cos(1000 t−60°)V时的 $v_o(t)$。

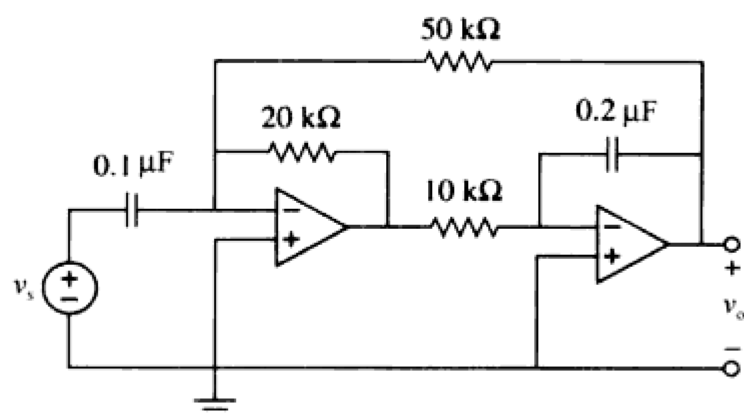


图 10-123　习题 10-80 的电路原理图

10.8 节

10-81　试利用PSpice确定如图10-124所示电路中的 V_o，假定 $\omega = 1$ rad/s。

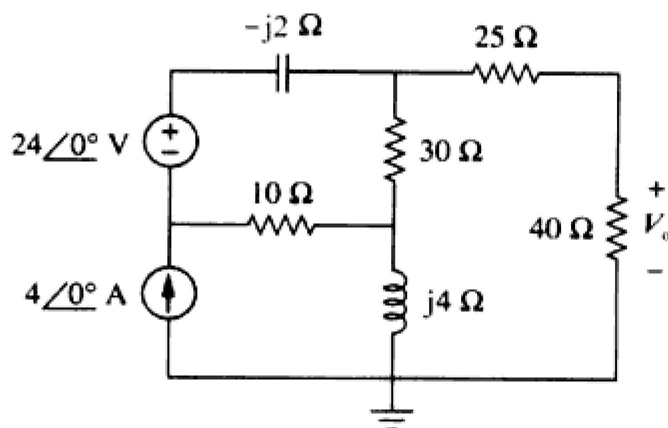


图 10-124　习题 10-81 的电路原理图

10-82　试利用PSpice求解习题10-19。

10-83　试利用PSpice求解如图10-125所示电路中的 $v_o(t)$，假定 $i_s = 2\cos(10^3\ t)$ A。

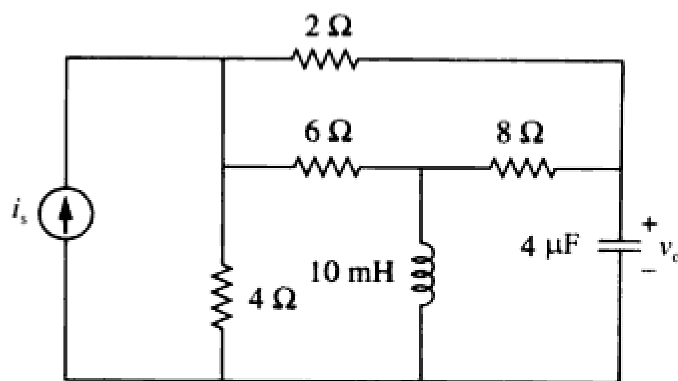


图 10-125　习题 10-83 的电路原理图

10-84　试利用PSpice确定如图10-126所示电路中的 V_o。

10-85　试利用PSpice确定如图10-127所示电路中的 V_o。

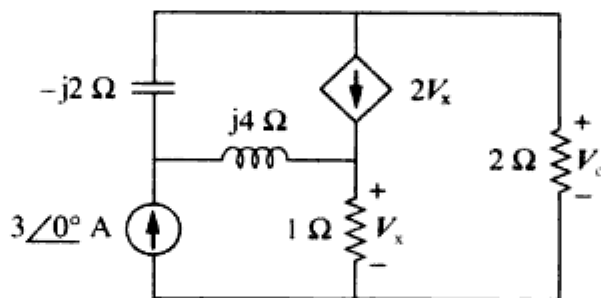


图 10-126　习题 10-84 的电路原理图

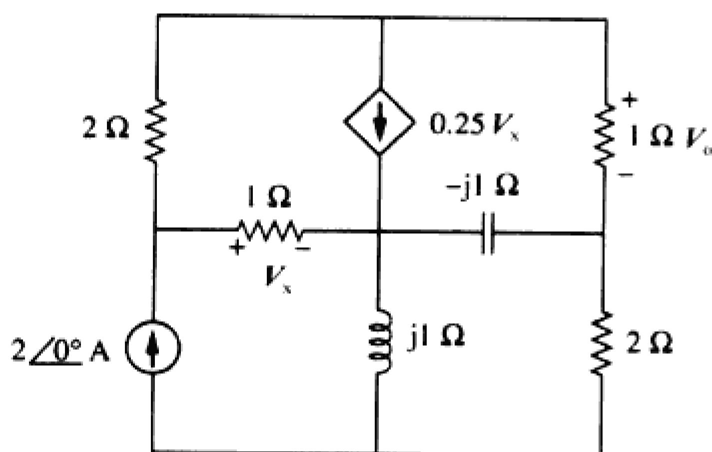


图 10-127　习题 10-85 的电路原理图

10-86　试利用PSpice确定如图10-128所示网络中的V_1、V_2与V_3。

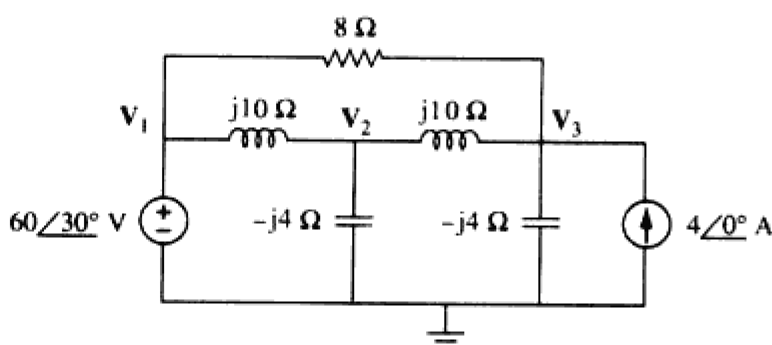


图 10-128　习题 10-86 的电路原理图

10-87　试利用PSpice确定如图10-129所示电路中的V_1、V_2与V_3。

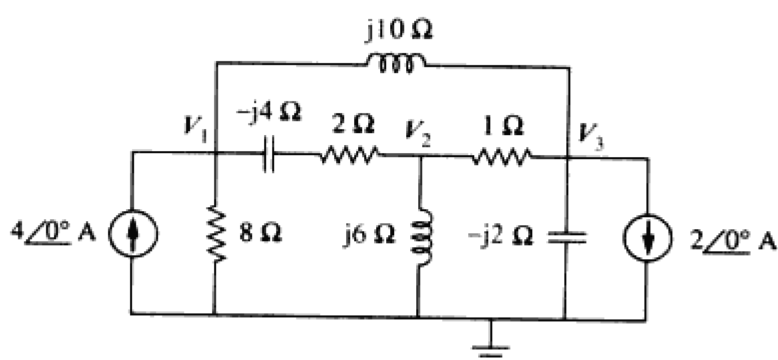


图 10-129　习题 10-87 的电路原理图

10-88　试利用PSpice确定如图10-130所示电路中的v_o与i_o。

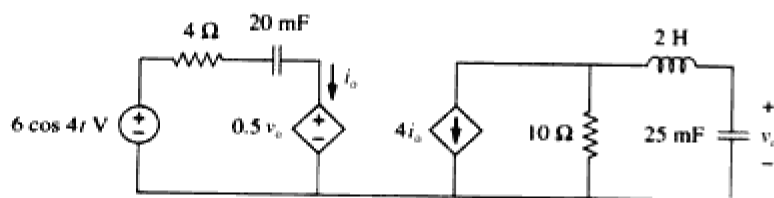


图 10-130　习题 10-88 的电路原理图

10.9 节

10-89　如图10-131所示运算放大器电路称为电感模拟器，试证明其输入阻抗为

$$Z_{in} = \frac{V_{in}}{I_{in}} = j\omega L_{eq}$$

其中，

$$L_{eq} = \frac{R_1 R_3 R_4}{R_2} C$$

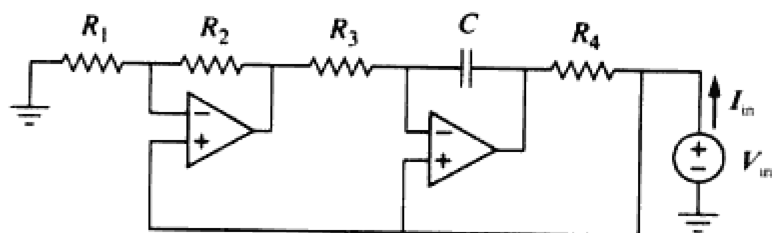


图 10-131　习题 10-89 的电路原理图

10-90　图10-132所示为一个维恩电桥网络，试证明输入信号与输出信号相移为零时的频率f为$f = \frac{1}{2}\pi RC$，并且在该频率处所需的增益为$A_v = V_o/V_i = 3$。

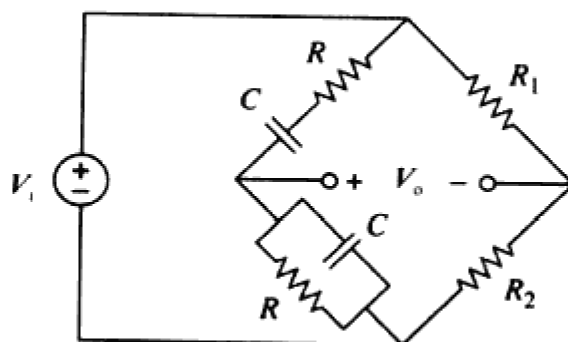


图 10-132　习题 10-90 的电路原理图

10-91　考虑如图10-133所示的振荡器电路。

(a) 试确定其振荡频率；

(b) 试确定振荡器起振时所需的R的最小值。

10-92　如图10-134所示振荡器电路采用理想运算放大器。

(a) 试计算振荡器起振所需的最小电阻值R_o。

(b) 试求振荡频率。

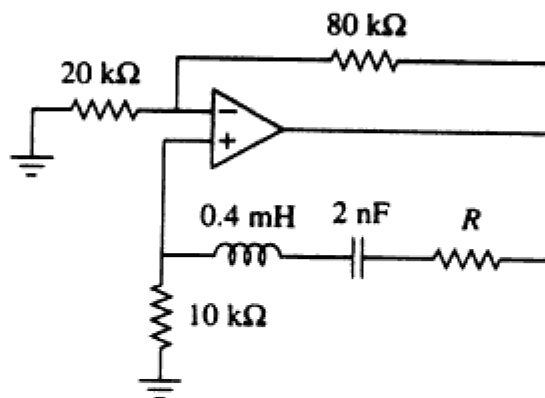


图 10-133　习题 10-91 的电路原理图

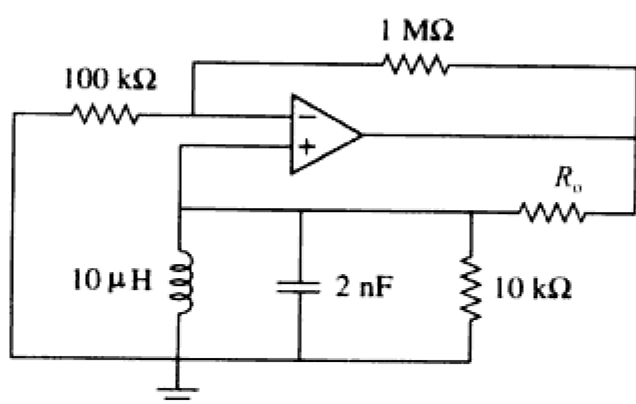


图 10-134 习题 10-92 的电路原理图

10-93 如图 10-135 所示为一个考毕兹振荡器（Colpitts oscilator），试证明其振荡频率为：

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_T}}$$

其中，$C_T = C_1C_2/(C_1 + C_2)$，假定$R_i >> X_{C_2}$。

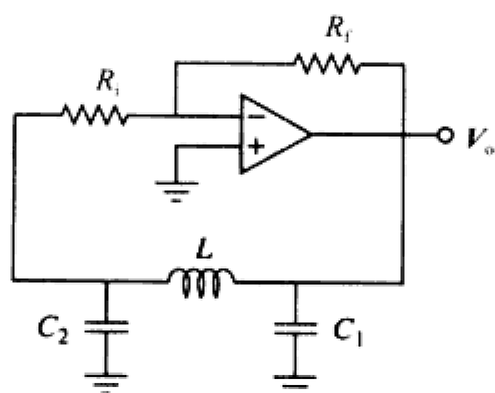


图10-135 考毕兹振荡器，习题10-93的电路原理图

（提示：将反馈电路中阻抗的虚部设置为零）。

10-94 试设计一个工作频率为50 kHz的考毕兹振荡器。

10-95 如图 10-136 所示为一个哈特莱振荡器（Hartley oscillator），试证明其振荡频率为：

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{C(L_1 + L_2)}}$$

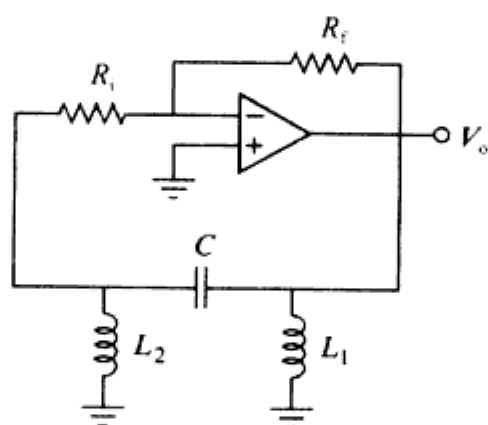


图 10-136 哈特莱振荡器，习题 10-95 的电路原理图

10-96 对于如图10-137所示的振荡器，

(a) 试证明：

$$\frac{V_2}{V_o} = \frac{1}{3 + j(\omega L/R - R/\omega L)}$$

(b) 试确定其振荡频率f_o。

(c) 试确定使得振荡器起振时，R_1与R_2之间的关系。

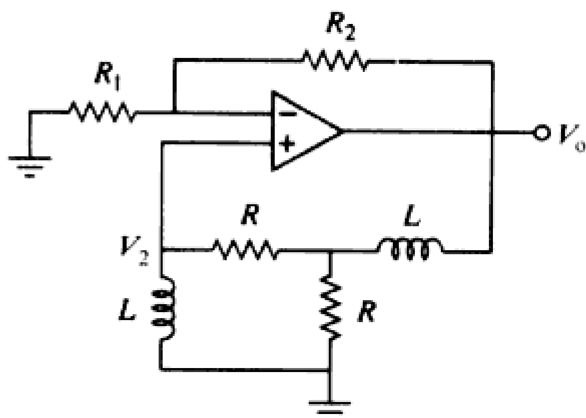


图10-137 习题10-96的电路原理图

第11章　交流功率分析

有四件事是永远不可挽回的：说出去的话、射出去的箭、流逝的时间和错过的机会。

——波斯哲人Al Halif Omar Ibn

扩展职业生涯

电力系统工程领域的职业生涯

1831年，迈克尔·法拉第（Michael Faraday）发现交流发电机的基本原理是工程领域中一项重大突破，它提供了一种产生电能的便捷途径，而电能恰恰是我们目前日常使用的各类电子、电气以及机电设备所必需的能源。

电能是由诸如矿物燃料（天然气、石油、煤）、核燃料（铀）、水利能源（江河落差）、地热能（热水、热流）、风能、潮汐能以及生物能(垃圾)等不同形式的能源转换得到的。在电力工程领域中会详细研究电能产生的各种不同途径，而且电力工程已经成为电子工程中一门不可或缺的子学科。电气工程师应该熟练掌握电能的分析、产生、传输、配送以及成本计算等基本知识。



低压三线配电系统中的柱式变压器

电力行业是电子工程师的一个巨大雇主。该行业包括成千上万个电力供应系统，大到为各大区域供电的大型互联电网，小到为各个社区和工厂供电的小型电力公司。由于电力行业所固有的复杂性，使得其不同的部门需要大量的电气工程工作人员，如发电厂、输电与配电、电力系统维护、科学研究、数据获取与数据流控制，以及管理等等。由于各地都需要用电，电力公司也就各处都有，同时也为世界各国的人们提供了令人兴奋的培训机会和稳定的就业机会。

11.1　引言

之前对交流电路的分析主要集中于电压与电流的计算，本章主要介绍交流电路的功率分析。

交流功率分析具有极其重要的意义。功率是电气设施、电子系统与通信系统中最为重要的物理量，因为上述系统中均存在从一点到另一点的功率传输。同时，各种工业用电设备或家用电子设备——电扇、电动机、照明灯、压力熨斗、电视机、个人计算机等都有一个额定功率值，即设备正常工作所要求的功率，如果超过额定功率将造成设备的永久性损坏。最常用的电功率为50 Hz或60 Hz的交流电。选择交流电取代直流电后，即可实现从发电厂到用户的高压电传输。

本章首先定义并推导瞬时功率与平均功率，之后介绍其他功率的概念。作为这些概念的实际应用，本章将讨论如何测量交流功率，以及供电公司如何收取消费者的电费。

11.2　瞬时功率与平均功率

第2章已经学过，元件吸收的瞬时功率$p(t)$等于该元件两端的瞬时电压$v(t)$与流经该元件的瞬时电流$i(t)$的乘积。假定采用无源符号规约，则有：

$$\boxed{p(t) = v(t)\, i(t)} \tag{11-1}$$

瞬时功率（单位为瓦特）是指任一瞬间的功率。

瞬时功率也可以认为是电路元件在某个特定时刻所吸收的功率，瞬时功率通常用小写字母表示。

瞬时功率是元件吸收能量的速率。

下面考虑电路元件的任意组合在正弦信号激励下吸收的瞬时功率的一般情况，如图11-1所示。令电路终端的电压与电流为：

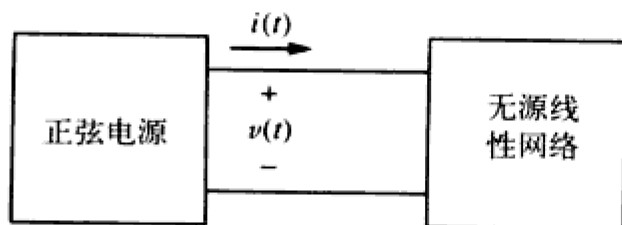


图 11-1　正弦电源与无源线性电路

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) \tag{11-2a}$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i) \tag{11-2b}$$

其中，V_m与I_m为振幅（即峰值），θ_v与θ_i分别为电压与电流的相位角。于是，电路吸收的瞬时功率为：

$$p(t) = v(t)\, i(t) = V_m\, I_m \cos(\omega t + \theta_v) \cos(\omega t + \theta_i) \tag{11-3}$$

利用三角恒等式：

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)] \tag{11-4}$$

将式(11-3)写为：

$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) \tag{11-5}$$

上式表明，瞬时功率包括两部分，第一部分为常量，与时间无关，其值取决于电压与电流之间的相位差；第二部分为正弦函数，其频率为2ω，即电压或电流角频率的两倍。

式(11-5)中$p(t)$的波形图如图11-2所示，图中$T = 2\pi/\omega$为电压或电流的周期。由图可见，$p(t)$为周期信号，$p(t) = p(t + T_0)$，其周期为$T_0 = T/2$，因为$p(t)$的频率是电压或电流频率的2倍。同时还可以观察到，在一个周期的部分时间$p(t)$为正，其余时间$p(t)$为负。当$p(t)$为正时，电路吸收功率；而当$p(t)$为负时，电源吸收功率，也就是说功率由电路传送到电源，这种情况在电路中包括储能元件（电感器或电容器）时是可能的。

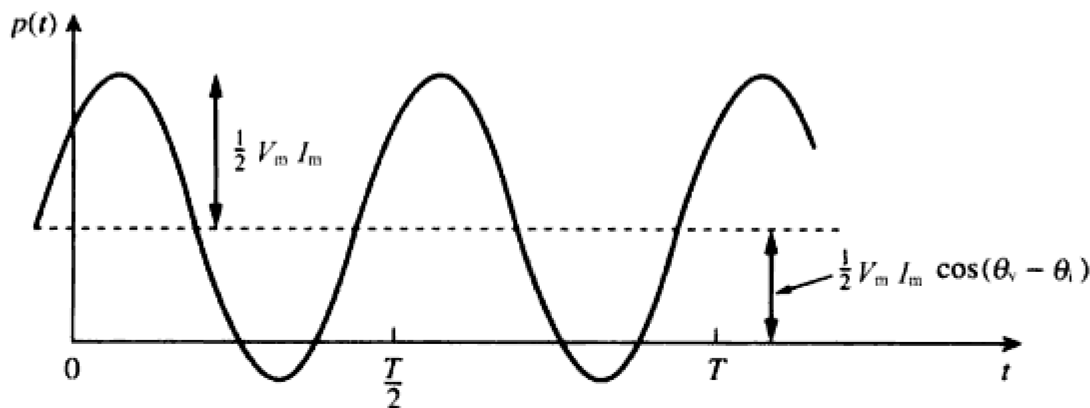


图 11-2　流入电路的瞬时功率 $p(t)$

由于瞬时功率是随时间而变化的，因此难以测量。平均功率则容易测量。实际上，用于测量功率的仪器－瓦特表（功率计）所测得的就是平均功率。

平均功率（单位为瓦特）是指一个周期内瞬时功率的平均值。

于是，平均功率可以表示为：

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t)\mathrm{d}t \tag{11-6}$$

虽然式(11-6)是对周期T取平均的，如果在$p(t)$的实际周期，即$T_0 = T/2$内取积分，同样会得到相同的结果。

将式(11-5)中的$p(t)$代入式(11-6)，有：

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\boldsymbol{V}_m\boldsymbol{I}_m\cos(\theta_v-\theta_i)dt \\ &+\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\boldsymbol{V}_m\boldsymbol{I}_m\cos(2\omega t+\theta_v+\theta_i)dt \\ &=\frac{1}{2}\boldsymbol{V}_m\boldsymbol{I}_m\cos(\theta_v-\theta_i)\frac{1}{T}\int_0^T dt \\ &+\frac{1}{2}\boldsymbol{V}_m\boldsymbol{I}_m\frac{1}{T}\int_0^T\cos(2\omega t+\theta_v+\theta_i)dt\end{aligned} \tag{11-7}$$

上式中的第一项为常数，常数的平均仍为原来的常数，第二项为正弦函数的积分。因为正弦函数正半周的面积与其负半周的面积相互抵消，所以正弦函数在一个周期内的平均为零，因此，式(11-7)中的第二项为零，于是平均功率为：

$$P=\frac{1}{2}\boldsymbol{V}_m\boldsymbol{I}_m\cos(\theta_v-\theta_i) \tag{11-8}$$

由于$\cos(\theta_v-\theta_i)=\cos(\theta_i-\theta_v)$，所以重要的是电压与电流之间的相位差。

注意，$p(t)$是随时间变化的，而P是与时间无关的。如果要求瞬时功率，必须求出时域中的$v(t)$与$i(t)$；但是要求平均功率时，只需要电压与电流可以在时域中表达，如式(11-8)，或可以在频域中表达。式(11-2)中$v(t)$与$i(t)$的相量形式分别为$\boldsymbol{V}=V_m\underline{/\theta_v}$与$\boldsymbol{I}=I_m\underline{/\theta_i}$，$P$既可以用式(11-8)计算，也可以用相量$\boldsymbol{V}$与$\boldsymbol{I}$计算。利用相量计算时，由于：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\boldsymbol{VI}^* &= \frac{1}{2}V_mI_m\underline{/\theta_v-\theta_i} \\ &=\frac{1}{2}V_mI_m[\cos(\theta_v-\theta_i)+\mathrm{j}\sin(\theta_v-\theta_i)]\end{aligned} \tag{11-9}$$

可以看出，上式中的实部即式(11-8)所定义的平均功率P，于是：

$$\boxed{P=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{VI}^*]=\frac{1}{2}V_mI_m\cos(\theta_v-\theta_i)} \tag{11-10}$$

下面考虑式(11-10)的两种特殊情况。当$\theta_v=\theta_i$时，电压与电流同相，意指纯电阻电路或电阻性负载R，并且：

$$P=\frac{1}{2}\boldsymbol{V}_m\boldsymbol{I}_m=\frac{1}{2}I_m^2R=\frac{1}{2}|\boldsymbol{I}|^2R \tag{11-11}$$

其中，$|\boldsymbol{I}|^2=\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{I}^*$。式(11-11)表明，纯电阻电路在任何时刻均吸收功率。当$\theta_v-\theta_i=\pm 90°$时，为纯电抗电路，且有：

$$P=\frac{1}{2}\boldsymbol{V}_m\boldsymbol{I}_m\cos 90°=0 \tag{11-12}$$

表明纯电抗电路吸收的平均功率为零。总之，

电阻性负载（R）在任何时刻均吸收功率，而电抗负载（L或C）吸收的平均功率为零。

例题11-1 已知$v(t)=120\cos(377t+45°)$ V，$i(t)=10\cos(377t-10°)$ A，试求如图11-1所示无源线性网络所吸收的瞬时功率与平均功率。

解 瞬时功率为：

$$p=vi=1200\cos(377t+45°)\cos(377t-10°)$$

利用三角恒等式：

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

得到：

$$p = 600\,[\cos(754t + 35°) + \cos 55°\,]$$

即：

$$p(t) = 344.2 + 600\cos(\,754t + 35°\,)\ \mathrm{W}$$

平均功率为：

$$P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{1}{2}120(10)\cos[45° - (-10°)]$$
$$= 600\cos 55° = 344.2\mathrm{W}$$

即上述$p(t)$中的常数项。

练习题11-1 如果$v(t) = 80\cos(10t + 20°)$ V，$i(t) = 15\sin(10t + 60°)$ A，试计算如图11-1所示无源线性网络所吸收的瞬时功率与平均功率。

答 $385.7 + 600\cos(20t - 10°)$ W，385.7 W。

例题11-2 当阻抗$\boldsymbol{Z} = 30 - \mathrm{j}70\ \Omega$两端的电压$\boldsymbol{V} = 120\angle 0°$V时，试计算该负载吸收的平均功率。

解 流过该阻抗的电流为：

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{Z}} = \frac{120\angle 0°}{30 - \mathrm{j}70} = \frac{120\angle 0°}{76.16\angle -66.8°} = 1.576\angle 66.8°\ \mathrm{A}$$

平均功率为：

$$P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{1}{2}(120)(1.576)\cos(0 - 66.8°) = 37.24\mathrm{W}$$

练习题11-2 如果流过阻抗$\boldsymbol{Z} = 20\angle -22°\ \Omega$的电流为$\boldsymbol{I} = 10\angle 30°$ A，试求传递给该阻抗的平均功率。

答 927.2W。

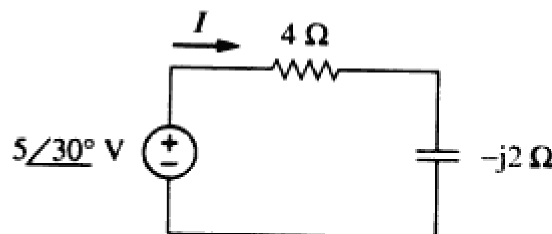


图 11-3 例题 11-3 的电路原理图

例题11-3 对于如图11-3所示电路，试求电源提供的平均功率与电阻器吸收的平均功率。

解 电路中的电流$\boldsymbol{I}$为：

$$\boldsymbol{I} = \frac{5\angle 30°}{4 - \mathrm{j}2} = \frac{5\angle 30°}{4.472\angle -26.57°} = 1.118\angle 56.57°\ \mathrm{A}$$

电压源提供的平均功率为：

$$P = \frac{1}{2}(5)(1.118)\cos(30° - 56.57°) = 2.5\mathrm{W}$$

流过电阻器的电流为：

$$\boldsymbol{I}_R = \boldsymbol{I} = 1.118\angle 56.57°\ \mathrm{A}$$

电阻器两端的电压为：

$$\boldsymbol{V}_R = 4\boldsymbol{I}_R = 4.472\angle 56.57°\ \mathrm{V}$$

该电阻器吸收的平均功率为：

$$P = \frac{1}{2}(4.472)(1.118) = 2.5\mathrm{W}$$

由此可见，电阻器吸收的平均功率与电源提供的平均功率相同，电容器吸收的平均功率为零。

练习题11-3 在如图11-4所示电路中，试计算电阻器与电感器吸收的平均功率，并求电压源提供的平均功率。

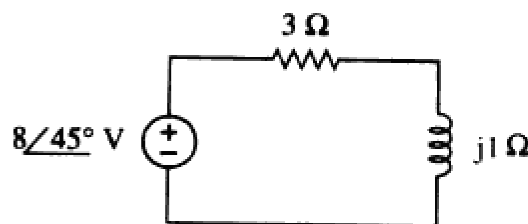


图 11-4 练习题 11-3 的电路原理图

答 9.6 W，0 W，9.6 W。

例题11-4 试确定如图11-5a所示电路中各电源产生的平均功率以及各无源元件吸收的平均功率。

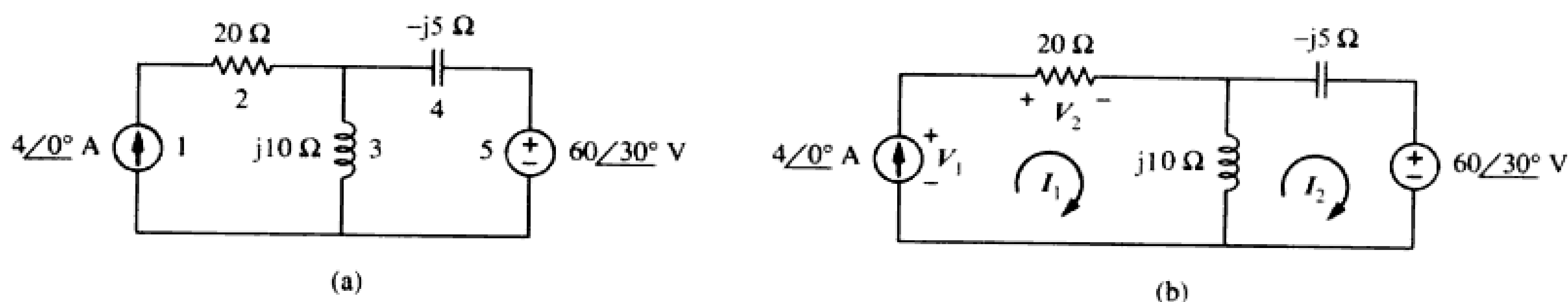


图 11-5 例题 11-4 的电路原理图

解 应用网孔分析法，如图11-5b所示。对于网孔1，有：

$$\boldsymbol{I}_1 = 4\text{ A}$$

对于网孔2，有：

$$(\mathrm{j}10-\mathrm{j}5)\boldsymbol{I}_2 - \mathrm{j}10\boldsymbol{I}_1 + 60\angle 30^\circ = 0,\quad \boldsymbol{I}_1 = 4\text{A}$$

即：

$$\mathrm{j}5\boldsymbol{I}_2 = -60\underline{/30^\circ} + \mathrm{j}40 \Rightarrow \boldsymbol{I}_2 = -12\underline{/-60^\circ} + 8$$
$$= 10.58\underline{/79.1^\circ}\text{ A}$$

对于电压源而言，流过它的电流为$\boldsymbol{I}_2 = 10.58\underline{/79.1^\circ}$ A，其两端的电压为$60\underline{/30^\circ}$ V，于是平均功率为：

$$P_5 = \frac{1}{2}(60)(10.58)\cos(30^\circ - 79.1^\circ) = 207.8\text{W}$$

按照无源符号规约（参见图11-8），从$\boldsymbol{I}_2$的方向与电压源的极性来看，这个平均功率是被电压源吸收的，也就是说，该电路将平均功率传递给电压源。

对于电流源而言，流过它的电流为$\boldsymbol{I}_1 = 4\underline{/0^\circ}$，它两端的电压为：

$$\boldsymbol{V}_1 = 20\boldsymbol{I}_1 + \mathrm{j}10(\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{I}_2) = 80 + \mathrm{j}10(4 - 2 - \mathrm{j}10.39)$$
$$= 183.9 + \mathrm{j}20 = 184.984\underline{/6.21^\circ}\text{ V}$$

于是，该电流源提供的平均功率为：

$$P_1 = -\frac{1}{2}(184.984)(4)\cos(6.21^\circ - 0) = -367.8\text{W}$$

根据无源符号规约，平均功率为负，表示该电流源向电路提供功率。

对于电阻器而言，流过它的电流为$\boldsymbol{I}_1 = 4\underline{/0^\circ}$，其两端的电压为$20\ \boldsymbol{I}_1 = 80\underline{/0^\circ}$，于是，该电阻器吸收的功率为：

$$P_2 = \frac{1}{2}(80)(4) = 160\text{W}$$

对于电容器而言，流过它的电流为$\boldsymbol{I}_2 = 10.58\underline{/79.1^\circ}$，其两端的电压为$-\mathrm{j}5\boldsymbol{I}_2 = (5\underline{/-90^\circ})(10.58\underline{/79.1^\circ}) = 52.9\underline{/79.1^\circ - 90^\circ}$，于是，该电容器吸收的平均功率为：

$$P_4 = \frac{1}{2}(52.9)(10.58)\cos(-90^\circ) = 0$$

对于电感器而言，流过它的电流为$\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{I}_2 = 2 - \mathrm{j}10.39 = 10.58\underline{/-79.1^\circ}$，其两端的电压为$\mathrm{j}10(\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{I}_2) = 105.8\underline{/-79.1^\circ + 90^\circ}$，因此，电感器吸收的平均功率为：

$$P_3 = \frac{1}{2}(105.8)(10.58)\cos 90^\circ = 0$$

可以注意到，电感器与电容器吸收的平均功率均为零，并且电流源提供的总功率等于电阻器与电压

源吸收的功率，即：

$$P_1+P_2+P_3+P_4+P_5=-367.8+160+0+0+207.8=0$$

表明功率是守恒的。

练习题11-4 试计算如图11-6所示电路中五个元件分别吸收的平均功率。

答 40 V电压源：−60 W；j20 V电压源：−40 W；电阻器：100 W；其他：0W。

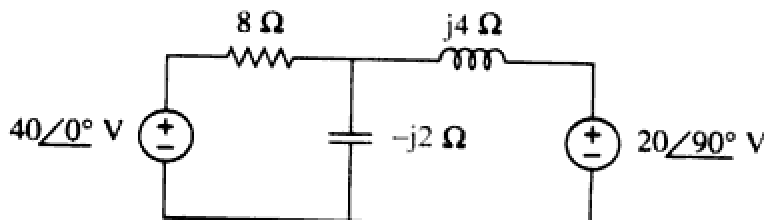


图 11-6 练习题 11-4 的电路原理图

11.3 最大平均功率传输

本书4.8节解决了电阻性供电网络为其负载R_L提供功率的最大功率传输问题。如果用戴维南等效表示供电电路，则可以证明，当负载电阻等于戴维南电阻，即$R_L=R_{Th}$时，传输给负载的功率最大。下面，将该结果扩展到交流电路中。

考虑如图11-7所示电路，图中交流电路与负载$\mathbf{Z}_L$相连接，并以戴维南等效电路表示该交流电路。负载通常用阻抗表示，可以是电动机、天线、电视机等的模型。戴维南阻抗$\mathbf{Z}_{Th}$与负载阻抗$\mathbf{Z}_L$的直角坐标表示式为：

$$\mathbf{Z}_{Th}=\mathbf{R}_{Th}+\mathrm{j}\mathbf{X}_{Th} \tag{11-13a}$$

$$\mathbf{Z}_L=\mathbf{R}_L+\mathrm{j}\mathbf{X}_L \tag{11-13b}$$

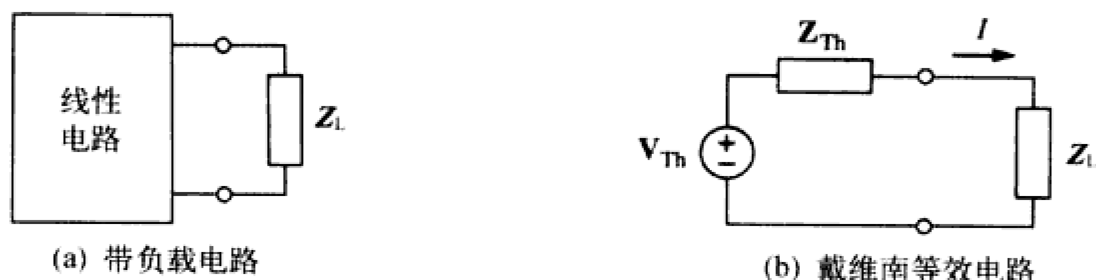


图 11-7 确定最大平均功率传输条件

流过负载的电流为：

$$\mathbf{I}=\frac{\mathbf{V}_{Th}}{\mathbf{Z}_{Th}+\mathbf{Z}_L}=\frac{\mathbf{V}_{Th}}{(\mathbf{R}_{Th}+\mathrm{j}\mathbf{X}_{Th})+(\mathbf{R}_L+\mathrm{j}\mathbf{X}_L)} \tag{11-14}$$

由式(11-11)可知，传递给负载的平均功率为：

$$P=\frac{1}{2}|\mathbf{I}|^2\mathbf{R}_L=\frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2\mathbf{R}_L/2}{(\mathbf{R}_{Th}+\mathbf{R}_L)^2+(\mathbf{X}_{Th}+\mathbf{X}_L)^2} \tag{11-15}$$

我们的目标是调节负载参数R_L与X_L，从而使得P最大。为此，令$\partial P/\partial R_L=0$，$\partial P/\partial X_L=0$。由式(11-15)可得：

$$\frac{\partial P}{\partial \mathbf{X}_L}=-\frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2\mathbf{R}_L(\mathbf{X}_{Th}+\mathbf{X}_L)}{[(\mathbf{R}_{Th}+\mathbf{R}_L)^2+(\mathbf{X}_{Th}+\mathbf{X}_L)^2]^2} \tag{11-16a}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \mathbf{R}_L}=\frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2[(\mathbf{R}_{Th}+\mathbf{R}_L)^2+(\mathbf{X}_{Th}+\mathbf{X}_L)^2-2\mathbf{R}_L(\mathbf{R}_{Th}+\mathbf{R}_L)]}{2[(\mathbf{R}_{Th}+\mathbf{R}_L)^2+(\mathbf{X}_{Th}+\mathbf{X}_L)^2]^2} \tag{11-16b}$$

令$\partial P/\partial X_L=0$得到：

$$X_L = -X_{Th} \tag{11-17}$$

令$\partial P/\partial R_L = 0$得到：

$$R_L = \sqrt{R_{Th}^2 + (X_{Th} + X_L)^2} \tag{11-18}$$

合并式(11-17)与式(11-18)得到如下结论：为实现最大平均功率传输，所选择的Z_L必须满足$X_L = -X_{Th}$且$R_L = -R_{Th}$，即：

$$\boxed{Z_L = R_L + jX_L = R_{Th} - jX_{Th} = Z_{Th}^*} \tag{11-19}$$

对于最大平均功率传输而言，负载阻抗Z_L必须等于戴维南阻抗Z_{Th}的共轭复数。

当$Z_L = Z_{Th}^*$时，称负载与电源是匹配的。

上述结果称为正弦稳态条件下的最大平均功率传输定理（maximum average power transfer theorem）。在式(11-15)中令$R_L = R_{Th}$且$X_L = -X_{Th}$，则得到最大平均功率为：

$$\boxed{P_{max} = \frac{|V_{Th}|^2}{8R_{Th}}} \tag{11-20}$$

在负载为纯实数的情况下，在式(11-18)中，令$X_L = 0$，可以得到最大功率传输条件为：

$$R_L = \sqrt{R_{Th}^2 + X_{Th}^2} = |Z_{Th}| \tag{11-21}$$

式(11-21)表明，对于纯电阻负载而言，最大功率传输条件为：负载阻抗（即电阻）等于戴维南阻抗的模。

例题11-5 试确定从如图11-8所示电路中吸收的平均功率最大的负载阻抗Z_L，并计算相应的最大平均功率。

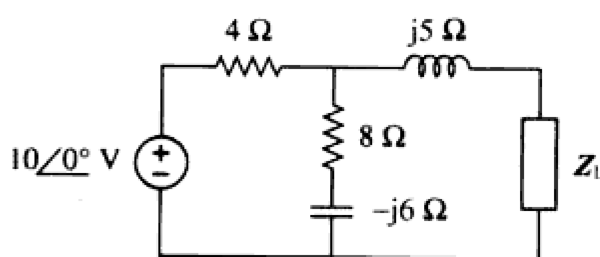


图 11-8 例题 11-5 的电路原理图

解 首先确定负载两端的戴维南等效电路。由图11-9a所示电路可以求出Z_{Th}：

$$Z_{Th} = j5 + 4 \| (8 - j6) = j5 + \frac{4(8-j6)}{4+8-j6} = 2.933 + j4.467\Omega$$

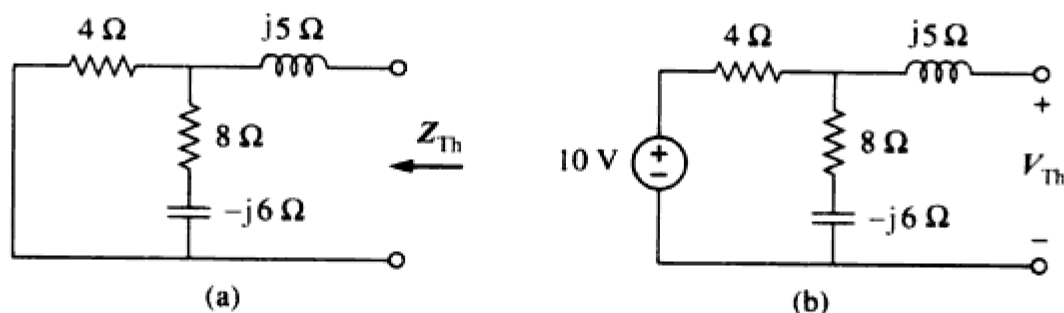


图 11-9 求解图 11-8 所示电路的戴维南等效电路

由图11-9b所示的电路可以求出V_{Th}，由分压原理，有：

$$V_{Th} = \frac{8-j6}{4+8-j6}(10) = 7.454 \angle{-10.3°}\text{V}$$

当负载阻抗为$Z_L = Z_{Th}^* = 2.933 - j4.467\ \Omega$时，从电路中吸收的平均功率最大。根据式(11-20)，最大平均功率为：

$$P_{max} = \frac{|V_{Th}|^2}{8R_{Th}} = \frac{(7.454)^2}{8(2.933)} = 2.368\text{W}$$

练习题11-5 对于图11-10所示电路，试求吸收最大平均功率时的负载阻抗Z_L，并计算该最大平均功率。

答 3.415 − j 0.7317 Ω，1.429 W。

例题11-6 在如图11-11所示电路中，试求吸收最大平均功率时的R_L值，并计算该功率。

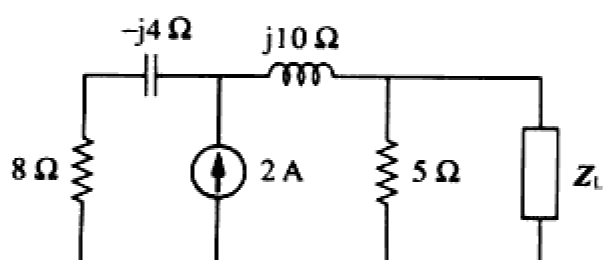


图 11-10 练习题 11-5 的电路原理图

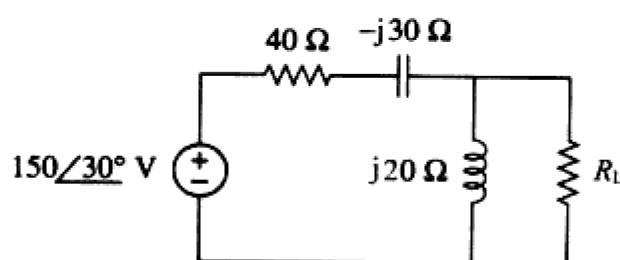


图 11-11 例题 11-6 的电路原理图

解 首先求出R_L两端的戴维南等效电路：

$$\boldsymbol{Z}_{Th} = (40 - j30) \| j20 = \frac{j20(40 - j30)}{j20 + 40 - j30} = 9.412 + j22.35\Omega$$

由分压原理，有：

$$\boldsymbol{V}_{Th} = \frac{j20}{j20 + 40 - j30}(150\angle 30^\circ) = 72.76\angle 134^\circ \text{V}$$

吸收最大平均功率的R_L值为：

$$\boldsymbol{R}_L = |\boldsymbol{Z}_{Th}| = \sqrt{9.412^2 + 22.35^2} = 24.25\Omega$$

流过该负载的电流为：

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{V}_{Th}}{\boldsymbol{Z}_{Th} + \boldsymbol{R}_L} = \frac{72.76\angle 134^\circ}{33.66 + j22.35} = 1.8\angle 100.42^\circ \text{A}$$

R_L吸收的最大平均功率为：

$$P_{max} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{I}|^2 \boldsymbol{R}_L = \frac{1}{2}(1.8)^2(24.25) = 39.29\text{W}$$

练习题11-6 在如图11-12所示电路中，调节电阻器$\boldsymbol{R}_L$至能吸收最大平均功率，试计算$\boldsymbol{R}_L$及其吸收的最大平均功率值。

答 30 Ω，6.863 W。

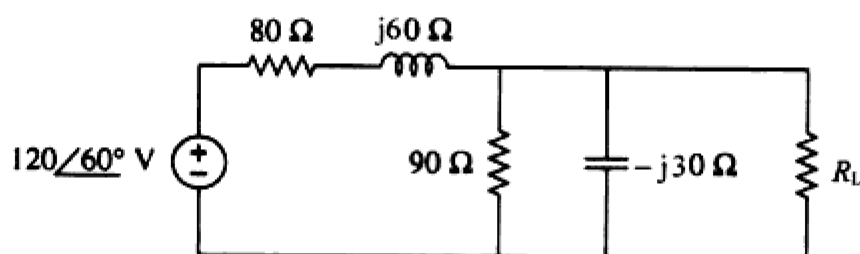


图 11-12 练习题 11-6 的电路原理图

11.4 有效值

有效值（effective value）的概念源于测量交流电压源或电流源传递给电阻性负载的有效功率的必要性。

周期性电流的有效值是指与该周期性电流传递给电阻器的平均功率相等的直流电流值。

在如图11-13所示电路中，图a中的电路为交流电路，图b中的电路为直流电路。我们的目的是求出与正弦电流i传递给电阻器R的平均功率相等的有效值电流I_{eff}，该交流电路中，电阻器吸收的平均功率为：

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T i^2R\,\mathrm{d}t=\frac{R}{T}\int_0^T i^2\,\mathrm{d}t \tag{11-22}$$



图 11-13 求解有效电流的电路原理图

而在直流电路中，电阻器吸收的功率为：

$$P=I_{eff}^2R \tag{11-23}$$

令式(11-22)与式(11-23)相等，即可求出I_{eff}：

$$I_{eff}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\mathrm{d}t} \tag{11-24}$$

交流电压有效值的求解方法与交流电流有效值的求解方法相同，即：

$$V_{eff}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2\mathrm{d}t} \tag{11-25}$$

上式表明，有效值就是周期信号平方的均方根（或平均）。因此，有效值通常也称为均方根值(root-mean-square)，简称rms值，写作：

$$I_{eff}=I_{rms} \qquad V_{eff}=V_{rms} \tag{11-26}$$

对于任意周期函数$x(t)$，其有效值即rms值为：

$$\boxed{X_{rms}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2\mathrm{d}t}} \tag{11-27}$$

周期信号的有效值就是它的均方根（rms）值。

式(11-27)表明，为了求得$x(t)$的rms值，首先求出其平方值x^2，之后求平均值，即：

$$\frac{1}{T}\int_0^T x^2\mathrm{d}t$$

最后再求该均值的平方根（$\sqrt{\ }$）。常数的rms仍然是它本身，正弦信号$i(t)=I_m\cos\,\omega t$的有效值或rms值为：

$$\begin{aligned}I_{rms}&=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2\cos^2\omega t\,\mathrm{d}t}\\&=\sqrt{\frac{I_m^2}{T}\int_0^T\frac{1}{2}(1+\cos 2\omega t)\mathrm{d}t}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}\end{aligned} \tag{11-28}$$

同理，对于$v(t)=V_m\cos\,\omega t$，其有效值为：

$$V_{rms}=\frac{V_m}{\sqrt{2}} \tag{11-29}$$

必须牢记的是，式(11-28)与式(11-29)仅适用于正弦信号。

利用rms值来表示式(11-8)中的平均功率，可得：

$$P=\frac{1}{2}\boldsymbol{V}_{\mathrm{m}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{m}}\cos(\theta_{\mathrm{v}}-\theta_{\mathrm{i}})=\frac{\boldsymbol{V}_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}\frac{\boldsymbol{I}_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}\cos(\theta_{\mathrm{v}}-\theta_{\mathrm{i}}) \\ =V_{\mathrm{rms}}I_{\mathrm{rms}}\cos(\theta_{\mathrm{v}}-\theta_{\mathrm{i}}) \tag{11-30}$$

类似地，式(11-11)表示的电阻器$\boldsymbol{R}$吸收的平均功率可以写为：

$$P=I_{\mathrm{rms}}^{2}R=\frac{\boldsymbol{V}_{\mathrm{rms}}^{2}}{R} \tag{11-31}$$

对于给定的正弦电压或正弦电流而言，由于其平均值为零，所以通常用它的最大值（即峰值）或rms值来表示之。电力公司一般用rms值而不是峰值标称相量大小，例如，民用电压110 V（我国为220 V）就是电力公司供电电压的rms值。在功率分析中，利用有效值表示电压与电流是比较方便的。另外，模拟电压表与电流表的读数分别为被测电压或电流的rms值。

例题11-7 试确定如图11-14所示电流波形的rms值，如果该电流流过一个2 Ω电阻器，试求该电阻器吸收的平均功率。

图 11-14 例题 11-7 的电流波形图

解 图示电流波形的周期为$\boldsymbol{T}=4$，一个周期内该电流波形的表达式为：

$$i(t)=\begin{cases}5t, & 0<t<2 \\ -10, & 2<t<4\end{cases}$$

于是，其rms值为：

$$\boldsymbol{I}_{\mathrm{rms}}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_{0}^{T}i^{2}\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{1}{4}\left[\int_{0}^{2}(5t)^{2}\mathrm{d}t+\int_{2}^{4}(-10)^{2}\mathrm{d}t\right]} \\ =\sqrt{\frac{1}{4}\left[25\frac{t^{3}}{3}\Big|_{0}^{2}+100t\Big|_{2}^{4}\right]}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{200}{3}+200\right)}=8.165\mathrm{A}$$

2 Ω电阻器吸收的平均功率为：

$$P=I_{\mathrm{rms}}^{2}R=(8.165)^{2}(2)=133.3\mathrm{W}$$

练习题11-7 试求如图11-15所示电流波形的rms值，如果该电流流过一个9 Ω电阻器，试计算该电阻器吸收的平均功率。

答 2.309 A，48 W。

例题11-8 如图11-16所示波形为半波整流正弦波，试求其rms值以及10 Ω电阻器消耗的平均功率值。

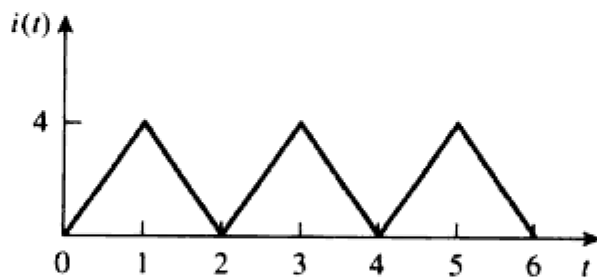


图 11-15 练习题 11-7 的电流波形图

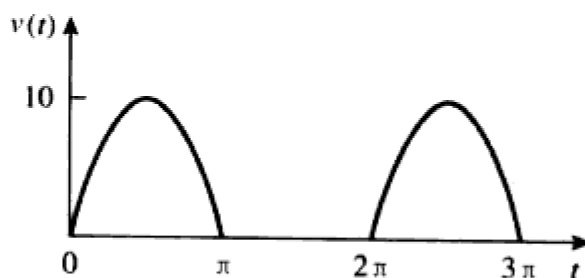


图 11-16 例题 11-8 的电压波形图

解 该电压波形的周期为$T=2\pi$，并且$v(t)$可表示为：

$$v(t)=\begin{cases}10\sin t, & 0<t<\pi \\ 0, & \pi<t<2\pi\end{cases}$$

其rms值为：

$$V_{\mathrm{rms}}^2=\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi}(10\sin t)^2\mathrm{d}t+\int_{\pi}^{2\pi}0^2\mathrm{d}t\right]$$

但由于$\sin^2 t=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)$，所以：

$$V_{\mathrm{rms}}^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{100}{2}(1-\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{50}{2\pi}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{50}{2\pi}\left(\pi-\frac{1}{2}\sin 2\pi-0\right)=25,\quad V_{\mathrm{rms}}=5\mathrm{V}$$

电阻器吸收的平均功率为：

$$P=\frac{V_{\mathrm{rms}}^2}{R}=\frac{5^2}{10}=2.5\mathrm{W}$$

练习题11-8 试求如图11-17所示的全波整流正弦波的rms值，并计算6 Ω电阻器消耗的平均功率。

答 5.657 V，5.334W。

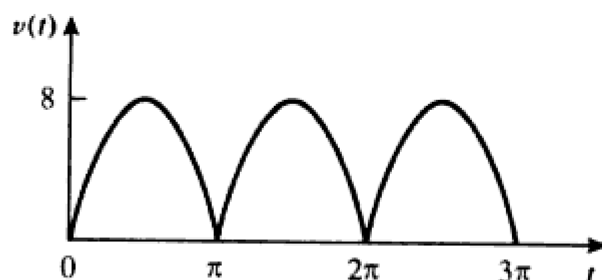


图 11-17 练习题 11-8 的电压波形图

11.5 视在功率与功率因数

由11.2节可知，如果电路终端的电压与电流为：

$$v(t)=V_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\theta_{\mathrm{v}}),\quad i(t)=I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\theta_{\mathrm{i}}) \tag{11-32}$$

或用相量形式表示为$\boldsymbol{V}=V_{\mathrm{m}}\angle\theta_{\mathrm{v}}$，$\boldsymbol{I}=I_{\mathrm{m}}\angle\theta_{\mathrm{i}}$，则其平均功率为：

$$P=\frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}\cos(\theta_{\mathrm{v}}-\theta_{\mathrm{i}}) \tag{11-33}$$

由11.4节可知：

$$P=V_{\mathrm{rms}}I_{\mathrm{rms}}\cos(\theta_{\mathrm{v}}-\theta_{\mathrm{i}})=S\cos(\theta_{\mathrm{v}}-\theta_{\mathrm{i}}) \tag{11-34}$$

上式中出现了新的一项：

$$\boxed{S=V_{\mathrm{rms}}I_{\mathrm{rms}}} \tag{11-35}$$

平均功率为两项的乘积，其中乘积$V_{\mathrm{rms}}I_{\mathrm{rms}}$称为*视在功率*（apparent power）$S$，因子$\cos(\theta_{\mathrm{v}}-\theta_{\mathrm{i}})$称为*功率因数*（power factor，pf）。

视在功率（单位为VA）是指电压与电流的有效值乘积。

之所以称为视在功率，是因为与直流电阻性电路相类似，功率表面上看应该是电压与电流之乘积。视在功率的单位为伏安或VA，以区别于单位为瓦特的平均功率或有功功率。功率因数是无量纲的，由于它是平均功率与视在功率之比，即：

$$\boxed{\mathrm{pf}=\frac{P}{S}=\cos(\theta_{\mathrm{v}}-\theta_{\mathrm{i}})} \tag{11-36}$$

由于角度$(\theta_{\mathrm{v}}-\theta_{\mathrm{i}})$的余弦值为功率因数，因此将该角度称为*功率因数角*（power factor angle）。如果$\boldsymbol{V}$为负载两端的电压，$\boldsymbol{I}$为流过负载的电流，则功率因数角等于负载阻抗的辐角。这是因为：

$$\boldsymbol{Z}=\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{I}}=\frac{V_{\mathrm{m}}\angle\theta_{\mathrm{v}}}{I_{\mathrm{m}}\angle\theta_{\mathrm{i}}}=\frac{V_{\mathrm{m}}}{I_{\mathrm{m}}}\angle\theta_{\mathrm{v}}-\theta_{\mathrm{i}} \tag{11-37}$$

另外，由于：

和

$$V_{rms} = \frac{V}{\sqrt{2}} = V_{rms}\angle\theta_v \tag{11-38a}$$

$$I_{rms} = \frac{I}{\sqrt{2}} = I_{rms}\angle\theta_i \tag{11-38b}$$

则阻抗为：

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_{rms}}{I_{rms}} = \frac{V_{rms}}{I_{rms}}\angle\theta_v - \theta_i \tag{11-39}$$

功率因数是指电压与电流的相位角之差的余弦值，同时也是负载阻抗辐角的余弦值。

由式(11-36)可知，功率因数可以看作是由视在功率得到有功功率或平均功率所必须相乘的一个因子，其值在0与1之间。对于纯电阻性负载而言，电压与电流是同相的，所以$\theta_v - \theta_i = 0$且pf = 1，也就是说，此时视在功率等于平均功率。对于纯电抗负载而言，$\theta_v - \theta_i = \pm 90°$且pf = 0，此时平均功率为零。在这两种极端情况之间，pf可以说是超前的或滞后的。超前功率因数是指电流超前于电压，此时电路负载呈电容性；滞后功率因数是指电流滞后于电压，此时电路负载呈电感性。在11.9.2节还会看到，功率因数会影响用户支付给供电公司的电费。

由式(11-36)可知，功率因数也可以看成是负载消耗的有功功率与负载的视在功率之比。

例题11-9 当激励电压为$v(t) = 120\ \cos(100\pi t - 20°)$ V时，流过某串接负载的电流为$i(t) = 4\ \cos(100\pi t + 10°)$ A，试求该负载的视在功率与功率因数，并确定构成该串接负载的元件值。

解 视在功率为：

$$S = V_{rms}I_{rms} = \frac{120}{\sqrt{2}}\frac{4}{\sqrt{2}} = 240\text{VA}$$

功率因数为：

$$\text{Pf} = \cos(\theta_v - \theta_i) = \cos(-20° - 10°) = 0.866 \quad (\text{超前})$$

由于电流超前于电压，因此pf为超前的。功率因数还可以由负载阻抗求得：

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{120\angle -20°}{4\angle 10°} = 30\angle -30° = 25.98 - \text{j}15\Omega$$

$$\text{pf} = \cos(-30°) = 0.866 \quad (\text{超前})$$

负载阻抗Z可以看作是一个25.98 Ω的电阻器与一个电容器的串联，该电容器的容抗为：

$$X_c = -15 = -\frac{1}{\omega C}$$

即：

$$C = \frac{1}{15\omega} = \frac{1}{15\times 100\pi} = 212.2\ \mu\text{F}$$

练习题11-9 当激励电压为$v(t) = 150\ \cos(377\ t + 10°)$ V时，试确定阻抗为$Z = 60 + \text{j}40\ \Omega$的负载的视在功率与功率因数。

答 0.832（滞后），156 VA。

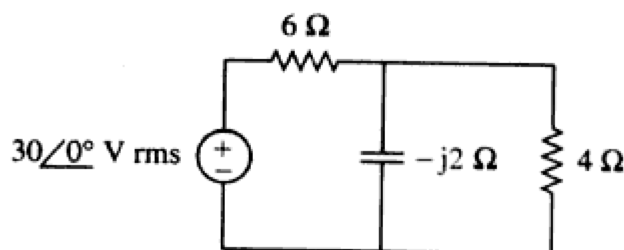


图 11-18 例题 11-10 的电路原理图

例题11-10 试确定如图11-18所示电路从电源端看进去的功率因数，并计算电源输出的平均功率。

解 电路的总阻抗为：

$$Z = 6 + 4\,||\,(-\text{j}2) = 6 + \frac{-\text{j}2\times 4}{4 - \text{j}2} = 6.8 - \text{j}1.6 = 7\angle -13.24°\ \Omega$$

由于阻抗为电容性的，故功率因数为：

$$\text{pf}=\cos(-13.24°)=0.9734 \quad (\text{超前})$$

电流的rms值为：

$$\boldsymbol{I}_{\text{rms}}=\frac{\boldsymbol{V}_{\text{rms}}}{\boldsymbol{Z}}=\frac{30\angle 0°}{7\angle -13.24°}=4.286\angle 13.24°\ \text{A}$$

电源提供的平均功率为：

$$P=V_{\text{rms}}I_{\text{rms}}\text{pf}=(30)(4.286)0.9734=125\text{W}$$

即

$$P=I_{\text{rms}}^2R=(4.286)^2(6.8)=125\text{W}$$

其中，R为阻抗$\boldsymbol{Z}$的电阻部分。

练习题11-10 试计算如图11-19所示电路从电源端看进去的功率因数，以及该电源提供的平均功率？

答 0.936（滞后），118 W。

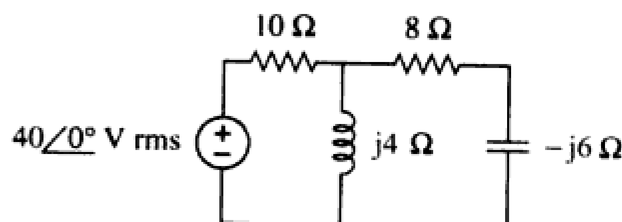


图 11-19 练习题 11-10 的电路原理图

11.6 复功率

为了得到尽可能简单的功率关系式，电力工程师付出了多年的努力，提出了复功率（complex power）的概念，可用于表示并联负载的全部影响。由于复功率包含了给定负载吸收功率的全部信息，所以复功率在功率分析中是一个非常重要的概念。

考虑如图11-20所示的交流负载。如果给定电压$v(t)$与电流$i(t)$的相量形式为$\boldsymbol{V}=V_m\angle\theta_v$与$\boldsymbol{I}=I_m\angle\theta_i$，假定采用无源符号规约（参见图11-20），则该交流负载所吸收的复功率$\boldsymbol{S}$为电压与电流共轭复数的乘积，即：

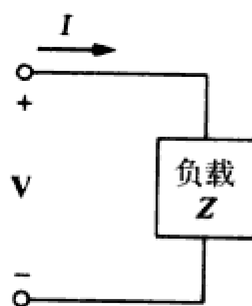


图 11-20 某负载的电压相量与电流相量

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\boldsymbol{V}\boldsymbol{I}^* \tag{11-40}$$

利用有效值表示为：

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{V}_{\text{rms}}\boldsymbol{I}_{\text{rms}}^* \tag{11-41}$$

其中，

$$\boldsymbol{V}_{\text{rms}}=\frac{\boldsymbol{V}}{\sqrt{2}}=V_{\text{rms}}\angle\theta_v \tag{11-42}$$

且

$$\boldsymbol{I}_{\text{rms}}=\frac{\boldsymbol{I}}{\sqrt{2}}=I_{\text{rms}}\angle\theta_i \tag{11-43}$$

于是，式(11-42)可以写为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}&=V_{\text{rms}}I_{\text{rms}}\angle\theta_v-\theta_i\\&=V_{\text{rms}}I_{\text{rms}}\cos(\theta_v-\theta_i)+\text{j}V_{\text{rms}}I_{\text{rms}}\sin(\theta_v-\theta_i)\end{aligned} \tag{11-44}$$

该式同样可以由式(11-9)得到。由式(11-44)可以看出，复功率的大小即为视在功率，因此，复功率的单位为伏安（VA），而且，复功率的辐角就是功率因数角。

在不至混淆的情况下，电压或电流有效值的下标rms通常可以省略。

复功率还可以用负载阻抗$\boldsymbol{Z}$表示，由式(11-37)可知，负载阻抗$\boldsymbol{Z}$可以写为：

$$\boldsymbol{Z}=\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{I}}=\frac{\boldsymbol{V}_{\text{rms}}}{\boldsymbol{I}_{\text{rms}}}=\frac{V_{\text{rms}}}{I_{\text{rms}}}\angle\theta_{\text{v}}-\theta_{\text{i}} \tag{11-45}$$

因此，$\boldsymbol{V}_{\text{rms}}=\boldsymbol{Z}\boldsymbol{I}_{\text{rms}}$，将该关系代入式(11-41)可得：

$$\boxed{\boldsymbol{S}=I_{\text{rms}}^2\boldsymbol{Z}=\frac{V_{\text{rms}}^2}{\boldsymbol{Z}^*}=\boldsymbol{V}_{\text{rms}}\boldsymbol{I}_{\text{rms}}^*} \tag{11-46}$$

又因$\boldsymbol{Z}=R+\text{j}X$，则式(11-46)变为：

$$\boldsymbol{S}=I_{\text{rms}}^2(R+\text{j}X)=P+\text{j}Q \tag{11-47}$$

其中，P与Q分别为复功率的实部与虚部，即：

$$P=\text{Re}(\boldsymbol{S})=I_{\text{rms}}^2R \tag{11-48}$$

$$Q=\text{Im}(\boldsymbol{S})=I_{\text{rms}}^2X \tag{11-49}$$

P为平均功率或有功功率，其值取决于负载电阻R，而Q为无功功率（或正交功率），其值取决于负载的电抗X。

比较式(11-44)与式(11-47)可得：

$$P=V_{\text{rms}}I_{\text{rms}}\cos(\theta_{\text{v}}-\theta_{\text{i}}),\quad Q=V_{\text{rms}}I_{\text{rms}}\sin(\theta_{\text{v}}-\theta_{\text{i}}) \tag{11-50}$$

有功功率P就是传递给负载的平均功率，单位为瓦特，是唯一有用的功率，也是负载实际消耗的功率。无功功率Q是电源与负载电抗部分能量交换的一个度量，单位为乏（volt-ampere reactive，VAR），区别于有功功率的单位瓦特。由第6章可知，电路中的储能元件既不消耗功率也不提供功率，只是与网络中的其他部分来回交换能量。同样，无功功率也是在负载与电源之间来回转换，且在转换过程中没有损耗。应该注意到：

（1）对于电阻性负载（pf=1），$Q=0$。

（2）对于电容性负载（超前pf），$Q<0$。

（3）对于电感性负载（滞后pf），$Q>0$。

因此，

复功率（单位为VA）是电压相量有效值与电流相量有效值的共轭复数之乘积，是一个复数，其实部为有功功率P，虚部为无功功率Q。

引入复功率后，就可以由电压相量与电流相量直接得到有功功率和无功功率：

$$\begin{aligned}
\text{复功率} &= \boldsymbol{S}=P+\text{j}Q=\frac{1}{2}\boldsymbol{V}\boldsymbol{I}^*\\
&=V_{\text{rms}}I_{\text{rms}}\angle\theta_{\text{v}}-\theta_{\text{i}}\\
\text{视在功率} &= S=|\boldsymbol{S}|=V_{\text{rms}}I_{\text{rms}}=\sqrt{P^2+Q^2}\\
\text{有功功率} &= P=\text{Re}(\boldsymbol{S})=S\cos(\theta_{\text{v}}-\theta_{\text{i}})\\
\text{无功功率} &= Q=\text{Im}(\boldsymbol{S})=S\sin(\theta_{\text{v}}-\theta_{\text{i}})\\
\text{功率因子} &= \frac{P}{S}=\cos(\theta_{\text{v}}-\theta_{\text{i}})
\end{aligned} \tag{11-51}$$

上式表明，复功率是如何包含给定负载的所有与功率有关的信息。

通常利用三角形法表示$\boldsymbol{S}$、P、Q三者之间的关系，称为*功率三角形*（power triangle），如图11-21a所示，它与图11-21b所示的表示$\boldsymbol{Z}$、R、X三者之间关系的阻抗三角形类似。功率三角形包括四项——视在功率/复数功率、有功功率、无功功率与功率因数角。给定其中两项，就可以很方便地由功率三角形得到另外两项。如图11-22所示，当$\boldsymbol{S}$位于第一象限时，则达到电感性负载和滞后的功率因数；当$\boldsymbol{S}$位于第四象限时，则得到电容性负载和超前的功率因数。当然，复功率$\boldsymbol{S}$也可能位于第二象限或第三象限，这就要求负载阻抗具有负电阻，这种情况在有源电路中是可能的。

复功率 $\boldsymbol{S}$ 包含了负载的所有功率信息，$\boldsymbol{S}$ 的实部为有功功率 P，虚部为无功功率 Q，$\boldsymbol{S}$ 的幅度为视在功率 S，其相位角的余弦值为功率因数 pf。



(a) 功率三角形 (b) 阻抗三角形

图 11-21

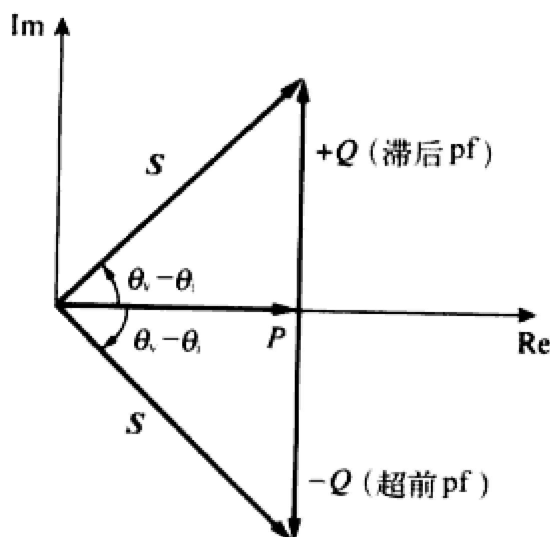


图 11-22 功率三角形

例题11-11 某负载两端的电压为$v(t)=60\cos(\omega t-10°)$ V，而沿电压降落方向流过该负载的电流为$i(t)=1.5\cos(\omega t+50°)$ A。试求：(a) 复功率与视在功率；(b) 有功功率与无功功率；(c) 功率因数与负载阻抗。

解 (a) 电压相量与电流相量的rms值为：

$$\boldsymbol{V}_{\text{rms}}=\frac{60}{\sqrt{2}}\angle{-10°},\quad \boldsymbol{I}_{\text{rms}}=\frac{1.5}{\sqrt{2}}\angle{+50°}$$

复功率为：

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{V}_{\text{rms}}\boldsymbol{I}_{\text{rms}}^{*}=\left(\frac{60}{\sqrt{2}}\angle{-10°}\right)\left(\frac{1.5}{\sqrt{2}}\angle{-50°}\right)=45\angle{-60°}\ \text{VA}$$

视在功率为：

$$S=|\boldsymbol{S}|=45\ \text{VA}$$

(b) 将复功率写为直角坐标形式，得到：

$$\boldsymbol{S}=45\angle{-60°}=45[\cos(-60°)+\text{j}\sin(-60°)]=22.5-\text{j}38.97$$

由于$\boldsymbol{S}=P+\text{j}Q$，因此有功功率为：

$$P=22.5\ \text{W}$$

无功功率为：

$$Q=-38.97\ \text{VAR}$$

(c) 功率因数为：

$$\text{pf}=\cos(-60°)=0.5(\text{超前})$$

由于无功功率是负的，表示pf是超前的。负载阻抗为：

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{60\angle -10^\circ}{1.5\angle +50^\circ} = 40\angle -60^\circ\ \Omega$$

这是一个电容性阻抗。

练习题11-11 某负载的$V_{rms}=110\angle 85^\circ$ V，$I_{rms}=0.4\angle 15^\circ$ A，试求：(a) 复功率与视在功率；(b) 有功功率与无功功率；(c) 功率因数与负载阻抗。

答 (a) $44\angle 70^\circ$ VA，44 VA；(b) 15.05 W，41.35 VAR；(c) 0.342（滞后），$94.06+j258.4\ \Omega$。

例题11-12 某负载从有效值为120 V的正弦电源中提取了12 kVA的功率，其功率因数为0.856(滞后)，试计算：(a) 传递给该负载的平均功率与无功功率；(b) 峰值电流；(c) 负载阻抗。

解 (a) 已知$pf=\cos\theta=0.856$，于是功率角为$\theta=\cos^{-1}(0.856)=31.13^\circ$。如果视在功率为$S=12\ 000$ VA，则平均功率为：

$$P = S\cos\theta = 12\ 000\times 0.856 = 10.272\ \text{kW}$$

无功功率为：

$$Q = S\sin\theta = 12\ 000\times 0.517 = 6.204\ \text{kVA}$$

(b) 由于pf是滞后的，于是复功率为：

$$\mathbf{S} = P + jQ = 10.272 + j6.204\ \text{kVA}$$

由$\mathbf{S}=\mathbf{V}_{rms}\mathbf{I}_{rms}^*$可得：

$$\mathbf{I}_{rms}^* = \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{V}_{rms}} = \frac{10\ 272 + j6204}{120\angle 0^\circ} = 85.6 + j51.7\text{A} = 100\angle 31.13^\circ\text{A}$$

即$\mathbf{I}_{rms}=100\angle -31.13^\circ$，其峰值电流为：

$$I_m = \sqrt{2} I_{rms} = \sqrt{2}(100) = 141.4\text{A}$$

(c) 负载阻抗为

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}_{rms}}{\mathbf{I}_{rms}} = \frac{120\angle 0^\circ}{100\angle -31.13^\circ} = 1.2\angle 31.13^\circ\Omega$$

即电感性阻抗。

练习题11-12 某正弦电源给负载$\mathbf{Z}=250\angle -75^\circ\ \Omega$提供的无功功率为10 kVA，试确定：(a) 功率因数；(b) 传递给该负载的视在功率；(c) 峰值电压。

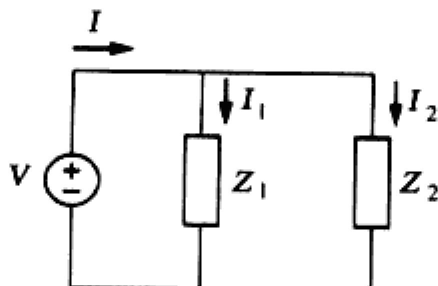
答 (a) 0.2588（超前）；(b) +10.35 kVAR；(c) 2.275 kV。

11.7 †交流功率守恒

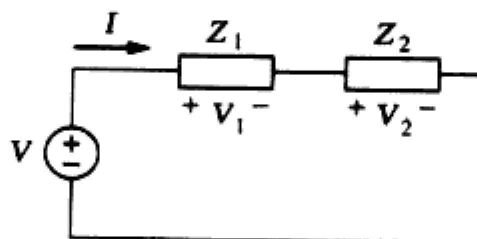
功率守恒原理不仅适用于直流电路（参见1.5节），而且适用于交流电路。为了说明这一原理，考虑如图11-23a所示电路，图中负载$\mathbf{Z}_1$与$\mathbf{Z}_2$并联在交流电压源$\mathbf{V}$两端，利用KCL，可得：

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 \tag{11-52}$$

实际上，我们已经从例题 11-3 与例题 11-4 中看到，交流电路中的平均功率是守恒的。



(a) 并联负载



(b) 串联负载

图 11-23 交流电压源给几个负载的供电

该电源提供的复功率为：

$$S=\frac{1}{2}VI^*=\frac{1}{2}V(I_1^*+I_2^*)=\frac{1}{2}VI_1^*+\frac{1}{2}VI_2^*=S_1+S_2 \tag{11-53}$$

其中，S_1与S_2分别表示传递给负载Z_1与Z_2的复功率。

如果两个负载与电压源相串联，如图11-23b所示，则由KVL可知：

$$V=V_1+V_2 \tag{11-54}$$

电源提供的复功率为：

$$S=\frac{1}{2}VI^*=\frac{1}{2}(V_1+V_2)I^*=\frac{1}{2}V_1I^*+\frac{1}{2}V_2I^*=S_1+S_2 \tag{11-55}$$

其中，S_1和S_2分别表示传送到负载Z_1和Z_2上的复功率。

由式(11-53)与式(11-55)可得出结论：无论负载是串联的还是并联的（或是混联的），电源提供的总功率就等于传递给负载的总功率。一般而言，如果电源连接N个负载，则有：

$$\boxed{S=S_1+S_2+\cdots+S_N} \tag{11-56}$$

上式表明网络中总的复功率等于各元件复功率之和（该关系对于有功功率与无功功率也成立，但对于视在功率不成立）。这就是交流功率守恒原理：

电源的复功率、有功功率、无功功率分别等于各个负载上的复功率、有功功率、无功功率之和。

事实上，交流功率的所有形式——瞬时功率、有功功率、无功功率与复功率都是守恒的。由上述分析可知，网络中来自电源的有功（无功）功率等于流入到电路其他元件中的有功（无功）功率。

例题11-13 图11-24所示为一个电压源通过传输线给一个负载供电，传输线的阻抗可以表示为一个(4＋j2) Ω的阻抗和一个回路，试求：(a) 电源吸收的有功功率与无功功率；(b) 传输线吸收的有功功率与无功功率；(c) 负载吸收的有功功率与无功功率。

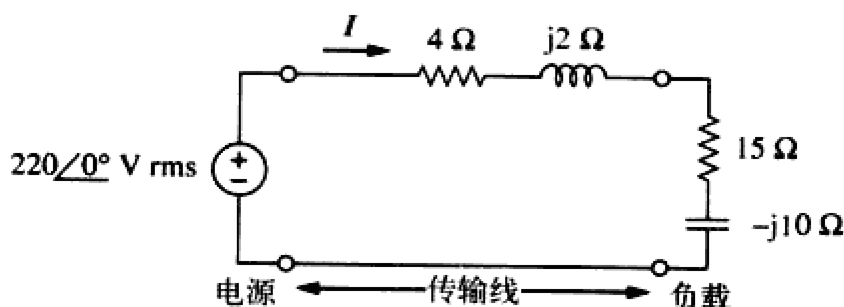


图 11-24 例题 11-13 的电路原理图

解 总阻抗为：

$$Z=(4+j2)+(15-j10)=19-j8=20.26\angle-22.83^\circ\ \Omega$$

流过电路的电流为：

$$I=\frac{V_s}{Z}=\frac{220\angle 0^\circ}{20.62\angle-22.83^\circ}=10.67\angle 22.83^\circ\ \text{A rms}$$

(a) 对于电源而言，复功率为：

$$S_s=V_sI^*=(220\angle 0^\circ)(10.67\angle-22.83^\circ)$$
$$=2347.4\angle-22.83^\circ=(2163.5-j910.8)\text{VA}$$

由此可得，电源吸收的有功功率为2163.5 W，无功功率为910.8 VAR（超前）

(b) 对于传输线而言，电压为：

$$V_{\text{line}}=(4+j2)I=(4.472\angle 26.57^\circ)(10.67\angle 22.83^\circ)$$
$$=47.72\angle 49.4^\circ\ \text{V rms}$$

传输线吸收的复功率为：

$$S_{line}=V_{line}I^*=(47.72\angle 49.4°)(10.67\angle -22.83°)$$
$$=509.2\angle 26.57°=455.4+j227.7\text{VA}$$

即：

$$S_{line}=|I|^2 Z_{line}=(10.67)^2(4+j2)=455.4+j227.7\text{ VA}$$

由此可得，传输线吸收的有功功率为455.4 W，无功功率为227. 76 VAR（滞后）

（c）对于负载而言，电压为：

$$V_L=(15-j10)I=(18.03\angle -33.7°)(10.67\angle 22.83°)$$
$$=192.38\angle -10.87°\text{ V rms}$$

负载吸收的复功率为：

$$S_L=V_L I^*=(192.38\angle -10.87°)(10.67\angle -22.83°)$$
$$=2053\angle -33.7°=(1708-j1139)\text{VA}$$

由此可得，负载吸收的有功功率为1708 W，无功功率为1139 VAR（超前）。可以注意到，$S_S=S_{line}+S_L$，以上计算中利用的是电压与电流的有效值。

练习题11-13　在如图11-25所示电路中，60 Ω电阻器吸收的平均功率为240 W，试求V与电路中各支路的复功率，该电路总的复功率为多少（假定流过60 Ω电阻器的电流无相移）？

答　$240.67\angle 21.45°$ V（rms）；20 Ω电阻器：656 VA；(30－j10) Ω阻抗：480－j160 VA；(60＋j20) Ω阻抗：240＋j80 VA；总的复功率：1376－j80 VA。

例题11-14　在如图11-26所示电路中，$Z_1=60\angle -30°\ \Omega$，$Z_2=40\angle 45°\ \Omega$，试计算电源提供的以及从电源端口看进去的总的：(a) 视在功率；(b) 有功功率；(c) 无功功率；(d) pf。

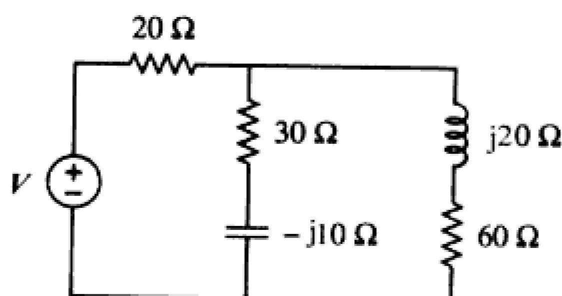


图 11-25　练习题 11-13 的电路原理图

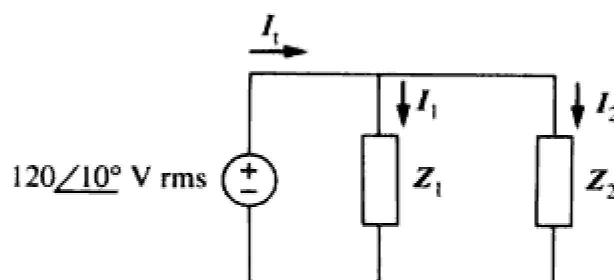


图 11-26　例题 11-14 的电路原理图

解　流过Z_1的电流为：

$$I_1=\frac{V}{Z_1}=\frac{120\angle 10°}{60\angle -30°}=2\angle 40°\text{ A rms}$$

流过Z_2的电流为：

$$I_2=\frac{V}{Z_2}=\frac{120\angle 10°}{40\angle 45°}=3\angle -35°\text{ A rms}$$

阻抗吸收的复功率分别为：

$$S_1=\frac{V_{rms}^2}{Z_1^*}=\frac{(120)^2}{60\angle 30°}=240\angle -30°=207.85-j120\text{ VA}$$

$$S_2=\frac{V_{rms}^2}{Z_2^*}=\frac{(120)^2}{40\angle -45°}=360\angle 45°=254.6+j254.6\text{ VA}$$

总的复功率为：

$$S_t=S_1+S_2=462.4+j134.6\text{ VA}$$

(a) 总的视在功率为：

$$|\boldsymbol{S}_t| = \sqrt{462.4^2 + 134.6^2} = 481.6\text{VA}$$

(b) 总的有功功率为：

$$P_t = \text{Re}(\boldsymbol{S}_t) = 462.4\text{W} \text{ 或 } P_t = P_1 + P_2$$

(c) 总的无功功率为：

$$Q_t = \text{Im}(\text{S}_t) = 134.6\text{VAR} \text{ 或 } Q_t = Q_1 + Q_2$$

(d) $\text{pf} = \boldsymbol{P}_t / |\boldsymbol{S}_t| = 462.4/481.6 = 0.96$（滞后）

通过求解电源提供的复功率$\boldsymbol{S}_S$可以检验上述结果的正确性：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}_t = \boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2 &= (1.532 + \text{j}1.286) + (2.457 - \text{j}1.721)\\ &= 4 - \text{j}0.435 = 4.024\underline{/-6.21^\circ}\text{ A rms}\\ \boldsymbol{S}_s = \boldsymbol{V}\boldsymbol{I}_t^* &= (120\underline{/10^\circ})(4.024\underline{/6.21^\circ})\\ &= 482.88\underline{/16.21^\circ} = 463 + \text{j}135\text{VA}\end{aligned}$$

与上面的结果一致。

练习题11-14 两个相互并联负载分别为2 kW，pf = 0.75（超前）和4 kW，pf = 0.95（滞后)。试计算这两个负载的pf，并求解电源提供的复功率。

答 0.9972（超前），6 − j0.4495 kVA。

11.8 功率因数的校正

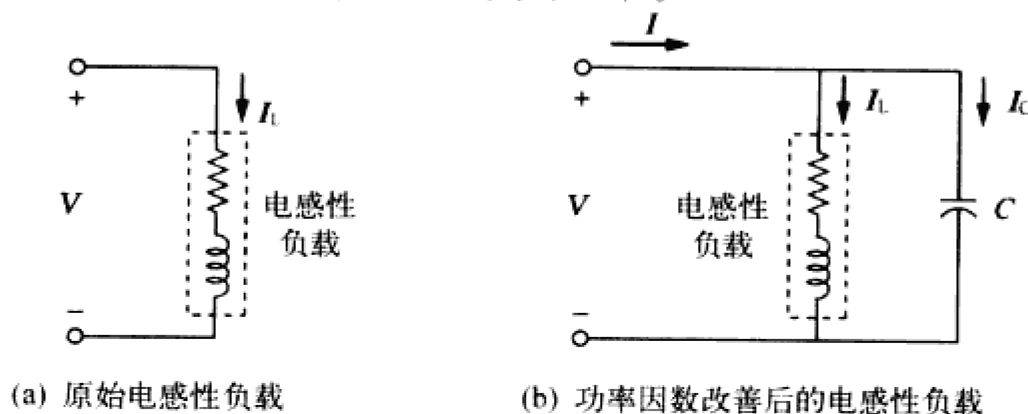
大多数家电负载（如洗衣机、空调器、电冰箱等）以及工业负载（如感应电动机）通常呈现电感性负载特性且功率因数（滞后）较小。虽然负载的电感性不能改变，但是可以提高其功率因数。

不改变原始负载的电压或电流，提高功率因数的过程称为功率因数校正 (power factor correctoin)。

换言之，功率因数校正可以看作是增加一个与负载并联的电抗元件（一般是电容器），从而使功率因数接近于单位1的过程。

由于大多数负载是电感性的，如图11-27a所示，所以给负载并联一个电容器就可以改善或校正负载的功率因数，如图11-27b所示。增加电容器后的效果既可以用功率三角形予以说明，也可以用相关电流的相量图予以说明。图11-28给出了用于说明并联电容器作用的相量图，图中假定图11-27a所示电路的功率因数为$\cos\theta_1$，而图11-27b所示电路的功率因数为$\cos\theta_2$。显然，由图11-28可见，并联电容器后，供电电压与电流之间的相位角从θ_1减小到θ_2，因而提高了功率因数。同时，由图11-28所示的矢量幅度可见，在相同供电电压下，图11-27a所示电路提取的电流I_L要比图11-27b所示电路提取的电流I大。电流越大，损耗的功率就越大（呈平方关系，因为$P = I_L^2R$)，供电公司收取用户的电费也就越多。因此，减小电流或提高功率因数使其尽可能接近于单位1，对于供电公司和用户都是有利的。选取适当的电容器，就可以使电压与电流完全同相，从而使功率因数等于1。

电感性负载可以建模为电感器与电阻器的串联组合。



(a) 原始电感性负载　(b) 功率因数改善后的电感性负载

图 11-27 功率因数校正

也可以从另一个角度来研究功率因数校正问题。考虑如图11-29所示的功率三角形，如果原始电感性负载的视在功率为S_1，则有：

$$P = S_1\cos\theta_1,\ Q_1 = S_1\sin\theta_1 = P\tan\theta_1 \tag{11-57}$$

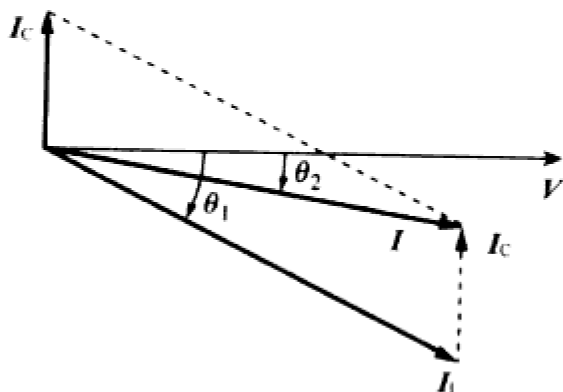


图 11-28 说明与电感性负载相并联的用电容器作用的相量图

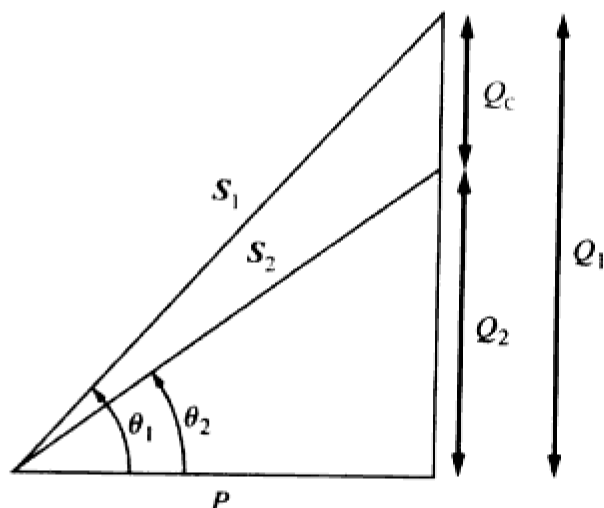


图 11-29 说明功率因数校正的功率三角形

在不改变有功功率的情况下，如果将功率因数从$\cos\theta_1$提高到$\cos\theta_2$，即$P = S_2\cos\theta_2$，则新的无功功率为：

$$Q_2 = P\tan\theta_2 \tag{11-58}$$

无功功率的降低是由并联电容器引起的，也就是说，

$$Q_C = Q_1 - Q_2 = P(\tan\theta_1 - \tan\theta_2) \tag{11-59}$$

但由式(11-46)可知：$Q_C = V_{rms}^2/X_C = \omega C V_{rms}^2$，于是，所需的并联电容器的容值值$C$可由下式确定：

$$\boxed{C = \frac{Q_C}{\omega V_{rms}^2} = \frac{P(\tan\theta_1 - \tan\theta_2)}{\omega V_{rms}^2}} \tag{11-60}$$

应该注意的是，由于电容器消耗的平均功率为零，所以负载消耗的有功功率不会受到功率因数校正的影响。

虽然实际的负载大多是电感性负载，但也有可能出现电容性负载，即负载工作时的功率因数是超前的。在这种情况下，负载两端应该连接一个电感器以实现功率因数校正，所需的分流电感器的电感值可按下式计算：

$$Q_L = \frac{V_{rms}^2}{X_L} = \frac{V_{rms}^2}{\omega L} \Rightarrow L = \frac{V_{rms}^2}{\omega Q_L} \tag{11-61}$$

其中，$Q_L = Q_1 - Q_2$，为新、旧无功功率之差。

例题11-15 某负载与120 V(rms)、60 Hz电力线相连后，在滞后功率因数为0.8时，该负载吸收的功率为4 kW。试求将pf 提高到0.95所需并联的电容量。

解 如果pf = 0.8，则有：

$$\cos\theta_1 = 0.8 \Rightarrow \theta_1 = 36.87°$$

其中θ_1为电压与电流之间的相位差。由已知的有功功率与pf 可以得到视在功率为：

$$S_1 = \frac{P}{\cos\theta_1} = \frac{4000}{0.8} = 5000\text{VA}$$

无功功率为：

$$Q_1 = S_1 \sin\theta = 5000 \sin 36.87 = 3000 \text{ VAR}$$

当pf提高到0.95时：

$$\cos\theta_2 = 0.95 \Rightarrow \theta_2 = 18.19°$$

有功功率P并未改变，但视在功率发生了变化，其新值为：

$$S_2 = \frac{P}{\cos\theta_2} = \frac{4000}{0.95} = 4210.5\text{VA}$$

新的无功功率为：

$$Q_2 = S_2 \sin\theta_2 = 1314.4 \text{ VAR}$$

新、旧无功功率之差是由于负载上并联了电容器引起的，因此由电容器引起的无功功率为：

$$Q_C = Q_1 - Q_2 = 3000 - 1314.4 = 1685.6 \text{ VAR}$$

且

$$C = \frac{Q_C}{\omega V_{\text{rms}}^2} = \frac{1685.6}{2\pi \times 60 \times 120^2} = 310.5\mu\text{F}$$

注意：购买电容器通常要满足所需的电压，在本例中，电容器的最大峰值电压为170 V，因此建议购买标称电压为200 V的电容器。

练习题11-15 某负载在pf = 0.85（滞后）时的功率为140 kVAR，试求将该负载的pf从0.85（滞后）提高到1所需并联的电容值，假定利用110 V(rms)、60 Hz电力线给负载供电。

答 30.69 mF。

11.9 †应用

本节讨论两个重要的应用领域，即如何测量功率以及供电公司如何确定用户的电费。

11.9.1 功率测量

负载吸收的平均功率可以利用称作*瓦特表*（wattmeter）的仪器来测量。

瓦特表是测量平均功率的仪器。

无功功率可以利用称作无功功率表的仪器来测量，无功功率表与负载的连接方式和瓦特表与负载的连接方式相同。

图11-30给出了由两个线圈：电流线圈与电压线圈组成的瓦特表的结构示意图。阻抗值极低（理想情况下为零）的电流线圈与负载相串联（见图11-31），并对负载电流产生响应；阻抗值极高（理想情况下为无穷大）的电压线圈与负载相并联（见图11-31），并对负载电压产生响应。电流线圈因其低阻抗在电路中相当于短路，而电压线圈因其高阻抗，在电路中相当于开路。因此，瓦特表的接入并不会对电路产生干扰，也不会影响功率的测量。

某些瓦特表中没有线圈，这里仅考虑电磁式瓦特表。

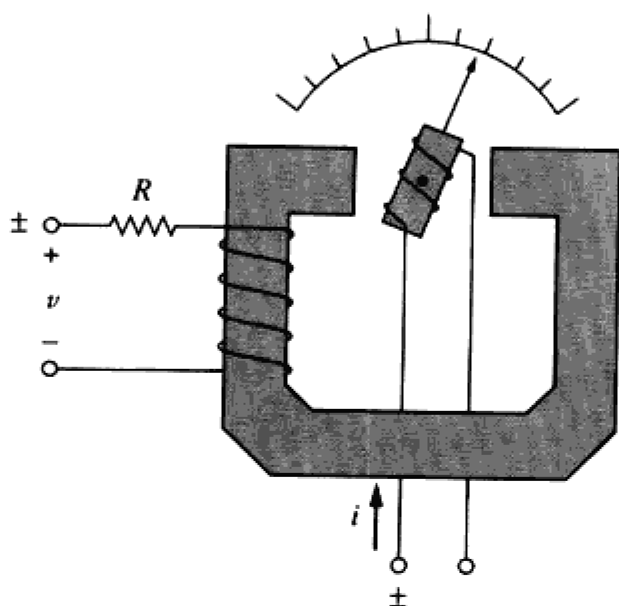


图 11-30 瓦特表（功率计）

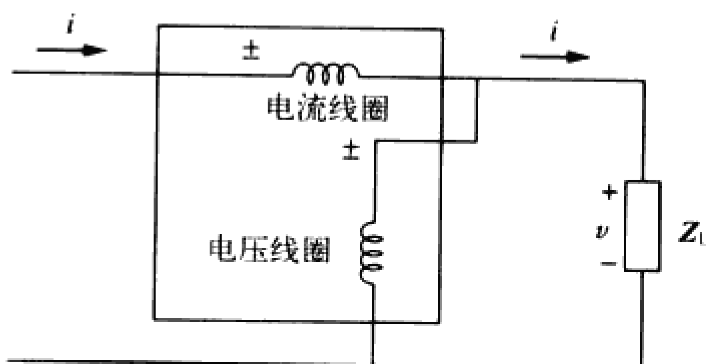


图 11-31 与负载相连的瓦特表

当两个线圈通以电流后，瓦特表运动系统的机械转动惯量产生与一个乘积$v(t)\ i(t)$的均值成正比的偏转角。如果负载的电压与电流分别为$v(t)=V_m\cos(\omega t+\theta_v)$，$i(t)=I_m\cos(\omega t+\theta_i)$，则相应的均方根相量为：

$$\boldsymbol{V}_{rms}=\frac{V_m}{\sqrt{2}}\angle\theta_v \quad 和 \quad \boldsymbol{I}_{rms}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}\angle\theta_i \tag{11-62}$$

瓦特表测得的平均功率为：

$$P=|\boldsymbol{V}_{rms}||\boldsymbol{I}_{rms}|\cos(\theta_v-\theta_i)=\frac{1}{2}V_mI_m\cos(\theta_v-\theta_i) \tag{11-63}$$

如图11-31所示，瓦特表的每个线圈有两个端子，其中一个端子标有±号。为了保证偏转角正向增大，电流线圈的±端子应朝向电源，电压线圈的±端子应与连接到电流线圈的同一根线上。如果两个线圈都反接，则偏转角仍然会正向增大。然而，如果仅反接其中一个，而另一个不反接，则偏转角就会反向减小，瓦特表也就没有读数了。

例题11-16 试求如图11-32所示电路中瓦特表的读数。

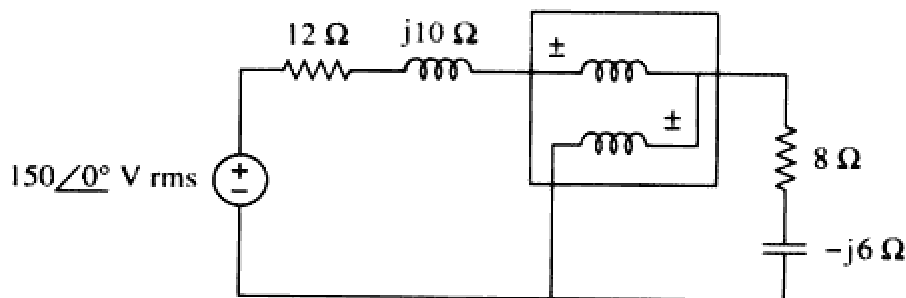


图 11-32 例题 11-16 的电路原理图

解 (1) **明确**问题。本例题所要解决的问题已定义清楚。学生在实验室可以利用瓦特表对所求得的结果进行验证。

(2) **表述**对问题的理解。本题要求确定与阻抗串联的外部电源传递给负载的平均功率。

(3) 确定**可选**解。本题是一道简单的电路分析问题，所需求解的就是流过负载的电流幅度与辐角，以及负载两端电压的幅度与辐角。还可以利用PSpice求解上述变量，本例将利用PSpice对结果进行验证。

(4) **尝试**问题的解。在图11-32所示电路中，由于电流线圈与(8−j6) Ω负载阻抗相串联，而电压线圈与该负载阻抗相并联，所以瓦特表读数为(8−j6) Ω阻抗所吸收的平均功率。流过该电路的电流为：

$$I_{rms}=\frac{150\underline{/0^\circ}}{(12+j10)+(8-j6)}=\frac{150}{20+j4}\text{A}$$

(8−j6) Ω阻抗两端的电压为：

$$V_{rms}=I_{rms}(8-j6)=\frac{150(8-j6)}{20+j4}\text{V}$$

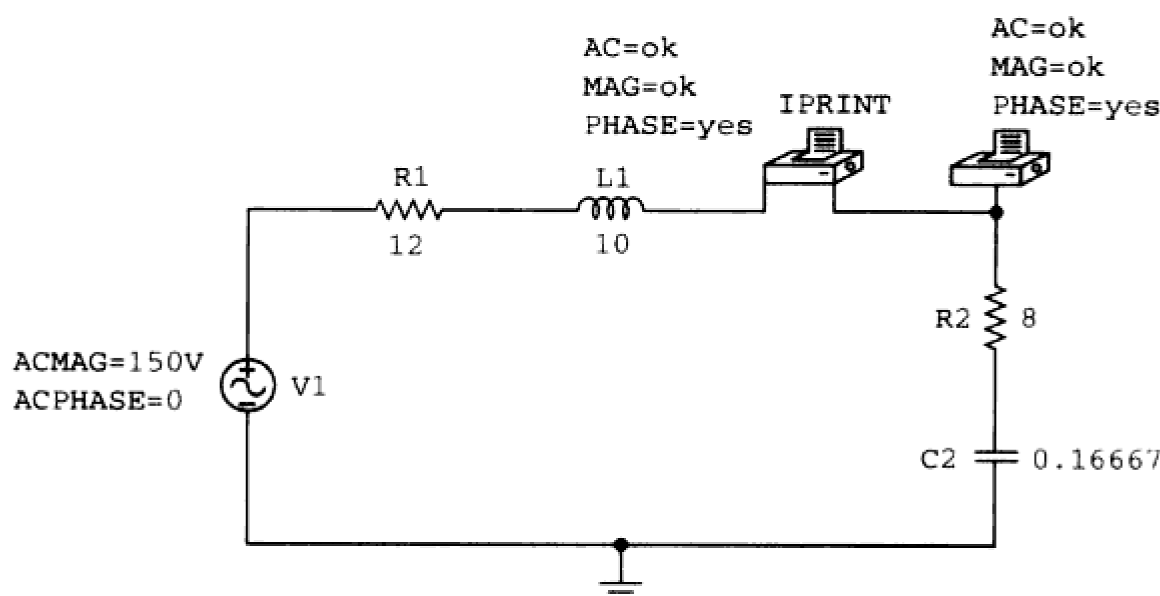
于是，复功率为：

$$S=V_{rms}I^{*}_{rms}=\frac{150(8-j6)}{20+j4}\cdot\frac{150}{20-j4}=\frac{150^2(8-j6)}{20^2+4^2}$$
$$=423.7-j324.6\text{VA}$$

瓦特表读数为：

$$P=\text{Re}(S)=432.7\text{ W}$$

（5）**评价**得到的结果。可以利用PSpice验证所得到的结果。



仿真可得：

FREQ	IM(V_PRINT2)	IP(V_PRINT2)
1.592E−01	7.354E+00	−1.131E+01

且

FREQ	VM($N_0004)	VP($N_0004)
1.592E−01	7.354E+01	−4.818E+01

验证答案所需的就是流过负载电阻器的电流幅度（7.354 A）：

$$P=(I_L)^2R=(7.354)^2 8=432.7\text{ W}$$

（6）对结果是否**满意**？本题的求解过程是令人满意的，可以将所得的结果作为本题的答案。

练习题11-16 对于如图11-33所示电路，试求瓦特表的读数。

答 1437 W。

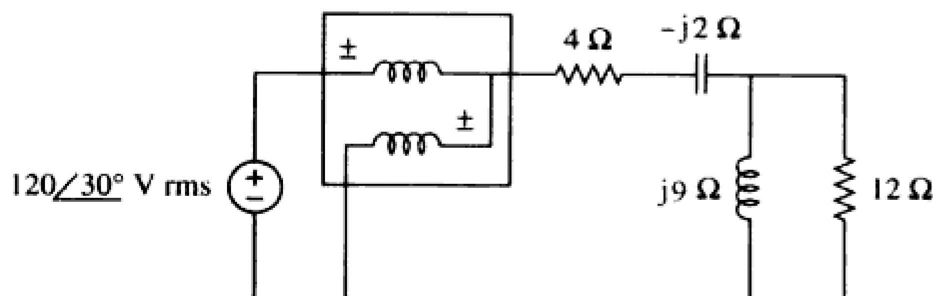


图 11-33 练习题 11-16 的电路原理图

11.9.2 电费的计算

1.7节讨论了确定用户电费的一种简化模型，但当时的计算中并未涉及功率因数的概念，下面将讨论功率因数在电费计算中的重要作用。

正如11.8节所述，功率因数低的负载所需的电流大，因此电费就高。理想情况应该是从供电系统提取的电流最小，从而使得$S=P$，$Q=0$且pf$=1$。无功功率Q不等于零的负载意味着能量要在负载与电源之间来回交换，因而造成额外的功率损耗。鉴于此，供电公司总是鼓励其用户将负载的功率因数尽可能接近于1，并对不改善负载功率因数的部分用户予以一定的"惩罚"。

供电公司通常将其用户分为如下几类：居民用户（本地用户）、商业用户以及工业用户，或者分为大、中、小型耗电用户。各类用户均设定不同的费率标准。单位为千瓦时（kWh）的用户的用电量是由安装在用户室内的电表（千瓦—时表）来计量的。

虽然供电公司采用不同的方法收取用户的电费，但其收费价格表上一般都分为两个部分。第一部分是固定的，对应于满足用户负载需求所必须的发电、输电和配电的费用，这部分费用通常用最大用电需求量的每kW价格来计算。或者考虑到用户的功率因数（pf)，用最大用电需求量的kVA来算。当用户功率因数低于某个规定值，例如0.85或0.9时，就会向用户收取一定的pf罚金，例如当pf每低于0.01，就要收取其最大需求kW或kVA一定百分比的费用作为罚金。另一方面，当用户功率因数高于某规定值时，每高于0.01就会给用户一定比例的奖励。

收费价格表上的第二部分正比于用电量，单位是kWh，这部分费用可以分级收取，例如，第一个100 kWh为16美分/kWh，下一个200 kWh为10美分/kWh，等等。因此，用户的电费账单可以用如下公式计算：

$$\text{总电费} = \text{固定费用} + \text{消耗电能的费用} \tag{11-64}$$

例题11-17 某制造工厂一个月消耗的电能为200 MWh，如果其最大需求量为1 600 kW，试计算按如下两部分费率收取的用户电费：

需求量收费：\$5.00每月每千瓦

用电收费：第一个50 000 kWh为8美分/kWh，其余用电量为5美分/kWh

解 需求量决定的固定收费为：

$$\$5.00 \times 1600 = \$8\,000 \tag{11-17-1}$$

第一个50 000kWh的用电收费是：

$$\$0.08 \times 50\,000 = \$4\,000 \tag{11-17-2}$$

其余用电量为200 000 kWh − 50 000 kWh = 150 000 kWh，相应的电费为：

$$\$0.05 \times 150\,000 = \$7\,500 \tag{11-17-3}$$

将式(11-17-1)～式(11-17-3)加起来，得到：

$$\text{一个月总的账单} = \$8\,000 + \$4\,000 + \$7\,500 = \$19\,500$$

看起来电费太高了，但这部分费用通常仅是该工厂生产出产品的总产值或成品销售额的很小一部分。

练习题11-17 某造纸厂一个月的电表读数为：

最大需求量：32 000 kW；

电能消耗：500 MWh；

试利用例题11-17给出的两部分费率，计算该造纸厂当月的电费。

答 \$186 500。

例题11-18 某300 kW负载在13 kV(rms)供电电压下，一个月里以功率因数0.8工作了520小时。试计算按如下简单费率确定的每月平均用电支出：

电能收费：6美分/kWh；

功率因数罚金：较0.85每降低0.01要增收电能收费的0.1%；

功率因数奖励：较0.85每高于0.01要奖励电能收费的0.1%。

解 所消耗的电能为：

$$W = 300\ \text{kW} \times 520\ \text{h} = 156\ 000\ \text{kWh}$$

负载工作时的功率因数pf = 80% = 0.8，较预定值0.85低5 × 0.01。由于pf每降低0.01要加收0.1的电能收费，所以功率因数罚金为0.5%，相应的电能为：

$$\Delta W = 156\ 000 \times \frac{5 \times 0.1}{100} = 780\text{kWh}$$

因此，总的收费能量为：

$$W_t = W + \Delta W = 156\ 000 + 780 = 156\ 780\ \text{kWh}$$

每月应收取的电费为：

$$\text{电费} = 6\ \text{美分} \times W_t = \$0.06 \times 156\ 780 = \$9\ 406.80$$

练习题11-18 某800 kW的感应电炉以0.88功率因数每天工作20小时，一个月工作26天，试按照例题11-8中的费率确定每月的电费。

答 $24 885.12。

11.10 本章小结

（1）某元件吸收的瞬时功率等于该元件两端的电压与流过该元件的电流的乘积，即：

$$p = vi$$

（2）平均功率或有功功率P（单位为瓦特）等于瞬时功率p的平均值：

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\text{d}t$$

如果$v(t) = V_m\cos(\omega t + \theta_v)$，$i(t) = I_m\cos(\omega t + \theta_i)$，则$V_{rms} = V_m/\sqrt{2}$，$I_{rms} = I_m/\sqrt{2}$，且：

$$P = \frac{1}{2}V_m I_m\cos(\theta_v - \theta_i) = V_{rms}I_{rms}\cos(\theta_v - \theta_i)$$

电感器与电容器不吸收平均功率，电阻器吸收的平均功率为$(1/2)I_m^2R = I_{rms}^2R$。

（3）当负载阻抗等于从负载端看进去的戴维南阻抗的共轭复数，即$\boldsymbol{Z}_L = \boldsymbol{Z}_{Th}^*$时，传递给负载的平均功率最大。

（4）周期信号$x(t)$的有效值即它的均方根值（rms）：

$$X_{eff} = X_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2\text{d}t}$$

对于正弦信号而言，有效值或rms值等于其幅度的$1/\sqrt{2}$。

（5）功率因数等于电压与电流相位差的余弦值：

$$\text{pf} = \cos(\theta_v - \theta_i)$$

功率因数也等于负载阻抗辐角的余弦值，或者是有功功率与无功功率之比，如果电流滞后于电压（电感性负载），则pf是滞后的；如果电流超前于电压（电容性负载），则pf是超前的。

（6）视在功率S（单位为VA）等于电压有效值与电流有效值的乘积：

$$S = V_{rms}I_{rms}$$

另外，$S = |\boldsymbol{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2}$，其中$P$为有功功率，$Q$为无功功率。

(7) 无功功率（单位为VAR）为：

$$Q=\frac{1}{2}V_m I_m \sin(\theta_v-\theta_i)=V_{rms}I_{rms}\sin(\theta_v-\theta_i)$$

(8) 复功率$\boldsymbol{S}$（单位为VA）等于电压相量有效值与电流相量有效值的共轭复数的乘积，也等于有功功率P与无功功率Q的复数和：

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{V}_{rms}\boldsymbol{I}_{rms}^*=V_{rms}I_{rms}\underline{/\theta_v-\theta_i}=P+jQ$$

而且，

$$\boldsymbol{S}=I_{rms}^2\boldsymbol{Z}=\frac{V_{rms}^2}{\boldsymbol{Z}^*}$$

(9) 电路网络总的复功率等于各个元件的复功率之和，同理，总的有功功率与无功功率也分别等于各个元件的有功功率与无功功率之和。但是，总的视在功率的计算方法并不同于上述计算方法。

(10) 从经济因素考虑，功率因数校正是必需的。降低总的无功功率即可改善负载的功率因数。

(11) 瓦特表是测量平均功率的仪器。用电量可以用千瓦时表来度量。

复习题

11-1 电感器吸收的平均功率为零。
(a) 正确 (b) 错误

11-2 从负载两端看进去的网络的戴维南阻抗为80 + j55 Ω，要实现负载的最大功率传送，负载阻抗应为：
(a) −80 + j55 Ω (b) −80 − j55 Ω
(c) 80 − j55 Ω (d) 80 + j55 Ω

11-3 家用电源插座上的60 Hz、120 V电源的幅度为：
(a) 110 V (b) 120 V
(c) 170 V (d) 210 V

11-4 如果负载阻抗为20 − j20，则功率因数为：
(a) $\underline{/-45^\circ}$ (b) 0 (c) 1
(d) 0.7071 (e) 以上均错误

11-5 包含给定负载所有功率信息的量是：
(a) 功率因数 (b) 视在功率
(c) 平均功率 (d) 无功功率
(e) 复功率

11-6 无功功率的度量单位为：
(a) 瓦特 (b) VA
(c) VAR (d) 以上均错误

11-7 在如图11-34a所示的功率三角形中，无功功率为：
(a) 1 000 VAR超前 (b) 1 000 VAR滞后
(c) 866 VAR超前 (d) 866 VAR滞后

11-8 在如图11-34b所示的功率三角形中，视在功率为：
(a) 2000 VA (b) 1000 VAR
(c) 866 VAR (d) 500 VAR

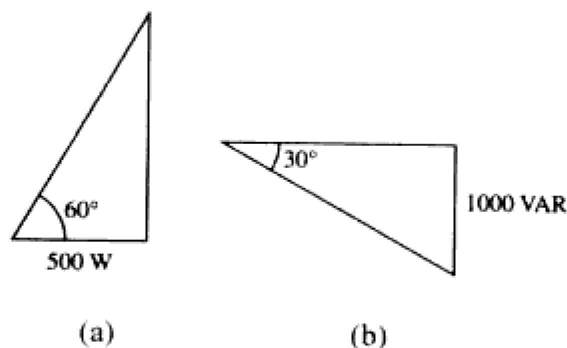


图 11-34 复习题11-7与复习题11-8的功率三角形

11-9 某电源与三个负载$\boldsymbol{Z}_1$、$\boldsymbol{Z}_2$与$\boldsymbol{Z}_3$并联连接，下列哪个是错误的？
(a) $P=P_1+P_2+P_3$ (b) $Q=Q_1+Q_2+Q_3$
(c) $S=S_1+S_2+S_3$ (d) $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2+\boldsymbol{S}_3$

11-10 测量平均功率的仪器是：
(a) 电压表 (b) 电流表 (c) 瓦特表
(d) VAR表 (e) kWh表

答案 11-1 a；11-2 c；11-3 c；11-4 d；11-5 e；11-6 c；11-7 d；11-8 a；11-9 c；11-10 c。

习题

11.2 节

11-1 如果$v(t)=160\cos 50t$ V，$i(t)=-20\sin(50t-30^\circ)$ A，试计算瞬时功率与平均功率。

11-2 已知如图11-35所示电路，试求各元件提供或吸收的平均功率。

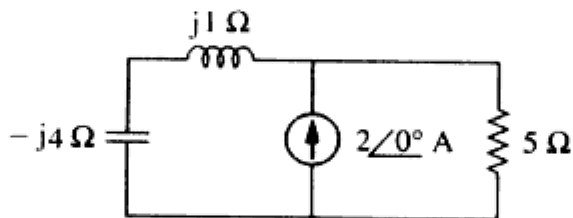


图 11-35 习题 11-2 的电路原理图

11-3 某负载由60 Ω电阻器与90 μF电容器并联组成，如果该负载与电压源$v_s(t)=40\cos 2\,000t$ V相连接，试求传递给负载的平均功率。

11-4 试求如图11-36所示电路中电阻器消耗的平均功率，并验证功率守恒原理。

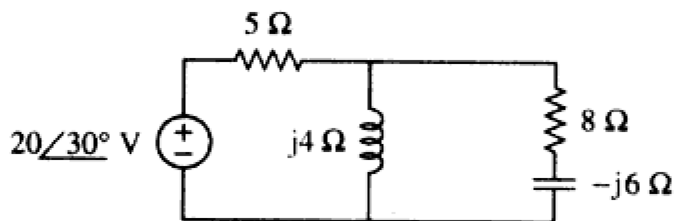


图 11-36 习题 11-4 的电路原理图

11-5 假定如图11-37所示电路中，$v_s=8\cos(2t-40°)$ V，试求传递给各无源元件的平均功率。

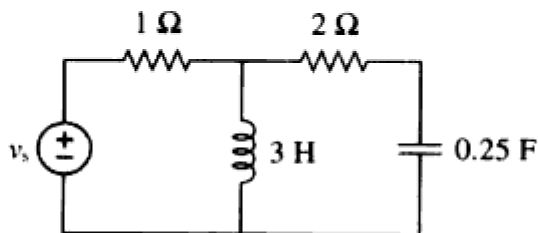


图 11-37 习题 11-5 的电路原理图

11-6 在如图11-38所示电路中，$i_s=6\cos 10^3t$ A，试求50 Ω电阻器吸收的平均功率。

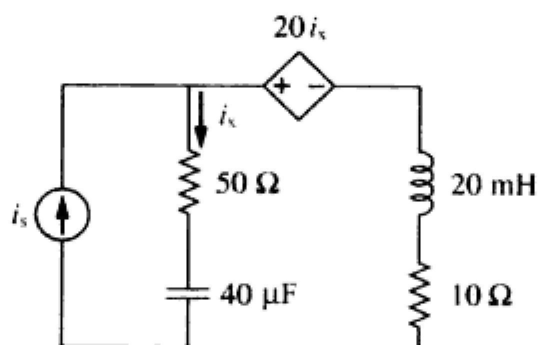


图 11-38 习题 11-6 的电路原理图

11-7 已知如图11-39所示电路，试求10 Ω电阻器吸收的平均功率。

11-8 在如图11-40所示电路中，试确定40 Ω电阻器吸收的平均功率。

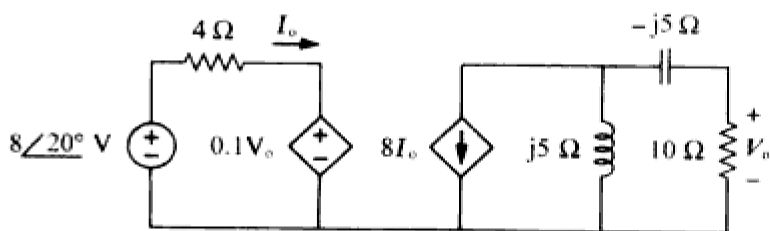


图 11-39 习题 11-7 的电路原理图

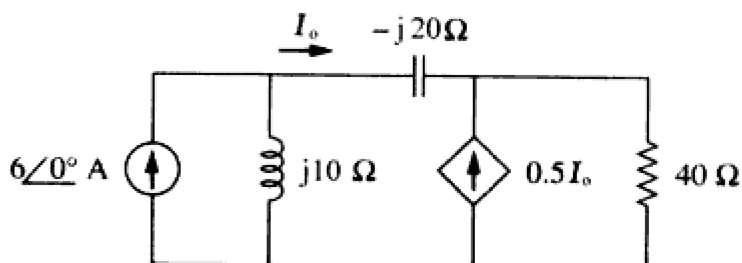


图 11-40 习题 11-8 的电路原理图

11-9 在如图11-41所示的运算放大器电路中，$V_s=10\angle 30°$ Vrms，试求20 kΩ电阻器吸收的平均功率。

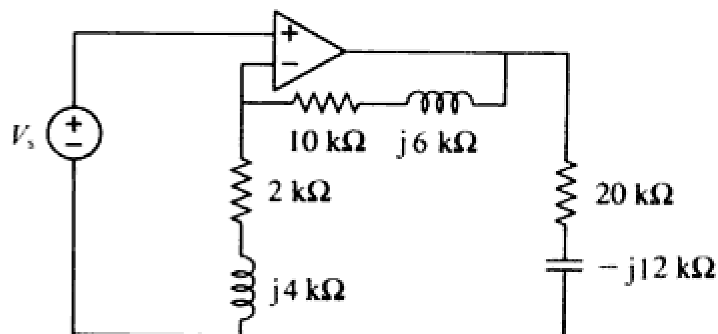


图 11-41 习题 11-9 的电路原理图

11-10 在如图11-42所示的运算放大器电路中，试求电阻器吸收的总的平均功率。

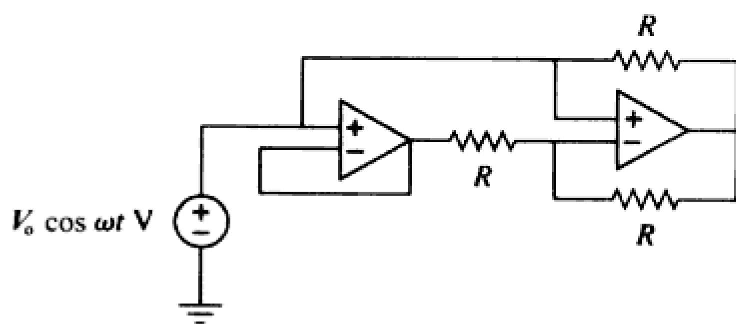


图 11-42 习题 11-10 的电路原理图

11-11 在如图11-43所示的网络中，假定端口阻抗为：

$$Z_{ab}=\frac{R}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}\angle -\tan^{-1}\omega RC$$

试求$R=10$ kΩ，$C=200$ nF，$i=2\sin(377t+22°)$ mA时，该网络消耗的平均功率。



图 11-43 习题 11-11 的电路原理图

11.3 节

11-12 对于如图11-44所示电路，试确定实现最大功率传输（对于$\boldsymbol{Z}$）时的负载阻抗$\boldsymbol{Z}$，并计算负载吸收的最大功率值。

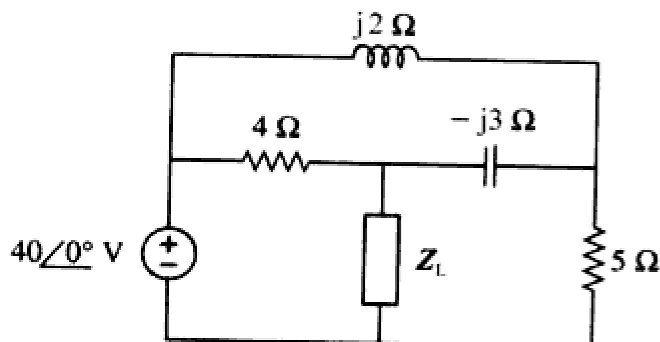


图 11-44 习题 11-12 的电路原理图

11-13 某电源的戴维南阻抗为$\boldsymbol{Z}_{\mathrm{Th}}=120+\mathrm{j}60\ \Omega$，戴维南峰值电压为$\boldsymbol{V}_{\mathrm{Th}}=110+\mathrm{j}0\ \mathrm{V}$，试确定该电源可提供的最大平均功率。

11-14 在如图11-45所示电路中，要实现传递给负载$\boldsymbol{Z}$的功率最大，试确定$\boldsymbol{Z}$以及该最大功率。假定$i_s=5\cos 40t$ A。

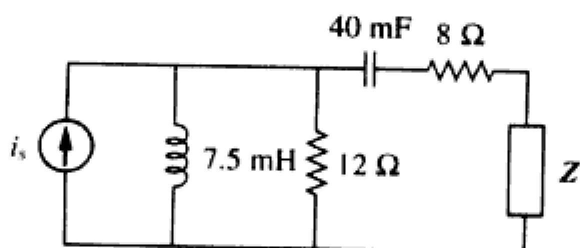


图 11-45 习题 11-14 的电路原理图

11-15 在如图11-46所示电路中，试确定吸收最大功率的阻抗$\boldsymbol{Z}_L$以及该最大功率。

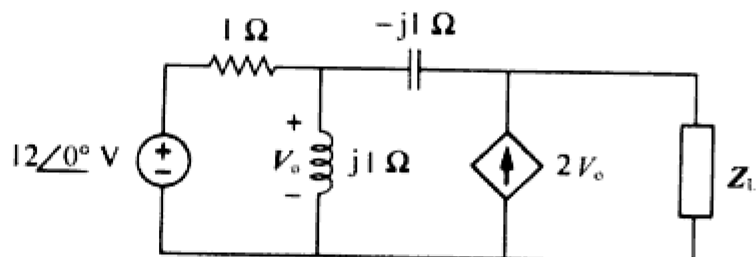


图 11-46 习题 11-15 的电路原理图

11-16 在如图11-47所示电路中，试求传递给负载$\boldsymbol{Z}_L$的最大功率。

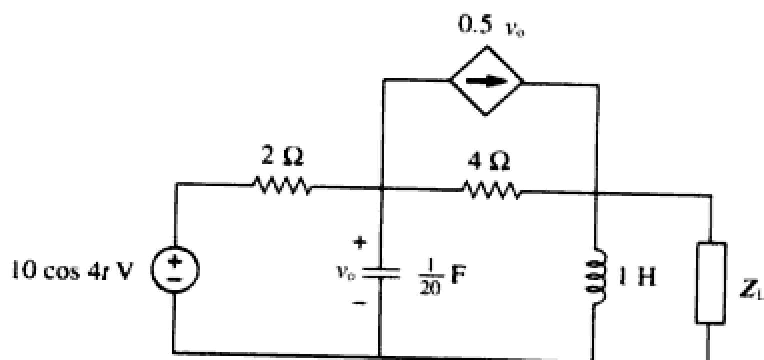


图 11-47 习题 11-16 的电路原理图

11-17 试计算如图11-48所示电路中$\boldsymbol{Z}_L$，使得$\boldsymbol{Z}_L$吸收的平均功率最大，并求出$\boldsymbol{Z}_L$吸收的最大平均功率为多少？

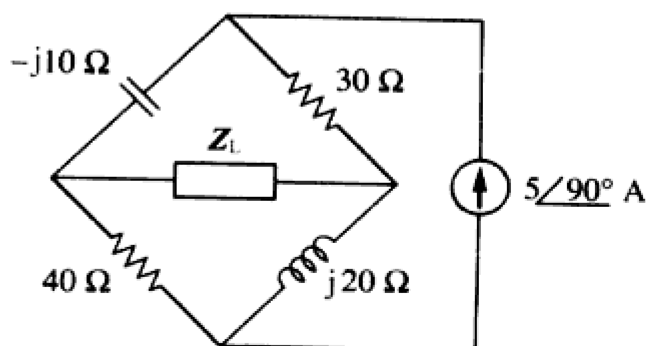


图 11-48 习题 11-17 的电路原理图

11-18 试求如图11-49所示电路中实现最大功率传递的$\boldsymbol{Z}_L$。

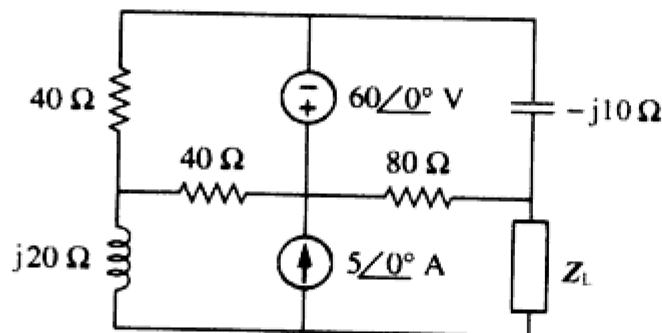


图 11-49 习题 11-18 的电路原理图

11-19 调节如图11-50所示电路中的可变电阻R使其吸收最大的平均功率，试求该电阻值R以及所吸收的最大平均功率。

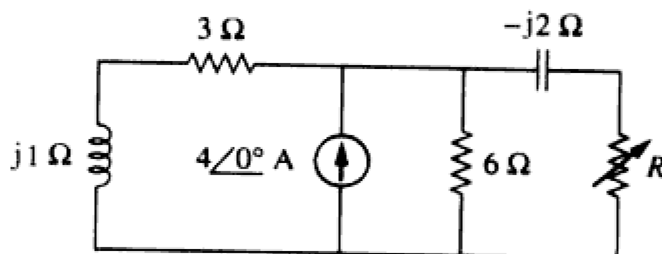


图 11-50 习题 11-19 的电路原理图

11-20 调节如图11-51所示电路中的负载电阻R_L使其吸收最大的平均功率，试计算该电阻值R_L以及所吸收的最大平均功率。

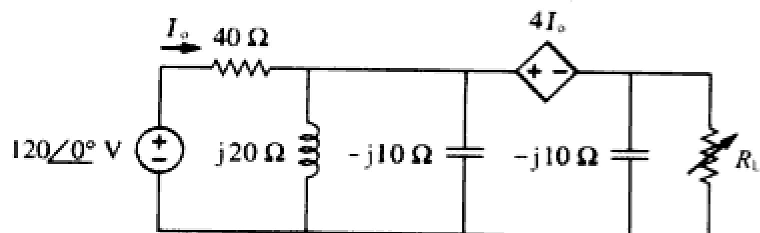


图 11-51 习题 11-20 的电路原理图

11-21 假定负载阻抗为纯电阻，试问如图11-52所示电路中端口$a-b$两端应该连接多大的负载才能使传递给该负载的功率最大？

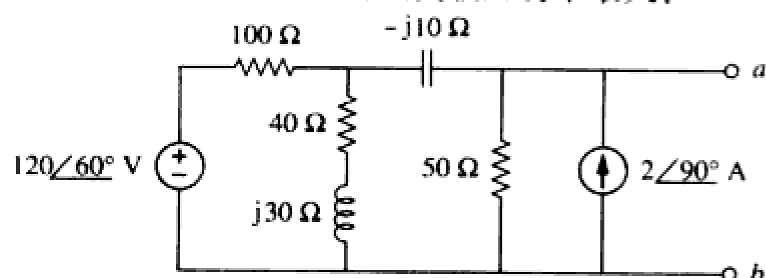


图 11-52 习题 11-21 的电路原理图

11.4 节

11-22 试求如图11-53所示移位正弦波的rms值。

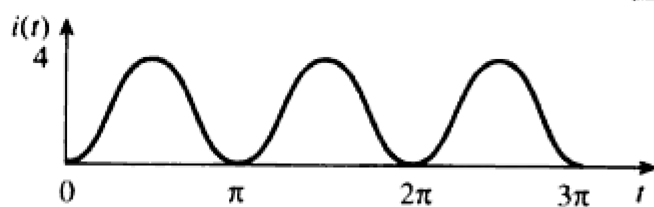


图 11-53 习题 11-22 的波形图

11-23 试确定如图11-54所示电压波形的rms值。

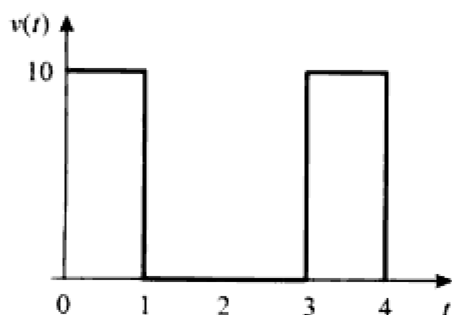


图 11-54 习题 11-23 的波形图

11-24 试确定如图11-55所示波形的rms值。

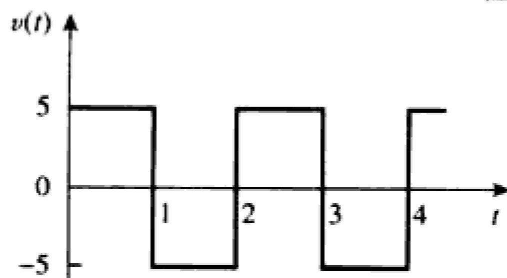


图 11-55 习题 11-24 的波形图

11-25 试求如图11-56所示信号的rms值。

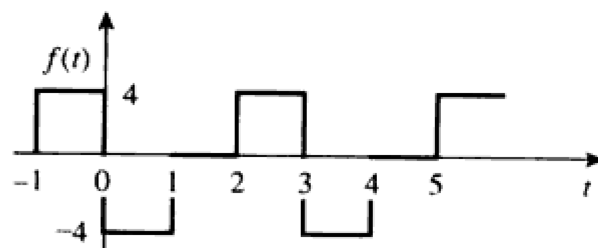


图 11-56 习题 11-25 的波形图

11-26 试求如图11-57所示电压波形的有效值。

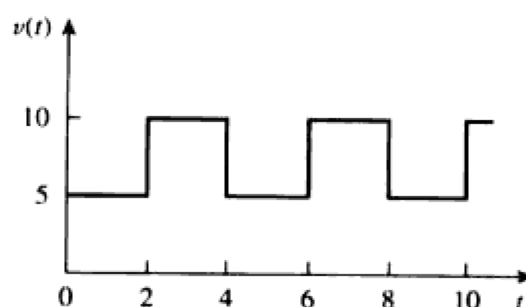


图 11-57 习题 11-26 的波形图

11-27 试计算如图11-58所示电流波形的rms值。

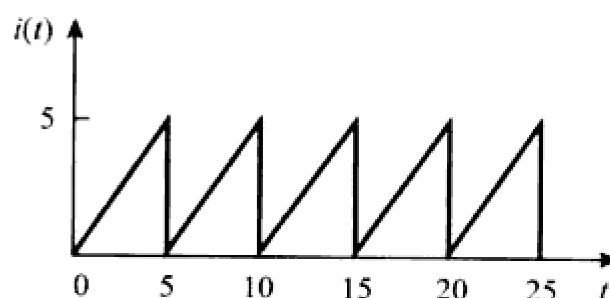


图 11-58 习题 11-27 的波形图

11-28 试求如图11-59所示电压波形的rms值，以及将该电压值施加于2 Ω电阻器两端时，该电阻器吸收的平均功率。

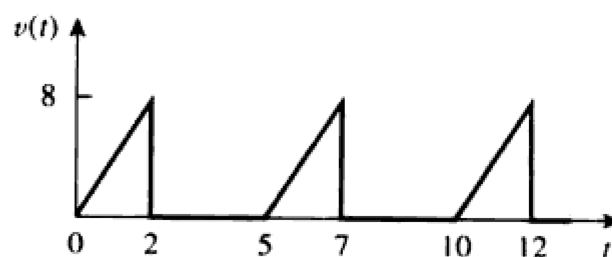


图 11-59 习题 11-28 的波形图

11-29 试计算如图11-60所示电流波形的有效值，以及该电流流过12 Ω电阻器时，传递给该电阻器的平均功率。

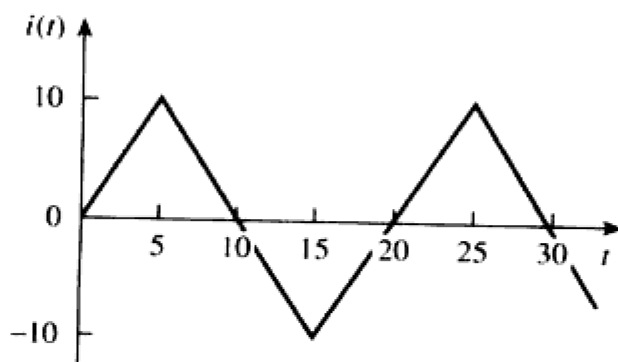


图 11-60 习题 11-29 的波形图

11-30 试计算如图11-61所示波形的rms值。

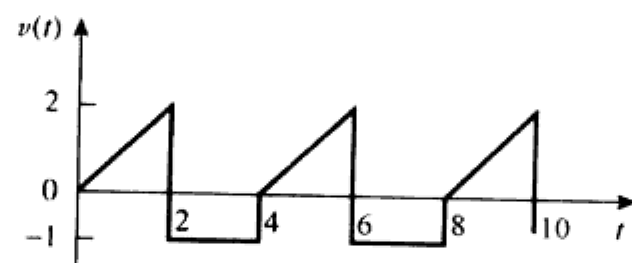


图 11-61 习题 11-30 的波形图

11-31 试求如图11-62所示信号的rms值。

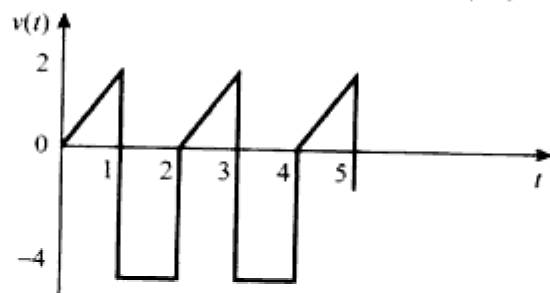


图 11-62 习题 11-31 的波形图

11-32 试确定如图11-63所示电流波形的rms值。

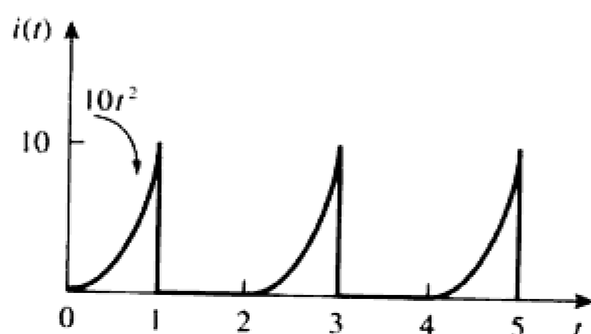


图 11-63 习题 11-32 的波形图

11-33 试确定如图11-64所示波形的rms值。

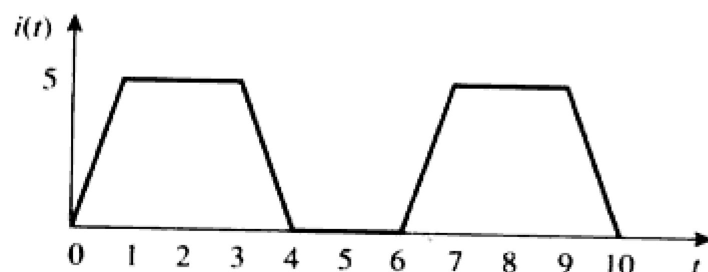


图 11-64 习题 11-33 的波形图

11-34 试求如图11-65所示信号$f(t)$的有效值。

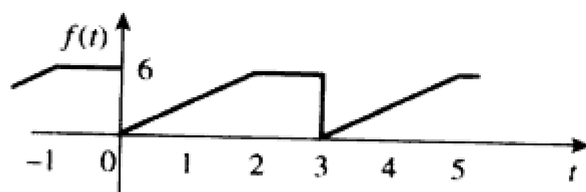


图 11-65 习题 11-34 的波形图

11-35 某周期电压波形的一个周期如图11-66所示，试求该电压的有效值。注意，该周期的起点为$t=0$，终点为$t=6$s。

11-36 试计算如下各函数的rms值。

（a）$i(t)=10$ A （b）$v(t)=4+3\cos5t$ V

（c）$i(t)=8-6\sin2t$ A

（d）$v(t)=5\sin t+4\cos t$ V

11-37 试计算如下三个电流信号之和的rms值。

$i_1=8$，$i_2=4\sin(t+10°)$，$i_3=6\cos(2t+30°)$ A

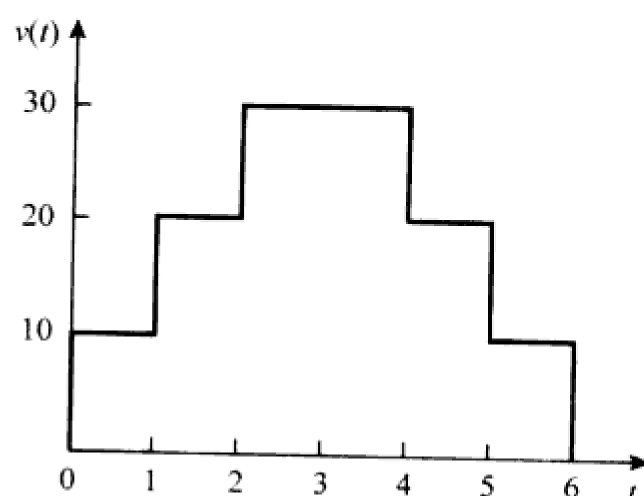


图 11-66 习题 11-35 的波形图

11.5 节

11-38 对于如图11-67所示的电力系统，试求：（a）平均功率；（b）无功功率；（c）功率因数。注意，220 V为rms值。

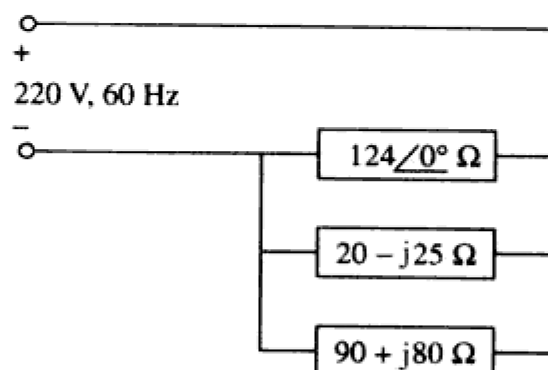


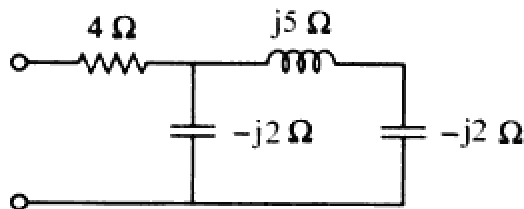
图 11-67 习题 11-38 的电路原理图

11-39 给阻抗为$Z_L=4.2+j3.6$ Ω的某交流电动机

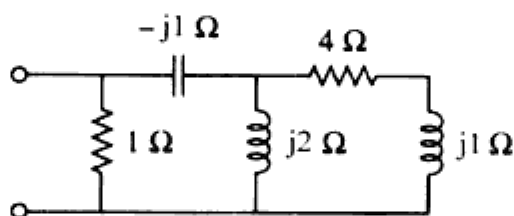
供电的电源为220 V、60 Hz。(a)试求pf、P、Q；(b)试确定将功率因数校正为1的与该电动机并联的电容值。

11-40 某负载由感应电动机组成，该负载在功率因数为0.72（滞后）时从220 V、60 Hz电力线获取的功率为80 kW，试求将功率因数增大为0.92所需的电容器的容值。

11-41 试确定如图11-68所示各电路的功率因数，并指出各功率因数是超前的还是滞后的。



(a)



(b)

图 11-68 习题 11-41 的电路原理图

11.6 节

11-42 将110 Vrms、60 Hz电源作用于负载阻抗Z，功率因数为0.707滞后时进入该负载的视在功率为120 VA。

(a) 试计算复功率；

(b) 试求流过该负载的rms电流值；

(c) 试确定Z；

(d) 假定$Z = R + j\omega L$，试求R与L的值。

11-43 作用于10 Ω电阻器两端的电压为：

$v(t) = 5 + 3\cos(t + 10°) + \cos(2t + 30°)$ V

(a) 试计算该电压的rms值；

(b) 试确定该电阻器消耗的平均功率。

11-44 试求v_s传递给如图11-69所示网络的复功率，设$v_s = 100\cos 2\,000t$ V。

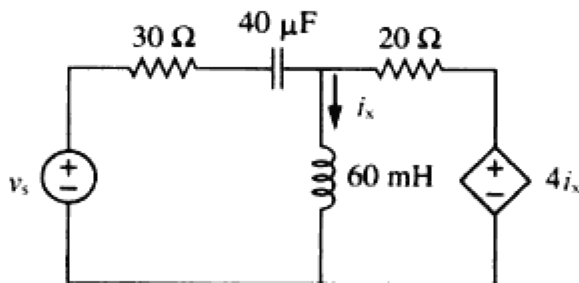


图 11-69 习题 11-44 的电路原理图

11-45 某负载两端的电压以及流过该负载的电流为：

$$v(t) = 20 + 60\cos 100t \text{ V}$$
$$i(t) = 1 - 0.5\sin 100t \text{ A}$$

试求：

(a) 该电压与电流的rms值；

(b) 该负载消耗的平均功率。

11-46 对如下电压与电流相量，试计算复功率、视在功率、有功功率和无功功率，并指出pf是超前的还是滞后的。

(a) $\boldsymbol{V} = 220\angle 30°$ V rms，$\boldsymbol{I} = 0.5\angle 60°$ A rms

(b) $\boldsymbol{V} = 250\angle -10°$ V rms，$\boldsymbol{I} = 6.2\angle -25°$ A rms

(c) $\boldsymbol{V} = 120\angle 0°$ V rms，$\boldsymbol{I} = 2.4\angle -15°$ A rms

(d) $\boldsymbol{V} = 160\angle 45°$ V rms，$\boldsymbol{I} = 8.5\angle 90°$ A rms

11-47 对于如下几种情况，试求其复功率、平均功率与无功功率。

(a) $v(t) = 112\cos(\omega t + 10°)$ V，$i(t) = 4\cos(\omega t - 50°)$ A

(b) $v(t) = 160\cos 377t$ V，$i(t) = 4\cos(377t + 45°)$ A

(c) $\boldsymbol{V} = 80\angle 60°$ V rms，$\boldsymbol{Z} = 50\angle 30°$ Ω

(d) $\boldsymbol{I} = 10\angle 60°$ A rms，$\boldsymbol{Z} = 100\angle 45°$ Ω

11-48 试确定以下几种情况下的复功率。

(a) $P = 269$ W，$Q = 150$ VAR（电容性）

(b) $Q = 2000$ VAR，pf = 0.9（超前）

(c) $S = 600$ VA，$Q = 450$ VAR（电感性）

(d) $V_{rms} = 220$ V，$P = 1$ kW，$|\boldsymbol{Z}| = 40$ Ω（电感性）

11-49 试确定以下几种情况下的复功率。

(a) $P = 4$ kW，pf = 0.86（超前）

(b) $S = 2$ kVA，$P = 1.6$ kW（电容性）

(c) $\boldsymbol{V}_{rms} = 208\angle 20°$ V，$\boldsymbol{I}_{rms} = 6.5\angle -50°$ A

(d) $\boldsymbol{V}_{rms} = 120\angle 30°$ V，$\boldsymbol{Z} = 40 + j60$ Ω

11-50 试确定以下几种情况下的总阻抗。

(a) $P = 1\,000$ W，pf = 0.8（超前），$V_{rms} = 220$ V

(b) $P = 1\,500$ W，$Q = 2\,000$ VAR（电感性），$I_{rms} = 12$ A

(c) $\boldsymbol{S} = 4500\angle 60°$ VA，$\boldsymbol{V} = 120\angle 45°$ V

11-51 对于如图11-70所示的整体电路，试计算：(a) 功率因数；(b) 电源传递的平均功率；(c) 无功功率；(d) 视在功率；(e) 复功率

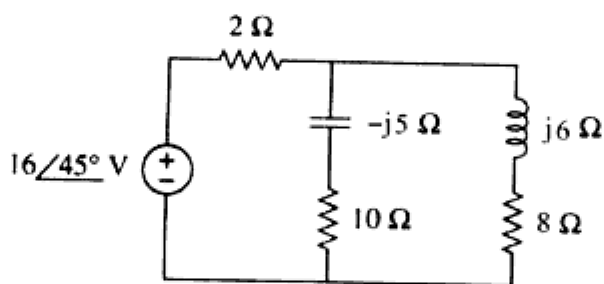


图 11-70 习题 11-51 的电路原理图

11-52 在如图11-71所示电路中，器件A在功率因数为0.8滞后下接收的功率为2 kW，器件B在功率因数为0.4超前下接收的功率为3 kVA，器件C为感性元件，消耗的功率为1 kW，接收的功率为500 VAR。

(a) 试确定整个系统的功率因数；

(b) 试求$V_s = 120\angle 45°$ Vrms时的I。

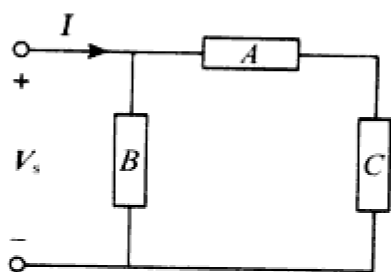


图 11-71 习题 11-52 的电路原理图

11-53 在如图11-72所示电路中，负载A在功率因数为0.8超前下接收的功率为4 kVA，负载B在功率因数为0.6滞后下接收的功率为2.4 kVA，器件C为感性负载，消耗的功率为1 kW，接收的功率为500 VAR。

(a) 试确定I；

(b) 试计算该电路组合的功率因数。

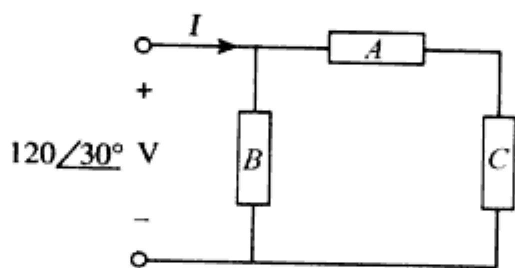


图 11-72 习题 11-53 的电路原理图

11.7 节

11-54 对于如图11-73所示网络，试求各元件吸收的复功率。

11-55 如图11-74所示电路共包含五个元件，试求每个元件吸收的复功率。

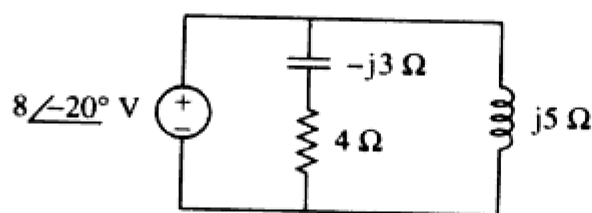


图 11-73 习题 11-54 的电路原理图

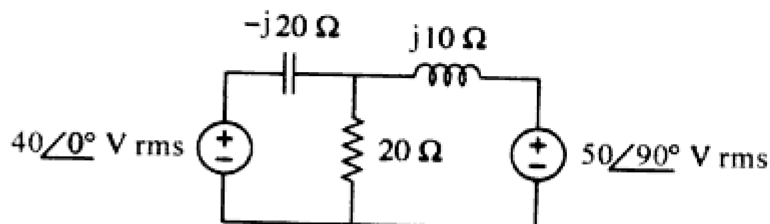


图 11-74 习题 11-55 的电路原理图

11-56 试确定如图11-75所示电路中的电源传递的复功率。

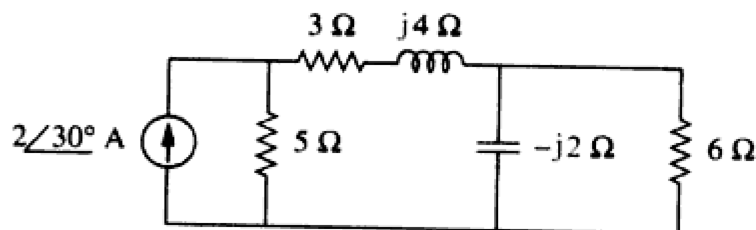


图 11-75 习题 11-56 的电路原理图

11-57 对于如图11-76所示电路，试求独立电流源传递的平均功率、无功功率与复功率。

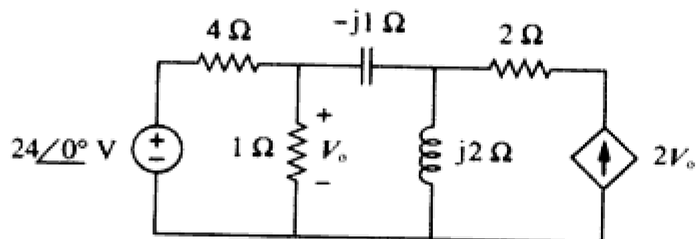


图 11-76 习题 11-57 的电路原理图

11-58 试确定传递给如图11-77所示电路中10 kΩ电阻器的复功率。

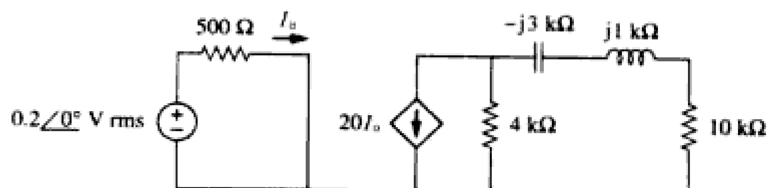


图 11-77 习题 11-58 的电路原理图

11-59 试计算如图11-78所示电路中电感器与电容器的无功功率。

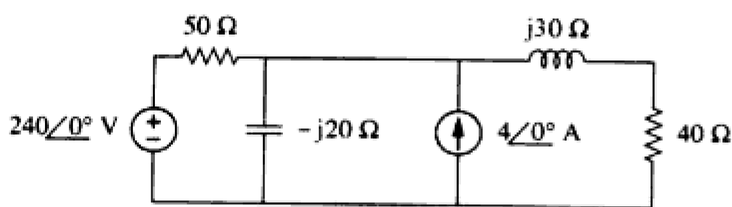


图 11-78 习题 11-59 的电路原理图

11-60 对于如图11-79所示电路，试求V_o与输入功率因数。

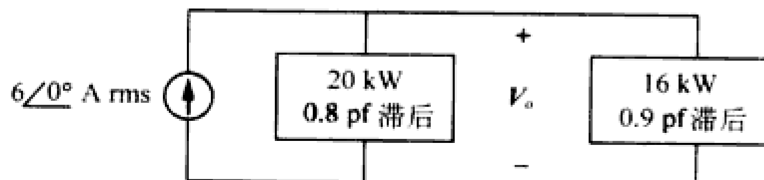


图 11-79 习题 11-60 的电路原理图

11-61 已知如图11-80所示电路，试求I_o与电源提供的总的复功率。

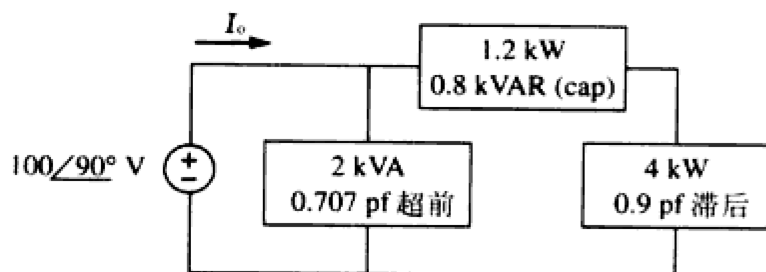


图 11-80 习题 11-61 的电路原理图

11-62 对于如图11-81所示电路，试求V_s。

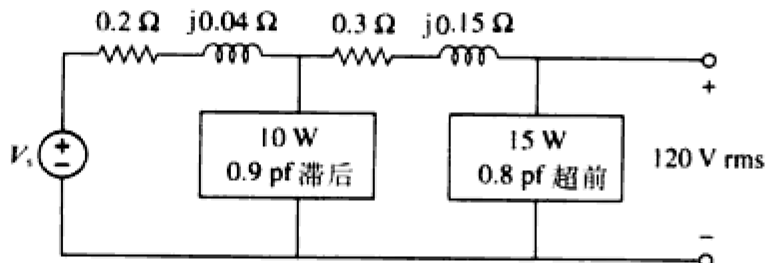


图 11-81 习题 11-62 的电路原理图

11-63 试求如图11-82所示电路中的I_o。

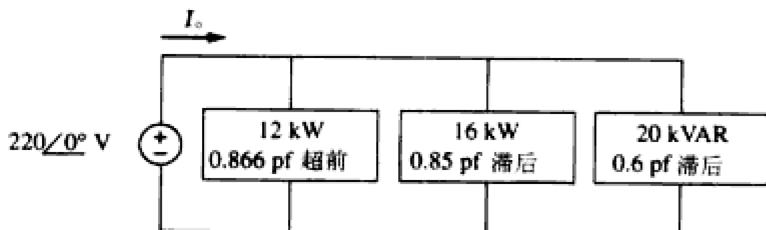


图 11-82 习题 11-63 的电路原理图

11-64 在如图11-83所示电路中，如果电压源提供的功率为2.5 kW与0.4 kVAR（超前），试确定I_s。

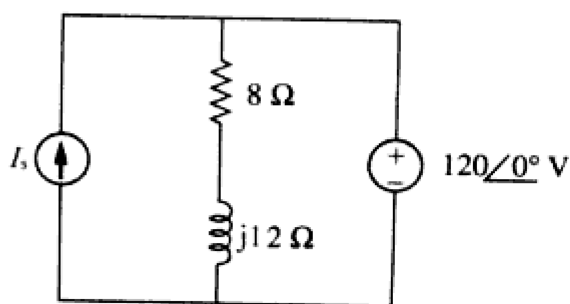


图 11-83 习题 11-64 的电路原理图

11-65 在如图11-84所示运算放大器电路中，如果$v_s = 4\cos 10^4 t$ V，试求传递给50 kΩ电阻器的平均功率。

11-66 试确定如图11-85所示运算放大器电路中，6 kΩ电阻器吸收的平均功率。

11-67 对于如图11-86所示的运算放大器电路，试计算：

(a) 电压源传递的复功率；

(b) 12 kΩ电阻器消耗的平均功率。

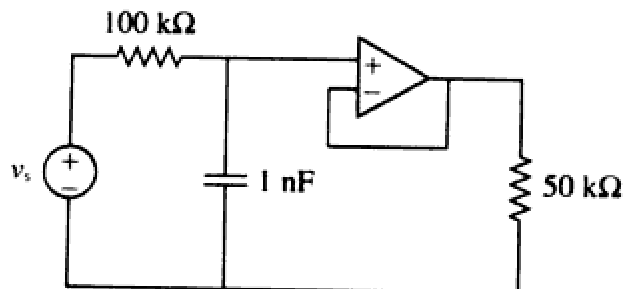


图 11-84 习题 11-65 的电路原理图

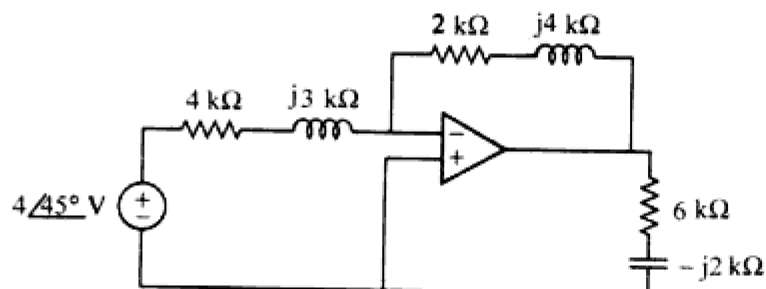


图 11-85 习题 11-66 的电路原理图

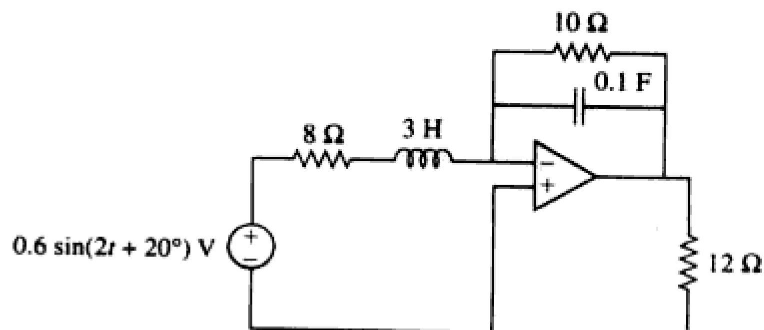


图 11-86 习题 11-67 的电路原理图

11-68 试计算如图11-87所示RLC串联电路中，电

流源提供的复功率。

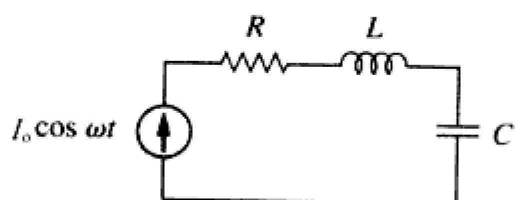


图 11-87 习题 11-68 的电路原理图

11.8 节

11-69 参见如图11-88所示电路。

(a) 功率因数为多少?

(b) 消耗的平均功率为多少?

(c) 将功率因数校正为单位1的与负载相并联的电容器的容值为多少?

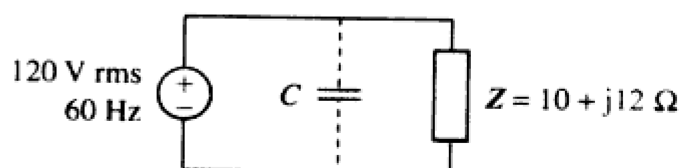


图 11-88 习题 11-69 的电路原理图

11-70 某880 VA、220 V、50 Hz负载的功率因数为0.8滞后。试问将负载功率因数校正为单位1的并联电容器的容值为多少?

11-71 三个负载与120 $\angle 0°$ V rms电源并联连接，在pf＝0.85滞后时，负载1吸收的功率为60 kVAR，在pf＝1时，负载2吸收的功率为90 kW与50 kVAR超前，负载3吸收的功率为100 kW。

(a) 试求等效阻抗；

(b) 试计算该并联电路的功率因数；

(c) 试确定电源提供的电流。

11-72 相互并联的两个负载在功率因数为0.8滞后下从120 V rms、60 Hz电力线提取的总功率为2.4 kW，其中一个负载在在功率因数为0.707滞后下吸收的功率为1.5 kW。试确定：

(a) 第二个负载的功率因数；

(b) 将两个负载的功率因数校正为0.9滞后所需的并联元件值。

11-73 某240 Vrms，60 Hz电源某负载供电，该负载为10 kW（电阻性），15 kVAR（电容性）以及22 kVAR（电感性），试求：

(a) 视在功率；

(b) 从电源提取的电流；

(c) 额定的kVAR以及将功率因数提高到0.96滞后所需的电容值；

(d) 在新的功率因数条件下，从电源提取的电流。

11-74 某120 Vrms、60 Hz电源给两个相互并联的负载供电，如图11-89所示。

(a) 试求该并联负载的功率因数；

(b) 试计算将功率因数提高到1，所需并联的电容值。

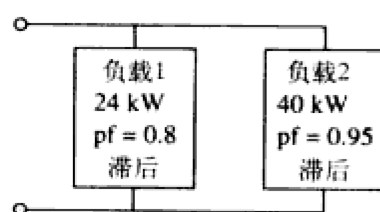


图 11-89 习题 11-74 的电路原理图

11-75 对于如图 11-90 所示的供电系统，试计算：

(a) 总的复功率；

(b) 功率因数。

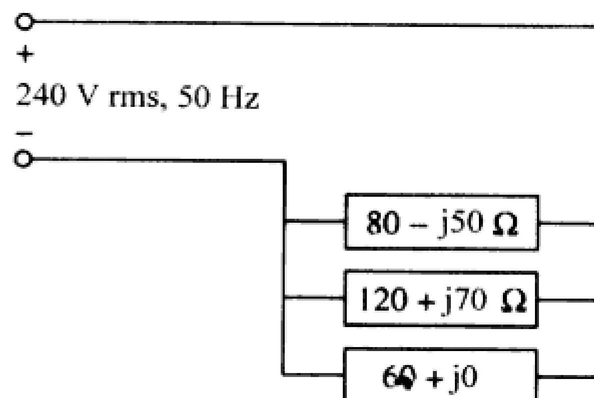


图 11-90 习题 11-57 的电路原理图

11.9 节

11-76 试确定如图11-91所示电路中瓦特表的读数。

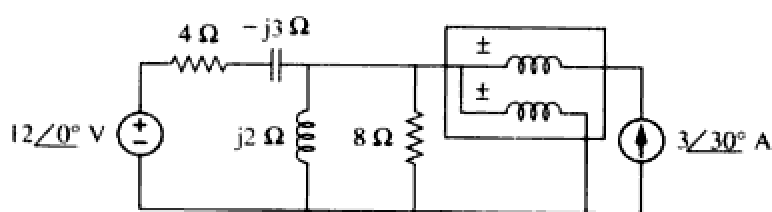


图 11-91 习题 11-76 的电路原理图

11-77 在如图11-92所示网络中，瓦特表的读数是多少?

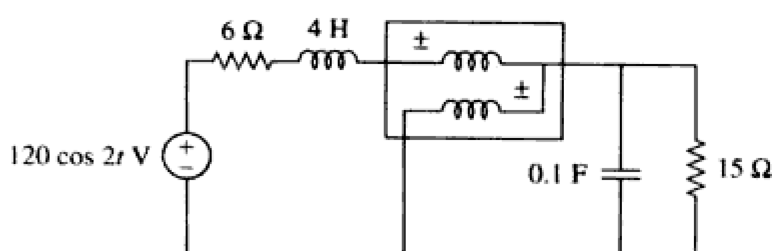


图 11-92 习题 11-77 的电路原理图

11-78 试求如图11-93所示电路中瓦特表的读数。

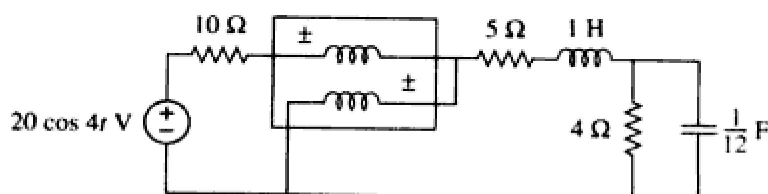


图 11-93 习题 11-78 的电路原理图

11-79 试确定如图11-94所示电路中瓦特表的读数。

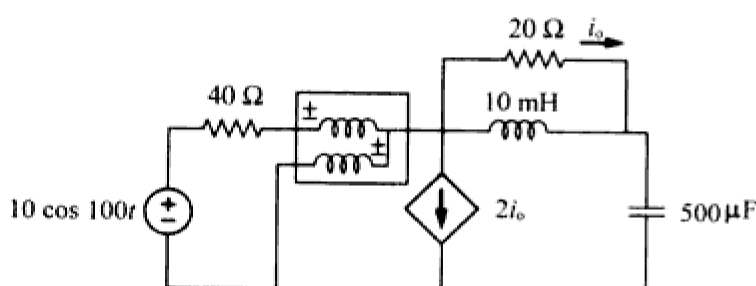


图 11-94 习题 11-79 的电路原理图

11-80 图11-95所示为瓦特表接如某交流网络中的电路图：
(a) 试求负载电流；
(b) 试计算瓦特表的读数。

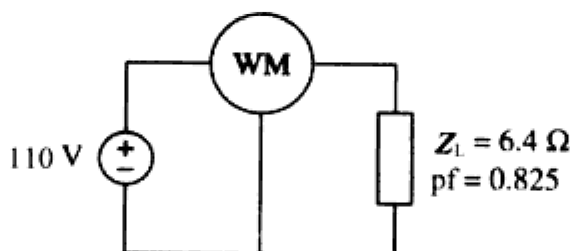


图 11-95 习题 11-80 的电路原理图

11-81 某120 V rms、60 Hz吹风机在功率因数为0.92滞后下消耗的功率为600 W，试计算该吹风机提取电流的rms值。

11-82 某240 V rms、60 Hz电源给由一个5 kW加热器与一个30 kVA感应电动机组成的并联负载供电，该负载的功率因数为0.82，试确定：
(a) 该系统的视在功率；
(b) 该系统的无功功率；
(c) 将该系统的功率因数调节为0.9滞后所需的电容器的标称kVA；
(d) 所需的电容器值。

11-83 示波器测试结果显示某负载两端的电压与流过该负载的电流分别为$210\angle 60^\circ$ V与$8\angle 25^\circ$A，试确定：
(a) 有功功率；
(b) 视在功率；
(c) 无功功率；
(d) 功率因数。

11-84 某用户月耗电1200 MWh，最大需求为2.4 MVA，最大需求收费为$30每kVA每年，电能收费为4美分每kWh。
(a) 试确定每年的电费；
(b) 如果供电公司两部分的收入保持相同，试计算统一费率下每kWh电能的收费。

11-85 某单向三线电路的常规家电系统允许使用120 V与240 V，60 Hz两种家用电器，该家用电路的模型如图11-96所示。试计算：
(a) 电流I_1、I_2与I_3；
(b) 电源提供的总的复功率；
(c) 将电路的总的功率因数。

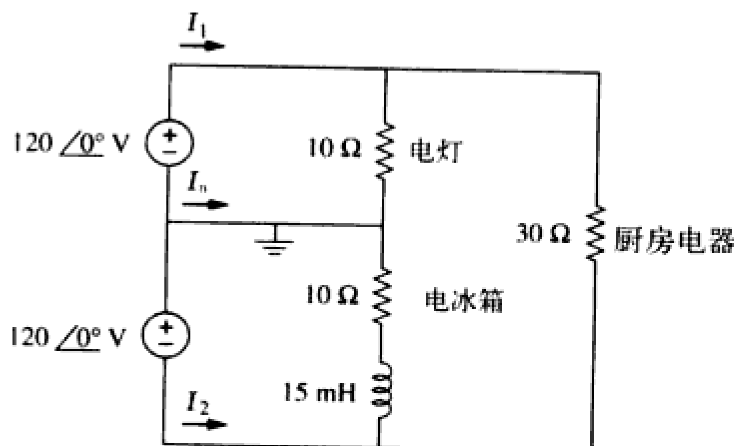


图 11-96 习题 11-85 的电路原理图

综合题

11-86 当天线调整为与75 Ω电阻器和4 μH电感器相串联的负载等效时，发射机传递给该天线的功率最大。如果发射机的工作频率为4.12 MHz，试求其内部阻抗。

11-87 在电视发射机中，某串联电路的阻抗为3 kΩ，总电流为50 mA。如果该电阻器两端的电压为80 V，试问该电路的功率因数为多少？

11-88 某个电子电路与110 V交流电源相连接，所提取的电流均方根值为2 A，相位角为55°。
(a) 试求该电路所提取的有功功率；
(b) 试计算视在功率。

11-89 某工业用加热器的标示牌上显示210 V、60

Hz、12 kWA、0.78pf滞后，试确定：

(a) 视在功率与复功率；

(b) 该加热器的阻抗。

*11-90 某功率因数为0.85的2000 kW涡轮发电机工作在额定负载条件下，接入另一个300 kW，功率因数为0.8的负载，试问使该涡轮发电机正常运转且不至过载所需的电容器的kVAR为多少？

11-91 某电动机的标示牌上显示：

电源电压：220 V rms

电源电流：15 A rms

电源频率：60 Hz

功率：2700 W

试确定该电动机的功率因数（滞后），并求出使该电动机的pf提高到1所需并联电容器的容值C。

11-92 如图11-97所示，550 V馈电线路给某工厂供电，该工厂负载包括功率因数为0.75电感性的60 kW电动机、标称值为20 kVAR的电容器以及20 kW照明系统。

(a) 试计算该工厂吸收的总的无功功率与视在功率；

(b) 试确定总的功率因数；

(c) 试求馈电线路中的电流。

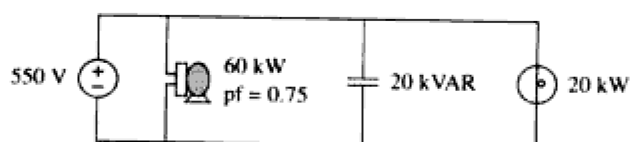


图 11-97 习题 11-92 的电路原理图

11-93 某工厂的四种主要负载如下：

- 一个额定功率为5马力的电动机，pf = 0.8（滞后），1马力 = 0.7457 kW；
- 一个额定功率为1.2 kW的加热器，pf = 1.0；
- 十个120 W的灯泡；
- 一个额定功率为1.6 kVA的同步电机，pf = 0.6（超前）；

(a) 试计算总的有功功率与无功功率；

(b) 试求总的功率因数。

11-94 某1MVA的电力分站以功率因数0.7满负荷运转。现欲通过安装电容器将功率因数提高到0.95。假定安装新分站和配电设施的费用为 $120/kVA，安装电容器的费用为 $30/kVA。

(a) 试计算安装电容器所需的费用；

(b) 试求分站容量的释放所节省的费用；

(c) 试问安装电容器与释放电站容量哪个更为合算？

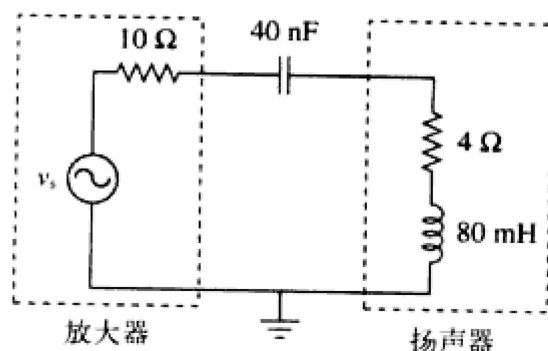
11-95 耦合电容器可用于阻隔来自放大器的直流电流，如图11-98a所示。放大器与电容器均可以看作电源，而扬声器则是负载，如图11-98b所示。

(a) 试问在什么频率下，传递给扬声器的功率最大？

(b) 如果V_s = 4.6 V rms，在该频率下，传递给扬声器的功率为多大？



(a)



(b)

图 11-98 习题 11-95 的电路原理图

11-96 某功率放大器的输出阻抗为40 + j8 Ω，当频率为300 Hz时，该放大器的无负载输出电压为146 V。

(a) 试确定实现最大功率传输的负载阻抗；

(b) 试计算在匹配条件下的负载功率。

11-97 某电力传输系统的模型如图11-99所示，如果$\mathbf{V}_s = 240\underline{/0^\circ}$ rms，试求负载吸收的平均功率。

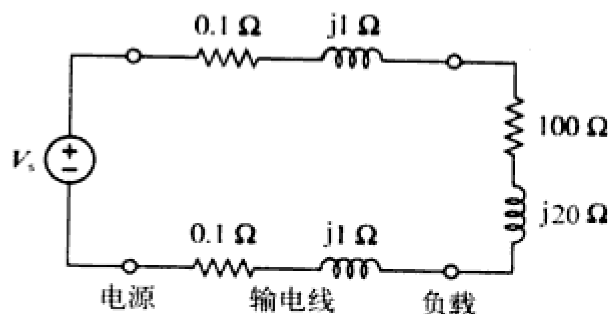


图 11-99 习题 11-97 的电路原理图

第12章 三 相 电 路

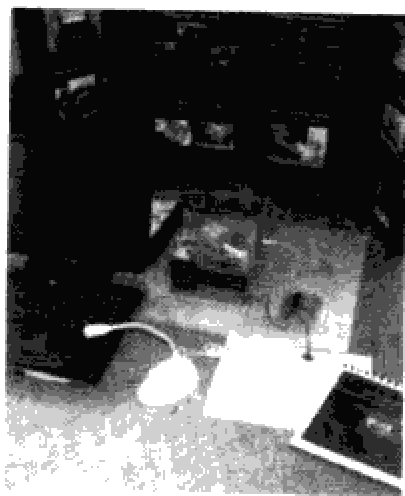
不能原谅别人的人，实际上也就毁坏了自己必须通过的桥。

——G. Herbert

提高技能，拓展职业生涯

ABET EC 2000 标准（3.e），“确认、表达并解决工程问题的能力”

发展并提高你“确认、表达并解决工程问题的能力”是本书的主要任务。按照本书提出的六步法，求解问题的过程就是实践这一技能的最佳方式，建议读者在任何可能的情况下，都采用这六个步骤解题，你可能会欣慰地发现，这一解题过程对于非工程课程效果也是非常好的。



查尔斯·亚历山大拍摄

ABET EC 2000 标准（f），“对于职业责任与伦理道德的理解”

“对于职业责任与伦理道德的理解”对每个工程师而言都是必须的。从某种程度上说，这种理解对于我们每一个人而言都非常重要。下面就通过一些事例帮助读者来理解。最佳实例之一是工程师有责任回答“尚未提出的问题”。打个比方，如果你拥有一辆传动系统有问题的小汽车，欲将其出售，在售车过程中，可能的买主会问你右前轮轴承是否有问题，你回答没问题。但是，作为一名工程师，即便买主没有询问，你也必须告知买主该车的传动系统有问题。

你的职业与道德责任表现为不损害周围人以及你所负责的人的利益。显然，发展这种能力需要一定的时间和成熟度。建议在你的日常活动中不断地探索职业道德以实践这一能力。

12.1 引言

至此，本书介绍的内容仅涉及单相电路。单相交流电力系统由通过一对电线（传输线）与负载相连接发电机的组成，图12-1a所示为一个单相两线系统，图中V_p为电源电压的幅度，ϕ为相位。实际应用中更常见的是如图12-1b所示的单相三线系统，该系统包括两个完全相同的电源（相同的振幅、相同的相位），通过两根外接线与一根中线与两个负载相连接。例如，常见的家用供电系统就是单相三线系统，因为其终端电压具有相同的振幅和相同的相位。这种系统允许接入120 V或240 V用电设备。

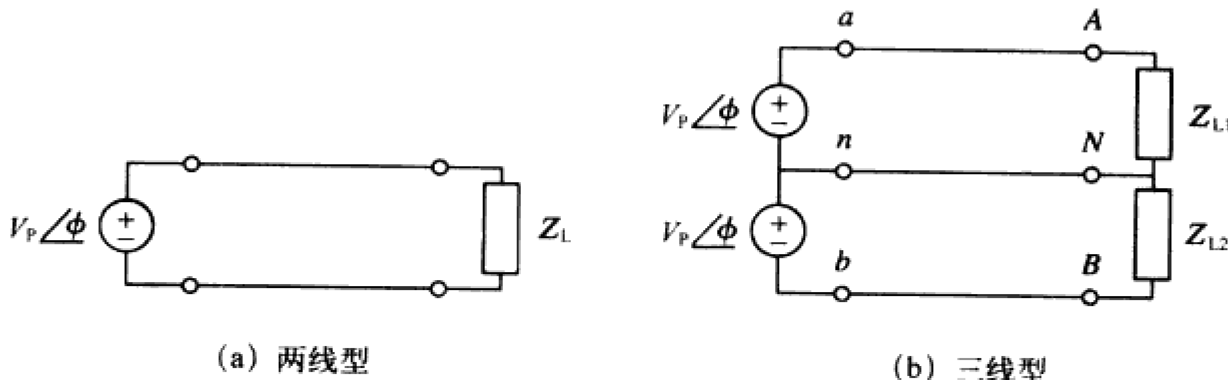


图 12-1 单相系统

历史附注：爱迪生利用三线取代四线，从而发明了三线系统。

交流电源以相同的频率、不同的相位工作的电路或系统称为*多相*（polyphase）系统，图12-2所示为一个两相三线系统，图12-3所示为一个三相四线系统。与单相系统不同，两相系统是由一个包括两个相互垂直的绕组线圈的发电机产生的，其产生的电压相位一个较另一个滞后90°。同理，三相系统是由一个包括三个幅度与频率相同但相位彼此相差120°的绕组线圈的发电机产生的。三相系统是迄今为止应用最普遍、最经济的多相系统，因此，本章主要讨论三相系统。

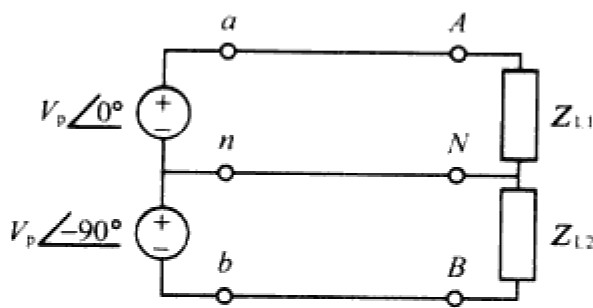


图 12-2 两相三线系统

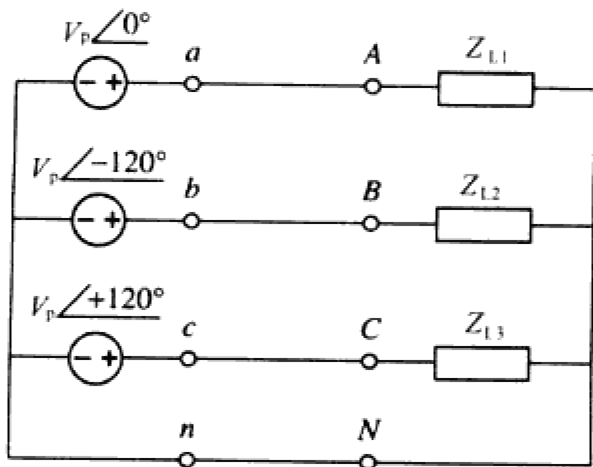
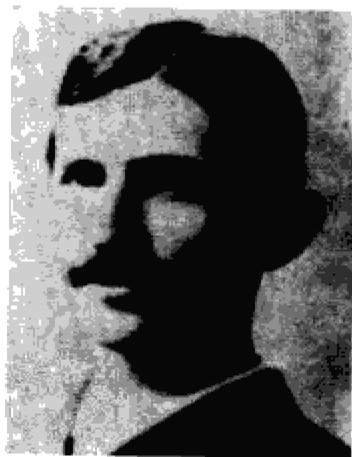


图 12-3 三相四线系统

三相系统之所以重要，至少有三个原因。首先，几乎所有的电厂产生并配送的都是三相电，其工作频率在美国是60 Hz（或$\omega = 377$ rad/s），而在世界其他一些地区是50 Hz（或$\omega = 314$ rad/s）。当需要单相或两相输入时，可以从三相系统中提取，而无需独立产生。即使需求超过三相时，例如，铝厂为了将铝熔化，需要48相电源，这时也可以通过对所提供的三相电源进行一定的处理而获得。其次，三相系统的瞬时功率是恒定的（而非波动的），详见12.7节的讨论。这样可以实现均匀的功率传输，并且减少三相机器的振动。第三，对于相同的功率而言，三相系统较单相系统更为经济，而且三相系统所需的传输线数量少于等效的单相系统所需的传输线数量。

历史人物



尼古拉·特斯拉（Nikola Tesla，1856—1943），克罗地亚裔美国工程师，在他的多项发明中，感应电动机与首个多相交流电源系统对交、直流电之争的尘埃落定产生极大的影响，有利地促进了交流电的普及与应用。同时，他还负责确定了美国地区的交流供电系统的标准工作频率为60Hz。

特斯拉出生于奥匈帝国（现在的克罗地亚）的一个牧师家庭。他拥有惊人的记忆力，对数学有极其浓厚的兴趣。1884年，特斯拉移居美国并首次为托马斯·爱迪生工作。当时美国正处于“电流之争”中，以乔治·威斯丁豪斯（George Westinghouse，1846—1914）为首的主张采用交流电，而以托马斯·爱迪生为首的坚持采用直流电。由于特斯拉对于交流电的浓厚兴趣，他离开了爱迪生，并加入了威斯丁豪斯的行列。通过与威斯丁豪斯的合作，特斯拉提出的多相交流发电、输电和配电系统赢得了极高的声誉并被业界所接受。他一生拥有700多项专利，他的其他发明包括高压设备（特斯拉线圈）以及无线传输系统等。磁通密度的单位——特斯拉，就是为了纪念他而以他的名字命名的。

本章首先讨论平衡（对称）三相电压，之后分析对称三相系统的四种可能结构，并讨论非平衡（非对称）三相系统。学习如何利用Windows系统下的PSpice软件包分析对称与非对称三相系统。最

后，讨论本章介绍的概念在三相功率测量以及民用供电系统中的实际应用问题。

12.2 对称三相电压

三相电压通常是由三相交流发电机产生的，交流发电机的横截面图如图12-4所示。发电机主要由转动磁铁（称为转子）及其周围环绕的静止绕组（称为定子）组成，端子为$a-a'$、$b-b'$和$c-c'$的三个分离的绕组或线圈在物理上围绕定子120°等间隔排列。例如，端子a、a'表示线圈的一端进入纸面，而另一端则从纸面出来。随着转子的转动，其磁场"切割"来自三个线圈的磁通而在线圈中产生感应电压。因为线圈彼此间隔120°，所以线圈中产生的感应电压其幅度相等，相位相差120°（如图12-5所示）。由于每个线圈本身可以看作是一个单相发电机，所以三相发电机既可以给单相负载供电，也可以给三相负载供电。

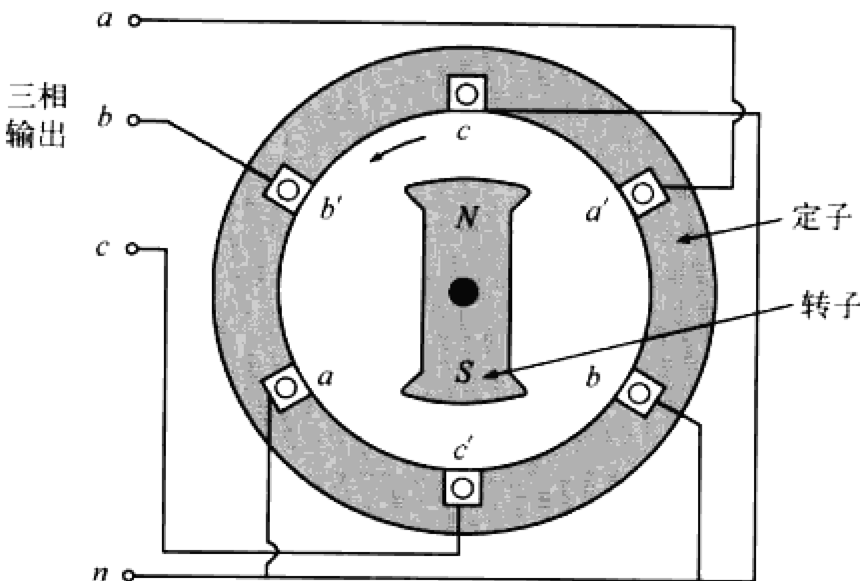


图 12-4 三相发电机

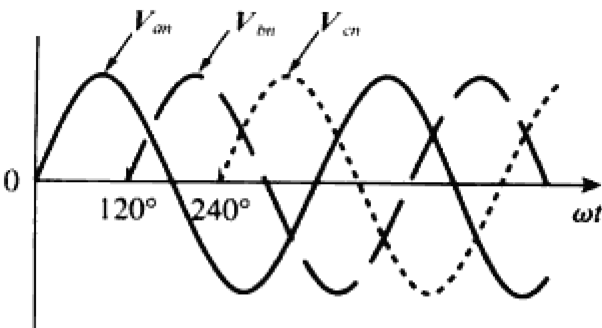
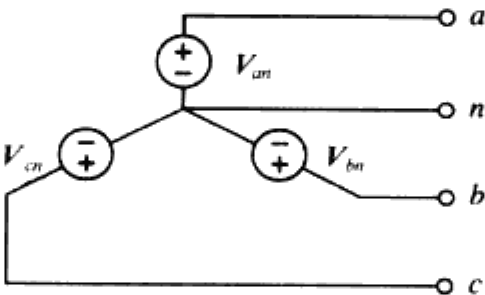
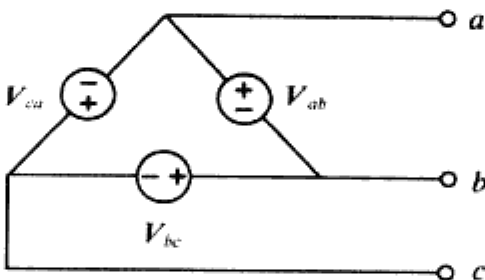


图 12-5 相位彼此相差 120°的发电机输出电压

典型的三相系统是由通过三条或四条线路（即传输线）与负载相连接的三个电压源组成的（三相电流源是极其少见的）。三相系统与三个单相电路是等效的。三相系统中的电压源既可以是Y型连接（星型连接），如图12-6a所示，也可以是Δ型连接（三角型连接），如图12-6b所示。



(a) Y 型连接



(b) Δ 型连接

图 12-6 三相电压源

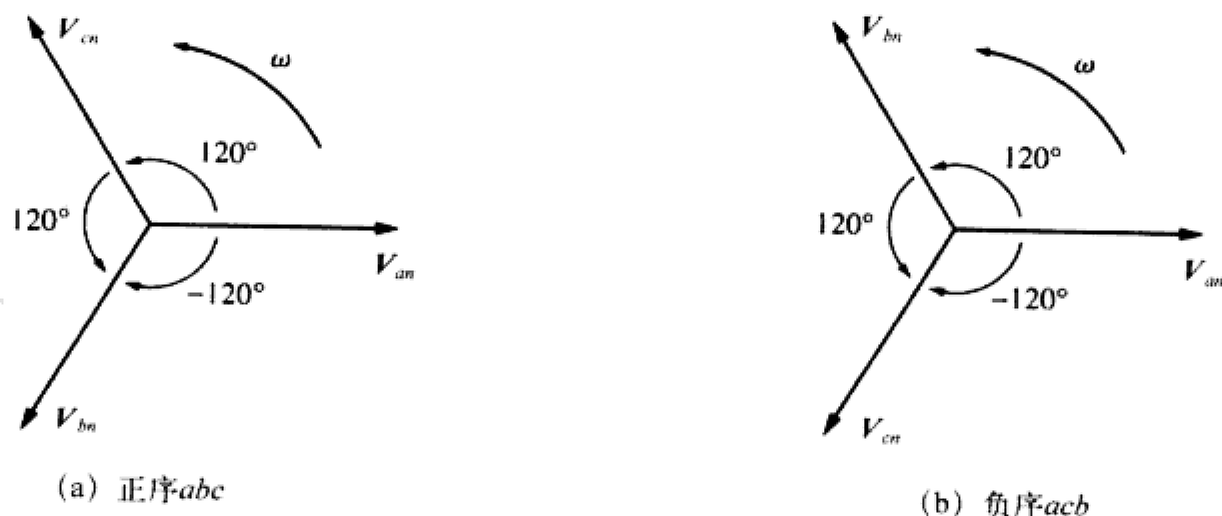
首先讨论如图12-6a所示的Y型连接电压源。电压$\boldsymbol{V}_{an}$、$\boldsymbol{V}_{bn}$与$\boldsymbol{V}_{cn}$分别表示线路a、b、c与中线n之间的电压，这些电压称为**相电压**（phase voltage）。如果这些电压源具有相同的幅度和频率ω，但相位彼此相差120°，则称这组电压为**平衡的或对称的**（balanced）。对称三相电意味着：

$$\boldsymbol{V}_{an}+\boldsymbol{V}_{bn}+\boldsymbol{V}_{cn}=0 \tag{12-1}$$

$$|\boldsymbol{V}_{an}|=|\boldsymbol{V}_{bn}|=|\boldsymbol{V}_{cn}| \tag{12-2}$$

因此，

对称相电压是幅度相等，但相位彼此相差120°的电压。



（a）正序abc　　（b）负序acb

图 12-7　相序

由于三相电压相位彼此相差120°，所以就会出现两种可能的组合方式。一种如图12-7a所示，其数学表达如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_{an}&=V_p\angle 0^\circ\\ \boldsymbol{V}_{bn}&=V_p\angle -120^\circ\\ \boldsymbol{V}_{cn}&=V_p\angle -240^\circ=V_p\angle +120^\circ\end{aligned} \tag{12-3}$$

其中，V_p为相电压的有效值，即rms值。这种组合称为abc**顺序**（abc sequence）或**正序**（positive sequence）。按照这种相序，$\boldsymbol{V}_{an}$超前于$\boldsymbol{V}_{bn}$，从而$\boldsymbol{V}_{bn}$超前于$\boldsymbol{V}_{cn}$。当图12-4中的转子沿逆时针方向转动时，就会得到这种相序。另一种可能如图12-7b所示，其数学表达式为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_{an}&=V_p\angle 0^\circ\\ \boldsymbol{V}_{cn}&=V_p\angle -120^\circ\\ \boldsymbol{V}_{bn}&=V_p\angle -240^\circ=V_p\angle +120^\circ\end{aligned} \tag{12-4}$$

按照电力系统的一般习惯，除非特别说明，本章出现的电压与电流均指有效值。

这种组合称为acb**顺序**（acb sequence）或**负序**（negative sequence）。对于这种相序而言，$\boldsymbol{V}_{an}$超前于$\boldsymbol{V}_{cn}$，从而$\boldsymbol{V}_{cn}$超前于$\boldsymbol{V}_{bn}$。当图12-4中转子沿顺时针方向转动时，就会产生acb顺序。容易证明，式(12-3)与式(12-4)中的电压满足式(12-1)与式(12-2)。例如，由式(12-3)可得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_{an}+\boldsymbol{V}_{bn}+\boldsymbol{V}_{cn}&=V_p\angle 0^\circ+V_p\angle -120^\circ+V_p\angle +120^\circ\\ &=V_p(1.0-0.5-\mathrm{j}\,0.866-0.5+\mathrm{j}\,0.866)\\ &=0\end{aligned} \tag{12-5}$$

相序是指电压经过各自最大值的时间次序。

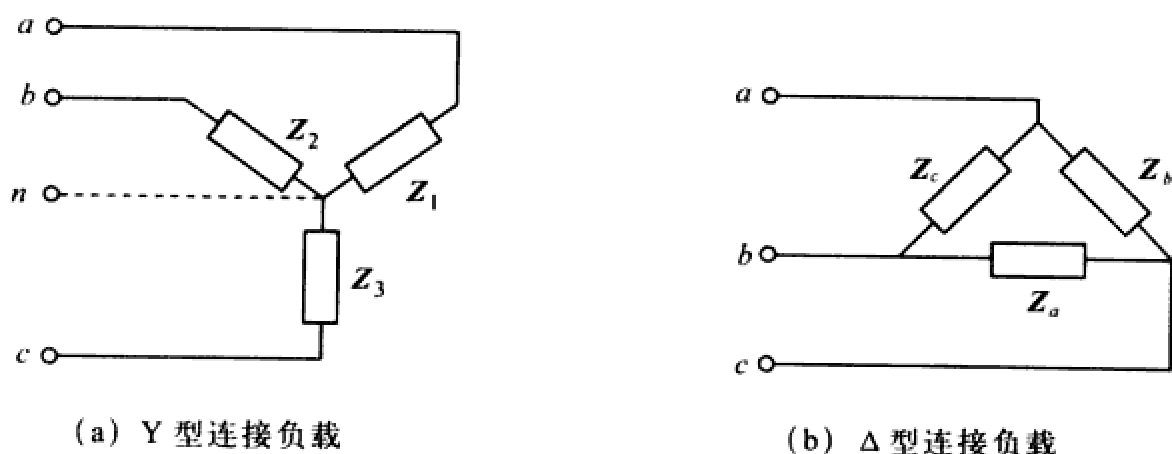
相序还可认为是相电压达到其峰值（即最大值）的时间先后次序。

相序由相量图中相量经过某一固定点的次序来决定。

提示：随着时间增加，各相量（即正弦矢量）以角速度ω转动。

在图12-7a中，当相量以频率ω沿逆时针方向转动时，它们以次序*abcabca*……经过水平轴，因此，相序为*abc*或*bca*或*cab*。同理，图12-7b中的相量沿逆时针方向转动时，它们经过水平轴的次序为*acbacba*……，此即*acb*顺序。相序在三相电配电系统中是非常重要的，例如，相序决定了与电源相连接的电动机的转动方向。

与发电机的连接方式类似，根据终端应用的不同，三相负载的连接也可以分为Y型连接与Δ型连接。Y型连接负载如图12-8a所示，Δ型连接负载如图12-8b所示。图12-8a中的中线可以有，也可以没有，取决于该系统为四线系统还是三线系统（当然，中线连接对于Δ型连接在拓扑结构上是不可能的）。如果各相负载阻抗的大小和相位不相等，则相应的Y型连接或Δ型连接负载称为非平衡的或非对称的（unbalanced）。



（a）Y型连接负载　（b）Δ型连接负载

图 12-8　三相负载连接的两种可能结构

对称负载是指各相阻抗在大小和相位上都相等的负载。

对于对称Y型连接负载而言：

$$\boldsymbol{Z}_1=\boldsymbol{Z}_2=\boldsymbol{Z}_3=\boldsymbol{Z}_Y \tag{12-6}$$

其中，$\boldsymbol{Z}_Y$为每一相的负载阻抗。对于Δ型连接负载而言：

$$\boldsymbol{Z}_a=\boldsymbol{Z}_b=\boldsymbol{Z}_c=\boldsymbol{Z}_\Delta \tag{12-7}$$

其中，$\boldsymbol{Z}_\Delta$为每一相的负载阻抗。由式(9-69)可知：

$$\boldsymbol{Z}_\Delta=3\boldsymbol{Z}_Y \quad 或 \quad \boldsymbol{Z}_Y=\frac{1}{3}\boldsymbol{Z}_\Delta \tag{12-8}$$

因此，利用式(12-8)即可实现Y型连接负载与Δ型连接负载之间的相互转换。

提示：Y型连接负载由与中线节点相连接的三个阻抗组成，而Δ型连接负载由连接成回路的三个阻抗组成。在两种连接情况下，三个阻抗相等时称负载是平衡的或对称的。

由于三相电源与三相负载都可以采用Y型连接或Δ型连接，所以就会出现四种可能的连接情况：

- Y–Y连接（即Y型连接的电源Y与Y型连接的负载）
- Y–Δ连接
- Δ–Δ连接
- Δ–Y连接

以下几节将逐个讨论这些可能的连接结构。

这里应该指出的是，负载的对称Δ型连接要比对称Y型连接更为常用。这是因为在负载的Δ型连接中可以很方便地每一相中增加或去掉负载。而对于负载的Y型连接而言，由于中线可以不接，所以每一相负载的增减就非常困难。另外，电源的Δ型连接实际上不是常用的，因为如果三相电压稍不平

衡，就会出现环路电流而构成Δ网孔。

例题12-1　试确定以下电压组的相序：

$$v_{an}=200\cos(\omega t+10^\circ),\ v_{bn}=200\cos(\omega t-230^\circ),\ v_{cn}=200\cos(\omega t-110^\circ)$$

解

将已知电压用相量形式表示为：

$$\mathbf{V}_{an}=200\underline{/10^\circ}\text{ V},\ \mathbf{V}_{bn}=200\underline{/-230^\circ}\text{ V},\ \mathbf{V}_{cn}=200\underline{/-110^\circ}\text{ V}$$

由此可见，$\mathbf{V}_{an}$超前$\mathbf{V}_{cn}$120°，$\mathbf{V}_{cn}$又超前$\mathbf{V}_{bn}$120°，因此，相序为acb相序。

练习题12-1　已知$\mathbf{V}_{bn}=110\underline{/30^\circ}$，试求$\mathbf{V}_{an}$与$\mathbf{V}_{cn}$，假定为正序（$abc$）。

答　$110\underline{/150^\circ}$ V，$110\underline{/-90^\circ}$ V。

12.3　对称 Y–Y 连接

由于任何对称的三相系统都可以化简为等效的Y–Y连接系统，因此本节首先分析Y–Y系统。因此，对该系统的分析应该说是解决所有对称三相系统的关键所在。

对称Y–Y系统是一个由于对称Y型连接电源与对称Y型连接负载构成的三相系统。

考虑如图12-9所示为对称四线Y–Y系统，图中Y型连接负载与Y型连接电源相连接。假定负载是对称的，即各负载阻抗是相等的。虽然阻抗$\mathbf{Z}_Y$表示各相的总的负载阻抗，但它可看作是各相的源阻抗$\mathbf{Z}_s$、线阻抗$\mathbf{Z}_l$与负载阻抗$\mathbf{Z}_L$之和，因为这三个阻抗是相互串联的。如图12-9所示，$\mathbf{Z}_s$表示发电机各相绕组的内阻抗，$\mathbf{Z}_l$表示连接电源相与负载相之间的线阻抗，$\mathbf{Z}_L$表示各相的负载阻抗，$\mathbf{Z}_n$为中线阻抗。因此，一般有：

$$\mathbf{Z}_Y=\mathbf{Z}_s+\mathbf{Z}_l+\mathbf{Z}_L \tag{12-9}$$

与$\mathbf{Z}_L$相比，$\mathbf{Z}_s$与$\mathbf{Z}_l$通常是非常小的，如果没有给出电源阻抗或线阻抗，可以假定$\mathbf{Z}_Y=\mathbf{Z}_L$。无论怎样，总可以将阻抗合并在一起，如图12-9所示的Y-Y系统即可简化为如图12-10所示的系统。

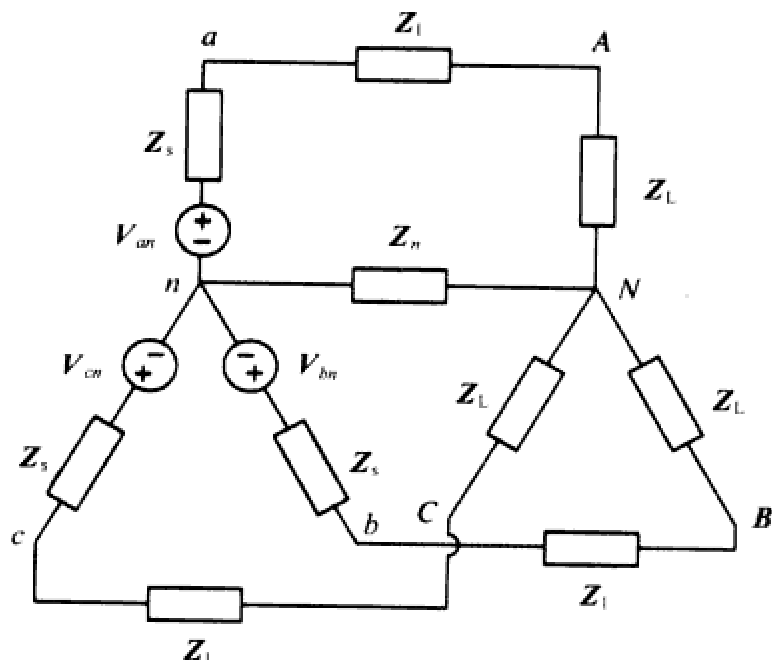


图 12-9　包括电源阻抗、输电线阻抗和负载阻抗在内的对称 Y–Y 系统

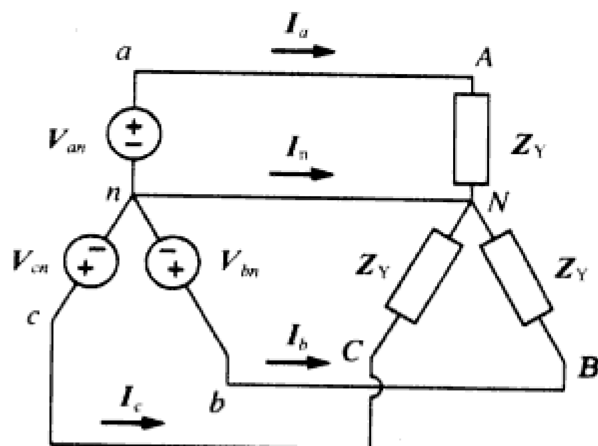


图 12-10　对称 Y–Y 连接

对于正序而言，相电压（即输电线与中线之间的电压）为：

$$\mathbf{V}_{an}=V_p\underline{/0^\circ}$$
$$\mathbf{V}_{bn}=V_p\underline{/-120^\circ},\quad \mathbf{V}_{cn}=V_p\underline{/+120^\circ} \tag{12-10}$$

而输电线与输电线之间的电压，简称线电压（line voltage），线电压$\mathbf{V}_{ab}$、$\mathbf{V}_{bc}$、$\mathbf{V}_{ca}$是与相电压有

关的。例如，

$$\boldsymbol{V}_{ab}=\boldsymbol{V}_{an}+\boldsymbol{V}_{nb}=\boldsymbol{V}_{an}-\boldsymbol{V}_{bn}=V_p\underline{/0^\circ}-V_p\underline{/-120^\circ}$$
$$=V_p\left(1+\frac{1}{2}+\mathrm{j}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}V_p\underline{/30^\circ} \tag{12-11a}$$

同理，可以得到：

$$\boldsymbol{V}_{bc}=\boldsymbol{V}_{bn}-\boldsymbol{V}_{cn}=\sqrt{3}V_p\underline{/-90^\circ} \tag{12-11b}$$

$$\boldsymbol{V}_{ca}=\boldsymbol{V}_{cn}-\boldsymbol{V}_{an}=\sqrt{3}V_p\underline{/-210^\circ} \tag{12-11c}$$

因此，线电压V_L的幅度是相电压V_p的$\sqrt{3}$倍，即：

$$\boxed{V_L=\sqrt{3}V_p} \tag{12-12}$$

其中，

$$V_p=|\boldsymbol{V}_{an}|=|\boldsymbol{V}_{bn}|=|\boldsymbol{V}_{cn}| \tag{12-13}$$

且

$$V_L=|\boldsymbol{V}_{ab}|=|\boldsymbol{V}_{bc}|=|\boldsymbol{V}_{ca}| \tag{12-14}$$

而且，线电压超前相应的相电压30°，图12-11a也可以说明这种情况，图中还指出如何由相电压来确定线电压$\boldsymbol{V}_{ab}$。而图12-11b所示为三个线电压的相量图，由该图可见，$\boldsymbol{V}_{ab}$超前$\boldsymbol{V}_{bc}$ 120°，$\boldsymbol{V}_{bc}$超前$\boldsymbol{V}_{ca}$ 120°，所以与相电压一样，线电压之和也为零。

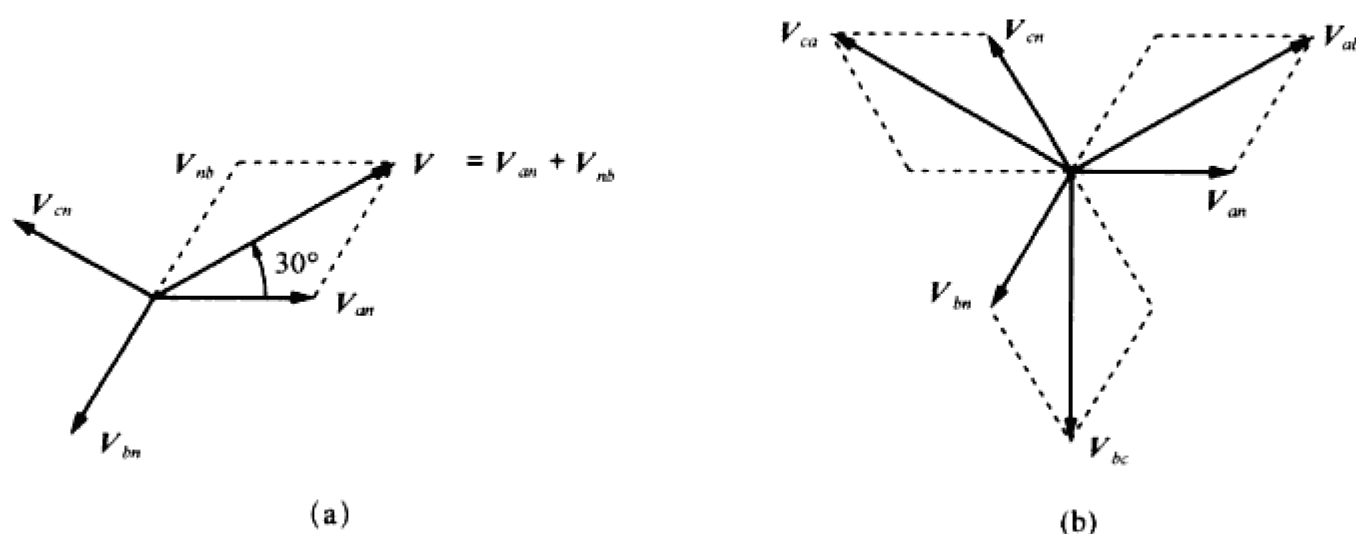


图 12-11 说明线电压与相电压之间关系的相量图

对图12-10中的各相应用KVL，得到线电流为：

$$\boldsymbol{I}_a=\frac{\boldsymbol{V}_{an}}{\boldsymbol{Z}_Y},\ \boldsymbol{I}_b=\frac{\boldsymbol{V}_{bn}}{\boldsymbol{Z}_Y}=\frac{\boldsymbol{V}_{an}\underline{/-120^\circ}}{\boldsymbol{Z}_Y}=\boldsymbol{I}_a\underline{/-120^\circ}$$
$$\boldsymbol{I}_c=\frac{\boldsymbol{V}_{cn}}{\boldsymbol{Z}_Y}=\frac{\boldsymbol{V}_{an}\underline{/-240^\circ}}{\boldsymbol{Z}_Y}=\boldsymbol{I}_a\underline{/-240^\circ} \tag{12-15}$$

可以推断出，线电流之和为零，即：

$$\boldsymbol{I}_a+\boldsymbol{I}_b+\boldsymbol{I}_c=0 \tag{12-16}$$

于是，

$$\boldsymbol{I}_n=-(\boldsymbol{I}_a+\boldsymbol{I}_b+\boldsymbol{I}_c)=0 \tag{12-17a}$$

或者

$$\boldsymbol{V}_{nN}=\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{I}_n=0 \tag{12-17b}$$

也就是说，中线两端的电压为零。因此，去掉中线并不会对系统产生任何影响。实际上，在长距离电力传输中，多个三线系统的导体就是利用大地本身作为系统的中线导体。以这种方式设计的电力系统在所有关键点都要良好接地，以保证安全。

线电流（line current）是各条线路中的电流，而相电流（phase current）则是电源或负载的各相电流。但是在Y－Y系统中，线电流与相电流是相等的，习惯上总是假定线电流是由电源流向负载的，所以仅用一个下标字母表示线电流。

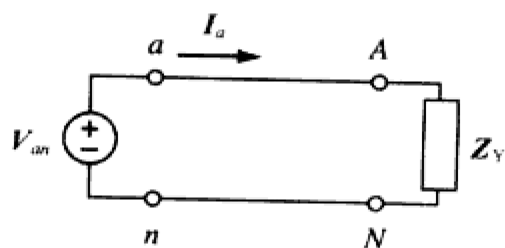


图 12-12　单相等效电路

分析对称Y－Y系统的另一种方法是按每一相来计算。首先看其中一相，例如a相，其等效电路如图12-12所示。通过单相分析，得到线电流I_a为：

$$\boxed{I_a=\frac{V_{an}}{Z_Y}} \tag{12-18}$$

由I_a以及相序关系，可以确定其他线电流。因此，只要系统是对称的，仅分析其中一相即可，即使在没有中线的情况下，也可以采用与三线系统相同的分析方法。

例题12-2　试计算如图12-13所示三线Y－Y系统的线电流。

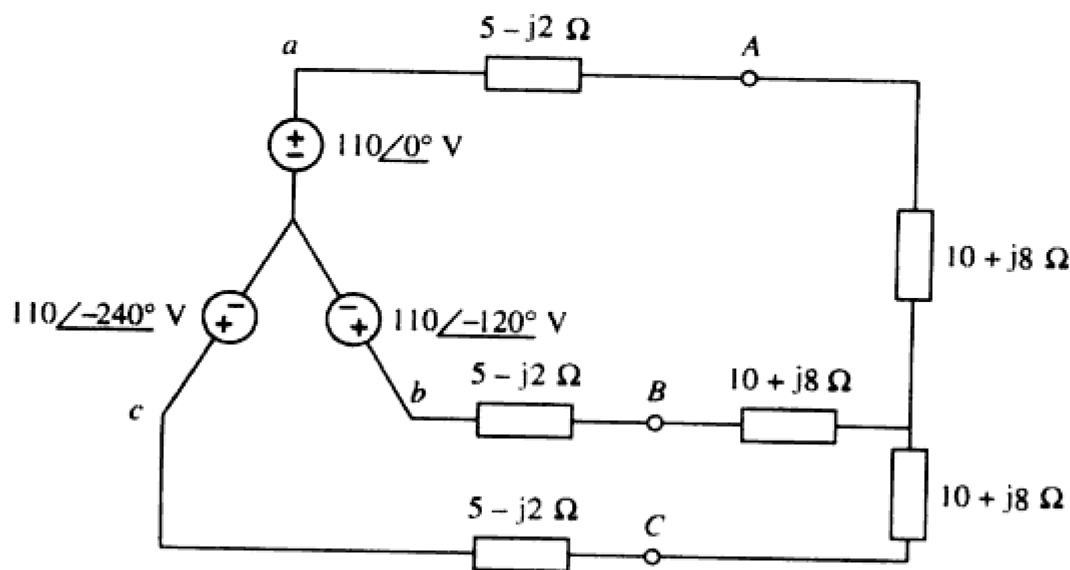


图 12-13　例题 12-2 的三线 Y－Y 系统

解　如图12-13所示的三相电路是对称的，可以用如图12-12所示的单相等效电路来取代。由单相电路分析可以确定I_a为：

$$I_a=\frac{V_{an}}{Z_Y}$$

其中，$Z_Y=(5-j2)+(10+j8)=15+j6=16.155\underline{/21.8^\circ}$。因此，

$$I_a=\frac{110\underline{/0^\circ}}{16.155\underline{/21.8^\circ}}=6.81\underline{/-21.8^\circ}\text{ A}$$

由于图12-13的源电压是正序的，所以线电流也是正序的，于是：

$$I_b=I_a\underline{/-120^\circ}=6.81\underline{/-141.8^\circ}\text{A}$$

$$I_c=I_a\underline{/-240^\circ}=6.81\underline{/-261.8^\circ}\text{A}=6.81\underline{/98.2^\circ}\text{ A}$$

练习题12-2　各相阻抗为0.4＋j0.3 Ω的Y型连接对称三相发电机与各相负载阻抗为24＋j19 Ω的Y型连接对称负载相连。连接发电机与负载的线路阻抗为每相0.6＋j0.7 Ω，假定电源电压为正序，并且$V_{an}=120\underline{/30^\circ}$ V，试求：（a）线电压；（b）线电流。

答　（a）$207.85\underline{/60^\circ}$ V，$207.85\underline{/-60^\circ}$ V，$207.85\underline{/-180^\circ}$ V，

(b) $3.75\underline{/-8.66°}$ A，$3.75\underline{/-128.66°}$ A，$3.75\underline{/-111.34°}$ A。

12.4 对称 Y−Δ 连接

对称Y−Δ系统是指由对称Y型连接电源与对称Δ型连接负载构成的系统。

对称Y−Δ系统如图12-14所示，图中电源为Y型连接，而负载为Δ型连接。当然，这样的系统中没有从电源到负载的中线。假定电源为正序，则各相电压为：

$$\mathbf{V}_{an} = V_p\underline{/0°}$$
$$\mathbf{V}_{bn} = V_p\underline{/-120°}, \quad \mathbf{V}_{cn} = V_p\underline{/+120°} \tag{12-19}$$

这种系统是实际中使用最多的三相系统，因为三相电源通常是Y型连接的，而三相负载通常是Δ型连接的。

由12.3节可知，线电压为：

$$\mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3}V_p\underline{/30°} = \mathbf{V}_{AB}, \quad \mathbf{V}_{bc} = \sqrt{3}V_p\underline{/-90°} = \mathbf{V}_{BC}$$
$$\mathbf{V}_{ca} = \sqrt{3}V_p\underline{/-150°} = \mathbf{V}_{CA} \tag{12-20}$$

由此可见，在该系统结构中，线电压等于负载阻抗两端的电压，由这些电压可以确定各相电流为：

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_\Delta}, \quad \mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_\Delta}, \quad \mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_\Delta} \tag{12-21}$$

上述负载电流具有相同的幅度，但相位相差120°。

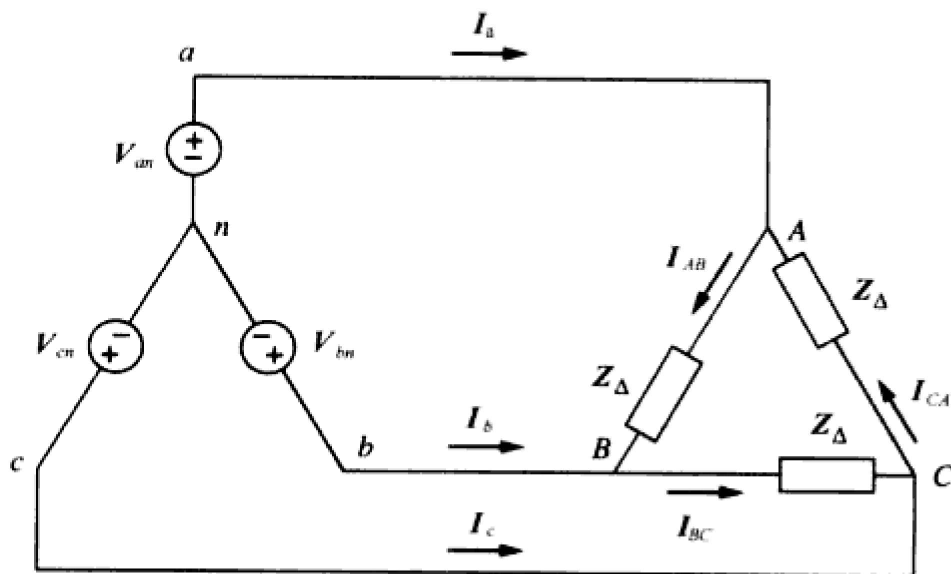


图 12-14 对称 Y−Δ 连接

求解相电流的另一种方法是应用KVL。例如，对回路$aABbna$应用KVL，可以得到：

$$-\mathbf{V}_{an} + \mathbf{Z}_\Delta\mathbf{I}_{AB} + \mathbf{V}_{bn} = 0$$

即：

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{bn}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_\Delta} \tag{12-22}$$

与式(12-21)一样。这是求解相电流的更一般的方法。

在节点A、B、C处应用KCL，即可由相电流求得线电流，于是：

$$\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA}, \quad \mathbf{I}_b = \mathbf{I}_{BC} - \mathbf{I}_{AB}, \quad \mathbf{I}_c = \mathbf{I}_{CA} - \mathbf{I}_{BC} \tag{12-23}$$

因为$\mathbf{I}_{CA} = \mathbf{I}_{AB}\underline{/-204°}$，所以：

$$\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA} = \mathbf{I}_{AB}(1 - 1\underline{/-240°})$$
$$= \mathbf{I}_{AB}(1 + 0.5 - \mathrm{j}\,0.866) = \mathbf{I}_{AB}\sqrt{3}\underline{/-30°} \tag{12-24}$$

表明线电流I_L的大小是相电流I_P的$\sqrt{3}$倍，即：

$$\boxed{\boldsymbol{I}_L = \sqrt{3}\boldsymbol{I}_p} \tag{12-25}$$

其中，

$$\boldsymbol{I}_L = |\boldsymbol{I}_a| = |\boldsymbol{I}_b| = |\boldsymbol{I}_c| \tag{12-26}$$

且

$$\boldsymbol{I}_p = |\boldsymbol{I}_{AB}| = |\boldsymbol{I}_{BC}| = |\boldsymbol{I}_{CA}| \tag{12-27}$$

而且，在正序假定下，线电流较其相应的相电流滞后30°。图12-15为说明相电流与线电流之间关系的相量图。

分析Y−Δ电路的另一种方法是将Δ型连接的负载转换为等效的Y型连接负载。由式（12-8）给出的Δ−Y转换公式可得：

$$\boxed{\boldsymbol{Z}_Y = \frac{\boldsymbol{Z}_\Delta}{3}} \tag{12-28}$$

转换后即可得到如图12-10所示的Y−Y系统。图12-14所示的Y−Δ系统可以用图12-16所示的单相等效电路来取代。这样就可以仅计算线电流，之后再利用式(12-25)以及各相电流超前于其对应的线电流30°的事实确定相电流。

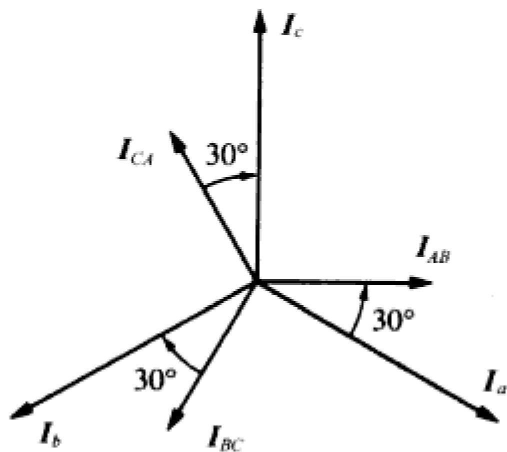


图 12-15 说明相电流与线电流之间关系的相量图

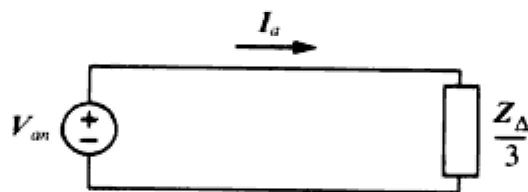


图 12-16 对称 Y−Δ 电路的单相等效电路

例题12-3 某对称abc相序Y型连接电源，其$\boldsymbol{V}_{an} = 100\angle 100°$ V，与一个各相阻抗为（8 + j4）Ω的对称Δ型连接负载相连，试计算相电流与线电流。

解 本例可以用两种方法求解：

方法1：负载阻抗为：

$$\boldsymbol{Z}_\Delta = 8 + j4 = 8.944\angle 26.57°\ \Omega$$

如果相电压$\boldsymbol{V}_{an} = 100\angle 10°$，则线电压为：

$$\boldsymbol{V}_{ab} = \boldsymbol{V}_{an}\sqrt{3}\angle 30° = 100\sqrt{3}\angle 10° + 30° = \boldsymbol{V}_{AB}$$

即

$$\boldsymbol{V}_{AB} = 173.2\angle 40°\ \text{V}$$

相电流为：

$$\boldsymbol{I}_{AB} = \frac{\boldsymbol{V}_{AB}}{\boldsymbol{Z}_\Delta} = \frac{173.2\angle 40°}{8.944\angle 26.57°} = 19.36\angle 13.43°\ \text{A}$$

$$\boldsymbol{I}_{BC} = \boldsymbol{I}_{AB}\angle -120° = 19.36\angle -106.57°\ \text{A}$$

$$\boldsymbol{I}_{CA} = \boldsymbol{I}_{AB}\angle +120° = 19.36\angle 133.43°\ \text{A}$$

线电流为：

$$\boldsymbol{I}_a = \boldsymbol{I}_{AB}\sqrt{3}\underline{/-30^\circ} = \sqrt{3}(19.36)\underline{/13.43^\circ-30^\circ}$$
$$= 33.53\underline{/-16.57^\circ}\ \text{A}$$
$$\boldsymbol{I}_b = \boldsymbol{I}_a\underline{/-120^\circ} = 33.53\underline{/-136.57^\circ}\ \text{A}$$
$$\boldsymbol{I}_c = \boldsymbol{I}_a\underline{/+120^\circ} = 33.53\underline{/103.43^\circ}\ \text{A}$$

方法2：由单相电路分析，可得：

$$\boldsymbol{I}_a = \frac{\boldsymbol{V}_{an}}{\boldsymbol{Z}_\Delta/3} = \frac{100\underline{/10^\circ}}{2.981\underline{/26.57^\circ}} = 33.54\underline{/-16.57^\circ}\ \text{A}$$

与方法1所得结果相同。其他线电流可以利用abc相序确定。

练习题12-3 对称Y型连接电源的一个线电压为$\boldsymbol{V}_{AB}=180\underline{/-20^\circ}$ V，如果该电源与$20\underline{/40^\circ}$ Ω的Δ型负载相连，试在abc相序情况下，求相电流与线电流。

答 $9\underline{/-60^\circ}$，$9\underline{/-180^\circ}$，$9\underline{/60^\circ}$，$15.59\underline{/-90^\circ}$，$15.59\underline{/-150^\circ}$，$15.59\underline{/30^\circ}$ A。

12.5 对称 Δ–Δ 连接

一个对称Δ–Δ系统是指电源与负载均为对称Δ型连接的系统。

电源与负载均为Δ连接的系统如图12-17所示，我们的目标是确定相电流与线电流。假定采用正序，则Δ型连接电源的相电压为：

$$\boldsymbol{V}_{ab} = V_p\underline{/0^\circ}$$
$$\boldsymbol{V}_{bc} = V_p\underline{/-120^\circ}, \quad \boldsymbol{V}_{ca} = V_p\underline{/+120^\circ} \tag{12-29}$$

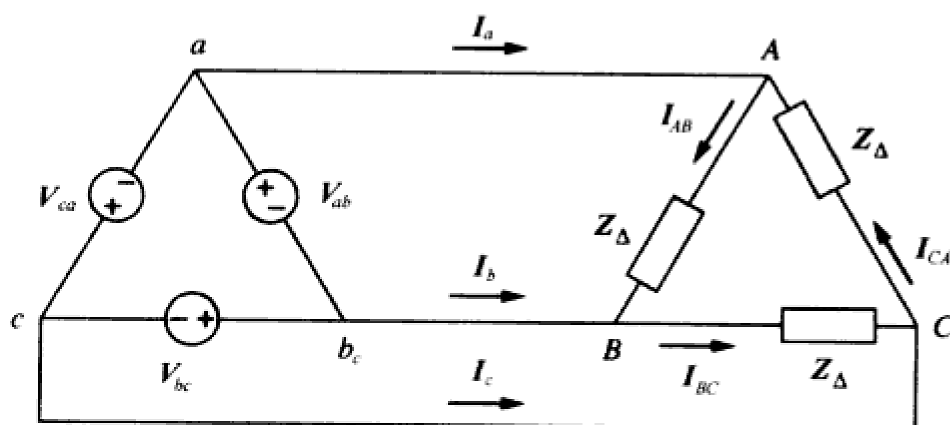


图 12-17 对称Δ－Δ连接

线电压与相电压相同。对如图12-17所示系统，假定无输电线阻抗，则Δ型连接电源的相电压等于负载阻抗两端的电压，即：

$$\boldsymbol{V}_{ab} = \boldsymbol{V}_{AB}, \quad \boldsymbol{V}_{bc} = \boldsymbol{V}_{BC}, \quad \boldsymbol{V}_{ca} = \boldsymbol{V}_{CA} \tag{12-30}$$

因此，相电流为：

$$\boldsymbol{I}_{AB} = \frac{\boldsymbol{V}_{AB}}{\boldsymbol{Z}_\Delta} = \frac{\boldsymbol{V}_{ab}}{\boldsymbol{Z}_\Delta}, \quad \boldsymbol{I}_{BC} = \frac{\boldsymbol{V}_{BC}}{\boldsymbol{Z}_\Delta} = \frac{\boldsymbol{V}_{bc}}{\boldsymbol{Z}_\Delta}$$
$$\boldsymbol{I}_{CA} = \frac{\boldsymbol{V}_{CA}}{\boldsymbol{Z}_\Delta} = \frac{\boldsymbol{V}_{ca}}{\boldsymbol{Z}_\Delta} \tag{12-31}$$

与前一节相同，负载为Δ型连接，所以前一节推导的部分公式在这里仍然适用。在节点A、B、C处应用KCL，即可由相电流确定线电流，即：

$$\boldsymbol{I}_a=\boldsymbol{I}_{AB}-\boldsymbol{I}_{CA},\ \boldsymbol{I}_b=\boldsymbol{I}_{BC}-\boldsymbol{I}_{AB},\ \boldsymbol{I}_c=\boldsymbol{I}_{CA}-\boldsymbol{I}_{BC} \tag{12-32}$$

而且，正如前一节所述，各线电流较其相应的相电流滞后30°，线电流I_L的大小为相电流I_P的$\sqrt{3}$倍：

$$I_L = \sqrt{3}I_p \tag{12-33}$$

分析Δ－Δ电路的另一种方法是将电源与负载转换为等效的Y型连接。我们已经知道，$\boldsymbol{Z}_{Y}=\boldsymbol{Z}_{\Delta}/3$，将Δ型连接的电源转换为Y型连接电源的方法，参见下一节的内容。

例题12-4 阻抗为（20－j15）Ω对称Δ型连接负载接到一个$\boldsymbol{V}_{ab}=330\underline{/0^\circ}$ V对称Δ型连接正序发电机。试计算负载的相电流与线电流。

解 每相的负载阻抗为：

$$\boldsymbol{Z}_{\Delta}=20-\text{j}15=25\underline{/-36.87^\circ}\ \Omega$$

由于$\boldsymbol{V}_{AB}=\boldsymbol{V}_{ab}$，所以相电流为：

$$\boldsymbol{I}_{AB}=\frac{\boldsymbol{V}_{AB}}{\boldsymbol{Z}_{\Delta}}=\frac{330\underline{/0^\circ}}{25\underline{/-36.87^\circ}}=13.2\underline{/36.87^\circ}\ \text{A}$$

$$\boldsymbol{I}_{BC}=\boldsymbol{I}_{AB}\underline{/-120^\circ}=13.2\underline{/-83.13^\circ}\ \text{A}$$

$$\boldsymbol{I}_{CA}=\boldsymbol{I}_{AB}\underline{/+120^\circ}=13.2\underline{/156.87^\circ}\ \text{A}$$

对于Δ型负载而言，其线电流总是滞后于其相应的相电流30°，并且其幅度为相电流的$\sqrt{3}$倍。所以，线电流为：

$$\boldsymbol{I}_{a}=\boldsymbol{I}_{AB}\sqrt{3}\underline{/-30^\circ}=(13.2\underline{/36.87^\circ})(\sqrt{3}\underline{/-30^\circ})$$
$$=22.86\underline{/6.87^\circ}\ \text{A}$$

$$\boldsymbol{I}_{b}=\boldsymbol{I}_{a}\underline{/-120^\circ}=22.86\underline{/-113.13^\circ}\ \text{A}$$

$$\boldsymbol{I}_{c}=\boldsymbol{I}_{a}\underline{/+120^\circ}=22.86\underline{/126.87^\circ}\ \text{A}$$

练习题12-4 某正序、对称Δ型连接的电源为一对称Δ型连接的负载供电，如果负载的各相阻抗为18＋j12 Ω，且$\boldsymbol{I}_{a}=22.5\underline{/35^\circ}$ A，试求$\boldsymbol{I}_{AB}$与$\boldsymbol{V}_{AB}$。

答 $13\underline{/65^\circ}$ A，$281.2\underline{/98.69^\circ}$ V。

12.6 对称Δ－Y连接

对称Δ－Y系统是指由对称Δ型连接的电源与对称Y型连接的负载组成的系统。

考虑如图12-18所示的Δ－Y电路。假定采用abc相序，则Δ型连接电源的相电压为：

$$\boldsymbol{V}_{ab}=V_{\text{p}}\underline{/0^\circ},\quad \boldsymbol{V}_{bc}=V_{\text{p}}\underline{/-120^\circ}$$
$$\boldsymbol{V}_{ca}=V_{\text{p}}\underline{/+120^\circ} \tag{12-34}$$

上述电压既是相电压，也是线电压。

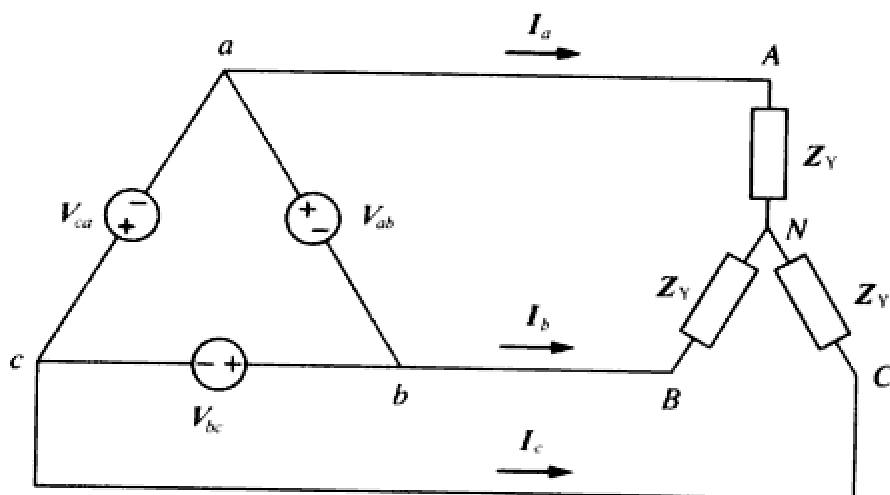


图 12-18 对称Δ－Y 连接

计算线电流的方法很多。其中一种方法是对如图12-18所示的回路$aANBba$应用KVL，得到：

$$-\boldsymbol{V}_{ab}+\boldsymbol{Z}_{Y}\boldsymbol{I}_{a}-\boldsymbol{Z}_{Y}\boldsymbol{I}_{b}=0$$

即

$$Z_Y(I_a - I_b) = V_{ab} = V_p\angle 0^\circ$$

于是，

$$I_a - I_b = \frac{V_p\angle 0^\circ}{Z_Y} \tag{12-35}$$

但是，按照abc相序，I_b较I_a滞后120°，即$I_b = I_a\angle -120^\circ$，因此：

$$\begin{aligned} I_a - I_b &= I_a(1 - 1\angle -120^\circ) \\ &= I_a\left(1 + \frac{1}{2} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = I_a\sqrt{3}\angle 30^\circ \end{aligned} \tag{12-36}$$

将式(12-36)代入式(12-35)，得到：

$$I_a = \frac{V_p/\sqrt{3}\angle -30^\circ}{Z_Y} \tag{12-37}$$

考虑到正序关系，即可确定其他线电流I_b与I_c，即$I_b = I_a\angle -120^\circ$，$I_c = I_a\angle +120^\circ$。负载的相电流等于线电流。

确定线电流的另一种方法是将Δ型连接的电源利用其等效的Y型连接电源来取代，如图12-19所示。由12.3节已知，Y型连接电源的线电压较其相应的相电压超前30°。因此，将Δ型连接电源相应的线电压除以$\sqrt{3}$，并相移−30°，就可以得到等效Y型连接的各相电压，于是，等效Y型连接电源的相电压为：

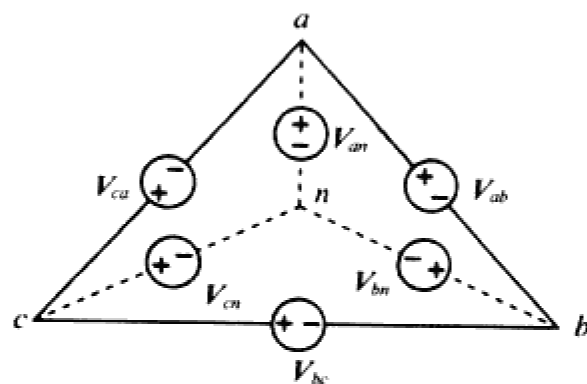


图 12-19 电源的Δ连接转换为等效Y连接

$$\begin{aligned} V_{an} &= \frac{V_p}{\sqrt{3}}\angle -30^\circ \\ V_{bn} &= \frac{V_p}{\sqrt{3}}\angle -150^\circ, \quad V_{cn} = \frac{V_p}{\sqrt{3}}\angle +90^\circ \end{aligned} \tag{12-38}$$

如果Δ型连接电源的各相源阻抗为Z_s，则由式(9-69)可知，等效的Y型连接电源的各相源阻抗为$Z_s/3$。

一旦将电源转换为Y型连接，电路就成为一个Y–Y系统。因此，可以利用如图12-20所示的单相等效电路进行分析，由此可得a相的线电流为：

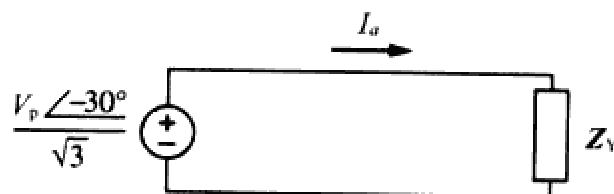


图 12-20 单相等效电路

$$I_a = \frac{V_p/\sqrt{3}\angle -30^\circ}{Z_Y} \tag{12-39}$$

与式(12-37)是相同的。

另外，还可以将Y型连接负载转换为等效的Δ型连接负载，所得到的系统为Δ–Δ系统，其分析方法参见12.5节。可以注意到：

$$\begin{aligned} V_{AN} &= I_a Z_Y = \frac{V_p}{\sqrt{3}}\angle -30^\circ \\ V_{BN} &= V_{AN}\angle -120^\circ, \quad V_{CN} = V_{AN}\angle +120^\circ \end{aligned} \tag{12-40}$$

如前所述，Δ型连接负载要比Y型连接负载更符合实际需求，由于各负载通过传输线之间相连，所以

改变Δ型连接负载的任何一相负载是非常方便的。然而，Δ型连接电源是很难实用的，因为相电压任意小的不平衡，都会导致不希望出现的环路电流。

表12-1总结了四种连接的相电流、相电压以及线电流、线电压的计算公式。建议不必记忆这些公式，而要理解公式的推导过程。对相应的三相电路直接应用KCL与KVL即可推导出表中所列的公式。

表 12-1 对称三相系统相电压/电流以及线电压/电流的公式总结

连接方式	相电压/电流	线电压/电流
Y－Y	$\mathbf{V}_{an}=V_p\angle 0°$ $\mathbf{V}_{bn}=V_p\angle -120°$ $\mathbf{V}_{cn}=V_p\angle +120°$ 同线电流	$\mathbf{V}_{ab}=\sqrt{3}V_p\angle 30°$ $\mathbf{V}_{bc}=\mathbf{V}_{ab}\angle -120°$ $\mathbf{V}_{ca}=\mathbf{V}_{ab}\angle +120°$ $\mathbf{I}_a=\mathbf{V}_{an}/\mathbf{Z}_Y$ $\mathbf{I}_b=\mathbf{I}_a\angle -120°$ $\mathbf{I}_c=\mathbf{I}_a\angle +120°$
Y－Δ	$\mathbf{V}_{an}=V_p\angle 0°$ $\mathbf{V}_{bn}=V_p\angle -120°$ $\mathbf{V}_{cn}=V_p\angle +120°$ $\mathbf{I}_{AB}=\mathbf{V}_{AB}/\mathbf{Z}_\Delta$ $\mathbf{I}_{BC}=\mathbf{V}_{BC}/\mathbf{Z}_\Delta$ $\mathbf{I}_{CA}=\mathbf{V}_{CA}/\mathbf{Z}_\Delta$	$\mathbf{V}_{ab}=\mathbf{V}_{AB}=\sqrt{3}V_p\angle 30°$ $\mathbf{V}_{bc}=\mathbf{V}_{BC}=\mathbf{V}_{ab}\angle -120°$ $\mathbf{V}_{ca}=\mathbf{V}_{CA}=\mathbf{V}_{ab}\angle +120°$ $\mathbf{I}_a=\mathbf{I}_{AB}\sqrt{3}\angle -30°$ $\mathbf{I}_b=\mathbf{I}_a\angle -120°$ $\mathbf{I}_c=\mathbf{I}_a\angle +120°$
Δ－Δ	$\mathbf{V}_{ab}=V_p\angle 0°$ $\mathbf{V}_{bc}=V_p\angle -120°$ $\mathbf{V}_{ca}=V_p\angle +120°$ $\mathbf{I}_{AB}=\mathbf{V}_{ab}/\mathbf{Z}_\Delta$ $\mathbf{I}_{BC}=\mathbf{V}_{bc}/\mathbf{Z}_\Delta$ $\mathbf{I}_{CA}=\mathbf{V}_{ca}/\mathbf{Z}_\Delta$	同相电压 $\mathbf{I}_a=\mathbf{V}_{AB}\sqrt{3}\angle -30°$ $\mathbf{I}_b=\mathbf{I}_a\angle -120°$ $\mathbf{I}_c=\mathbf{I}_a\angle +120°$ 同相电压
Δ－Y	$\mathbf{V}_{ab}=V_p\angle 0°$ $\mathbf{V}_{bc}=V_p\angle -120°$ $\mathbf{V}_{ca}=V_p\angle +120°$ 同线电流	$\mathbf{I}_a=\dfrac{V_p\angle -30°}{\sqrt{3}\mathbf{Z}_Y}$ $\mathbf{I}_b=\mathbf{I}_a\angle -120°$ $\mathbf{I}_c=\mathbf{I}_a\angle +120°$

注：假设电源为正序或abc相序。

例题12-5 一相阻抗为40 + j25 Ω的对称Y型连接负载由线电压为210 V的对称、正序Δ型连接的电源供电，如果以$\mathbf{V}_{ab}$作为参考电压，试计算相电流。

解 负载阻抗为：

$$\mathbf{Z}_Y = 40 + j25 = 47.17\angle 32°\ \Omega$$

电源电压为：

$$\mathbf{V}_{ab} = 210\angle 0°\ \text{V}$$

将Δ型连接电源转换为Y型连接电源，有：

$$\mathbf{V}_{an} = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{\sqrt{3}}\angle -30° = 121.2\angle -30°\ \text{V}$$

于是，线电流为：

$$I_a = \frac{V_{an}}{Z_Y} = \frac{121.2\angle -30^\circ}{47.12\angle 32^\circ} = 2.57\angle -62^\circ \text{ A}$$
$$I_b = I_a\angle -120^\circ = 2.57\angle -178^\circ \text{ A}$$
$$I_c = I_a\angle 120^\circ = 2.57\angle 58^\circ \text{ A}$$

相电流与线电流相同。

练习题12-5 在某对称Δ－Y电路中，$V_{ab} = 240\angle 15^\circ$，$Z_Y =$ （12＋j15）Ω，试计算线电流。

答 $7.21\angle -66.34^\circ$ A，$7.21\angle -173.34^\circ$ A，$7.21\angle 53.66^\circ$ A。

12.7 对称系统中的功率

本节讨论对称三相系统中的功率。首先计算负载吸收的瞬时功率，为此要求在时域中分析电路，对于Y型连接负载而言，其相电压为：

$$\upsilon_{AN} = \sqrt{2}V_p\cos\omega t, \quad \upsilon_{BN} = \sqrt{2}V_p\cos(\omega t - 120^\circ)$$
$$\upsilon_{CN} = \sqrt{2}V_p\cos(\omega t + 120^\circ) \tag{12-41}$$

由于V_p定义为相电压的有效值，所以因子$\sqrt{2}$是必须的。如果$Z_Y = Z\angle\theta$，则相电流较其相应的相电压滞后θ角，因此，

$$i_a = \sqrt{2}I_p\cos(\omega t - \theta), \quad i_b = \sqrt{2}I_p\cos(\omega t - \theta - 120^\circ)$$
$$i_c = \sqrt{2}I_p\cos(\omega t - \theta + 120^\circ) \tag{12-42}$$

其中，I_p为相电流的有效值。负载的总的瞬时功率等于三相瞬时功率之和，即：

$$\begin{aligned} p &= p_a + p_b + p_c = \upsilon_{AN}i_a + \upsilon_{BN}i_b + \upsilon_{CN}i_c \\ &= 2V_pI_p[\cos\omega t\cos(\omega t - \theta) + \cos(\omega t - 120^\circ)\cos(\omega t - \theta - 120^\circ) \\ &\quad + \cos(\omega t + 120^\circ)\cos(\omega t - \theta + 120^\circ)] \end{aligned} \tag{12-43}$$

利用三角恒等式：

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)] \tag{12-44}$$

可以得到：

$$\begin{aligned} p &= V_pI_p[3\cos\theta + \cos(2\omega t - \theta^\circ) + \cos(2\omega t - \theta - 240^\circ) \\ &\quad + \cos(2\omega t - \theta + 240^\circ)] \\ &= V_pI_p[3\cos\theta + \cos\alpha + \cos\alpha\cos 240^\circ + \sin\alpha\sin 240^\circ \\ &\quad + \cos\alpha\cos 240^\circ - \sin\alpha\sin 240^\circ \end{aligned} \tag{12-45}$$

$$\alpha = 2\omega t - \theta$$

其中，$= V_pI_p[3\cos\theta + \cos\alpha + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\cos\alpha] = 3V_pI_p\cos\theta$

因此，对称三相系统中总的瞬时功率是恒定的，而不像各相的瞬时功率那样随时间而变化，无论负载是Y型连接还是Δ型连接，这个结果都是成立的。这是采用三相系统发电、配电的重要原因之一。稍后将介绍另一个原因。

由于总的瞬时功率不随时间变化，所以无论是Δ型连接负载还是Y型连接负载，其各相的平均功率P_p为$p/3$，即：

$$P_p = V_pI_p\cos\theta \tag{12-46}$$

各相的无功功率为：

$$Q_p = V_p I_p \sin\theta \tag{12-47}$$

各相的视在功率为：

$$S_p = V_p I_p \tag{12-48}$$

各相的复功率为：

$$\boldsymbol{S}_p = P_p + jQ_p = \boldsymbol{V}_p \boldsymbol{I}_p^* \tag{12-49}$$

其中，$\boldsymbol{V}_p$与$\boldsymbol{I}_p$分别是幅度为V_p与I_p的相电压和相电流。总的平均功率为各相平均功率之和：

$$P = P_a + P_b + P_c = 3P_p = 3V_p I_p \cos\theta = \sqrt{3} V_L \boldsymbol{I}_L \cos\theta \tag{12-50}$$

对于Y型连接负载而言，$I_L = I_p$，但$V_L = \sqrt{3}\ V_p$，而对于Δ型连接负载而言，$I_L = \sqrt{3}\ I_p$，但$V_L = V_p$。因此式(12-50)既适用于Y型连接负载，又适用于Δ型连接负载。同理，总的无功功率为：

$$Q = 3V_p I_p \sin\theta = 3Q_p = \sqrt{3}\ V_L I_L \sin\theta \tag{12-51}$$

总的复功率为：

$$\boxed{\boldsymbol{S} = 3\boldsymbol{S}_p = 3\boldsymbol{V}_p \boldsymbol{I}_p^* = 3I_p^2 \boldsymbol{Z}_p = \frac{3V_p^2}{\boldsymbol{Z}_p^*}} \tag{12-52}$$

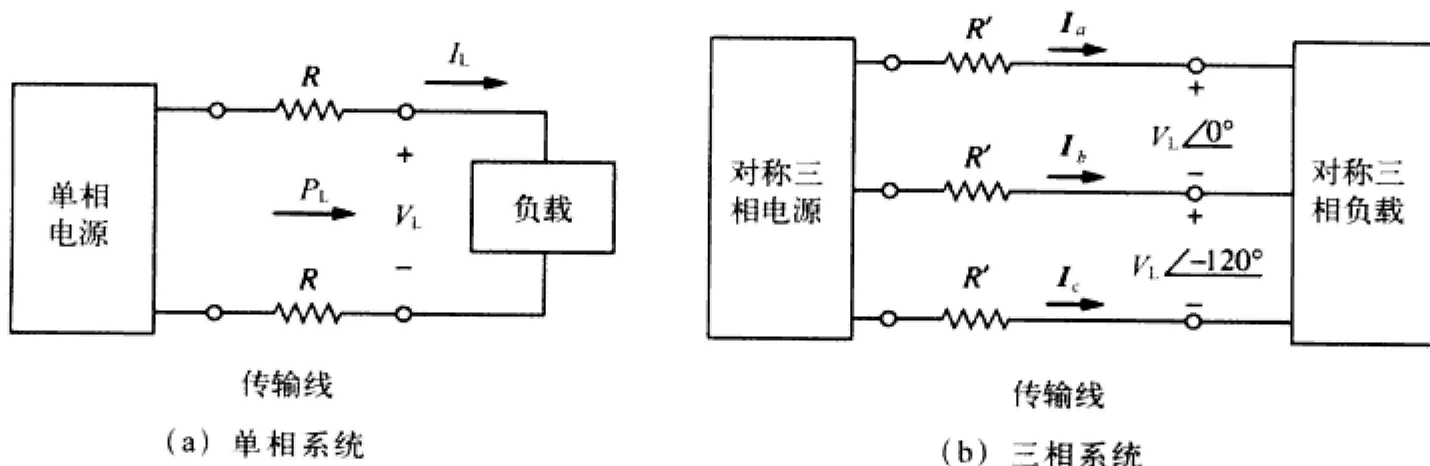
其中，$\boldsymbol{Z}_p = Z_p\underline{/\theta}$为各相的负载阻抗（$\boldsymbol{Z}_p$可以是$\boldsymbol{Z}_Y$或$\boldsymbol{Z}_\Delta$）。另外，式(12-52)还可以写为：

$$\boxed{\boldsymbol{S} = P + jQ = \sqrt{3} V_L I_L \underline{/\theta}} \tag{12-53}$$

需要记住的是，V_p、I_p、V_L与I_L均为有效值，θ为负载阻抗的辐角，也是相电压与相电流之间的相位差。

采用三相系统进行配电的另一个重要优势在于：与单相系统相比，在相同线电压V_L与相同吸收功率P_L的条件下，三相系统所需的输电线比单相系统少。下面将对这两种情况进行比较，假定两系统中的输电线采用相同的材料（例如电阻率为ρ的铜材），输电线具有相同的长度ℓ，并且负载为电阻性的（功率因数为1）。对于如图12-21a所示的两线单相系统而言，$I_L = P_L/V_L$，于是两线系统中的功率损耗为：

$$P_{loss} = 2I_L^2 R = 2R\frac{P_L^2}{V_L^2} \tag{12-54}$$



(a) 单相系统　　(b) 三相系统

图 12-21　不同系统功率损耗的比较

对于如图12-21b所示的三相三线系统而言，由式(12-50)可得，$I'_L = |\boldsymbol{I}_a| = |\boldsymbol{I}_b| = |\boldsymbol{I}_c| = P_L/\sqrt{3}\ V_L$，于是，三线系统的功率损耗为：

$$P'_{loss} = 3(I'_L)^2 R' = 3R'\frac{P_L^2}{3V_L^2} = R'\frac{P_L^2}{V_L^2} \tag{12-55}$$

式(12-54)与式(12-55)表明，对于传递相同的总功率P_L以及相同的线电压V_L，有：

$$\frac{P_{\text{loss}}}{P'_{\text{loss}}}=\frac{2R}{R'} \tag{12-56}$$

但由第2章可知，$R=\rho l/(\pi r^2)$且$R'=\rho l/(\pi r'^2)$，其中r、r'为导线的半径，因此，

$$\frac{P_{\text{loss}}}{P'_{\text{loss}}}=\frac{2r'^2}{r^2} \tag{12-57}$$

如果两个系统的损耗功率相同，则$r^2=r'^2$。两系统所需的材料之比由输电线数量及其体积决定，并且由于$r^2=2r'^2$，所以有，

$$\begin{aligned}\frac{\text{单相系统的材料}}{\text{三相系统的材料}}&=\frac{2(\pi r^2\ell)}{3(\pi r'^2\ell)}=\frac{2r^2}{3r'^2}\\&=\frac{2}{3}(2)=1.333\end{aligned} \tag{12-58}$$

式(12-58)表明，单相系统所用的材料比三相系统多33%，或者说，三相系统仅使用等效单相系统所需材料的75%即可。换而言之，传递相同的功率时，三相系统所需的材料要比单相系统所需的材料少得多。

例题12-6 参看如图12-13所示电路（例题12-2中），试确定电源与负载总的平均功率、无功功率以及复功率。

解 由于系统是对称的，所以仅考虑一相即可。对于 a 相有：

$$\boldsymbol{V}_{\text{p}}=110\underline{/0^\circ}\ \text{V} \quad \text{和} \quad \boldsymbol{I}_{\text{p}}=6.81\underline{/-21.8^\circ}\ \text{A}$$

于是，电源吸收的复功率为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{\text{s}}&=-3\boldsymbol{V}_{\text{p}}\boldsymbol{I}_{\text{p}}^*=-3(110\underline{/0^\circ})(6.81\underline{/21.8^\circ})\\&=-2247\underline{/21.8^\circ}=-(2087+\text{j}834.6)\ \text{VA}\end{aligned}$$

即电源提供的有功功率为-2087W，无功功率为-834.6 VAR。

负载吸收的复功率为：

$$\boldsymbol{S}_{\text{L}}=3\,|\boldsymbol{I}_{\text{p}}|^2\boldsymbol{Z}_{\text{p}}$$

其中，$\boldsymbol{Z}_{\text{p}}=10+\text{j}8=12.81\underline{/38.66^\circ}$且$\boldsymbol{I}_{\text{p}}=\boldsymbol{I}_{\text{a}}=6.81\underline{/-21.8^\circ}$。因此，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{\text{L}}&=3(6.81)^2 12.81\underline{/38.66^\circ}=1782\underline{/38.66^\circ}\\&=(1392+\text{j}1113)\ \text{VA}\end{aligned}$$

于是，负载吸收的有功功率为1391.7 W，无功功率为1113.3 VAR。两复功率之差为线路阻抗（$5-\text{j}2$）Ω吸收的复功率。下面求出线路吸收的复功率予以验证：

$$\boldsymbol{S}_{l}=3\left|\boldsymbol{I}_{\text{p}}\right|^2\boldsymbol{Z}_{l}=3(6.81)^2(5-\text{j}2)=695.6-\text{j}278.3\ \text{VA}$$

恰好是$\boldsymbol{S}_{\text{s}}$与$\boldsymbol{S}_{\text{L}}$之差，即$\boldsymbol{S}_{\text{s}}+\boldsymbol{S}_{l}+\boldsymbol{S}_{\text{L}}=0$。

练习题12-6 在练习题12-2的Y−Y电路中，试计算电源端与负载端的复功率。

答 −（1054＋j843.3）VA，（1012＋j 801.6）VA。

例题12-7 三相电动机可看作是对称Y负载。当供电线电压为220 V，线电流为18.2 A时，电动机吸收的功率为5.6 kW，试确定该电动机的功率因数。

解 视在功率为：

$$S=\sqrt{3}V_{\text{L}}I_{\text{L}}=\sqrt{3}(220)(18.2)=6935.13\text{VA}$$

由于有功功率为：

$$P=S\cos\theta=5600\ \text{W}$$

所以，功率因数为：

$$\text{pf} = \cos\theta = \frac{P}{S} = \frac{5600}{6935.13} = 0.8075$$

练习题12-7 某功率因数为0.85滞后的30 kW三相电动机与线电压为440 V的对称电源相连，试计算该电动机所需的线电流。

答 46.31 A。

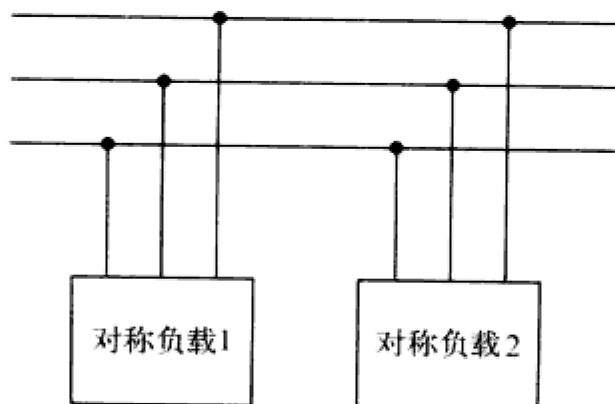
例题12-8 两个对称负载与240 kV rms、60 Hz电力线相连，如图12-22a所示，负载1在功率因数为0.6滞后时提取的功率为30 kW，负载2在功率因数为0.8滞后时提取的功率为45 kVAR。假定相序为*abc*，试求：(a) 合并负载吸收的复功率、有功功率与无功功率；(b) 线电流；(c) 将功率因数提高到0.9滞后，与负载相并联的三个Δ型连接电容器的额定功率（kVAR）以及每个电容器的容值。

解 (a) 对于负载1，已知 $P_1 = 30$ kW 且 $\cos\theta_1 = 0.6$，则有 $\sin\theta_1 = 0.8$，所以：

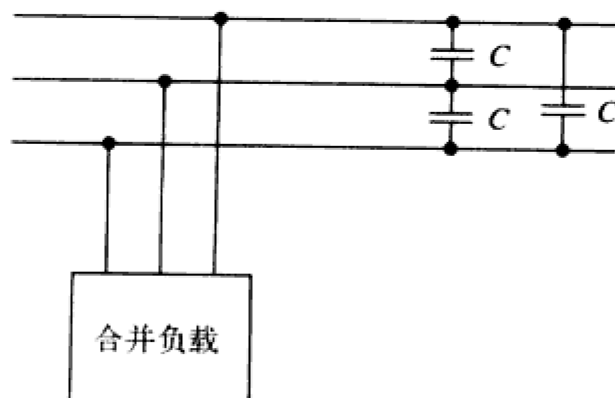
$$S_1 = \frac{P_1}{\cos\theta_1} = \frac{30\text{kW}}{0.6} = 50\text{ kVA}$$

$Q_1 = S_1\sin\theta_1 = 50\ (0.8)\ = 40$ kVAR，所以，负载1的复功率为：

$$\boldsymbol{S}_1 = P_1 + jQ_1 = 30 + j40\text{ kVA} \tag{12-8-1}$$



(a) 原始对称负载



(b) 改进功率因数后的合并负载

图 12-22 例题 12-8 的系统框图

对于负载2，已知$Q2 = 45$ kVAR且$\cos\theta_2 = 0.8$，则有$\sin\theta_2 = 0.6$，所以：

$$S_2 = \frac{Q_2}{\sin\theta_2} = \frac{45\text{kVA}}{0.6} = 75\text{ kVA}$$

$P_2 = S_2\cos\theta_2 = 75\ (0.8)\ = 60$kW，因此，负载2的复功率为：

$$\boldsymbol{S}_2 = P_2 + jQ_2 = 60 + j45\text{ kVA} \tag{12-8-2}$$

由式(12-8-1)与式(12-8-2)可得负载所吸收的总复功率为：

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2 = 90 + j85\text{kVA} = 123.8\underline{/43.36^\circ}\text{ kVA} \tag{12-8-3}$$

其功率因数为$\cos 43.36^\circ = 0.727$（滞后）。有功功率为90 kW，无功功率为85 kVAR。

(b) 由于$S = \sqrt{3}\,V_L I_L$，所以线电流为：

$$I_L = \frac{S}{\sqrt{3}V_L} \tag{12-8-4}$$

将其用于计算各负载的线电流，需要注意的是各负载两端的线电压均为$V_L = 240$ kV。于是，对于负载1：

$$I_{L1} = \frac{50\,000}{\sqrt{3}240\,000} = 120.28\text{ mA}$$

由于功率因数是滞后的，所以线电流滞后于线电压$\theta_1 = \cos^{-1}0.6 = 53.13^\circ$，因此：

$$I_{a1}=120.28\underline{/-53.13^\circ}$$

对于负载2：

$$I_{L2}=\frac{75\,000}{\sqrt{3}240\,000}=180.42\text{ mA}$$

线电流滞后于线电压$\theta_2=\cos^{-1}0.8=36.87^\circ$，所以：

$$I_{a2}=180.42\underline{/-36.87^\circ}$$

于是，总的线电流为：

$$\begin{aligned}I_a=I_{a1}+I_{a2}&=120.28\underline{/-53.13^\circ}+180.42\underline{/-36.87^\circ}\\&=(72.168-j96.224)+(144.336-j108.252)\\&=216.5-j204.472=297.8\underline{/-43.36^\circ}\text{ mA}\end{aligned}$$

另外，利用式(12-8-4)也可以由总的复功率确定线电流：

$$I_L=\frac{123\,800}{\sqrt{3}240\,000}=297.82\text{ mA}$$

且

$$I_a=297.82\underline{/-43.36^\circ}\text{ mA}$$

与前面计算出的结果是一致的。另外两相的线电流I_b与I_c可以按照abc相序得到（即$I_b=297.82\underline{/-163.36^\circ}$ mA且$I_c=297.82\underline{/76.64^\circ}$ mA）。

（c）要将功率因数提高到0.9滞后，所需要的无功功率可以利用式(11-59)求出：

$$Q_C=P(\tan\theta_{old}-\tan\theta_{new})$$

其中，$P=90$ kW，$\theta_{old}=43.36^\circ$，$\theta_{new}=\cos^{-1}0.9=25.84^\circ$

所以，

$$Q_C=90\,000\,(\tan 43.36^\circ-\tan 25.84^\circ)\ =41.4\text{ kVAR}$$

此即三个电容器的无功功率，于是，每个电容器的额定功率应为$Q'_C=13.8$ kVAR。由式(11-60)可得各电容器的电容值为：

$$C=\frac{Q'_C}{\omega V_{rms}^2}$$

由于电容器是Δ型连接，如图12-22b所示，所以上式中的V_{rms}为线电压，即240 kV，于是，

$$C=\frac{13\,800}{(2\pi 60)(240\,000)^2}=635.5\text{pF}$$

练习题12-8 假定如图12-22a所示的两个对称负载由840V rms、60 Hz电源供电。负载1为Y型连接，每相的阻抗为30+j 40 Ω，负载2为对称三相电动机，在功率因素为0.8滞后时提取的功率为48 kW。假定相序为abc，试计算：（a）合并负载吸收的复功率；（b）将功率因数提高到1，与负载相并联的三个Δ型连接电容器的额定功率（kVAR）；（c）在功率因数为1的条件下，从电源提取的电流。

答 （a）56.47+j 47.29 kVA；（b）15.7 kVAR；（c）38.813 A。

12.8 †非对称三相系统

如果不讨论非对称系统，本章的知识结构就显得不完整。在如下两种可能的情况下会出现非对称系统：（1）电源的大小不相等，或者相位角之差不相等；（2）负载阻抗不相等。因此，

非对称的系统是由非对称的电压源或非对称负载形成的。

为了简化分析，假定电源电压是对称的，而负载是非对称的。

非对称三相系统可以直接利用网孔分析法和节点分析法求解。图12-23所示为一个非对称三相系

统，该系统由对称的电源电压（图中未画出）与非对称Y型连接负载（图中已画出）组成。由于负载是非对称的，所以$\boldsymbol{Z}_A$、$\boldsymbol{Z}_B$、$\boldsymbol{Z}_C$不相等。由欧姆定律确定的线电流为：

$$\boxed{\boldsymbol{I}_a=\frac{\boldsymbol{V}_{AN}}{\boldsymbol{Z}_A},\quad \boldsymbol{I}_b=\frac{\boldsymbol{V}_{BN}}{\boldsymbol{Z}_B},\quad \boldsymbol{I}_c=\frac{\boldsymbol{V}_{CN}}{\boldsymbol{Z}_C}} \tag{12-59}$$

专门处理非对称三相系统的方法称为对称元件法，已超出本教材讨论的范围。

这组非对称线电流，会在中线中产生电流，而对称系统中的中线电流为零。在节点N处应用KCL可以得到中线电流为：

$$\boxed{\boldsymbol{I}_n=-(\boldsymbol{I}_a+\boldsymbol{I}_b+\boldsymbol{I}_c)} \tag{12-60}$$

在没有中线的三线系统中，仍然可以利用网孔分析法求出线电流$\boldsymbol{I}_a$、$\boldsymbol{I}_b$与$\boldsymbol{I}_c$。而在这种情况下，节点N处必须满足KCL，于是有$\boldsymbol{I}_a+\boldsymbol{I}_b+\boldsymbol{I}_c=0$。对于Δ－Y、Y－Δ或Δ－Δ非对称三线系统的分析也是相同的。前面已经提到，在远距离电力传输中需要采用多路三线系统，均以大地本身作为中线的导体。

计算非对称三相系统的功率必须先利用式(12-46)～式(12-49)分别求出每相的功率，但总功率不是简单的单相功率的3倍，而是将各自的三相功率相加。

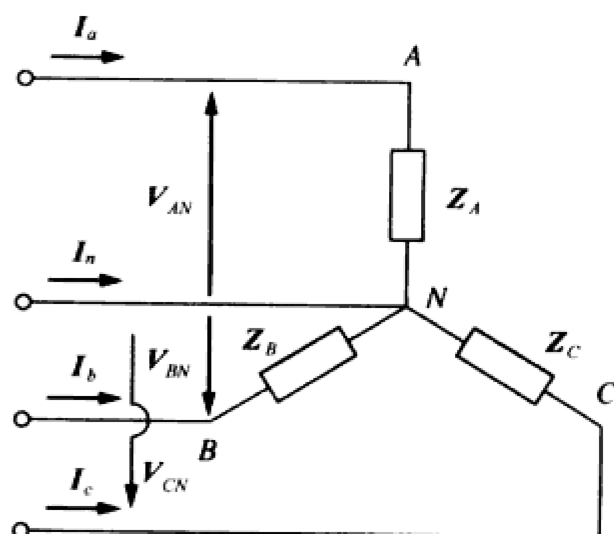


图 12-23　非对称三相Y型连接负载

例题12-9　如图12-23所示的非对称Y型连接负载由100 V对称电压，acb相序电源供电。如果$\boldsymbol{Z}_A=15\ \Omega$，$\boldsymbol{Z}_B=10+\mathrm{j}5\ \Omega$，$\boldsymbol{Z}_C=6-\mathrm{j}8\ \Omega$，试试计算线电流与中线电流。

解　利用式(12-59)可求得线电流为：

$$\boldsymbol{I}_a=\frac{100\angle 0^\circ}{15}=6.67\angle 0^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\boldsymbol{I}_b=\frac{100\angle 120^\circ}{10+\mathrm{j}5}=\frac{100\angle 120^\circ}{11.18\angle 26.56^\circ}=8.94\angle 93.44^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\boldsymbol{I}_c=\frac{100\angle -120^\circ}{6-\mathrm{j}8}=\frac{100\angle -120^\circ}{10\angle -53.13^\circ}=10\angle -66.87^\circ\ \mathrm{A}$$

利用式(12-60)，得到中线电流为：

$$\boldsymbol{I}_n=-(\boldsymbol{I}_a+\boldsymbol{I}_b+\boldsymbol{I}_c)=-(6.67-0.54+\mathrm{j}8.92+3.93-\mathrm{j}9.2)$$
$$=-10.06+\mathrm{j}0.28=10.06\angle 178.4^\circ\ \mathrm{A}$$

练习题12-9　如图12-24所示的非对称Δ型连接负载，由线电压为200 V的正序对称电源供电，试求线电流。以V_{ab}作为参考电压。

答　$18.05\angle -41.06^\circ$ A，$29.15\angle -139.8^\circ$ A，$31.87\angle 74.27^\circ$ A。

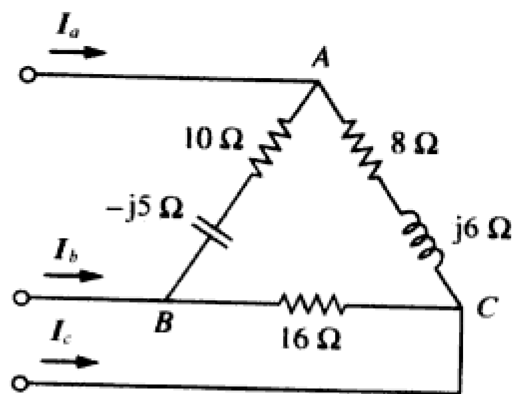


图 12-24　练习题 12-9 的非对称Δ型连接负载

例题12-10　对如图12-25所示的非对称电路，试求：(a) 线电流；(b) 负载吸收的总复功率；(c) 电源提供的总复功率。

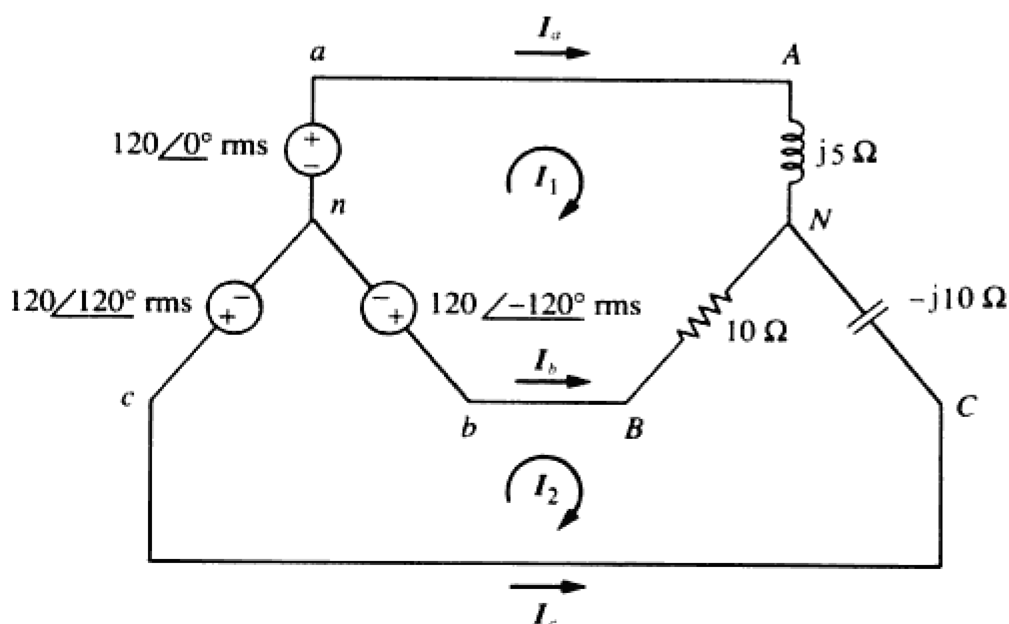


图 12-25 例题 12-10 的电路原理图

解 （a）利用网孔分析法求解线电流。对于网孔 1，有：

$$120\angle -120^\circ - 120\angle 0^\circ + (10+\mathrm{j}5)\boldsymbol{I}_1 - 10\boldsymbol{I}_2 = 0$$

即

$$(10+\mathrm{j}5)\boldsymbol{I}_1 - 10\boldsymbol{I}_2 = 120\sqrt{3}\angle 30^\circ \tag{12-10-1}$$

对于网孔2，有：

$$120\angle 120^\circ - 120\angle -120^\circ + (10-\mathrm{j}10)\boldsymbol{I}_2 - 10\boldsymbol{I}_1 = 0$$

即

$$-10\boldsymbol{I}_1 + (10-\mathrm{j}10)\boldsymbol{I}_2 = 120\sqrt{3}\angle -90^\circ \tag{12-10-2}$$

式(12-10-1)与式(12-10-2)构成的矩阵方程为：

$$\begin{bmatrix} 10+\mathrm{j}5 & -10 \\ -10 & 10-\mathrm{j}10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 \\ \boldsymbol{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120\sqrt{3}\angle 30^\circ \\ 120\sqrt{3}\angle -90^\circ \end{bmatrix}$$

其行列式为：

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10+\mathrm{j}5 & -10 \\ -10 & 10-\mathrm{j}10 \end{vmatrix} = 50 - \mathrm{j}50 = 70.71\angle -45^\circ$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 120\sqrt{3}\angle 30^\circ & -10 \\ 120\sqrt{3}\angle -90^\circ & 10-\mathrm{j}10 \end{vmatrix} = 207.85(13.66 - \mathrm{j}13.66)$$
$$= 4015\angle -45^\circ$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 10+\mathrm{j}5 & 120\sqrt{3}\angle 30^\circ \\ -10 & 120\sqrt{3}\angle -90^\circ \end{vmatrix} = 207.85(13.66 - \mathrm{j}5)$$
$$= 3023.4\angle -20.1^\circ$$

于是，网孔电流为：

$$\boldsymbol{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4015.23\angle -45^\circ}{70.71\angle -45^\circ} = 56.78\ \mathrm{A}$$

$$\boldsymbol{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3023.4\angle -20.1^\circ}{70.71\angle -45^\circ} = 42.75\angle 24.9^\circ\ \mathrm{A}$$

因此，线电流为：

$$\boldsymbol{I}_a = \boldsymbol{I}_1 = 56.78\text{A}, \quad \boldsymbol{I}_c = -\boldsymbol{I}_2 = 42.75\underline{/-155.1^\circ}\ \text{A}$$

$$\boldsymbol{I}_b = \boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{I}_1 = 38.78 + \text{j}18 - 56.78 = 25.46\underline{/135^\circ}\ \text{A}$$

(b) 下面计算负载吸收的复功率。对于A相，有：

$$\boldsymbol{S}_A = |\boldsymbol{I}_a|^2 \boldsymbol{Z}_A = (56.78)^2(\text{j}\,5) = \text{j}\,16\,120\ \text{VA}$$

对于B相，有：

$$\boldsymbol{S}_B = |\boldsymbol{I}_b|^2 \boldsymbol{Z}_B = (25.46)^2(10) = 6\,480\ \text{VA}$$

对于C相，有：

$$\boldsymbol{S}_C = |\boldsymbol{I}_c|^2 \boldsymbol{Z}_C = (42.75)^2(-\text{j}\,10) = -18\,276\ \text{VA}$$

于是，负载吸收的总复功率为：

$$\boldsymbol{S}_L = \boldsymbol{S}_A + \boldsymbol{S}_B + \boldsymbol{S}_C = 6\,480 - \text{j}\,2\,156\ \text{VA}$$

(c) 下面通过求解电源吸收的功率来验证述结果。对于A相电压源，有：

$$\boldsymbol{S}_a = -\boldsymbol{V}_{an}\boldsymbol{I}_a^* = -(120\underline{/0^\circ})(56.78) = -6\,813.6\ \text{VA}$$

对于B相电压源，有：

$$\boldsymbol{S}_b = -\boldsymbol{V}_{bn}\boldsymbol{I}_b^* = -(120\underline{/-120^\circ})(26.46\underline{/-135^\circ})$$
$$= -3055.2\underline{/105^\circ} = 790 - \text{j}2\,951.1\ \text{VA}$$

对于C相电压源，有：

$$\boldsymbol{S}_c = -\boldsymbol{V}_{bn}\boldsymbol{I}_c^* = -(120\underline{/120^\circ})(42.75\underline{/155.1^\circ})$$
$$= -5\,130\underline{/275.1^\circ} = -456.03 + \text{j}5\,109.7\ \text{VA}$$

三相电源吸收的总复功率为：

$$\boldsymbol{S}_s = \boldsymbol{S}_a + \boldsymbol{S}_b + \boldsymbol{S}_c = -6\,480 + \text{j}\,2\,156\ \text{VA}$$

显然，$\boldsymbol{S}_s + \boldsymbol{S}_L = 0$，证实了交流功率守恒原理。

练习题12-10 试求如图12-26所示非对称三相电路的线电流以及负载吸收的有功功率。

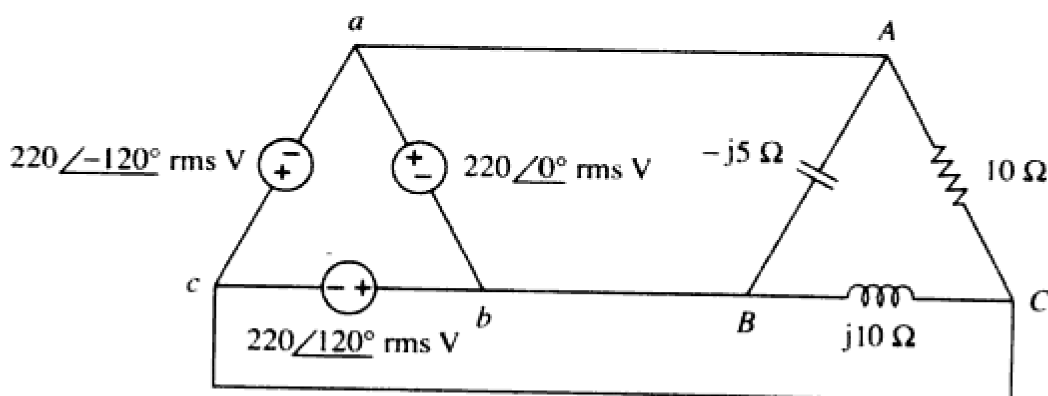


图 12-26 练习题 12-10 的电路原理图

答 $64\underline{/80.1^\circ}$ A，$38.1\underline{/-60^\circ}$ A，$42.5\underline{/225^\circ}$ A，4.84 kW。

12.9 三相电路的 PSpice 分析

PSpice软件既可用于分析对称三相电路又可用于分析非对称三相电路，其分析方法与单相交流电路的分析方法相同。但是，利用PSpice分析Δ型连接电源时，存在两个主要问题。第一，Δ型连接电源形成一个电压源回路，这是PSpice不能接受的形式。为了避免这个问题，在Δ型连接电源的每一相中串联一个可以忽略的电阻（例如1 μΩ）；第二，Δ型连接电源没有一个方便的节点作为地参考节点，而这是在运行PSpice程序时所必需的。在Δ型连接的电源中插入一个对称Y型连接的大电阻（例如，1 MΩ每相），使得该Y型连接电阻器的中线节点作为地节点0，即可这个问题的解决。例题12-12

将说明上述问题。

例题12-11 对于如图12-27所示的对称Y-Δ电路，试利用PSpice求解线电流$\boldsymbol{I}_{aA}$、相电压$\boldsymbol{V}_{AB}$以及相电流$\boldsymbol{I}_{AC}$，假定电源频率为60 Hz。

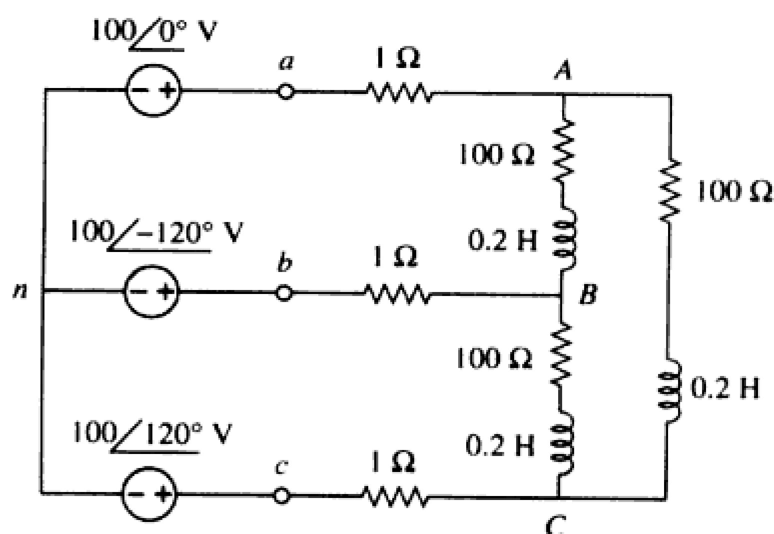


图 12-27 例题 12-10 的电路原理图

解 电路的 PSpice 原理图如图 12-28 所示。在适当的线路中加入伪组件 IPRINT，以确定 $\boldsymbol{I}_{aA}$ 与 $\boldsymbol{I}_{AC}$，在节点 A 与节点 B 之间加入 VPRINT2 以得到电压差 $\boldsymbol{V}_{AB}$。将 IPRINT 与 VPRINT2 的属性均设置为 AC = yes、MAG = yes、PHASE = yes，从而仅输出电流与电压的幅度和相位。对于单频分析，选择 Analysis/setup/AC Sweep，并在对话框中键入 Total Pts = 1，Start Freq = 60 且 Final Freq = 60，保存电路图后，即可运行 Analysis/simulate 程序模拟电路，得到如下输出文件：

```
FREQ           V(A, B)          VP(A, B)
6.000E+01      1.699E+02        3.081E+01
FREQ           IM(V_PRINT2)     IP(V-PRINT2)
6.000E+01      2.350E+00        -3.620E+01
FREQ           IM(v_PRINT3)     IP(V_PRINT3)
6.000E+01      1.357E+00        -6.620E+01
```

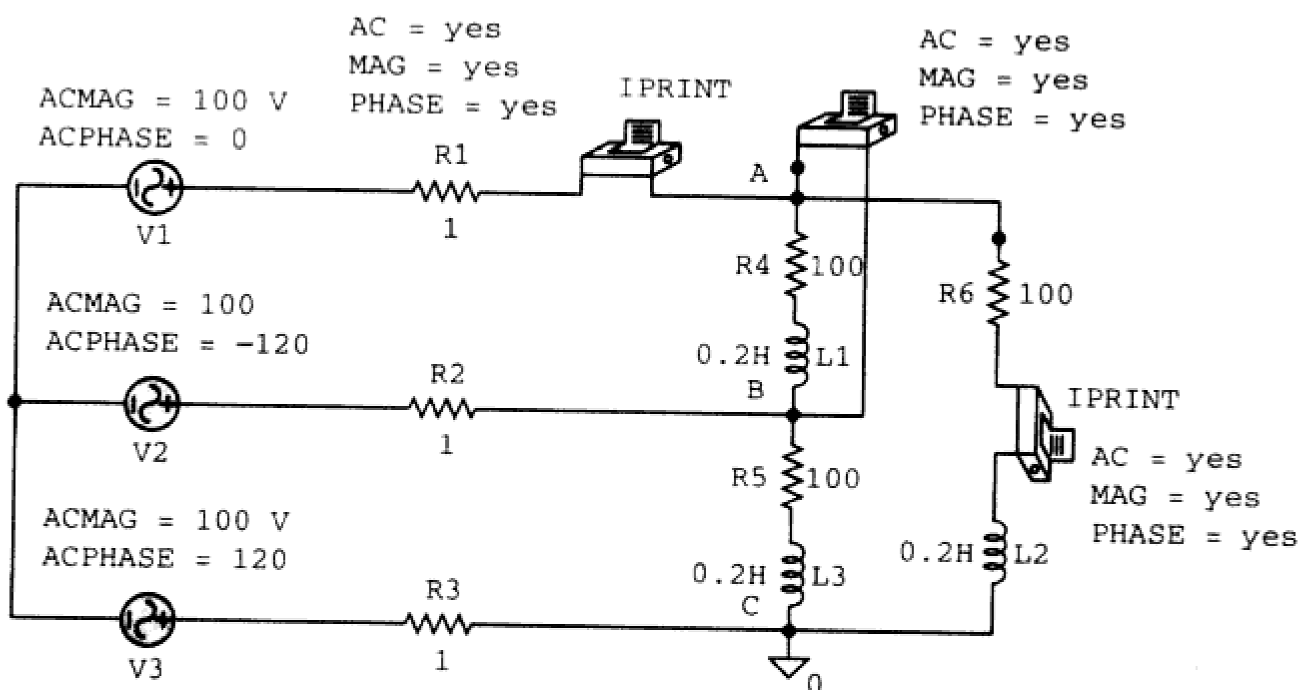


图 12-28 图 12-27 所示电路的 PSpice 原理图

由此得到：

$$\boldsymbol{I}_{aA} = 2.35\underline{/-36.2^\circ}\ \text{A}$$

$$\boldsymbol{V}_{AB} = 169.9\underline{/30.81^\circ}\ \text{V},\quad \boldsymbol{I}_{AC} = 1.357\underline{/-66.2^\circ}\ \text{A}$$

练习题12-11 参见如图12-29所示的对称Y－Y电路，试利用PSpice求解线电流$\boldsymbol{I}_{bB}$与相电压$\boldsymbol{V}_{AN}$，假定f = 100 Hz。

答 $100.9\underline{/60.87^\circ}$ V，$8.547\underline{/-91.27^\circ}$ A。

例题12-12 对于如图12-30所示的非对称Δ－Δ电路，试利用PSpice求解发电机电流$\boldsymbol{I}_{ab}$、线电流$\boldsymbol{I}_{bB}$以及相电流$\boldsymbol{I}_{BC}$。

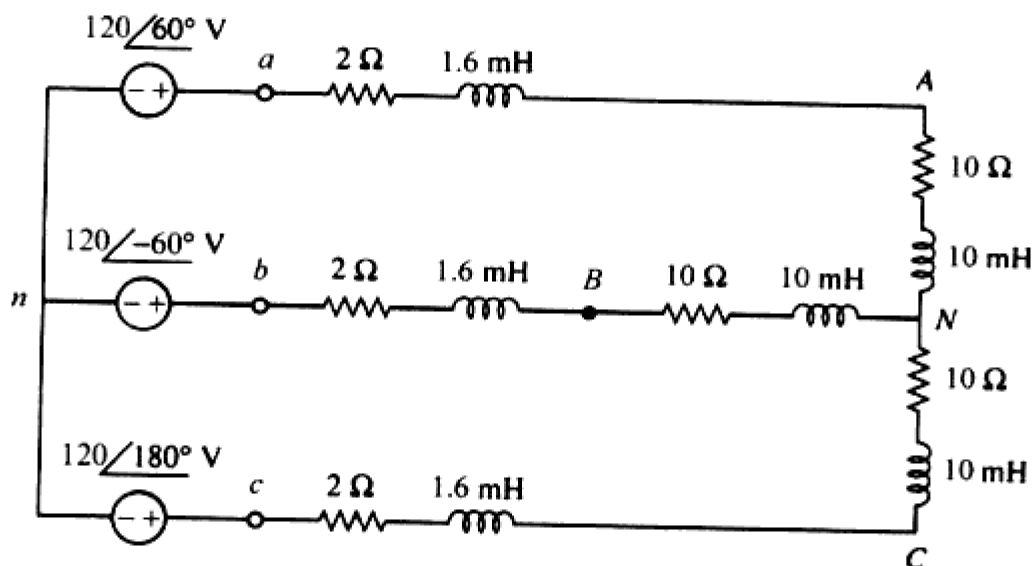


图 12-29 练习题 12-11 的电路原理图

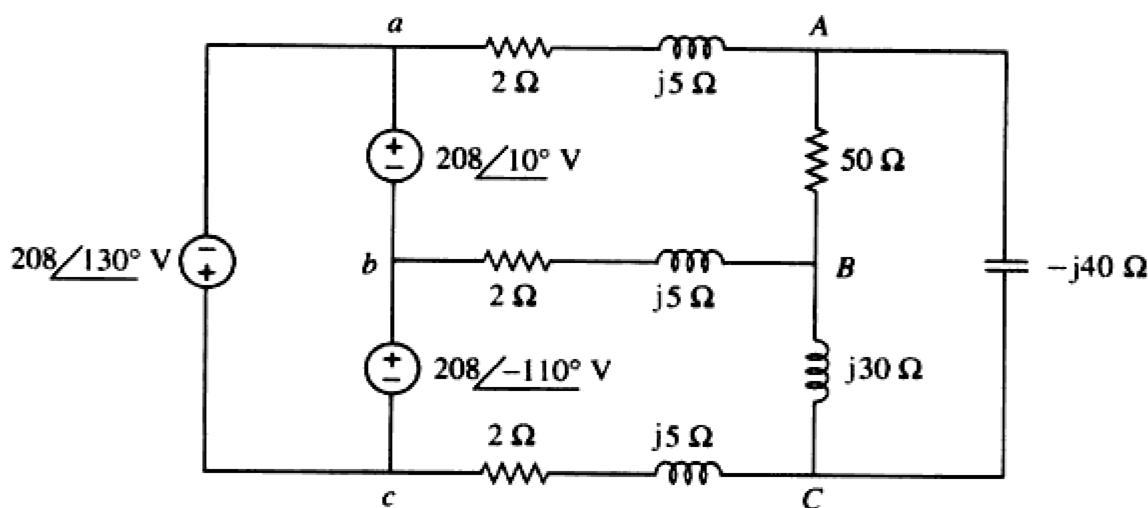


图 12-30 例题 12-12 的电路原理图

解 (1) **明确**问题。本例题所要解决的问题以及求解过程均已明确。

(2) **表述**对问题的理解。本题要求确定从a至b的发电机电流、从b到B的线电流以及从B到C的相电流。

(3) 确定**可选**解。虽然可以利用不同的方法求解本题，但要求必须使用PSpice，因此，这里不会采用其他方法求解。

(4) **尝试**问题的解。如前所述，在Δ型连接电源中串联1 μΩ电阻器，即可避免形成电压源回路。为了提供地节点0，在Δ型连接电源中加入对称Y型连接电阻器（每相1 MΩ），如图12-31所示。加入三个伪组件IPRINT及其属性，从而得到所求的电流$\mathbf{I}_{ab}$、$\mathbf{I}_{bB}$与$\mathbf{I}_{BC}$。由于未指定工作频率，且需要规定电感值与电容，所以假定$\omega = 1$ rad/s，于是$f = 1/2\pi = 0.159\ 155$ Hz。所以：

$$L = \frac{X_L}{\omega} \quad 和 \quad C = \frac{1}{\omega X_C}$$

选择Analysis/Setup/AC Sweep并键入Total Pts = 1，Start Freq = 0.159 155以及Final Freq = 0.159 155。保存电路之后，运行程序Analysis/Simulate对电路进行模拟，得到输出文件为：

```
FREQ            IM (V_PRINT1)      IP (V_PRINT1)
1.592E-01       9.106E+00          1.685E+02
FREQ            IM (V_PRINT2)      IP (V_PRINT2)
1.592E-01       5.959E+00          -1.772E+02
FREQ            IM (V_PRINT3)      IP (V_PRINT3)
1.592E-01       5.500E+00          1.725E+02
```

由此得到：

$$I_{ab}=\mathbf{5.595\angle -177.2^\circ\ A},\ I_{bB}=\mathbf{9.106\angle 168.5^\circ\ A},$$
$$I_{BC}=\mathbf{5.5\angle 172.5^\circ\ A}$$

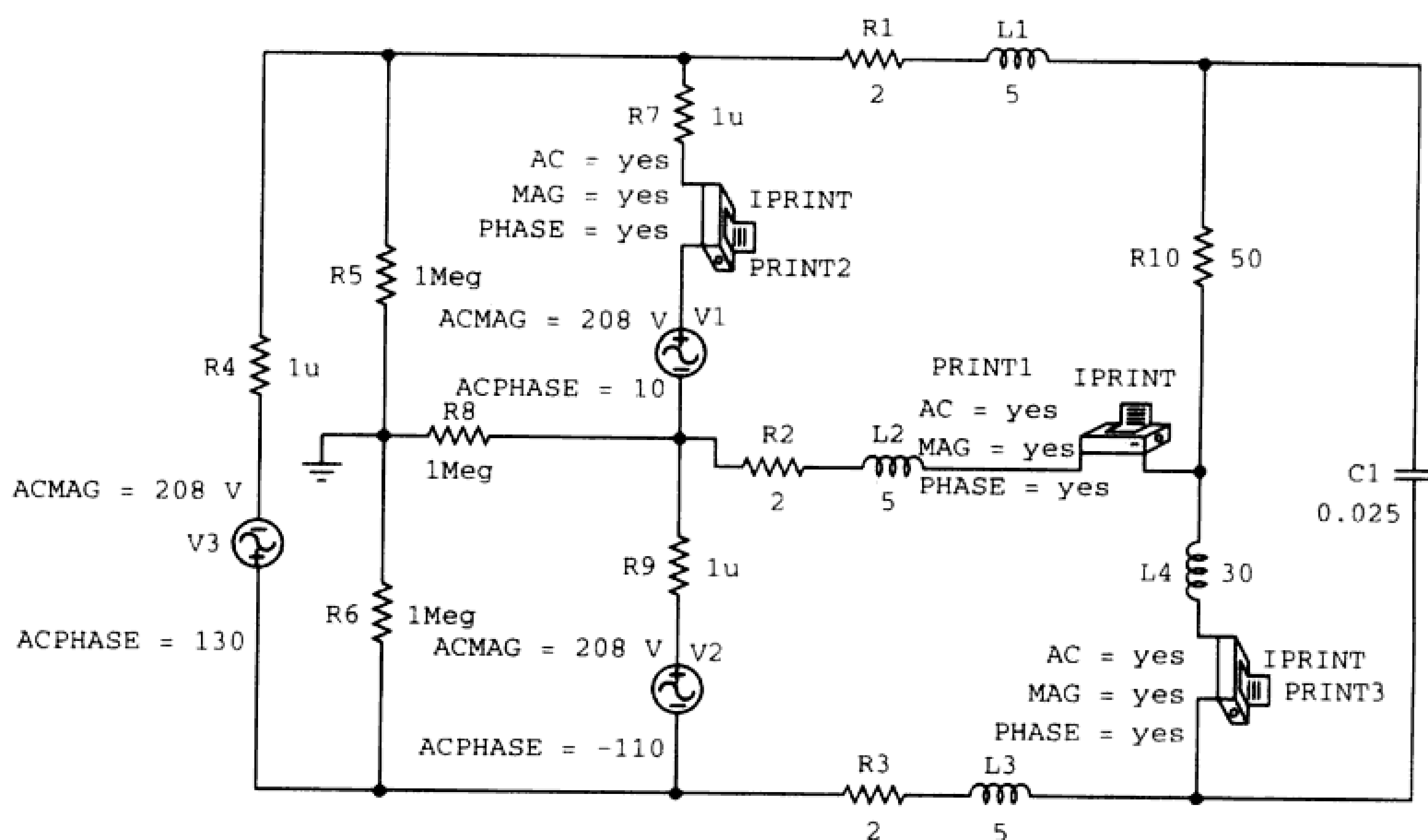


图 12-31 图 12-30 所示电路的 PSpice 原理图

(5) **评价得到的结果**。利用网孔分析法验证所得到的结果。设网孔*aABb*为网孔1，网孔*bBCc*为网孔2，网孔*ACB*为网孔3，并且三个网孔电流均为顺时针方向。从而得到如下网孔方程。

网孔1：

$$(54+j10)I_1-(2+j5)I_2-(50)I_3=208\angle 10^\circ=204.8+j36.12$$

网孔2：

$$-(2+j5)I_1+(4+j40)I_2-(j30)I_3=208\angle -110^\circ$$
$$=-71.14-j195.46$$

网孔3：

$$-(50)I_1-(j30)I_2+(50-j10)I_3=0$$

利用MATLAB求解可得：

```
>>Z=[(54+10i),(-2-5i),-50;(-2-5i),(4+40i),
-30i;-50,-30i,(50-10i)]

Z=
54.0000+10.0000i-2.0000-5.0000i-50.0000
-2.0000-5.0000i  4.0000+40.0000i  0-30.0000i
-50.0000 0-30.0000i  50.0000-10.0000i

>>V=[(204.8+36.12i);(-71.14-195.46i);0]
V=
1.0e+002*
```

```
2.0480+0.3612i
-0.7114-1.9546i
0
>>I=inv(z)*V

I=
8.9317+2.6983i
0.0096+4.5175i
5.4619+3.7964i
```

$$I_{bB}=-I_1+I_2=-(8.932+\mathrm{j}2.698)+(0.0096+\mathrm{j}4.518)$$
$$=-8.922+\mathrm{j}1.82=\mathbf{9.106\underline{/168.47^\circ}\ A}\quad \text{答案得到验证}$$
$$I_{BC}=I_2-I_3=(0.0096+\mathrm{j}4.518)-(5.462+\mathrm{j}3.796)$$
$$=-5.452+\mathrm{j}0.722=\mathbf{5.5\underline{/172.46^\circ}\ A}\quad \text{答案得到验证}$$

下面求解I_{ab}。如果假定各电源的内部阻抗很小，则可得到I_{ab}的合理估计。加入0.01 Ω的内部电阻器以及电源电路周围的第四个回路，得到如下网孔方程。

网孔1：

$$(54.01+\mathrm{j}10)I_1-(2+\mathrm{j}5)I_2-(50)I_3-0.01I_4=208\underline{/10^\circ}$$
$$=204.8+\mathrm{j}36.12$$

网孔2：

$$-(2+\mathrm{j}5)I_1+(4.01+\mathrm{j}40)I_2-(\mathrm{j}30)I_3-0.01I_4=208\underline{/-110^\circ}$$
$$=-71.14-\mathrm{j}195.46$$

网孔3：

$$-(50)I_1-(\mathrm{j}30)I_2+(50-\mathrm{j}10)I_3=0$$

网孔4：

$$-(0.01)I_1-(0.01)I_2+(0.03)I_4=0$$

```
>>Z=[(54.01+10i),(-2-5i),-50,-0.01;(-2-5i),
(4.01+40i),-30i,-0.01;-50,-30i,(50-10i),0;-0.01,-0.01,0.03]

Z=
54.0100+10.0000i  -2.0000-5.0000i,  -50.0000  -0.0100
-2.0000-5.0000i  4.0100-40.0000i  0-30.0000i  0.0100
-50.0000 0-30.0000i  50.0000-10.0000i  0
-0.0100  -0.0100  0  0.0300

>>V=[(204.8+36.12i);(-71.14-195.46i);0;0]
V=
1.0e+002*
2.0480+0.3612i
-0.7114-1.9546i
      0
      0
>>I=inv(z)*V

I=
8.9309+2.6973i
```

```
0.0093+4.5159i
5.4623+3.7954i
2.9801+2.4044i
```

$$I_{ab} = -I_1 + I_4 = -(8.931 + j2.697) + (2.98 + j2.404)$$

$$= -5.951 - j0.293 = \mathbf{5.958\angle -177.18^\circ A} \quad \text{答案得到验证}$$

(6) 对结果是否**满意**？本题的求解过程是令人满意的，而且对答案进行了充分验证，可以将所求得的结果作为本题的答案。

练习题12-12 对于如图12-32所示的非对称电路试利用PSpice求解发电机电流I_{ca}、线电流I_{cC}以及相电流I_{AB}。

答 $24.68\angle -90^\circ$ A，$37.25\angle 83.8^\circ$ A，$15.556\angle -75^\circ$ A。

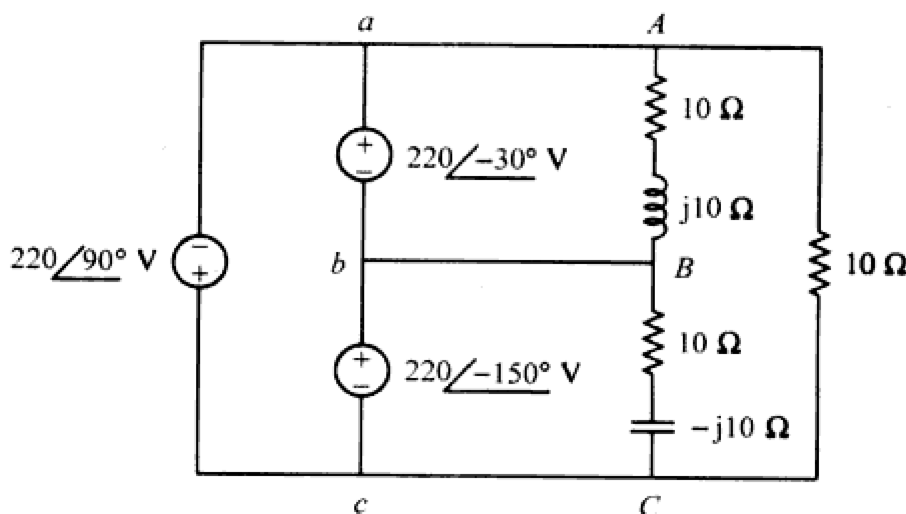


图 12-32 练习题 12-12 的电路原理图

12.10 †应用

三相电源的Y型连接与Δ型连接都有重要的应用。Y型连接电源用于远距离电力传输，此时的传输线电阻损耗（I^2R）最小，这是因为Y型连接的线电压是Δ型连接的$\sqrt{3}$倍，因此传输相同的功率时，其线电流较Δ型连接的线电流小$\sqrt{3}$。Δ型连接电源主要用在需要由三相电源得到三个单相电路的场合，因为家庭照明与家用电器均为单相电源供电，所以在住宅供电系统中通常需要由三相电转换到单相电。三相电用在功率需求较大的工业输电方面，在一些工业应用中，负载是Y型连接还是Δ型连接并不重要。例如，感应电动机既可以采用Y型连接，也可以采用Δ型连接。实际上，有些制造商将电动机在220 V时连接为Δ型，在440 V时连接为Y型，这样电动机的一条线路就可以适应于两种不同的电压。

本节讨论两个实际应用：三相电路的功率测量以及住宅用户配电问题。

12.10.1 三相功率测量

本书11.9节介绍了测量单相电路中平均功率（即有功功率）的仪器——瓦特表。单相瓦特表也可以测量对称三相系统的平均功率，有$P_1 = P_2 = P_3$，总平均功率即一只瓦特表读数的三倍。然而，如果系统是非对称的，则需要两只或三只单相瓦特表测量功率。如图12-33所示的*三表功率测量法*，无论负载是对称的或非对称的、是Y型连接的或Δ型连接的都是适用的。三表功率测量法对于功率因数经常变化的三相系统是非常适用的，总的平均功率为三个瓦特表读数的代数和，即：

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 \tag{12-61}$$

其中，P_1、P_2与P_3分别对应于瓦特表W_1、W_2与W_3的读数。注意，图12-33中的公共参考点o的选取是任意的。如果负载为Y型连接，则参考点o可以连接至其中线点n上。如果负载为Δ型连接，则参考点o可以连接至任意一点。例如，当点o与点b相连时，瓦特表W_2的电压线圈读数为零，即$P_2=0$，表示瓦特表W_2不是必须的。因此，只需两个瓦特表即可测量系统的总功率。

二表功率测量法是最常用的三相功率测量方法。如图12-34所示，两个瓦特表必须正确地与任意两相相连接，应该注意的是，图中各瓦特表的电流线圈测量的是线电流，而相应的电压线圈连接在该相线路与第三相线路之间，测量的是线电压。还要注意，电压线圈的±端要接到与之相应的电流线圈的±端上。虽然各瓦特表的读数不再是任一相的功率值，但是无论负载是Y型连接或是Δ型连接，无论负载是对称的或是非对称的，两个瓦特表读数的代数和仍等于负载吸收的总平均功率。即总平均功率等于两瓦特表读数的代数和：

$$P_T = P_1 + P_2 \tag{12-62}$$

下面将证明该方法对于对称三相系统是成立的。

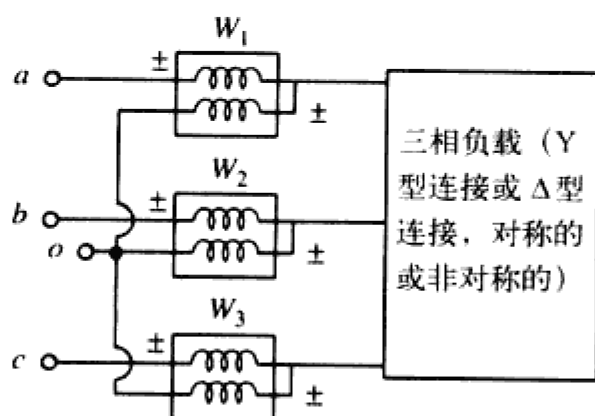


图 12-33　测量三相功率的三表法

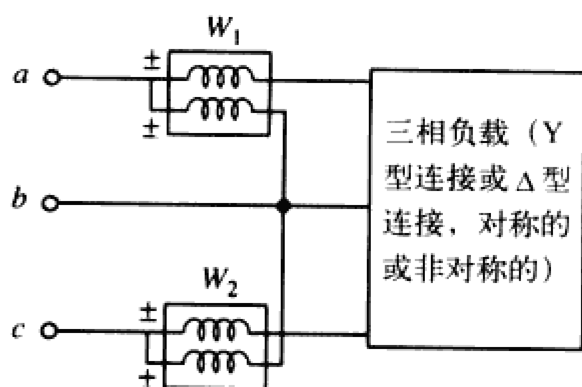


图 12-34　测量三相功率的二表法

考虑如图12-35所示为对称Y型连接负载，下面利用二表法确定负载吸收的平均功率。假定电源相序为abc，负载阻抗为$\boldsymbol{Z}_Y = Z_Y\underline{/\theta}$。由于接入负载阻抗，各表的电压线圈超前于其电流线圈θ角，所以功率因数为$\cos\theta$，已知各线电压超前于相应的相电压30°，因此，相电流$\boldsymbol{I}_a$与线电压$\boldsymbol{V}_{ab}$之间总的相位差为$\theta+30°$，并且瓦特表W_1平均功率的读数为：

$$P_1 = \mathrm{Re}[\boldsymbol{V}_{ab}\boldsymbol{I}_a^*] = V_{ab}I_a\cos(\theta+30°) = V_L I_L\cos(\theta+30°) \tag{12-63}$$

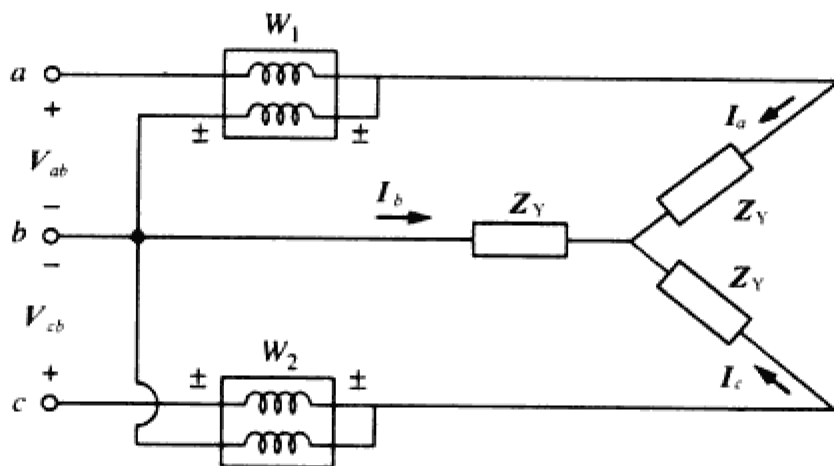


图 12-35　二表功率测量法用于对称Y型连接负载

同理，可以证明瓦特表W_2平均功率的读数为：

$$P_2 = \mathrm{Re}[\boldsymbol{V}_{cb}\boldsymbol{I}_c^*] = V_{cb}I_c\cos(\theta-30°) = V_L I_L\cos(\theta-30°) \tag{12-64}$$

下面利用如下三角恒等式：

$$\begin{aligned}\cos(A+B) &= \cos A\cos B - \sin A\sin B\\ \cos(A-B) &= \cos A\cos B + \sin A\sin B\end{aligned} \tag{12-65}$$

确定式(12-63)与式(12-64)中两个瓦特表读数的和与差：

$$P_1+P_2=V_LI_L[\cos(\theta+30^\circ)+\cos(\theta-30^\circ)]$$
$$=V_LI_L(\cos\theta\cos30^\circ-\sin\theta\sin30^\circ+\cos\theta\cos30^\circ+\sin\theta\sin30^\circ)$$
$$=V_LI_L2\cos30^\circ\cos\theta=\sqrt{3}\ V_LI_L\cos\theta \tag{12-66}$$

其中，$2\cos30^\circ=\sqrt{3}$。比较式(12-66)与式(12-50)表明，瓦特表读数之和即为总的平均功率：

$$\boxed{P_T=P_1+P_2} \tag{12-67}$$

同理，

$$P_1-P_2=V_LI_L[\cos(\theta+30^\circ)-\cos(\theta-30^\circ)]$$
$$=V_LI_L(\cos\theta\cos30^\circ-\sin\theta\sin30^\circ-\cos\theta\cos30^\circ-\sin\theta\sin30^\circ)$$
$$=-V_LI_L2\sin30^\circ\sin\theta \tag{12-68}$$
$$P_2-P_1=V_LI_L\sin\theta$$

其中，$2\sin30^\circ=1$。比较式(12-68)与式(12-51)表明，两个瓦特表读数之差正比于总的无功功率，即：

$$\boxed{Q_T=\sqrt{3}(P_2-P_1)} \tag{12-69}$$

由式(12-67)与式(12-69)，可得总的视在功率为：

$$S_T=\sqrt{P_T^2+Q_T^2} \tag{12-70}$$

用式(12-67)去除式(12-69)即得到功率因数角的正切值：

$$\tan\theta=\frac{Q_T}{P_T}=\sqrt{3}\frac{P_2-P_1}{P_2+P_1} \tag{12-71}$$

由此，可以求得功率因数为$pf=\cos\theta$。综上所述，二表法不仅可以测量总的有功功率与无功功率，还可以用于计算功率因数。由式(12-67)、式(12-69)与式(12-71)可得如下结论：

（1）如果$P_2=P_1$，则负载为电阻性的。

（2）如果$P_2>P_1$，则负载为电感性的。

（3）如果$P_2<P_1$，则负载为电容性的。

虽然上述结果是利用对称Y型连接负载推导出来的，但是对于对称Δ型连接负载同样是有效的。然而，二表功率测量法不适用于中线电流非零的三相四线系统。通常采用三表功率测量法测量三相四线系统的有功功率。

例题12-13 三个瓦特表W_1、W_2、W_3分别与a、b、c三相连接，用于测量例题12-9（图12-23）中非对称Y型号连接负载吸收的总功率。(a) 试预测瓦特表的读数；(b) 试求负载吸收的总功率。

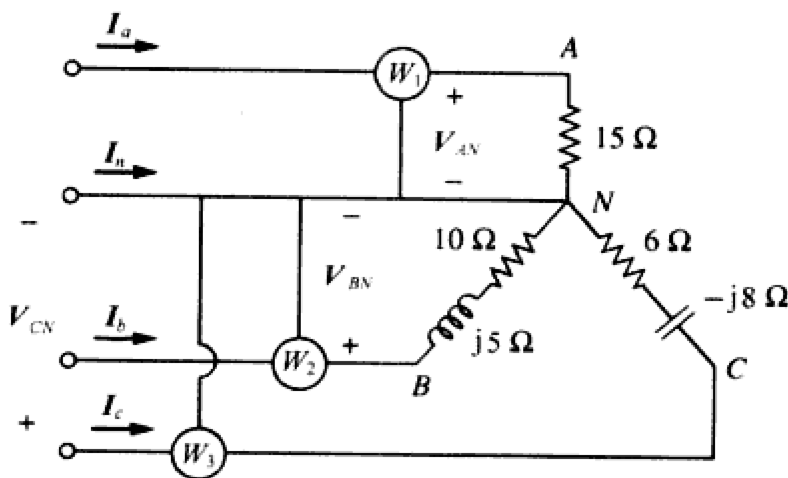


图 12-36 例题 12-13 的电路原理图

解 本题的一部分已在例题 12-9 中解决了。假定瓦特表按照如图 12-36 所示方式连接。

（a）由例题12-9可知：

$$\mathbf{V}_{AN}=100\underline{/0^\circ},\quad \mathbf{V}_{BN}=100\underline{/120^\circ},\quad \mathbf{V}_{CN}=100\underline{/-120^\circ}\text{ V}$$

而

$$\mathbf{I}_a=6.67\underline{/0^\circ},\quad \mathbf{I}_b=8.94\underline{/93.44^\circ},\quad \mathbf{I}_c=10\underline{/-66.87^\circ}\text{ A}$$

瓦特表读数可计算如下：

$$\begin{aligned}P_1&=\text{Re}(\mathbf{V}_{AN}\mathbf{I}_a^*)=V_{AN}I_a\cos(\theta_{\mathbf{V}_{AN}}-\theta_{\mathbf{I}_a})\\&=100\times6.67\times\cos(0^\circ-0^\circ)=667\text{W}\\P_2&=\text{Re}(\mathbf{V}_{BN}\mathbf{I}_b^*)=V_{BN}I_b\cos(\theta_{\mathbf{V}_{BN}}-\theta_{\mathbf{I}_b})\\&=100\times8.94\times\cos(120^\circ-93.44^\circ)=800\text{W}\\P_3&=\text{Re}(\mathbf{V}_{CN}\mathbf{I}_c^*)=V_{CN}I_c\cos(\theta_{\mathbf{V}_{CN}}-\theta_{\mathbf{I}_c})\\&=100\times10\times\cos(-120^\circ+66.87^\circ)=600\text{W}\end{aligned}$$

（b）负载吸收的总功率为：

$$P_\text{T}=P_1+P_2+P_3=667+800+600=2\,067\text{ W}$$

求出如图12-36所示各电阻器吸收的功率，即可用于验证上述结果结果的正确性。

$$\begin{aligned}P_\text{T}&=|I_a|^2(15)+|I_b|^2(10)+|I_c|^2(6)\\&=6.67^2(15)+8.94^2(10)+10^2(6)\\&=667+800+600=2\,067\text{ W}\end{aligned}$$

结果与上式相同。

练习题12-13 对于图12-24所示网络（参见练习题12-9）重做例题12-13。提示：将图12-33中的参考点o连接到点B。

答 （a）2 722 W，0 W，6 177 W；（b）8 899 W。

例题12-14 利用二表法测量Δ型连接负载的功率时，瓦特表的读数为$P_1=1\,560$ W，$P_2=2\,100$ W，如果线电压为220 V，试计算：（a）每相的平均功率；（b）每相的无功功率；（c）功率因数；（d）相阻抗。

解 将已知结果应用于Δ型连接负载上。

（a）总的有功功率，即总的平均功率为：

$$P_\text{T}=P_1+P_2=1\,560+2\,100=3\,660\text{ W}$$

于是，每相的平均功率为：

$$P_\text{p}=\frac{1}{3}P_\text{T}=1\,220\text{ W}$$

（b）总的无功功率为：

$$Q_\text{T}=\sqrt{3}\,(P_2-P_1)=\sqrt{3}\,(2\,100-1\,560)=935.3\text{ VAR}$$

于是，每相的无功功率为：

$$Q_\text{p}=\frac{1}{3}Q_\text{T}=311.77\text{ VAR}$$

（c）功率角为：

$$\theta=\tan^{-1}\frac{Q_\text{T}}{P_\text{T}}=\tan^{-1}\frac{935.3}{3\,660}=14.33^\circ$$

因此，功率因数为：

$$\cos\theta = 0.968\,9\text{（滞后）}$$

由于Q_T为正，即$P_2 > P_1$，所以功率因数是滞后的。

（d）相阻抗为$\boldsymbol{Z}_p = \boldsymbol{Z}_p\underline{/\theta}$，其中$\theta$就是功率因数角，即$\theta = 14.33°$，所以：

$$Z_p = \frac{V_p}{I_p}$$

对于Δ型连接负载而言，$V_p = V_L = 220$ V，则由式（12-46）可得：

$$P_p = V_p I_p \cos\theta \quad \Rightarrow \quad I_p = \frac{1220}{200 \times 0.968\,9} = 5.723 \text{ A}$$

因此，

$$Z_p = \frac{V_p}{I_p} = \frac{220}{5.723} = 38.44\ \Omega$$

且

$$Z_p = 38.44\underline{/14.33°}\ \Omega$$

练习题12-14 假定如图12-35所示对称系统中，线电压为$V_L = 208$ V，瓦特表读数为$P_1 = -560$ W，$P_2 = 800$ W，试确定：(a) 总平均功率；(b) 总无功功率；(c) 功率因数；(d) 相阻抗，并说明该阻抗是电感性的还是电容性的。

答 (a) 240 W，(b) 2 355.6 VAR，(c) 0.101 4，(d) $18.25\underline{/84.18°}\ \Omega$，电感性的。

例题12-15 如图12-35所示的三相平衡负载，其每相的阻抗为$\boldsymbol{Z}_Y = 8 + \text{j}\,6\ \Omega$，如果将该负载连接到208 V电源上，试预测瓦特表W_1与W_2的读数，并求P_T与Q_T。

解 每相的阻抗为：

$$\boldsymbol{Z}_Y = 8 + \text{j}6 = 10\underline{/36.87°}\ \Omega$$

所以，*pf*角为36.87°。又因线电压为$V_L = 208$ V，于是线电流为：

$$I_L = \frac{V_p}{|\boldsymbol{Z}_Y|} = \frac{208/\sqrt{3}}{10} = 12 \text{ A}$$

因此，

$$P_1 = V_L I_L \cos(\theta + 30°) = 208 \times 12 \times \cos(36.87° + 30°) = 980.48 \text{ W}$$
$$P_2 = V_L I_L \cos(\theta - 30°) = 208 \times 12 \times \cos(36.87° - 30°) = 2\,478.1 \text{ W}$$

即瓦特表1的读数为980.48 W；瓦特表2的读数为2 478.1 W，由于$P_2 > P_1$，负载为电感性的，这从负载$\boldsymbol{Z}_Y$本身也显然可知。于是，

$$P_T = P_1 + P_2 = 3.459 \text{ kW}$$

且

$$Q_T = \sqrt{3}\,(P_2 - P_1) = \sqrt{3}\,(1\,497.6) \text{ VAR} = 2.594 \text{ k VAR}$$

练习题12-15 如果图12-35中的负载为Δ型连接，且每相阻抗$\boldsymbol{Z}_P = 30 - \text{j}\,40\ \Omega$，$V_L = 440$ V，试预测瓦特表W_1与W_2的读数，并计算P_T与Q_T。

答 6.166 kW，0.802 1 kW，6.968 kW，−9.291 kVAR。

12.10.2 住宅供电线路

在美国，绝大多数家庭照明与家用电器设备都采用120 V、60 Hz单相交流电（不同区域，供电电压可能是110 V、115 V或117 V）。当地供电公司采用三线交流系统为住宅供电，如图12-37所示为

一种典型的配电情况，12 000 V线电压经过变压器降至120/240 V（有关变压器的详细介绍参见下一章）。变压器输出的三路线通常用不同的颜色加以区分：红色（火线）、黑色（火线）、白色（中线）。如图12-38所示，两个120V电压相位相反，相加后为零。也就是说，$\boldsymbol{V}_w = 0\underline{/0^\circ}$，$\boldsymbol{V}_B = 120\underline{/0^\circ}$，$\boldsymbol{V}_R = 120\underline{/180^\circ} = -\boldsymbol{V}_B$。

$$\boldsymbol{V}_{BR} = \boldsymbol{V}_B - \boldsymbol{V}_R = \boldsymbol{V}_B - (-\boldsymbol{V}_B) = 2\boldsymbol{V}_B = 240\underline{/0^\circ} \tag{12-72}$$

由于绝大多数家用电气设备的工作电压都是120 V，因此室内照明以及家用电器均与120 V线路相连，如图12-39所示。由图12-37可见，所有的家用电器都是并联连接的。耗电量比较大的一些电器，如空调、洗碗机、电炉以及洗衣机等，均接至240 V电源线上。

由于用电的危险性，住宅供电线路必须严格按照当地法规以及美国国家电气规程（National Electricity Code，NEC）予以规范。为了避免事故发生，须采用隔离、接地、保险以及电路断路器等措施。现代线路规程要求第三路线单独接地，地线与中线一样不用于输电，但使得电器设备可以单独接地。图12-40所示为电源插座与120 V rms电源线和地线的连接情况，如图所示，中线在许多关键位置均与地（大地）相连。虽然地线看起来是多余的，但是接地之所以重要的原因是多方面的：首先，接地NEC规程所要求的；其次，接地为雷击放电提供了便捷信道，可以防治雷击破坏输电线路；第三，接地可以最大限度地降低电击触电的危险性。电击现象是电流从人体的某一部分流向另一部分引起的。人体呈现为一个大电阻R，若V是人体与地之间的电位差，则流过人体的电流由欧姆定律决定：

$$I = \frac{V}{R} \tag{12-73}$$

R的值因人而异，并且与人体的干湿程度有关。电击严重程度或致命程度取决于流过人体的电流量、电流流过人体的路径以及人体触电求的时间长度。小于1 mA的电流，应该说不会对人体造成任何危害，但大于10mA的电流就会导致严重的电击。在电击的可能性最大的户外电路以及浴室电路，通常采用现代安全设备——*接地故障电路断路器*（ground-fault circuit interrupter，GFCI）。它实际上就是一个电路断路器，当流过红、白、黑线的电流i_R、i_W、i_B之和不为零时，即$i_R + i_W + i_B \neq 0$，断路器就打开从而使电路断开。

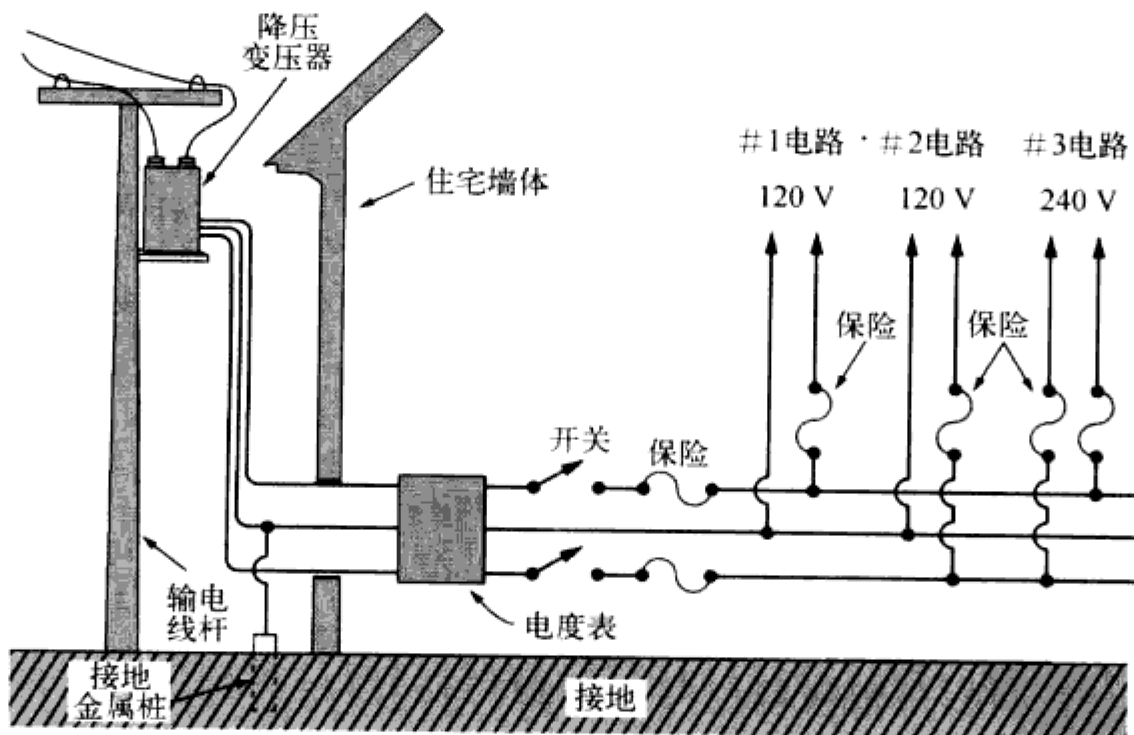


图 12-37　120/240 V 民用住宅供电系统

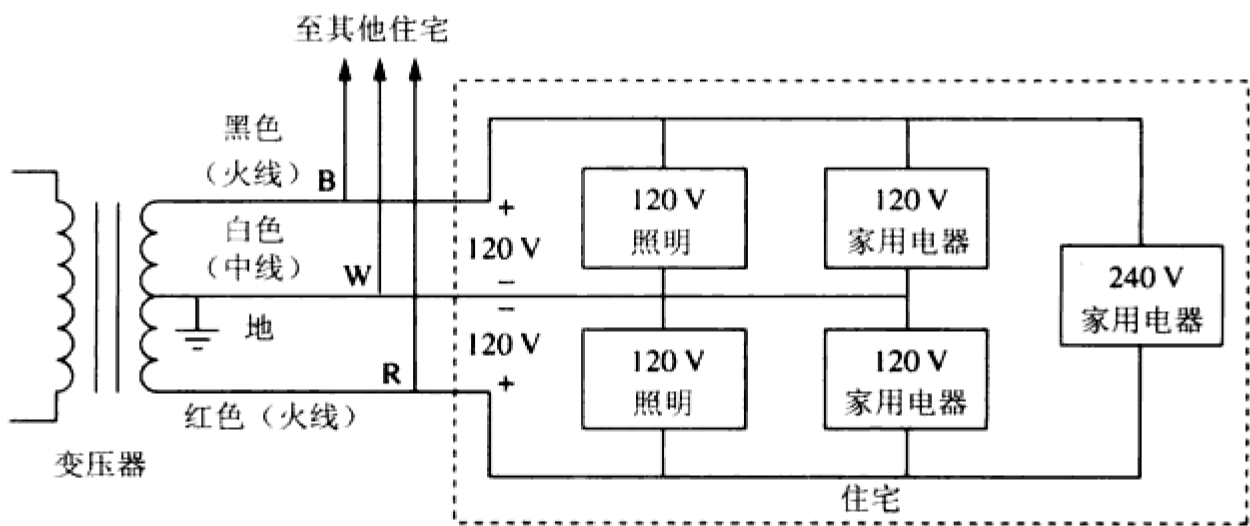


图 12-38 单相三线住宅供电线路

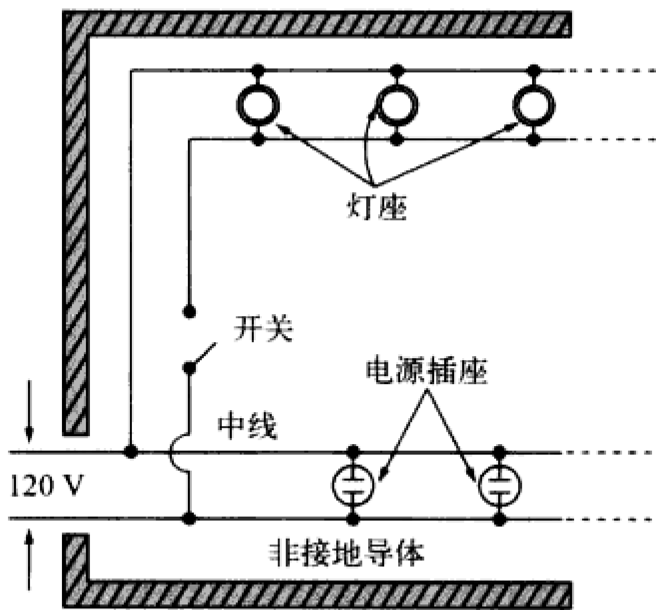


图 12-39 典型的室内供电线路图

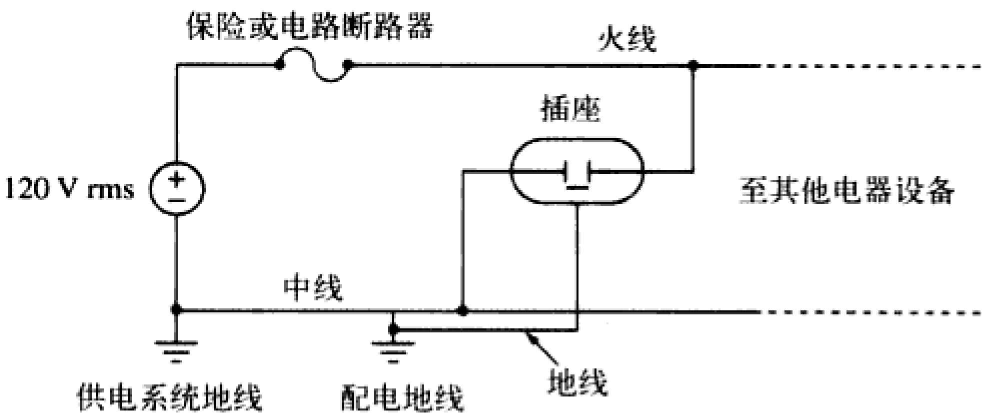


图 12-40 插座与火线和地线的连接方式

避免电击的最好办法是遵守与电气系统和电气装置有关的安全操作规程，下面是其中的一部分：

- 千万不要假定电路是不带电的，一定要检查并确认。
- 必要时应使用安全器具，着适当服装（绝缘靴、绝缘手套等）。
- 切勿同时使用两只手检测高压电路，因为从一只手流到另一只手的电流路径直接经过心脏和胸膛。
- 双手潮湿时，切勿触摸电器设备。牢记水是导电的。

- 收音机、电视机等家用电器中均有大容量电容器，在电源关闭后，需要一段时间才能放电完毕，因此，操作时此类电器设备时一定要极为谨慎。
- 在接线或检修时，总要有另一人在场，以防意外发生。

12.11　本章小结

（1）相序是三相发电机相电压产生的时间顺序。在相序为abc的对称电源系统中，电压$\mathbf{V}_{an}$较$\mathbf{V}_{bn}$超前120°，$\mathbf{V}_{bn}$又较$\mathbf{V}_{cn}$超前120°。在相序为acb的对称电源系统中，电压$\mathbf{V}_{an}$较$\mathbf{V}_{cn}$超前120°，$\mathbf{V}_{cn}$又较$\mathbf{V}_{bn}$超前120°。

（2）对于对称Y型连接负载或对称Δ型连接负载而言，其三相阻抗均是相等的。

（3）对称三相电路最简便的分析的方法是将电源与负载都转换为Y−Y系统，之后分析其单相等效电路。表12-1列出了四种可能结构的相电流与相电压、线电流与线电压的计算公式。

（4）在三相系统中，线电流I_L是指各传输线路中从发电机流向负载的电流，线电压V_L是指除中线（如果有）以外的每一对线之间的电压。相电流I_P是指流过三相负载每一相的电流，而相电压V_P则是每一相的电压。对于Y型连接负载：

$$V_L = \sqrt{3}\,V_P \quad 且 \quad I_L = I_P$$

对于Δ型连接负载：

$$V_L = V_P \quad 且 \quad I_L = \sqrt{3}\,I_P$$

（5）对称三相系统的总瞬时功率是恒定的，且等于其平均功率。

（6）对称三相Y型连接或Δ型连接负载吸收的总复功率为：

$$\mathbf{S} = P + \mathrm{j}Q = \sqrt{3}\,V_L I_L \underline{/\theta}$$

其中，θ为负载阻抗的辐角。

（7）非对称三相系统的分析可以采用节点电压法或网孔电流法。

（8）应用PSpice分析三相电路的方法与分析单相电路时的方法相同。

（9）三相系统总有功功率的测量既可以采用三表功率测量法，也可以采用二表功率测量法。

（10）住宅输电线路采用120/240 V、单相、三线系统。

复习题

12-1　某三相电动机的$\mathbf{V}_{AN} = 220\underline{/-100°}$，$\mathbf{V}_{BN} = 220\underline{/140°}$ V，试问其相序为：

（a）abc　（b）acb

12-2　如果在acb相序下，$\mathbf{V}_{an} = 100\underline{/-20°}$，则$\mathbf{V}_{cn}$为：

（a）$100\underline{/-140°}$　（b）$100\underline{/100°}$

（c）$100\underline{/-50°}$　（d）$100\underline{/10°}$

12-3　对于对称系统，下列条件哪个不是必须的？

（a）$|\mathbf{V}_{an}| = |\mathbf{V}_{bn}| = |\mathbf{V}_{cn}|$

（b）$\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c = 0$

（c）$\mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{bn} + \mathbf{V}_{cn} = 0$

（d）电源电压彼此之间的相位差为120°

（e）三相的负载阻抗是相等的

12-4　在Y型连接负载中，线电流与相电流是相等的。

（a）正确　（b）错误

12-5　在Δ型连接负载中，线电流与相电流是相等的。

（a）正确　（b）错误

12-6　Y−Y系统中，220 V线电压产生的相电压为：

（a）381 V　（b）311 V　（c）220 V

（d）156 V　（e）127 V

12-7　Δ−Δ系统中，100 V相电压产生的线电压为：

（a）58 V　（b）71 V　（c）100 V

（d）173 V　（e）141 V

12-8　当利用abc相序的电源为Y型连接负载供电时，线电压较相应的相电压滞后30°。

（a）正确　（b）错误

12-9　在对称三相电路中，总的瞬时功率等于其平均功率。

（a）正确　（b）错误

12-10　提供给对称Δ型连接负载的总功率的计算

方法与对称Y型连接负载总功率的计算方法相同。

(a) 正确 (b) 错误

答案 12-1 a；12-2 a；12-3 c；12-4 a；12-5 b；12-6 e；12-7 c；12-8 b；12-9 a；12-10 a。

习题①

12.2 节

12-1 如果某对称Y型连接三相发电机的$V_{ab}=400$ V，试求如下两种相序下的相电压：

(a) abc相序 (b) acb相序

12-2 如果某对称三相电路的$V_{an}=160\angle 30°$ V，$V_{cn}=160\angle -90°$ V，试问该电路的相序是什么？并确定V_{bn}。

12-3 试确定$V_{bn}=208\angle 130°$ V且$V_{cn}=208\angle 10°$ V的对称三相电路的相序，并求出V_{an}。

12-4 某相序为abc、$V_L=200$ V的三相系统为阻抗为$Z_L=40\angle 30°$ Ω的Y型连接负载供电，试求线电流。

12-5 对于某Y型连接的负载，终端处三路输电线与中线之间电压的时域表达式为：

$$v_{AN}=150\cos(\omega t+32°)\text{ V}$$

$$v_{BN}=150\cos(\omega t-88°)\text{ V}$$

$$v_{CN}=150\cos(\omega t+152°)\text{ V}$$

试写出线电压v_{AB}、v_{BC}以及v_{CA}的时域表达式。

12.3 节

12-6 对于如图12-41所示的Y−Y电路，试求线电流、线电压与负载电压。

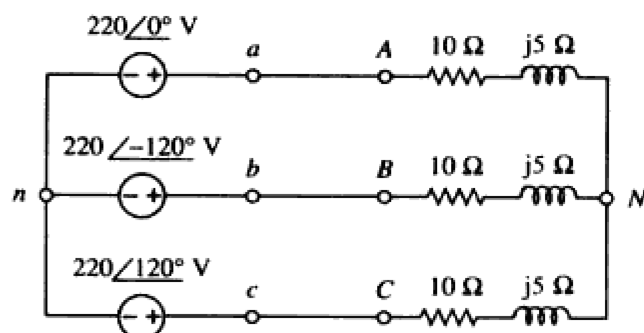


图 12-41 练习题 12-6 的电路原理图

12-7 试确定如图12-42所示三相电路的线电流。

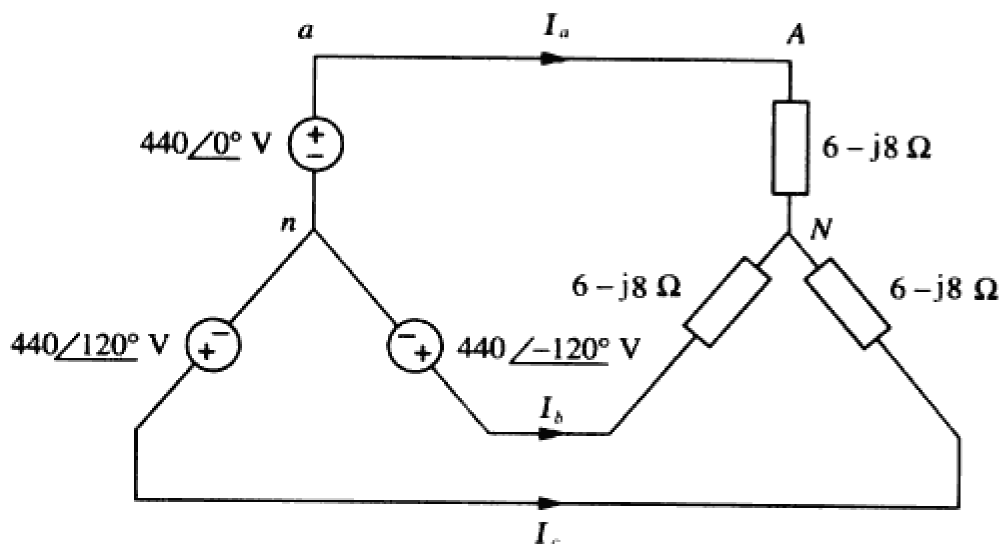


图 12-42 练习题 12-7 的电路原理图

12-8 在某对称三相Y−Y系统中，电压源为abc相序，且$V_{an}=100\angle 20°$ Vrms，每相的线路阻抗为0.6 + j 1.2 Ω，而负载的每相阻抗为10 + j 14 Ω。试计算线电流与负载电压。

12-9 某对称Y-Y四线系统的相电压为：

$$V_{an}=120\angle 0°,\quad V_{bn}=120\angle -120°$$

$$V_{cn}=120\angle 120°\text{ V}$$

每相的负载阻抗为19 + j 13 Ω，每相的线路阻抗为1 + j 2 Ω，试求线电流与中线电流。

12-10 对于如图12-43所示电路，试确定中线电流。

① 除非特别声明，所有的电压与电流均为 rms 值。

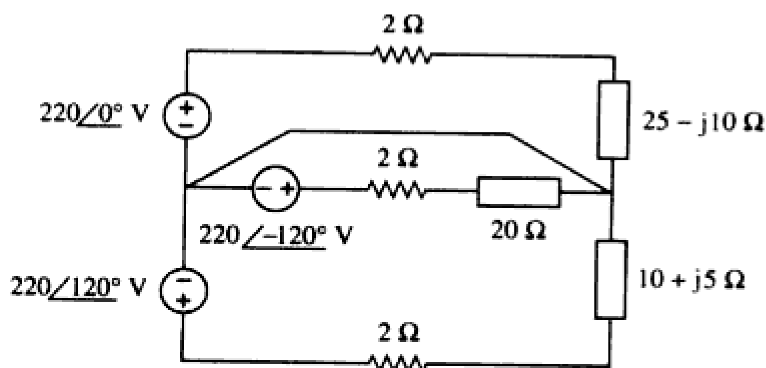


图 12-43 练习题 12-10 的电路原理图

12.4 节

12-11 在如图12-44所示的Y−Δ系统中，电源为正序，V_{an} = 120/0° V，且相阻抗为Z_p = 2 − j3 Ω。试计算线电压V_L与线电流I_L。

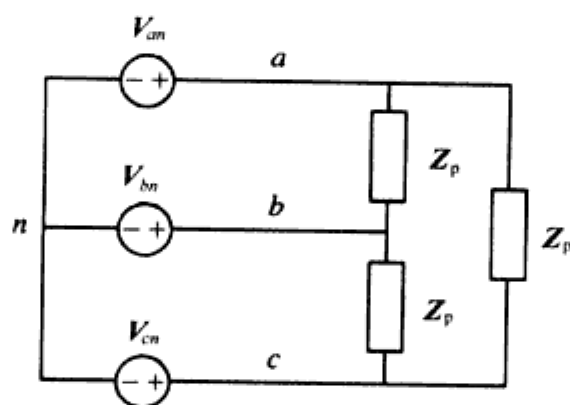


图 12-44 练习题 12-11 的电路原理图

12-12 试求如图12-45所示Y−Δ电路中的线电流，假定Z_Δ = 60/45° Ω。

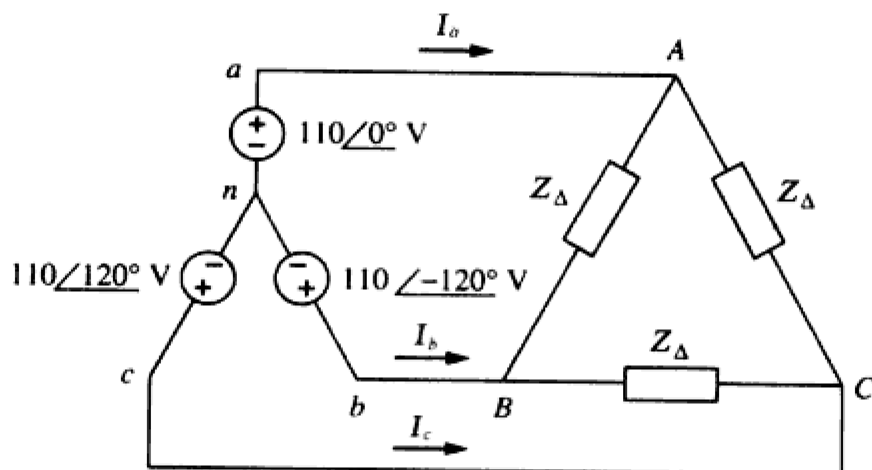


图 12-45 练习题 12-12 的电路原理图

12-13 在如图12-46所示对称三相Y−Δ系统中，试求线电流I_L以及传递给负载的平均功率。

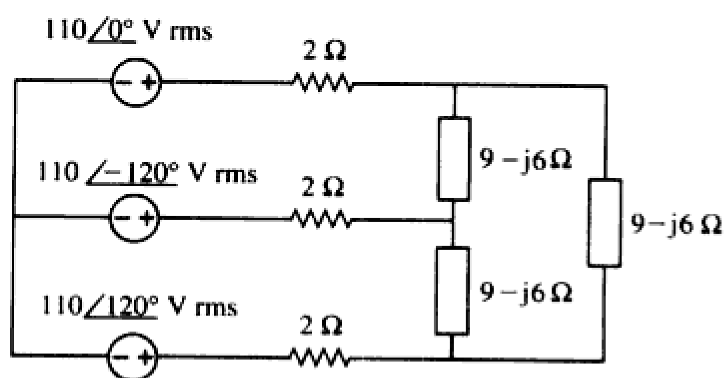


图 12-46 练习题 12-13 的电路原理图

12-14 试确定如图12-47所示三相电路中的线电流。

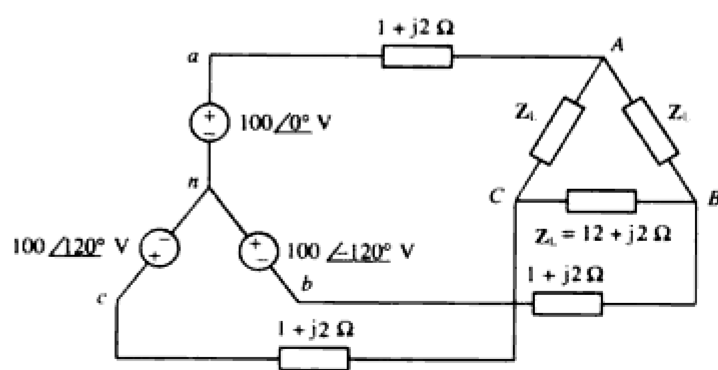


图 12-47 练习题 12-14 的电路原理图

12-15 如图12-48所示电路由线电压为210 V的对称三相电源激励，如果Z_l = 1 + j 1 Ω，Z_Δ = 24 − j 30 Ω且Z_Y = 12 + j 5 Ω，试确定合并负载的线电流大小。

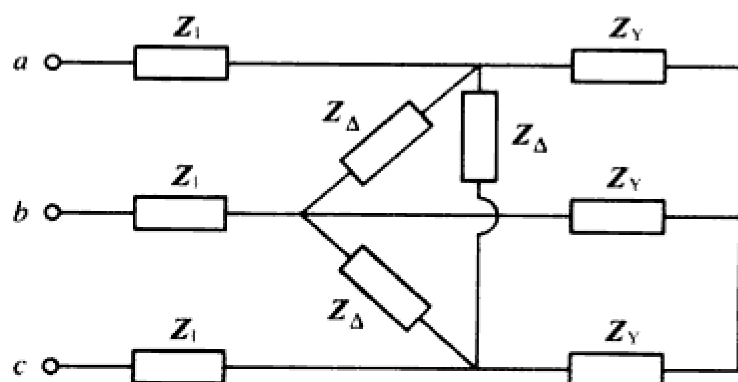


图 12-48 练习题 12-15 的电路原理图

12-16 某对称Δ型连接负载的相电流 $I_{AC}=10\angle -30°$ A。

(a) 假定电路按正序工作，试确定三个线电流。

(b) 如果线电压 $V_{AB}=110\angle 0°$ V，试计算负载阻抗。

12-17 某对称Δ型连接负载的线电流 $I_a=10\angle -25°$ A，试求相电流 I_{AB}、I_{BC} 与 I_{CA}。

12-18 如果如图 12-49 所示网络中 $V_{an}=440\angle 60°$ V，试求负载的相电流 I_{AB}、I_{BC} 与 I_{CA}。

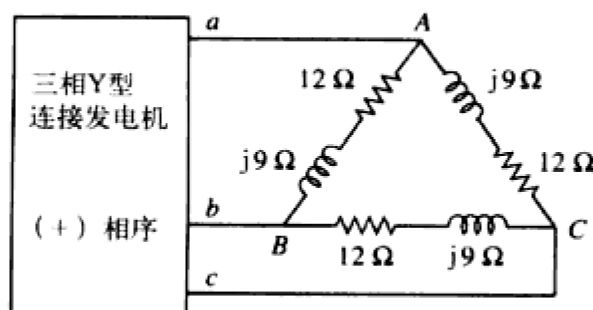


图 12-49 练习题 12-18 的电路原理图

12.5 节

12-19 对于图 12-50 所示的Δ－Δ电路，试计算相电流和线电流。

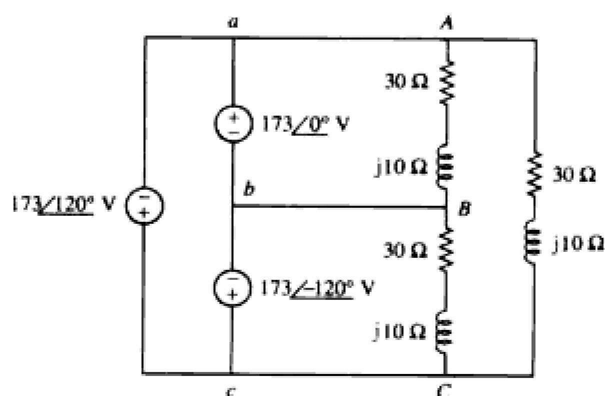


图 12-50 练习题 12-19 的电路原理图

12-20 参见如图 12-51 所示Δ－Δ电路，试求线电流与相电流。假定每相的负载阻抗为 $Z_L=12+j9\ \Omega$。

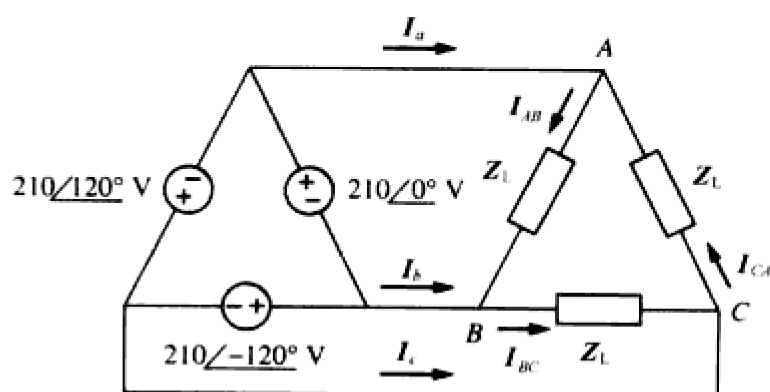


图 12-51 练习题 12-20 的电路原理图

12-21 由230 V发电机组成的Δ型连接电源与每相阻抗为 $Z_L=10+j8\ \Omega$ 的对称Δ型连接负载相连，如图 12-52 所示。

(a) 试确定 I_{AC} 的值。

(b) I_b 的值为多少？

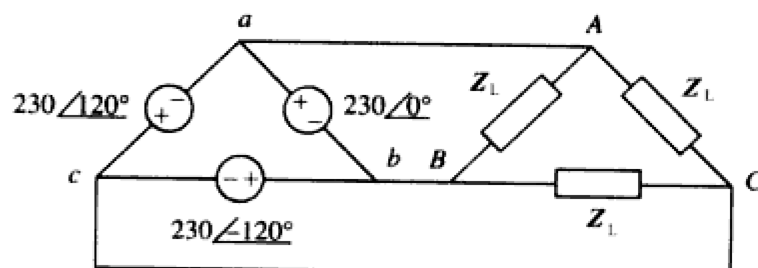


图 12-52 练习题 12-21 的电路原理图

12-22 试求如图 12-53 所示三相网络的线电流 I_a、I_b 与 I_c，假定 $Z_\Delta=12-j15\ \Omega$，$Z_Y=4+j6\ \Omega$，$Z_l=2\ \Omega$。

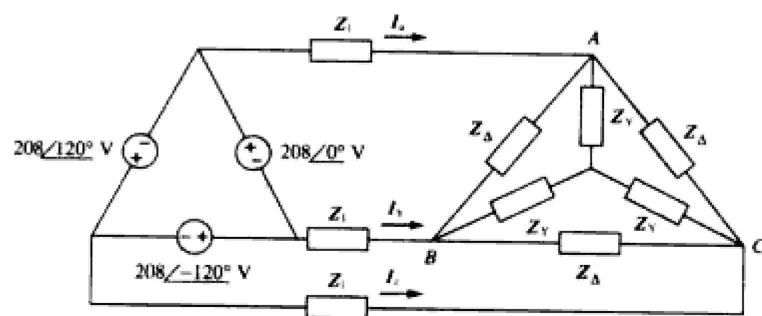


图 12-53 练习题 12-22 的电路原理图

12-23 线电压为202 Vrms的三相对称系统为阻抗为 $Z_p=25\angle 60°\ \Omega$ 的Δ型连接负载供电。

(a) 试求线电流。

(b) 试利用与线路A和线路C相连接的两个瓦特表确定提供给负载的总功率。

12-24 某对称Δ型连接电源的相电压 $V_{ab}=416\angle 30°$ V，且相序为正序。如果该电源与一对称Δ型连接负载相连，试求线电流与

相电流。假定每相的负载阻抗为$60\angle 30^\circ\ \Omega$，每相的线路阻抗为$1+\mathrm{j}\,1\Omega$。

12.6 节

12-25 在如图12-54所示电路中，如果$V_{ab}=440\angle 10^\circ$ V，$V_{bc}=440\angle -110^\circ$ V，$V_{ca}=440\angle 130^\circ$ V，试求各线电流。

12-26 在如图12-55所示对称电路中，$V_{ab}=125\angle 0^\circ$ V，试求线电流I_{aA}、I_{bB}与I_{cC}。

12-27 某Δ型连接电源为三相对称系统中的Y型连接负载供电，如果每相的线路阻抗为$2+\mathrm{j}1\ \Omega$，每相的负载阻抗为$6+\mathrm{j}\,4\ \Omega$，试求负载线电压的大小。假定电源相电压为$V_{ab}=208\angle 0^\circ$ Vrms。

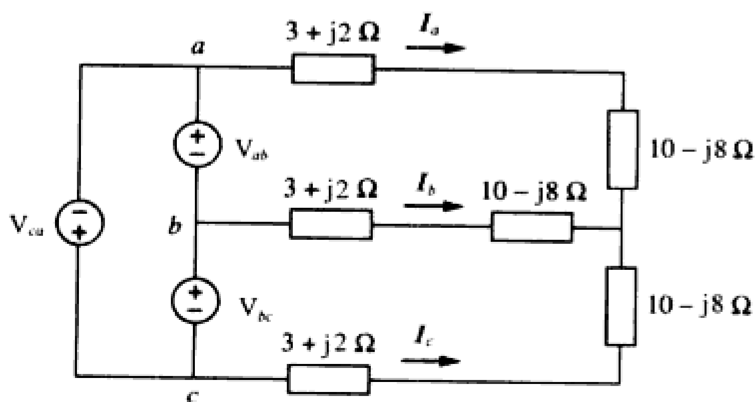


图 12-54 练习题 12-25 的电路原理图

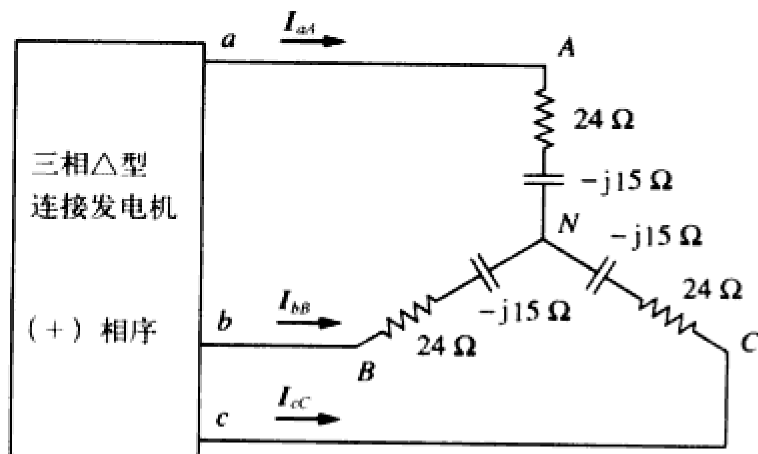


图 12-55 练习题 12-26 的电路原理图

12-28 某Y型连接负载的线电压大小为440 V，且在60 Hz时的相序为正序。如果$Z_1=Z_2=Z_3=25\angle 30^\circ$，试求所有线电流与相电压。

12.7 节

12-29 某对称三相Y－Δ系统中，$V_{an}=120\angle 0^\circ$ Vrms，$Z_\Delta=51+\mathrm{j}45\ \Omega$，如果每相的线阻抗为$0.4+\mathrm{j}1.2\ \Omega$，试求传递给负载的总复功率。

12-30 在如图12-56所示电路中，线电压的rms值为208 V，试求传递给负载的平均功率。

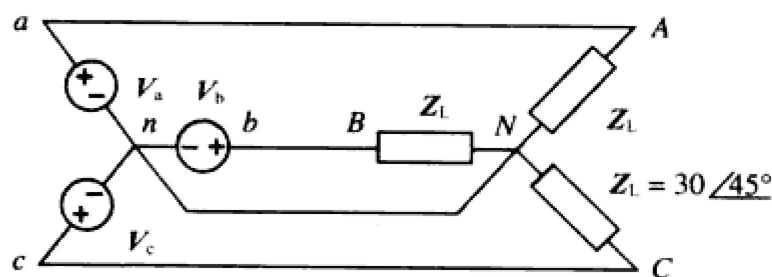


图 12-56 练习题 12-30 的电路原理图

12-31 线电压为240 V的60 Hz三相电源给某对称Δ型连接负载供电，各相负载在功率因数为0.8滞后时提取的功率为6 kW。试求：

(a) 每相的负载阻抗；

(b) 线电流；

(c) 使得从电源获得的电流最小所需的与各相负载相并联的电容值。

12-32 某对称Y型连接负载与$V_{ab}=240\angle 0^\circ$ V的60 Hz三相电源相连，该负载的功率因数$pf=0.5$滞后，各相提取的功率为5 kW。

(a) 试确定负载阻抗Z_Y；

(b) 试求I_a、I_b与I_c。

12-33 某三相电源传递给相电压为208 V、功率因数为0.9滞后的某Y型连接负载的功率为4 800 VA。试计算电源的线电流与线电压。

12-34 某相阻抗为$10-\mathrm{j}\,16\ \Omega$的对称Y型连接负载与线电压为220 V的对称三相发电机相连接，试确定线电流与负载吸收的复功率。

12-35 三个$60+\mathrm{j}\,30\ \Omega$阻抗组成Δ型连接负载，与230 Vrms三相电路相连接。另外三个$40+\mathrm{j}\,10\ \Omega$阻抗组成Y型连接负载，并与相同的三相电路相连接。试确定：

(a) 线电流；

(b) 提供给两个负载的总复功率；

(c) 发端电压。

12-36 某4200 V三相输电线的各相负载为$4+\mathrm{j}\ \Omega$，如果在功率因数为0.75滞后时提供给负载的功率为1 MVA，试求：

(a) 复功率；

(b) 线路的功率损耗；

(c) 发端电压。

12-37 为某Y型连接负载馈电的三相系统在功率因数为0.6超前时测得的总功率为12 kW，如果线电压为208 V，试计算线电流I_L与负

载阻抗Z_Δ。

12-38 已知如图12-57所示电路，试求负载吸收的总复功率。

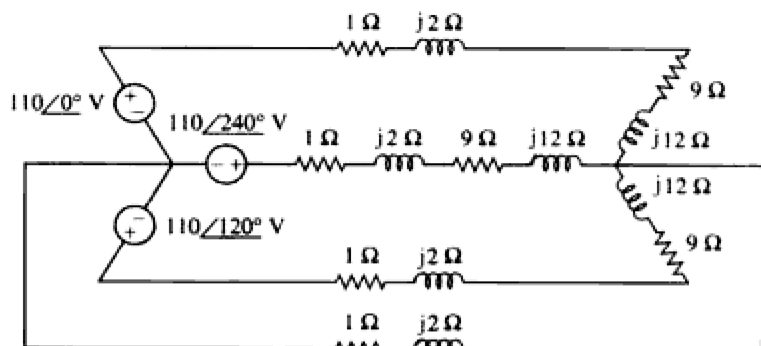


图 12-57 练习题 12-38 的电路原理图

12-39 试求如图12-58所示电路中负载吸收的有功功率。

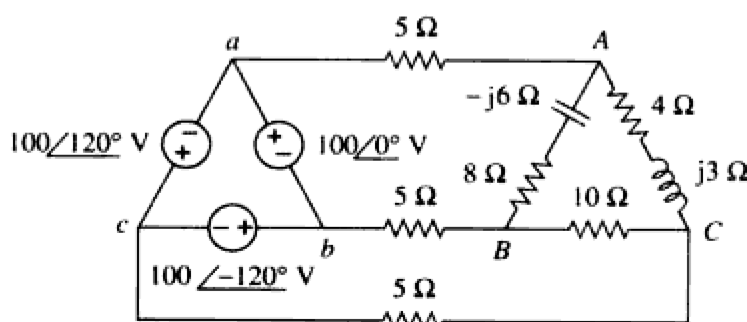


图 12-58 练习题 12-39 的电路原理图

12-40 对如图12-59所示的三相电路，试求$Z_\Delta = 21 + j\,24\ \Omega$的Δ型连接负载吸收的平均功率。

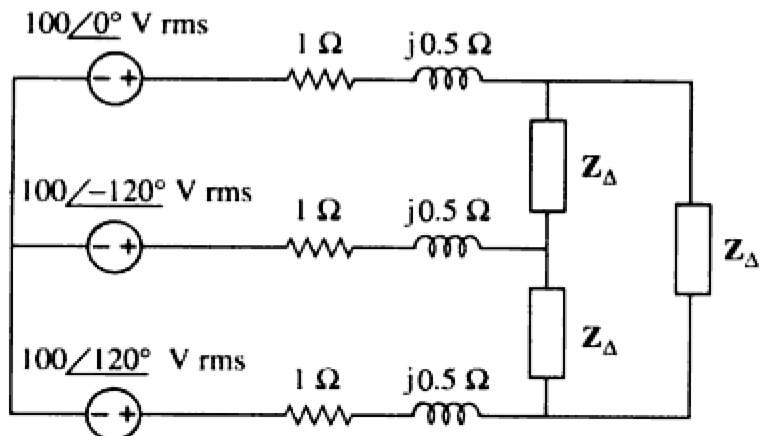


图 12-59 练习题 12-40 的电路原理图

12-41 某对称Δ型连接负载在功率因数为0.8滞后时，从电源提取的功率为5 kW。如果三相系统的线电压有效值为400 V，试求线电流。

12-42 某对称三相发电机传递给各相阻抗为30 − j 40 Ω的Y型连接负载的功率为7.2 kW，试求线电流I_L与线电压V_L。

12-43 参见图12-48，试确定合并负载吸收的复功率。

12-44 某三相输电线路的每相阻抗为1 + j 3 Ω，该输电线给对称Δ型连接负载供电，负载吸收的总复功率为12 + j 5 kVA，如果负载端的线电压大小为240 V，试计算电源端的线电压大小与电源的功率因数。

12-45 某对称Y型连接负载通过每相阻抗为0.5 + j2 Ω的对称输电线与发电机相连。如果负载额定值为450 kW，功率因数0.708滞后，线电压440 V，试求发电机的线电压。

12-46 某三相负载由三个100 Ω电阻器构成，既可以连接为Y型，又可以连接为Δ型。试确定三相电源线电压为110 V时，哪一种连接从电源吸收的平均功率最大。假定输电线路阻抗为零。

12-47 如下三个相互并联的三相负载由对称三相电源供电：

负载1：250 kVA，pf = 0.8滞后

负载2：300 kVA，pf = 0.95超前

负载3：450 kVA，pf = 1

如果线电压为13.8 kV，试计算线电流与电源的功率因数。假定输电线路阻抗为零。

12-48 某对称正序Y型连接电源的$V_{an} = 240\angle 0^\circ$ Vrms，并且通过各相阻抗为2 + j3 Ω的输电线路给非对称Δ型连接负载供电。

(a) 试计算线电流，假定$Z_{AB} = 40 + j15\ \Omega$，$Z_{BC} = 60\ \Omega$，$Z_{CA} = 18 - j12\ \Omega$；

(b) 试求电源提供的复功率。

12-49 各相阻抗由20 Ω电阻器与10 Ω感性电抗组成，如果线电压为220 Vrms，试计算如下两种情况下负载吸收的平均功率：

(a) 三相负载为Δ型连接；

(b) 三相负载为Y型连接。

12-50 某$V_L = 240$ Vrms的对称三相电源，在功率因数为0.6滞后时为两个Y型连接并联负载提供的功率为8 kVA，如果其中一个负载在功率因数为1时吸收的功率为3 kW，试计算第二个负载的各相阻抗。

12.8 节

12-51 考虑如图12-60所示系统，如果$Z_1 = 8 + j\ 6\ \Omega$，$Z_2 = 4.2 - j\,2.2\ \Omega$，$Z_3 = 10 + j\,0\ \Omega$。

(a) 试求相电流I_{AB}、I_{BC}与I_{CA}；

(b) 试计算线电流I_{aA}、I_{bB}与I_{cC}。

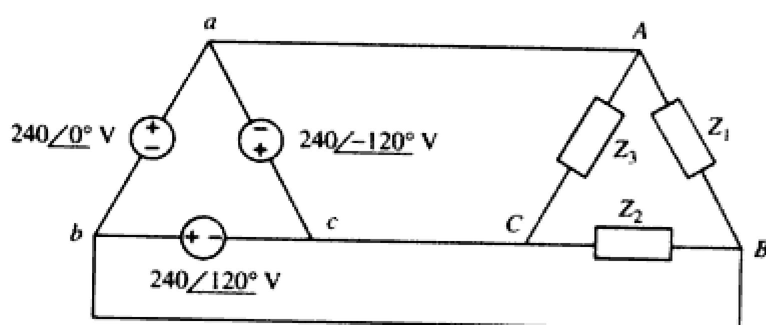


图 12-60　练习题 12-51 的电路原理图

12-52　某四线Y－Y电路中，

$$V_{an}=120\angle 120^\circ,\quad V_{bn}=120\angle 0^\circ$$
$$V_{cn}=120\angle -120^\circ \text{ V}$$

如果阻抗为：

$$Z_{AN}=20\angle 60^\circ,\quad Z_{BN}=30\angle 0^\circ$$
$$Z_{cn}=40\angle 30^\circ\ \Omega$$

试求中线电流。

12-53　在如图12-61所示的Y－Y系统中，与电源相连接的负载是非对称的。(a) 试计算I_a、I_b与I_c；(b) 试求传递给该负载的总功率。假定$V_p=240$ Vrms。

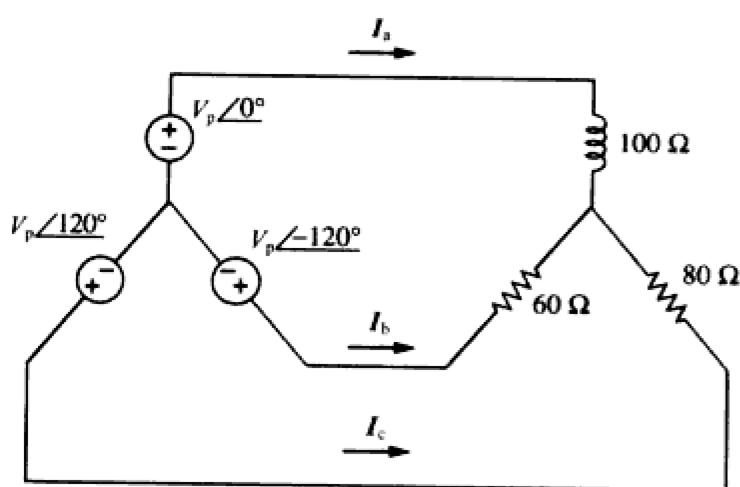


图 12-61　练习题 12-53 的电路原理图

12-54　某$V_P=210$ Vrms的对称三相Y型连接电源给相阻抗为$Z_A=80\ \Omega$，$Z_B=60+\mathrm{j}\ 90\ \Omega$，$Z_C=\mathrm{j}80\ \Omega$的Y型连接三相负载供电，试计算线电流以及传递给负载的复功率。假定电路中连接有中线。

12-55　线电压为240 Vrms的正序三相电源驱动如图12-62所示的非对称Δ型连接负载，试求相电流与总复功率。

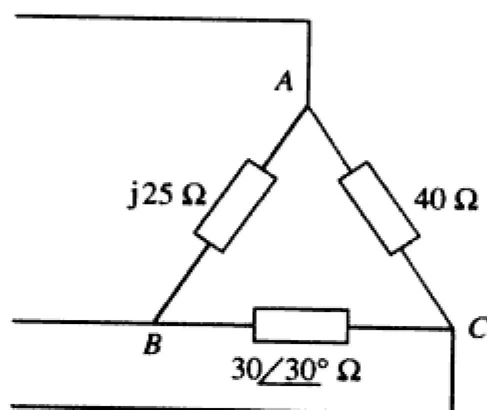


图 12-62　练习题 12-55 的电路原理图

12-56　参见如图12-63所示的非对称电路，试计算：

(a) 线电流；

(b) 负载吸收的有功功率；

(c) 电源提供的总复功率。

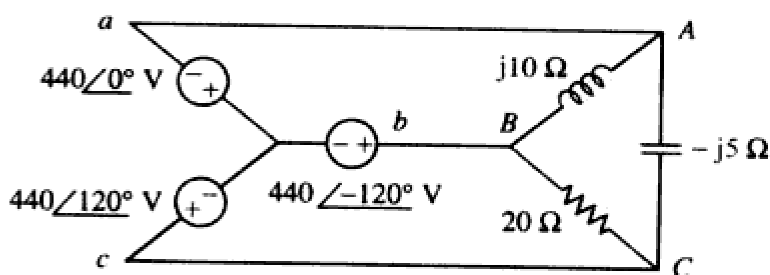


图 12-63　练习题 12-56 的电路原理图

12-57　试确定如图12-64所示三相电路的线电流。假定$V_a=110\angle 0^\circ$ V，$V_b=110\angle -120^\circ$ V，$V_c=110\angle 120^\circ$ V。

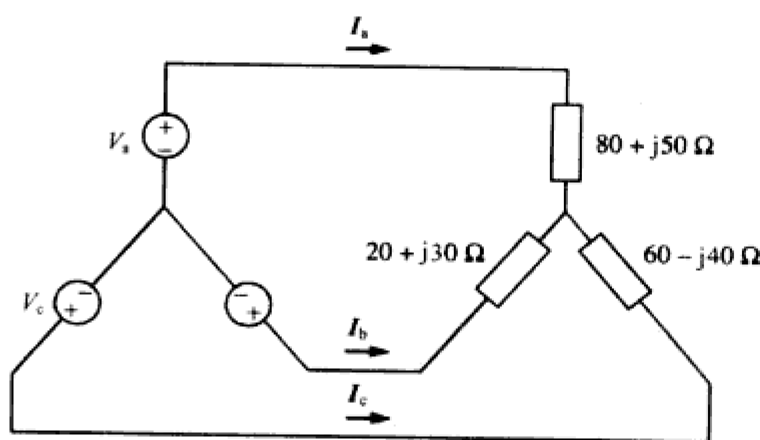


图 12-64　练习题 12-57 的电路原理图

12.9 节



12-58　试利用PSpice求解习题12-10。

12-59　如图12-65所示电源为对称、正序三相电源，如果$f=60$Hz，试利用PSpice求解V_{AN}、V_{BN}与V_{CN}。

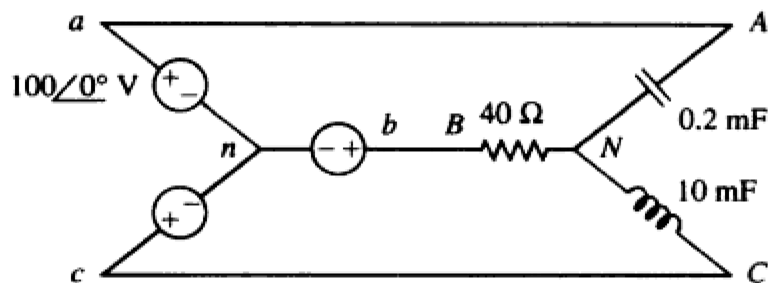


图 12-65 练习题 12-59 的电路原理图

12-60 试利用PSpice确定如图12-66所示单相三线电路中的I_o，假定$Z_1 = 15 - j\,10\ \Omega$，$Z_2 = 30 + j\,20\ \Omega$且$Z_3 = 12 + j\,5\ \Omega$。

12-61 已知如图12-67所示电路，试利用PSpice确定电流I_{aA}与电压V_{BN}。

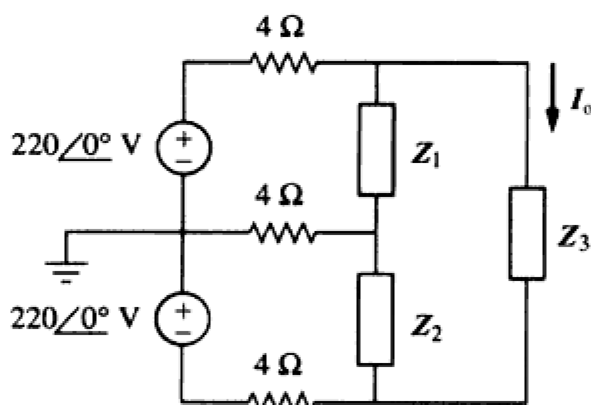


图 12-66 练习题 12-60 的电路原理图

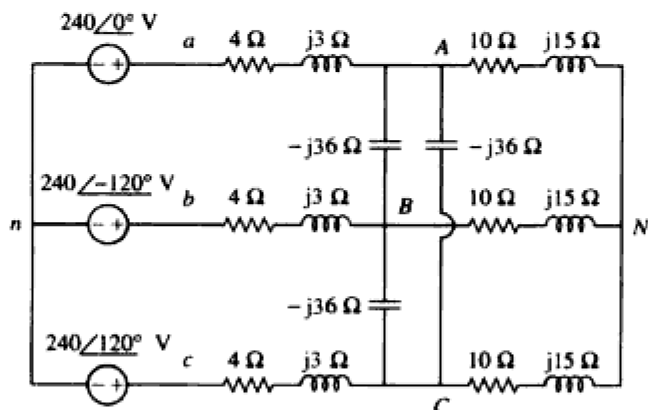


图 12-67 练习题 12-61 的电路原理图

12-62 如图12-68所示电路的工作频率为60 Hz，试利用Pspice求解电源电流I_{ab}与线电流I_{bB}。

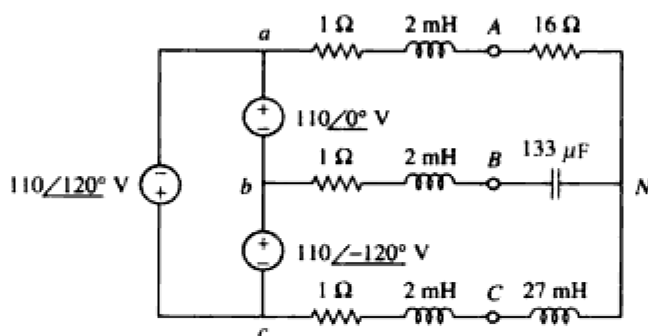


图 12-68 练习题 12-62 的电路原理图

12-63 试利用PSpice求解如图12-69所示非对称三相系统中的电流I_{aA}与I_{AC}。假定$Z_1 = 2 + j$，$Z_1 = 40 + j\,20\ \Omega$，$Z_2 = 50 - j\,30\ \Omega$，$Z_3 = 25\ \Omega$。

12-64 对如图12-58所示电路，试利用PSpice求解线电流与相电流。

12-65 某对称三相电路如图12-70所示，试利用PSpice求解线电流I_{aA}、I_{bB}与I_{cC}。

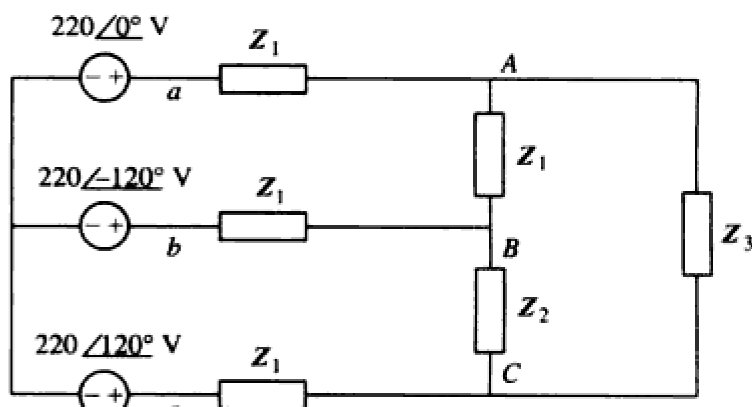


图 12-69 练习题 12-63 的电路原理图

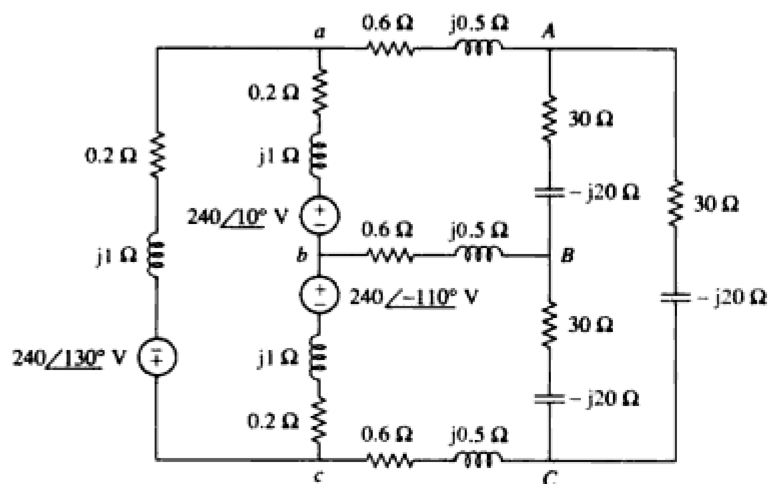


图 12-70 练习题 12-65 的电路原理图

12.10 节

12-66 如图12-71所示的三相四线系统的线电压为208 V，图中电源电压是对称的，利用三表法测量Y型连接电阻性负载吸收的功率。试计算：

(a) 中线电压；

(b) 电流I_1、I_2、I_3与I_n；

(c) 三个瓦特表的读数；

(d) 负载吸收的总功率。

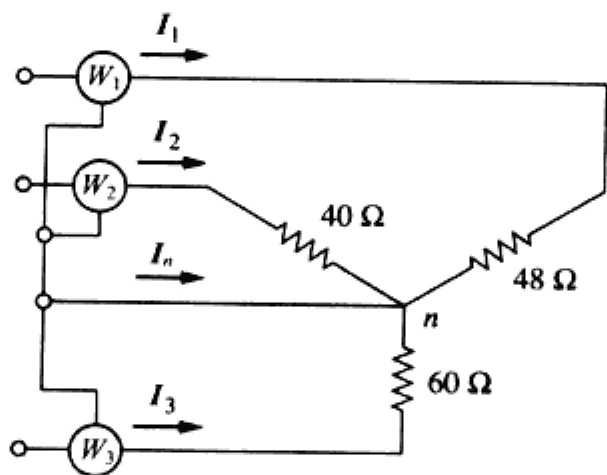


图 12-71 练习题 12-66 的电路原理图

*12-67 如图12-73所示，相电压为120 V的正序三相四线输电线给对称电动机负载供电，在功率因数为0.85滞后时，负载功率为260 kVA，电动机负载与三路主线a、b、c相连接，另外，白炽灯负载（pf = 1）的连接方式为：24 kW白炽灯连接在线路a与中线之间；15 kW白炽灯连接在线路b与中线之间；9 kW白炽灯连接在线路c与中线之间。

(a) 如果利用三个瓦特表测量每路输电线的功率，试计算各瓦特表的读数；

(b) 试求中线电流的大小。

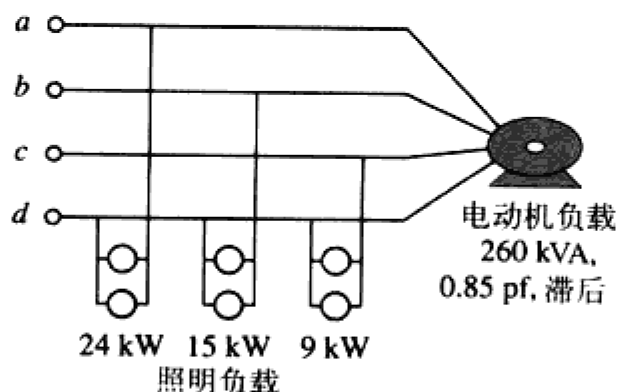


图 12-72 练习题 12-67 的电路原理图

12-68 给某电动机供电的三相Y型连接交流发电机的电表读数表明，线电压为330 V，线电流为8.4 A，总的线功率为4.5 kW，试求：

(a) 单位为的VA负载功率；

(b) 负载的功率因数；

(c) 相电流；

(d) 相电压。

12-69 某商店有三个对称三相负载，这三个负载分别为：

负载1：功率因数为0.85滞后时为16 kVA，

负载2：功率因数为0.6滞后时为12 kVA，

负载3：功率因数为1时为8 kW。

负载线电压在60 Hz时为208 Vrms，线阻抗为0.4 + j 0.8 Ω，试确定线电流与传递给负载的复功率。

12-70 二表法测得三相电动机在240 V输电线路下的$P_1 = 1200$ W，$P_2 = -400$ W，假定电动机负载为Y型连接，提取的线电流为6 A，试计算电动机的功率因数及其相阻抗。

12-71 在如图12-73所示电路中，两个瓦特表与非对称负载相连接，使得正序供电对称电源的$V_{ab} = 208\underline{/0^\circ}$ V。

(a) 试确定每个瓦特表的读数；

(b) 试计算负载吸收的总视在功率。

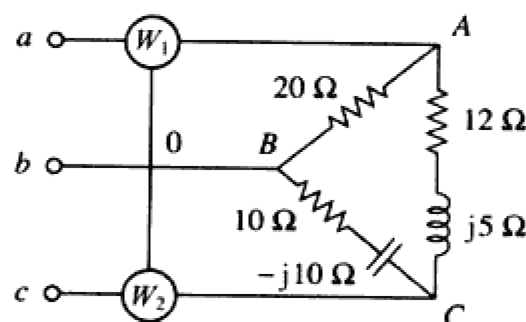


图 12-73 练习题 12-71 的电路原理图

12-72 如果瓦特表W_1与W_2按二表法分别接到图12-44的线路a与线路b以及线路b与线路c线之间，以测量Δ型连接负载吸收的功率。试预测两个瓦特表读数。

12-73 对于如图12-74所示电路，试求图中瓦特表的读数。

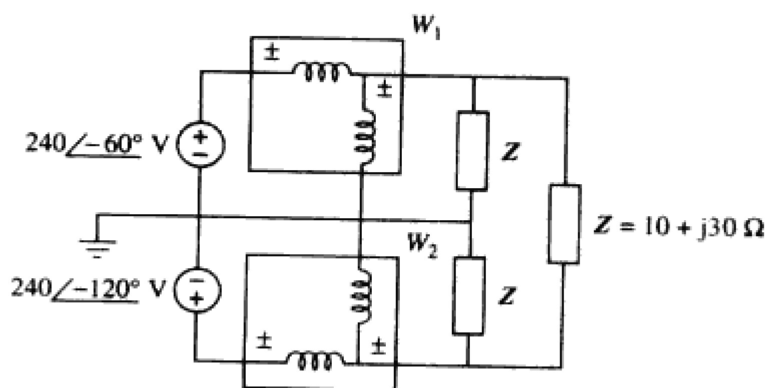


图 12-74 练习题 12-73 的电路原理图

12-74 试预测如图12-75所示电路中瓦特表的读数。

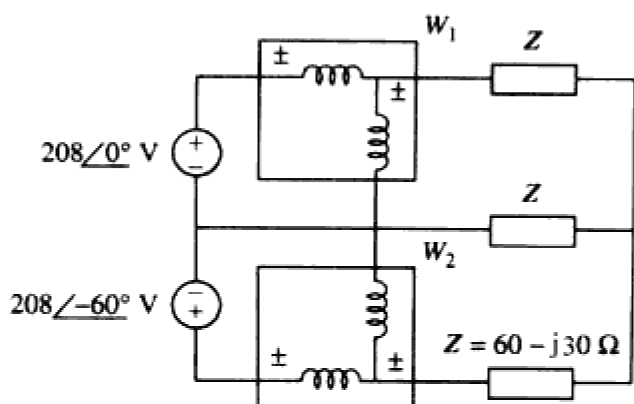


图 12-75 练习题 12-74 的电路原理图

12-75 某人的人体电阻为600 Ω，试问在如下两种情况下，流过其未接地身体的电流为多少？

(a) 当他接触12 V电池的两极时；

(b) 当他的手指插入120 V照明插座时。

12-76 试证明在相同额定功率条件下，120 V电器的功率损耗I^2R高于240 V电器的功耗。

e2d

综合题

12-77 某三相发电机在功率因数为0.85滞后时，提供的功率为3.6 kVA，如果传递给负载的功率为2 500 W，并且每相的线路损耗为80 W，试问发电机的内部损耗为多少？

12-78 某Y型连接的三相440 V、51 kW、60 kVA电感性负载工作频率为60 Hz，现欲将其功率因数提高至0.95滞后，试问与各负载阻抗相并联的电容器容值为多少？

12-79 某对称三相发电机的相序为abc，相电压为$V_{an}=255\angle 0°$ V，利用该发电机给一个各相阻抗为12 + j 5 Ω 的Y型连接感应电动机供电。试求线电流与负载电压，假定每相的线路阻抗为2 Ω。

12-80 某对称三相电源为如下三个负载提供功率：

负载1：功率因数为0.83滞后时为6 kVA，

负载2：未知，

负载3：功率因数为0.707 1超前时为8 kW。

如果线电流为84.6 Arms，负载的线电压为208 Vrms，合并负载的功率因数为0.8滞后。试确定未知负载。

12-81 某职业中心由对称三相电源供电，该中心有如下四个对称三相负载：

负载1：功率因数为0.8超前时为150 kVA，

负载2：功率因数为1为100 kW，

负载3：功率因数为0.6滞后时为200 kVA，

负载4：80 kW与95 kVAR（电感性的）。

如果每相的线阻抗为0.02 + j 0.05 Ω，负载端的线电压为480 V，试求电源端的线电压。

12-82 某对称三相系统采用各相阻抗为2 + j 6 Ω的配电线路，该系统为两个相互并联的三相负载供电，其中第一个负载为对称Y型连接负载，在功率因数为0.8滞后时吸收的功率为400 kVA，第二个负载为各相阻抗等于10 + j 8 Ω的对称Δ型连接负载。如果负载端的线电压幅度为2 400 Vrms，试计算电源端的线电压幅度以及提供给两个负载的总复功率。

12-83 某商用三相感应电动机以满载120马力（1马力 = 746 W）运行，在滞后功率因数为0.707时的工作效率为95%。该电动机在功率因数为1时与一个80 kW对称三相加热器相并联。如果线电压幅度为480 Vrms，试计算线电流。

12-84 图12-76所示为与440 V线电压相连的一个三相Δ型连接电动机负载，在功率因数为72%滞后时提取的功率为4 kVA。另外，一个1.8 kVAR电容器接在线路a与线路b之间，一个800 W照明负载接在线路c与中线之间。假定相序为abc，$V_{an}=V_p\angle 0°$，试求电流I_a、I_b、I_c与I_n的大小和相角。

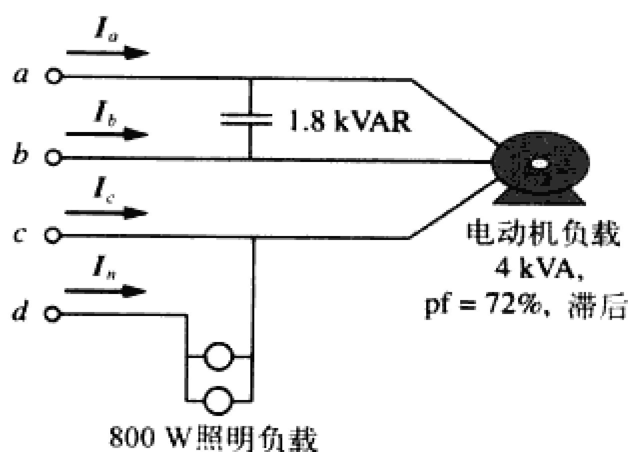


图 12-76 练习题 12-84 的电路原理图

12-85　试利用Y型连接纯电阻设计一个具有对称负载的三相加热器，假设该加热器的供电线电压为240 V，输出的热功率为27 kW。

12-86　对于如图12-77所示的单相三线系统，试求电流I_{aA}、I_{bB}与I_{nN}。

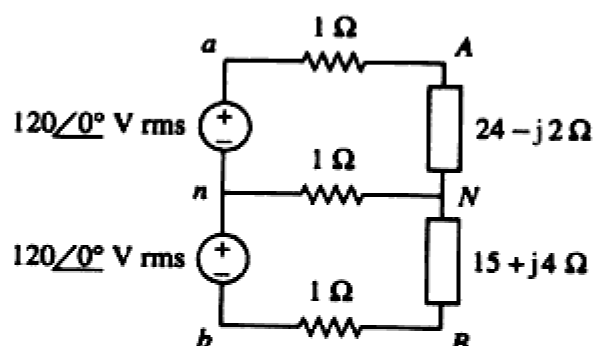


图 12-77　练习题 12-86 的电路原理图

12-87　对于如图12-78所示的单相三线系统，试求中线电流与各电压源提供的复功率，假定电压源为$V_s = 115\angle 0°$ V，$f = 60$ Hz。

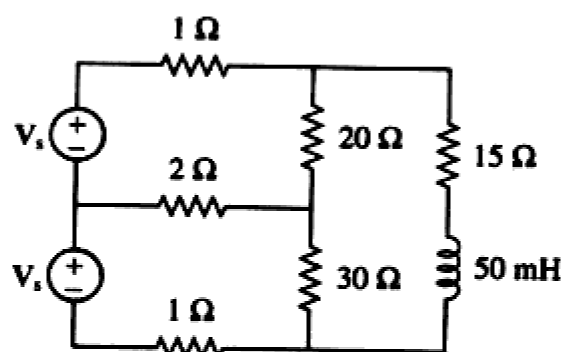


图 12-78　练习题 12-87 的电路原理图

第13章 磁耦合电路

如果你想快乐长寿，就请宽恕邻居的无心之错、忘记朋友的怪癖，只记住他们令你欣慰的闪光之处；抹去昨天发生的一切不快，在今天的崭新篇章上记下快乐与幸福。

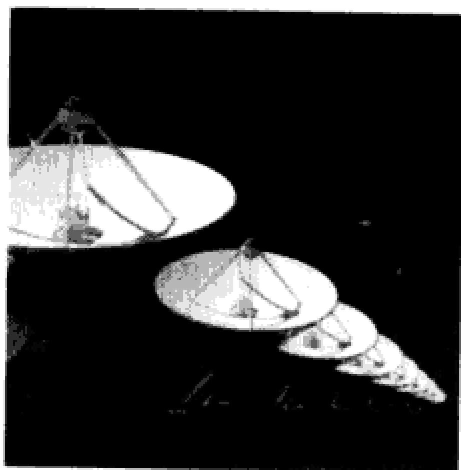
——无名氏

拓展职业生涯

电磁学领域的职业生涯

电磁学是电子工程（或物理学）的一个分支学科，主要研究电磁场理论及其应用。在电磁学中，电子电路分析方法适用于低频范围。

电磁学（EM）原理在许多相关学科中应用广泛，例如电子机械、机电能量转换、雷达气象、遥感、卫星通信、生物电磁学、电磁干扰与电磁兼容、等离子体以及光纤等。EM设备包括电动机、发电机、变压器、电磁铁、磁悬浮、天线、雷达、微波炉、微波清洗机、超导体和心电记录仪等。要完成这些设备的设计就必须彻底掌握电磁学定律与电磁学原理的相关知识。



空间卫星遥测接收站

电磁学被认为是电子工程领域中较难的学科，原因之一在于电磁现象相当抽象。但是，如果你对数学感兴趣并且能将看不见的电磁现象可视化，就应该考虑成为一个电磁学专家，因为该领域的电子工程师也是非常少的。在微波工业、射频/TV广播台站、电磁研究实验室以及很多通信行业都需要电磁学领域的电子工程师。

历史人物





詹姆斯·克拉克·麦克斯韦（James Clerk Maxwell,1831—1879），剑桥大学数学专业毕业。1865年他发表了平生最有影响的论文，从数学上统一了法拉第定律与安培定律，由此所确立的电场与磁场之间的关系成为电子工程中的一个重要研究领域——电磁场与电磁波的理论基础。美国电气与电子工程师协会将该原理的图形表示作为其标识商标，其中直线箭头代表电流，曲线箭头代表电磁场。该关系正是大家熟知的右手定则（right-hand rule）。麦克斯韦是一位非常活跃的理论家、科学家，因“麦克斯韦方程”而闻名于世，磁通量的单位——麦克斯韦，就是以他的名字命名的。

13.1 引言

到目前为止介绍的电路可以看作是通过电流传导耦合的（conductively coupled），因为一个回路通过电流的传导会影响其相邻回路。当两个相互接触或者不接触的回路之间通过其中一个回路所产生的磁场而相互影响时，则称为磁场耦合的（magnetically coupled）。

变压器就是基于磁耦合概念设计出来的一种电子设备，即利用磁耦合线圈将能量从一个电路转换到另一个电路。变压器是电子电路中的关键电路元件，在电力系统中，利用变压器实现交流电压或交流电流的升高或降低。在无线电广播与电视接收机电路中，利用变压器实现阻抗匹配，将电路的两部分相互隔离开来，同样也可用于实现交流电压或交流电流的升高或降低。

本章首先介绍互感的概念，从而引入确定电感耦合元件电压极性的同名端标记法则。基于互感的概念介绍了一种重要的电路元件——变压器（transformer），包括线性变压器、理想变压器、自耦变压器以及三相变压器等。最后，在许多重要的应用中，讨论了变压器作为隔离与和匹配器件的应用，以及它们在电力配送中的应用。

13.2 互感

当两个电感器（或线圈）彼此较近时，电流在一个线圈中引起的磁通量会对另一个线圈产生影响，从而在另一个线圈中产生感应电压，这种现象称为互感（mutual inductance）。

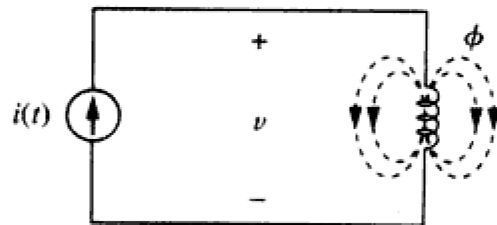


图 13-1　由一个 N 匝线圈产生的磁通量

首先讨论一个由N匝线圈构成的电感，当电流i流过该线圈时，在其周围产生磁通量 ϕ （如图13-1所示），按照法拉第定律，该线圈中的感应电压正比于线圈的匝数N以及磁通量 ϕ 关于时间的变化率，即：

$$v = N\frac{d\phi}{dt} \tag{13-1}$$

但是，磁通量 ϕ 是由电流 i 产生的，所以磁通量的任何变化都是由电流的变化引起的，于是，式(13-1)可以写为：

$$v = N\frac{d\phi}{di}\frac{di}{dt} \tag{13-2}$$

即：

$$v = L\frac{di}{dt} \tag{13-3}$$

此即电感器的电压—电流关系。由式(13-2)与式(13-3)可以得到，电感器的电感值 L 为：

$$L = N\frac{d\phi}{di} \tag{13-4}$$

该电感通常称为自感（self-inductance），因为表示的是同一线圈中时变电流与其感应电压之间的关系。

下面考虑两个彼此相邻的、自感分别为L_1与L_2的线圈（如图13-2所示）。线圈1有N_1匝，线圈2有N_2匝。为简单起见，假定第2个电感器中无电流。此时，由线圈1引起的磁通量 ϕ_1由两个分量组成：一个分量 ϕ_{11}仅与线圈1交链，而另一个分量 ϕ_{12}与两个线圈交链，因此，

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} \tag{13-5}$$

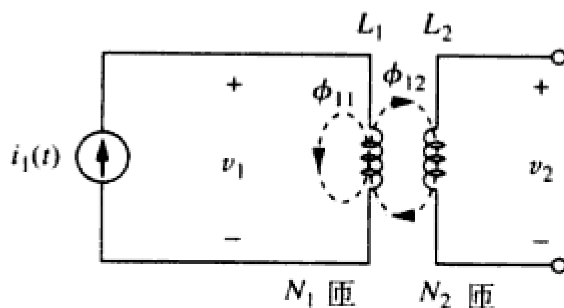


图 13-2　线圈 2 关于线圈 1 的互感量 M_{21}

虽然这两个线圈在物理上是分离的，但称之为*磁耦合的*（magnetically coupled）。因为全部磁通量ϕ_1与线圈1交链，所以线圈1的感应电压为：

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi_1}{dt} \tag{13-6}$$

仅磁通量ϕ_{12}与线圈2交链，因此，线圈2的感应电压为：

$$v_2 = N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} \tag{13-7}$$

另外，考虑到磁通量是电流i_1流过线圈1所产生的，所以式(13-6)可以写为：

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi_1}{di_1}\frac{di_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \tag{13-8}$$

其中，$L_1 = N_1 d\phi_1/di_1$为线圈1的自感量。同理，式(13-7)可以写为：

$$v_2 = N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1}\frac{di_1}{dt} = M_{21} \frac{di_1}{dt} \tag{13-9}$$

其中，

$$M_{21} = N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1} \tag{13-10}$$

M_{21}称为线圈2相对于线圈1的*互感*（mutual inductance），下标21表示互感M_{21}是联系线圈2的感应电压与线圈1中的电流的物理量。因此，线圈2两端的开路*互感电压*（mutual voltage，即感应电压）为：

$$\boxed{v_2 = M_{21} \frac{di_1}{dt}} \tag{13-11}$$

下面假定流过线圈2的电流为i_2，而线圈1中无电流（如图13-3所示），则由线圈2引起的磁通量ϕ_2由ϕ_{22}与ϕ_{21}组成，其中ϕ_{22}仅与线圈2交链，ϕ_{21}与两个线圈交链，所以，

$$\phi_2 = \phi_{21} + \phi_{22} \tag{13-12}$$

整个磁通量ϕ_2与线圈2交链，所以，线圈2的感应电压为：

$$v_2 = N_2 \frac{d\phi_2}{dt} = N_2 \frac{d\phi_2}{di_2}\frac{di_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \tag{13-13}$$

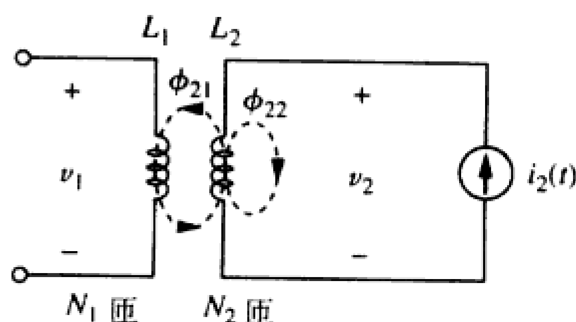


图 13-3 线圈 1 相对于线圈 2 的互感量 M_{12}

其中，$L_2 = N_2 d\phi_2/di_2$为线圈2的自感。由于仅磁通量ϕ_{21}与线圈1交链，所以线圈1中的感应电压为：

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi_{21}}{dt} = N_1 \frac{d\phi_{21}}{di_2}\frac{di_2}{dt} = M_{12} \frac{di_2}{dt} \tag{13-14}$$

其中，

$$M_{12} = N_1 \frac{d\phi_{21}}{di_2} \tag{13-15}$$

M_{12}称为线圈1相对于线圈2的*互感*，因此，线圈1两端的开路*互感电压*为：

$$\boxed{v_1 = M_{12} \frac{di_2}{dt}} \tag{13-16}$$

下一节中将会证明M_{12}与M_{21}是相等的，即：

$$M_{12} = M_{21} = M \tag{13-17}$$

称M为两线圈之间的互感，与自感L相同，互感M的单位为亨利（H）。注意，仅当两个电感器或线圈

距离很近，并且电路由时变电源驱动时，才存在互感耦合。我们已经知道，电感器对于直流电路而言相当于短路。

由图13-2与图13-3两种情况可以看出，如果感应电压是由另一个电路中的时变电流引起的，则有互感存在。这是电感器的一个特性，即电感器产生的电压会反作用于靠近它的另一个电感器中的时变电流。

互感是指一个电感器在与其相邻的电感器两端感应出电压的能力，单位为亨利（H）。

虽然互感M总是正的，但是，与自感电压$L\,di/dt$一样，互感电压Mdi/dt既可以是正的也可以是负的。然而，与自感电压$L\,di/dt$的极性由电流参考方向和电压参考极性（符合无源符号规约）决定不同，确定互感电压Mdi/dt的极性并不是很容易，因为互感包含四个端点。正确选择Mdi/dt极性的方法是：检查两个线圈的物理缠绕方向，并利用楞次定律与右手准则来判定感应电压的极性。但是，由于在电路图中画出线圈的缠绕结构是很不方便的，因此在电路分析中通常采用同名端规则予以简化。按照该规则，在两个磁耦合线圈的一端标上一个圆点，该点表示电流由该点流入线圈时磁通量的方向，如图13-4所示。如果给定电路中除线圈外已经标记了圆点，则无需担心应如何标识圆点。通过这种圆点（同名端）与同名端规则即可确定互感电压的极性。同名端规则如下：

如果电流进入一个线圈的同名端，则在第二个线圈的同名端处，互感电压的参考极性为正。

或者：

如果电流从一个线圈的同名端流出，则在第二个线圈的同名端处，互感电压的参数极性为负。

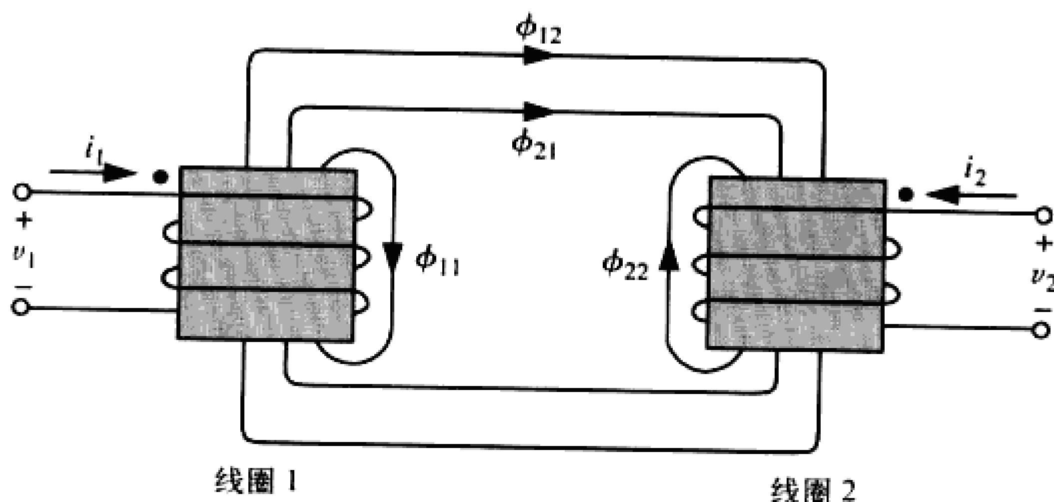


图 13-4 同名端规则的说明

因此，互感电压的参数极性取决于诱导电流的参考方向与耦合线圈的同名端。同名端规则在四对互感耦合线圈中的应用如图13-5所示。对于如图13-5a所示的耦合线圈，互感电压v_2的符号取决于v_2的参考极性与电流i_1的方向。由于i_1进入线圈1的同名端且v_2在线圈2同名端处为正，所以互感电压为$+Mdi_1/dt$。对于如图13-5b所示的线圈，电流i_1进入线圈1的同名端，且互感电压v_2在线圈2的同名端处为负，所以互感电压为$-Mdi_1/dt$。按照同样的方法可以得到如图13-5c与图13-5d所示线圈的互感电压。

如图13-6所示为串联耦合线圈的同名端规则。对于如图13-6a所示线圈，总的电感量为：

$$L = L_1 + L_2 + 2M \quad \text{（同向串联连接）} \tag{13-18}$$

对于如图13-6b所示线圈，有：

$$L = L_1 + L_2 - 2M \quad \text{（反向串联连接）} \tag{13-19}$$

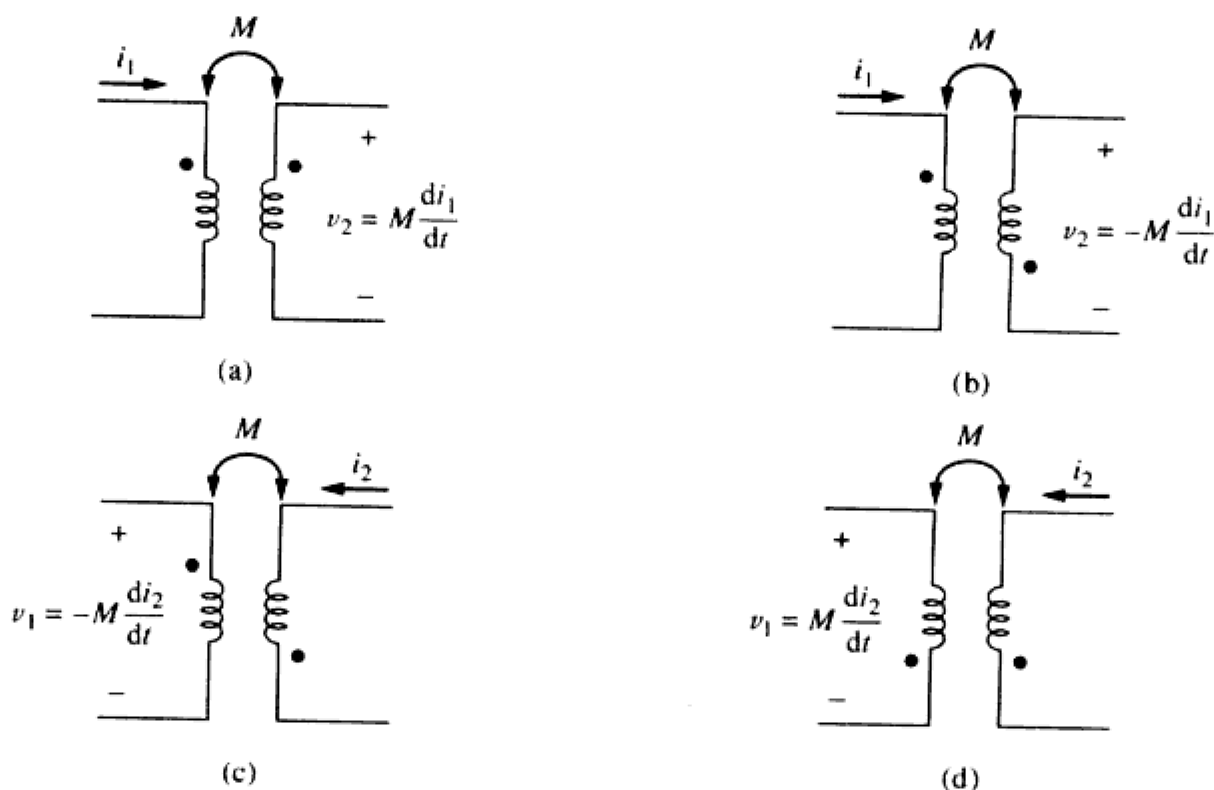


图 13-5 说明如何应用同名端规则的几个例子

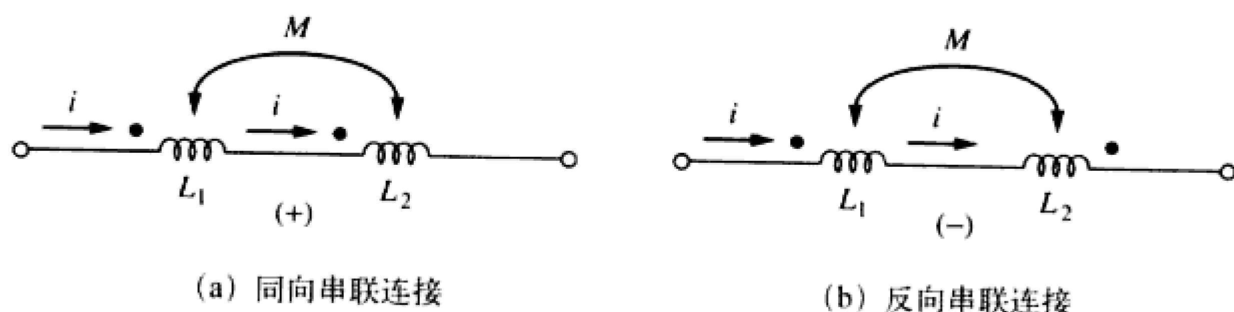


图 13-6 串联线圈的同名端规则，正负号表示互感电压的极性

掌握了确定互感电压极性的方法之后，就可以分析包含互感的电路。首先考虑如图13-7所示电路。对于线圈1应用KVL，可得：

$$v_1 = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \tag{13-20a}$$

对于线圈2应用KVL，可得：

$$v_2 = i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} \tag{13-20b}$$

式(13-20)的频域表示为：

$$\boldsymbol{V}_1 = (R_1 + j\omega L_1)\,\boldsymbol{I}_1 + j\omega M\,\boldsymbol{I}_2 \tag{13-21a}$$

$$\boldsymbol{V}_2 = j\omega M\,\boldsymbol{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2)\,\boldsymbol{I}_2 \tag{13-21b}$$

另一个例子是在频域中分析如图13-8所示电路，对线圈1应用KVL，得到：

$$\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{Z}_1 + j\omega L_1)\,\boldsymbol{I}_1 - j\omega M\,\boldsymbol{I}_2 \tag{13-22a}$$

对线圈2应用KVL，得到：

$$0 = -j\omega M\,\boldsymbol{I}_1 + (\boldsymbol{Z}_L + j\omega L_2)\,\boldsymbol{I}_2 \tag{13-22b}$$

求解式(13-21)与式(13-22)即可确定各电流。

目前暂且不介绍线圈互感量及其同名端的确定问题，与电路中R、L、C的计算类似，互感M的计算要求将电磁学理论应用于实际线圈的物理属性中。本书假定电路问题中的互感与同名端的位置是“已知的”，即与电路元件R、L、C同等看待。

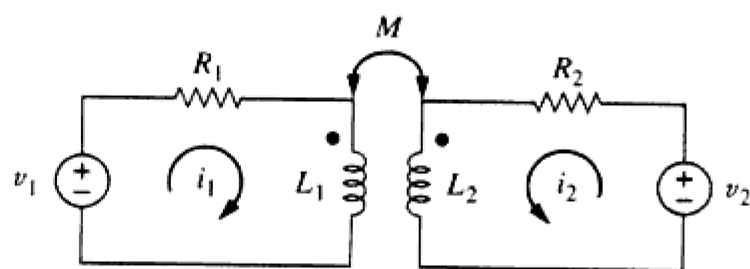


图 13-7 包含耦合线圈的电路的时域分析

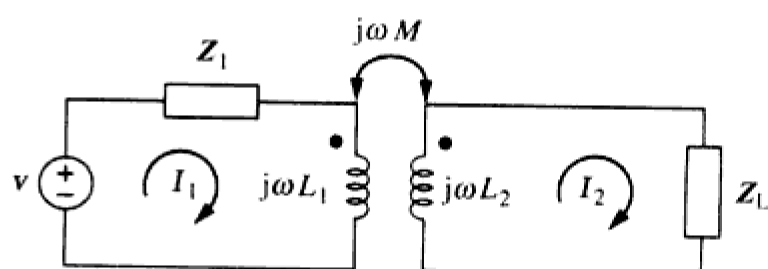


图 13-8 包含耦合线圈的电路的频域分析

例题13-1 试计算如图13-9所示电路中的相量电流$\boldsymbol{I}_1$与$\boldsymbol{I}_2$。

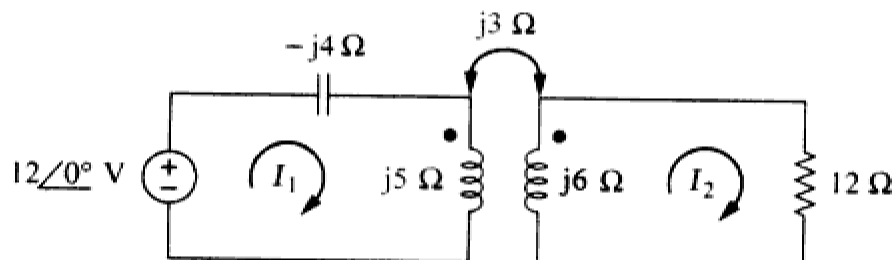


图 13-9 例题 13-1 的电路原理图

解 对于线圈1应用KVL，得到：

$$-12+(-\mathrm{j}\,4+\mathrm{j}\,5)\,\boldsymbol{I}_1-\mathrm{j}\,3\,\boldsymbol{I}_2=0$$

即：

$$\mathrm{j}\,\boldsymbol{I}_1-\mathrm{j}\,3\,\boldsymbol{I}_2=12 \tag{13-1-1}$$

对于线圈2应用KVL，得到：

$$-\mathrm{j}\,3\,\boldsymbol{I}_1+(12+\mathrm{j}\,6)\,\boldsymbol{I}_2=0$$

即：

$$\boldsymbol{I}_1=\frac{(12+\mathrm{j}6)\boldsymbol{I}_2}{\mathrm{j}3}=(2-\mathrm{j}4)\boldsymbol{I}_2 \tag{13-1-2}$$

将上式代入式(13-1-1)，可以得到：

$$(\mathrm{j}\,2+4-\mathrm{j}\,3)\,\boldsymbol{I}_2=(4-\mathrm{j})\,\boldsymbol{I}_2=12$$

即：

$$\boldsymbol{I}_2=\frac{12}{4-\mathrm{j}}=2.91\angle 14.04^\circ\ \mathrm{A} \tag{13-1-3}$$

由式(13-1-2)与式(13-1-3)得到：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}_1&=(2-\mathrm{j}4)\boldsymbol{I}_2=(4.472\angle -63.43^\circ)(2.91\angle 14.04^\circ)\\&=13.01\angle -49.39^\circ\ \mathrm{A}\end{aligned}$$

练习题13-1 试确定如图13-10所示电路中的电压$\boldsymbol{V}_o$。

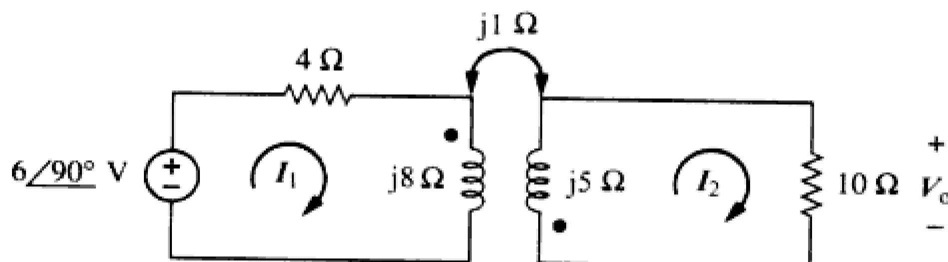


图 13-10 练习题 13-1 的电路原理图

答 $0.6\angle -90^\circ$ V。

例题13-2 试计算如图13-11所示电路的网孔电流。

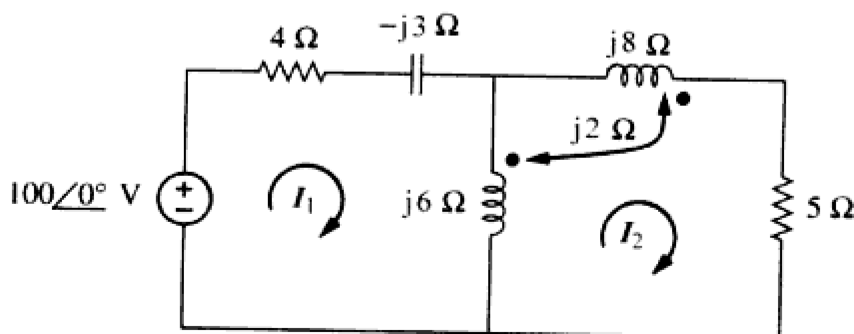


图 13-11 例题 13-2 的电路原理图

解 分析磁耦合电路的关键是要知道互感电压的极性，这就需要利用同名端规则。在如图13-11所示电路中，假定线圈1是电抗为6 Ω的线圈，线圈2是电抗为8 Ω的线圈。为了判断由电流$\boldsymbol{I}_2$在线圈1中产生的互感电压的极性，首先观察到$\boldsymbol{I}_2$是从线圈2的同名端流出的，由于KVL是沿顺时针方向应用的，因此这意味着互感电压极性为负，即为$-\mathrm{j}2\,\boldsymbol{I}_2$。

另外，还可以重新画出相关的电路以确定互感电压的极性，如图13-12a所示，由此即可方便地确定互感电压为$\boldsymbol{V}_1=-2\,\mathrm{j}\,\boldsymbol{I}_2$。

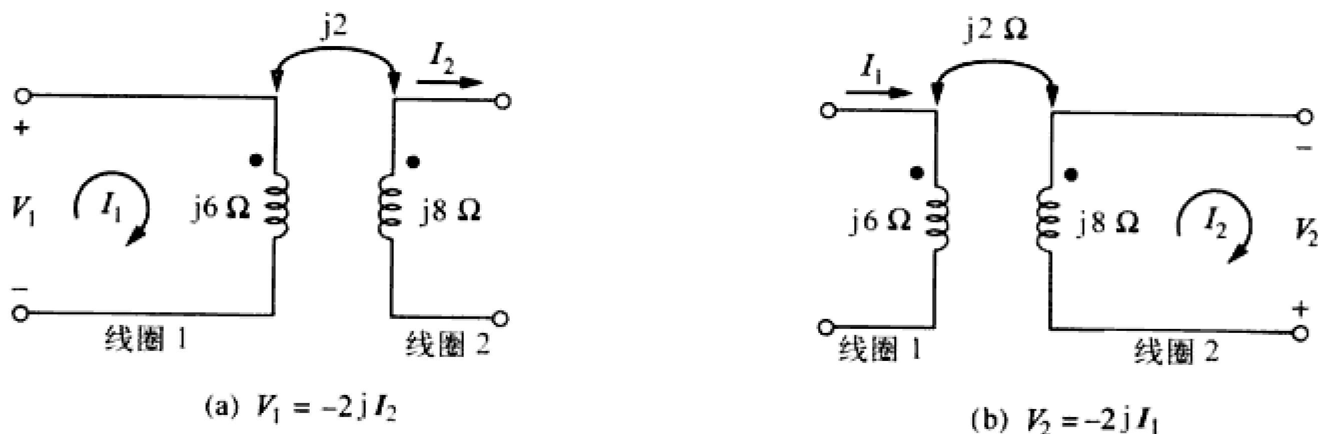


图 13-12 例题 13-2 的电路原理图，重新绘制图 13-11 所示电路的相关部分，以便利用同名端规则求解互感电压

因此，对于如图13-11所示电路的网孔1，应用KVL可得：

$$-100+\boldsymbol{I}_1(4-\mathrm{j}\,3+\mathrm{j}\,6)-\mathrm{j}\,6\boldsymbol{I}_2-\mathrm{j}\,2\,\boldsymbol{I}_2=0$$

即：

$$100=(4+\mathrm{j}\,3)\,\boldsymbol{I}_1-\mathrm{j}\,8\,\boldsymbol{I}_2 \tag{13-2-1}$$

同理，为了确定由电流$\boldsymbol{I}_1$在线圈 2 中产生的互感电压，需将电路的相关部分重绘于图 13-12b，利用同名端规则可得互感电压$\boldsymbol{V}_2=-2\mathrm{j}\,\boldsymbol{I}_1$。另外，由图 13-11 可见，电流$\boldsymbol{I}_2$所经过的两个线圈是串联的，且该电流是流出两个线圈的同名端的，所以式(13-18)适用于这种情况。因此，对于如图 13-11 所示电路的网孔 2，应用 KVL 可得：

$$0=-2\,\mathrm{j}\,\boldsymbol{I}_1-\mathrm{j}\,6\,\boldsymbol{I}_1+(\mathrm{j}\,6+\mathrm{j}\,8+\mathrm{j}\,2\times2+5)\,\boldsymbol{I}_2$$

即：

$$0=-\mathrm{j}\,8\,\boldsymbol{I}_1+(5+\mathrm{j}\,18)\,\boldsymbol{I}_2 \tag{13-2-2}$$

将式(13-2-1)与式(13-2-2)写成矩阵形式，得到：

$$\begin{bmatrix}100\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+\mathrm{j}3 & -\mathrm{j}8\\-\mathrm{j}8 & 5+\mathrm{j}18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_1\\\boldsymbol{I}_2\end{bmatrix}$$

相关的行列式为：

$$\Delta=\begin{vmatrix}4+\mathrm{j}3 & -\mathrm{j}8\\ -\mathrm{j}8 & 5+\mathrm{j}18\end{vmatrix}=30+\mathrm{j}87$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}100 & -\mathrm{j}8\\ 0 & 5+\mathrm{j}18\end{vmatrix}=100(5+\mathrm{j}18)$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}4+\mathrm{j}3 & 100\\ -\mathrm{j}8 & 0\end{vmatrix}=\mathrm{j}800$$

于是，得到网孔电流为：

$$\boldsymbol{I}_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{100(5+\mathrm{j}18)}{30+\mathrm{j}87}=\frac{1\,868.2\angle 74.5^\circ}{92.03\angle 71^\circ}=20.3\angle 3.5^\circ\mathrm{A}$$

$$\boldsymbol{I}_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{\mathrm{j}800}{30+\mathrm{j}87}=\frac{800\angle 90^\circ}{92.03\angle 71^\circ}=8.693\angle 19^\circ\mathrm{A}$$

练习题13-2 试确定如图13-13所示电路中的电流相量$\boldsymbol{I}_1$与$\boldsymbol{I}_2$。

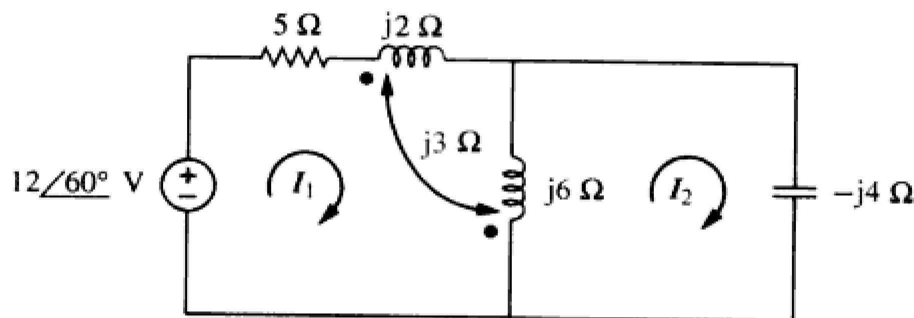


图 13-13 练习题 13-2 的电路原理图

答 $2.15\angle 86.56^\circ$，$3.23\angle 86.56^\circ$ A。

13.3 耦合电路中的能量

由本书第6章可知，电感器中存储的能量为：

$$w=\frac{1}{2}Li^2 \tag{13-23}$$

下面将确定磁耦合线圈中储存的能量。

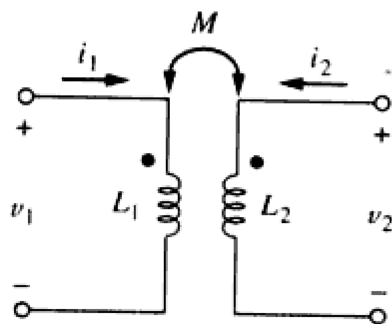


图 13-14 推导耦合电路中存储能量的电路

考虑如图13-14所示电路。假定电流i_1与i_2的初始值均为零，于是线圈中的初始储能为零。如果令i_1由0增加到I_1，且$i_2=0$保持不变，则线圈1中的功率为：

$$p_1(t)=v_1i_1=i_1L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \tag{13-24}$$

该电路中储存的能量为：

$$w_1=\int p_1\mathrm{d}t=L_1\int_0^{I_1}i_1\mathrm{d}i_1=\frac{1}{2}L_1I_1^2 \tag{13-25}$$

如果$i_1=I_1$保持不变，但i_2从0增加到I_2，则在线圈1中的互感电压为$M_{12}\mathrm{d}\,i_2/\mathrm{d}t$，由于$i_1$保持不变，所以线圈2中的互感电压为0。于是线圈中的功率为：

$$p_2(t)=i_1M_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}+i_2v_2=I_1M_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}+i_2L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{13-26}$$

该电路中储存的能量为：

$$w_2 = \int p_2 \mathrm{d}t = M_{12} I_1 \int_0^{I_2} \mathrm{d}i_2 + L_2 \int_0^{I_2} i_2 \mathrm{d}i_2 = M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \tag{13-27}$$

当i_1与i_2均到达恒定值时，线圈中储存的总能量为：

$$w = w_1 + w_2 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2 \tag{13-28}$$

如果交换上述电流达到其终端的顺序，即i_2先从0增加到I_2，之后i_1再从0增加到I_1，则线圈中储存的总能量为：

$$w = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{21} I_1 I_2 \tag{13-29}$$

由于无论电流如何到达其终值，电路中所储存的能量都是相同的，因此，比较式（13-28）与式（13-29），得到如下结论：

$$M_{12} = M_{21} = M \tag{13-30a}$$

且

$$w = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \tag{13-30b}$$

推导上式的假定条件是，线圈电流均从同名端流入。如果一个电流从一个同名端流入，另一个电流从另一个同名端流出，则互感电压为负，因此，互感能量$M I_1 I_2$也为负。在这种情况下：

$$w = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 - M I_1 I_2 \tag{13-31}$$

另外，由于I_1与I_2为任意值，所以可以用i_1与i_2取代，于是得到电路中储存的瞬时能量的一般表达式为：

$$\boxed{w = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2} \tag{13-32}$$

当两个电流均从线圈的同名端流入或者流出时，上式中的交叉项取正号，否则，交叉项取负号。

现在推导互感M的上限。由于无源电路中储存的能量不可能为负的，这就是说，$1/2L_1 i_1^2 + 1/2L_2 i_2^2 - M i_1 i_2$必须大于或等于零：

$$\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 - M i_1 i_2 \mathrm{H}\, 0 \tag{13-33}$$

为了得到完全平方，在式(13-33)右边加一项并减一项$i_1 i_2 \sqrt{L_1 L_2}$，从而得到：

$$\frac{1}{2}\left(i_1 \sqrt{L_1} - i_2 \sqrt{L_2}\right)^2 + i_1 i_2 \left(\sqrt{L_1 L_2} - M\right) \mathrm{H}\, 0 \tag{13-34}$$

其中，第一项平方项不可能为负，其最小值为零。因此，式(13-34)右边第二项必须大于零，即：

$$\sqrt{L_1 L_2} - M \mathrm{H}\, 0$$

亦即：

$$M \mathrm{G} \sqrt{L_1 L_2} \tag{13-35}$$

因此，互感M不能大于线圈自感的几何平均值。互感M接近于其上限的程度由耦合系数（coefficient of coupling）k决定：

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \tag{13-36}$$

即：

$$\boxed{M = k\sqrt{L_1 L_2}} \tag{13-37}$$

其中，$0 \leqslant k \leqslant 1$，或者等效地，$0 \leqslant M \leqslant \sqrt{L_1 L_2}$。耦合系数是指由一个线圈产生的总磁通量中与另一个线圈交链的部分。例如，在图13-2所示电路中，

$$k = \frac{\phi_{12}}{\phi_1} = \frac{\phi_{12}}{\phi_{11} + \phi_{12}} \tag{13-38}$$

而在图13-3所示电路中，

$$k = \frac{\phi_{21}}{\phi_2} = \frac{\phi_{21}}{\phi_{21} + \phi_{22}} \tag{13-39}$$

如果一个线圈产生的磁通全部与另一线圈交链，则$k = 1$，即为100％耦合，或者称这两个线圈是完全耦合的（perfectly coupled）。当$k < 0.5$时，称这两个线圈为松散耦合的（loosely coupled）；当$k > 0.5$时，称这两个线圈为紧耦合的（tightly coupled）。因此，

耦合系数k是两个线圈之间磁耦合程度的一种度量：$0 \leqslant k \leqslant 1$。

我们希望k值取决于两个线圈的接近程度、磁芯、方向以及绕组。图13-15所示为松散耦合绕组与和紧耦合绕组两种情况。射频电路中使用的空心变压器一般是松散耦合的，而电力系统中使用的铁心变压器都是紧耦合的。13.4节讨论的线性变压器大多数是空心的，而13.5节与13.6节讨论的理想变压器基本上都是铁心变压器。

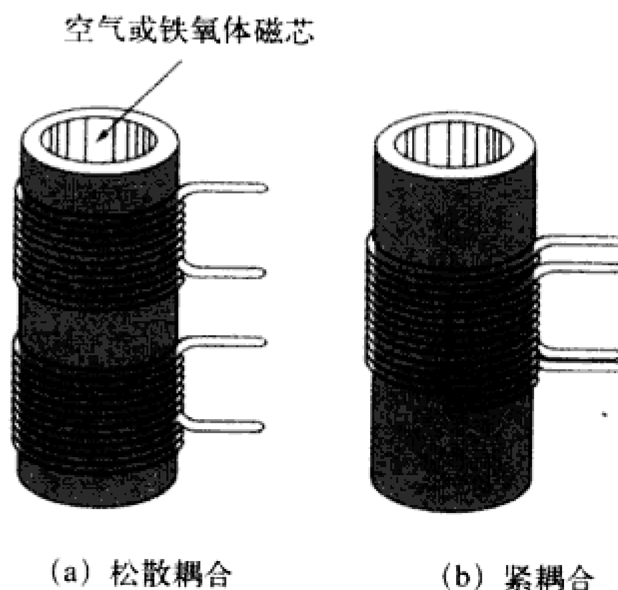


图 13-15 线圈剖面视图

例题13-3 对于如图13-16所示电路，试确定其耦合系数，并计算当$v = 60\cos(4t + 30°)$ V时，耦合电感器在$t = 1$ s时储存的能量。

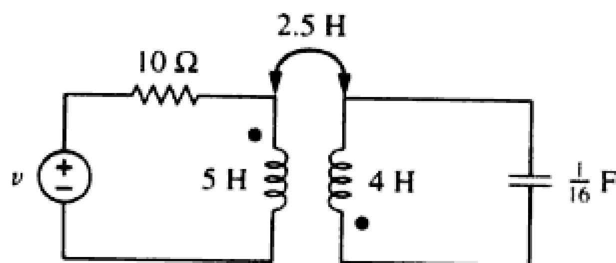


图 13-16 例题 13-3 的电路原理图

解 耦合系数为：

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{2.5}{\sqrt{20}} = 0.56$$

表明两个电感器是紧耦合的，为了求出所存储的能量，需计算出电流，而要得到电流，就必须确定该电路的频域等效电路：

$$60\cos(4t + 30°) \Rightarrow 60\underline{/30°}, \quad \omega = 4 \text{ rad/s}$$

$$5\text{H} \Rightarrow \text{j}\omega L_1 = \text{j}20\Omega$$

$$2.5\text{H} \Rightarrow \text{j}\omega M = \text{j}10\Omega$$

$$4\text{H} \Rightarrow \text{j}\omega L_2 = \text{j}16\Omega$$

$$\frac{1}{16}\text{F} \Rightarrow \frac{1}{\text{j}\omega C} = -\text{j}4\Omega$$

频域等效电路如图13-17所示。下面利用网孔分析法确定电流。对于网孔1，有：

$$(10 + \text{j}20)\boldsymbol{I}_1 + \text{j}10\boldsymbol{I}_2 = 60\underline{/30°} \tag{13-3-1}$$

对于网孔2，有：

$$\text{j}\,10\,\boldsymbol{I}_1 + (\text{j}\,16 - \text{j}\,4)\,\boldsymbol{I}_2 = 0$$

即：

$$\boldsymbol{I}_1 = -1.2\,\boldsymbol{I}_2$$

将上式代入式(13-3-1)，得到：

$$\boldsymbol{I}_2(-12-\mathrm{j}14)=60\angle 30^\circ \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{I}_2=3.254\angle 160.6^\circ \mathrm{A}$$

并且，

$$\boldsymbol{I}_1=-1.2\boldsymbol{I}_2=3.905\angle -19.4^\circ \mathrm{A}$$

变换到时域，有：

$$i_1=3.905\cos(4t-19.4^\circ), \qquad i_2=3.254\cos(4t+160.6^\circ)$$

当$t=1$ s时，$4t=4$ rad$=299.2^\circ$，于是：

$$i_1=3.905\cos(229.2^\circ-19.4^\circ)=-3.389\text{ A}$$
$$i_2=3.254\cos(229.2^\circ+160.6^\circ)=2.824\text{ A}$$

耦合线圈中存储的总能量为：

$$w=\frac{1}{2}L_1i_1^2+\frac{1}{2}L_2i_2^2+Mi_1i_2$$
$$=\frac{1}{2}(5)(-3.389)^2+\frac{1}{2}(4)(2.824)^2+2.5(-3.389)(2.824)=20.73\text{J}$$

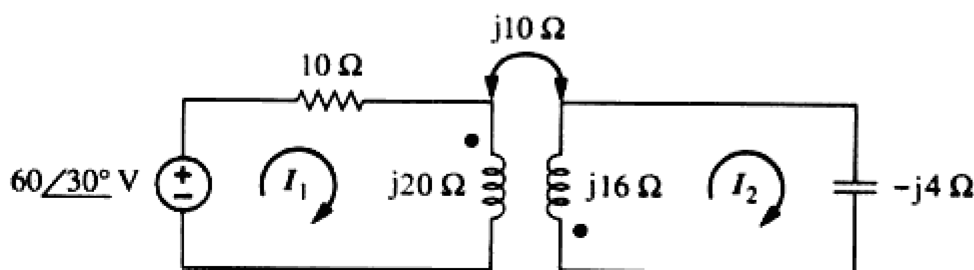


图 13-17 图 13-16 所示电路的频域等效电路

练习题13-3 对于如图13-18所示电路，试确定耦合系数，并计算当$t=1.5$ s时，耦合电感器中存储的能量。

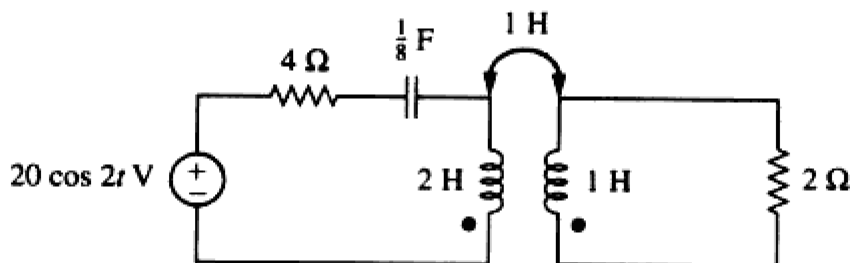


图 13-18 练习题 13-3 的电路原理图

答 0.7071，9.85 J

13.4 线性变压器

本节介绍一个新的电路元件——变压器，变压器是利用互感现象设计的一种磁耦合器件。

变压器一般是由两个（或多个）磁耦合线圈组成的四端器件。

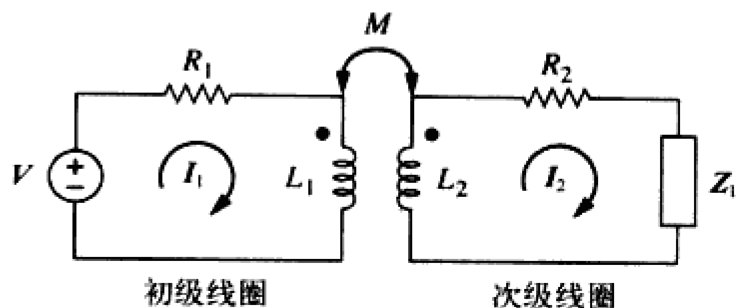
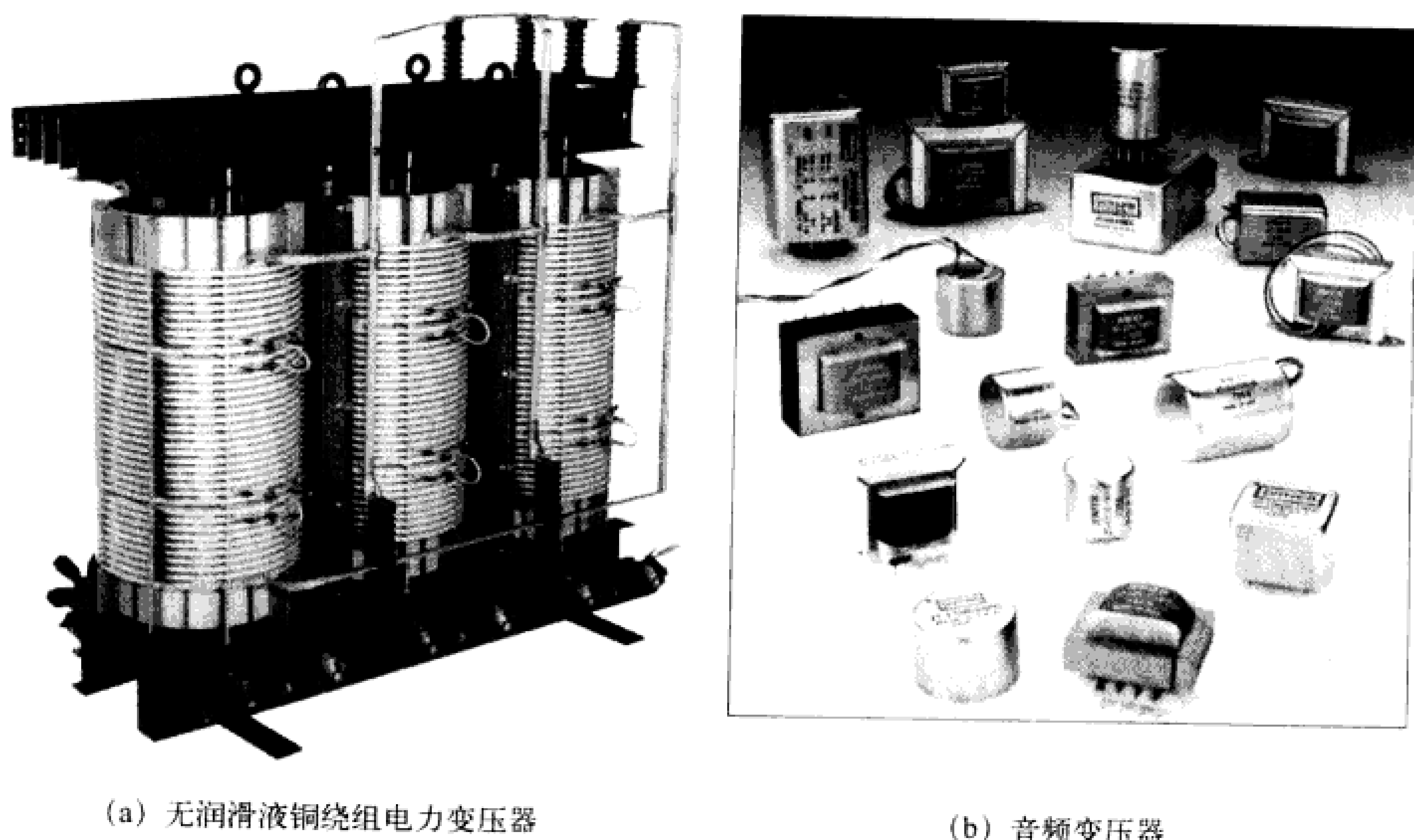


图 13-19 线性变压器

如图13-19所示，直接与电压源相连接的线圈称为*初级线圈*（primary winding），而与负载相连接的线圈称为*次级线圈*（secondary winding），图中R_1与R_2用于计算线圈的消耗（功率消耗）。如果线圈

缠绕在磁性线性材料上制成的变压器称为线性变压器，所谓磁性线性材料是指磁导率为常数的材料，例如空气、塑料、电木与木头等。实际上，绝大多数材料都是磁性线性的。有时候也将线性变压器称为空芯变压器（air-core transformer），尽管其磁芯未必都是空气的。线性变压器通常用于收音机与电视机等装置中，图13-20给出了各种不同类型的变压器。

线性变压器也可以看作是磁通量与绕组内电流成正比的变压器。



（a）无润滑液铜绕组电力变压器　（b）音频变压器

图 13-20　不同类型的变压器

下面确定从电源端看进去的变压器输入阻抗$\boldsymbol{Z}_{in}$，因为$\boldsymbol{Z}_{in}$决定了初级电路的特征。对如图13-19所示电路中的两个网孔应用KVL，得到：

$$\boldsymbol{V}=(R_1+\mathrm{j}\omega L_1)\boldsymbol{I}_1-\mathrm{j}\omega M\boldsymbol{I}_2 \tag{13-40a}$$

$$0=-\mathrm{j}\omega M\boldsymbol{I}_1+(R_2+\mathrm{j}\omega L_2+\boldsymbol{Z}_L)\boldsymbol{I}_2 \tag{13-40b}$$

式(13-40b)中，用$\boldsymbol{I}_1$表示$\boldsymbol{I}_2$，并代入式(13-40a)，得到输入阻抗为：

$$\boldsymbol{Z}_{in}=\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{I}_1}=R_1+\mathrm{j}\omega L_1+\frac{\omega^2M^2}{R_2+\mathrm{j}\omega L_2+\boldsymbol{Z}_L} \tag{13-41}$$

上式表明，输入阻抗由两项组成，第一项$(R_1+\mathrm{j}\omega L_1)$为初级阻抗，第二项为由初级线圈与次级线圈之间的耦合而产生的阻抗，仿佛是由次级映射到初级的阻抗，因此，也称之为反射阻抗（reflected impedance）$\boldsymbol{Z}_R$，即：

$$\boxed{\boldsymbol{Z}_R=\frac{\omega^2M^2}{R_2+\mathrm{j}\omega L_2+\boldsymbol{Z}_L}} \tag{13-42}$$

应该注意的是，式(13-41)或式(13-44)给出的结果并不会受到变压器同名端位置的影响，因为利用$-M$取代式中的M后，其结果是相同的。

有些学者也将反射阻抗称为耦合阻抗。

通过13.2节与13.3节磁耦合电路分析的过程可知，这类电路的分析绝不像前面几章介绍的电路分析那样容易。因此，通常用没有磁耦合的等效电路来取代磁耦合电路，以便于分析。下面就利用没

有互感的T型等效电路或Π型等效电路取代图13-21所示的线性变压器。

初级线圈与次级线圈电压-电流关系的矩阵方程为：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1 \\ \boldsymbol{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 \\ \boldsymbol{I}_2 \end{bmatrix} \tag{13-43}$$

由矩阵求逆，可得：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 \\ \boldsymbol{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{L_2}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} & \dfrac{-M}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} \\ \dfrac{-M}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} & \dfrac{L_1}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1 \\ \boldsymbol{V}_2 \end{bmatrix} \tag{13-44}$$

现在的目的是将式(13-43)与式(13-44)同相应的T型网络和Π型网络的方程匹配。

对于如图13-22所示的T型（或Y型）网络而言，由网孔分析法得到的终端电压矩阵方程为：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1 \\ \boldsymbol{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega(L_a + L_c) & j\omega L_c \\ j\omega L_c & j\omega(L_b + L_c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 \\ \boldsymbol{I}_2 \end{bmatrix} \tag{13-45}$$

如果图13-21与图13-22所示电路是等效的，则式(13-43)与式(13-45)必须相同。由式(13-43)与式(13-45)中阻抗矩阵各项相等，可得：

$$L_a = L_1 - M, \qquad L_b = L_2 - M, \qquad L_c = M \tag{13-46}$$

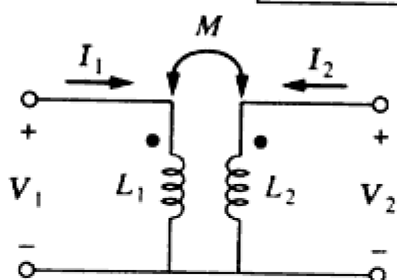


图 13-21 确定线性变压器的等效电路

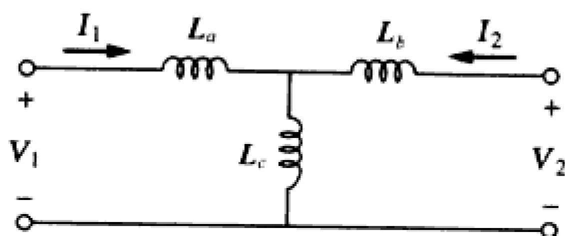


图 13-22 等效 T 型电路

对于如图13-23所示的Π型（或Δ型）网络而言，由节点分析法得到的终端电压矩阵方程为：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 \\ \boldsymbol{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{j\omega L_A} + \dfrac{1}{j\omega L_C} & -\dfrac{1}{j\omega L_C} \\ -\dfrac{1}{j\omega L_C} & \dfrac{1}{j\omega L_B} + \dfrac{1}{j\omega L_C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1 \\ \boldsymbol{V}_2 \end{bmatrix} \tag{13-47}$$

由式(13-44)与式(13-47)中导纳矩阵各项相等，可得：

$$L_A = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_2 - M}, \qquad L_B = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 - M}$$
$$L_C = \frac{L_1L_2 - M^2}{M} \tag{13-48}$$

注意，在图13-22与图13-23中，各电感器是没有磁耦合的，同时，改变图13-21所示电路中同名端的位置会使得M变为$-M$。在例题13-6将会说明，M为负值在物理上是不现实的，但是其等效电路模型在数学意义上仍然是有效的。

例题13-4 在如图13-24所示电路中，试计算输入阻抗与电流I_1。假定$\boldsymbol{Z}_1 = 60 - j\,100\ \Omega$，$\boldsymbol{Z}_2 = 30 + j\,40\ \Omega$且$\boldsymbol{Z}_L = 80 + j\,60\ \Omega$。

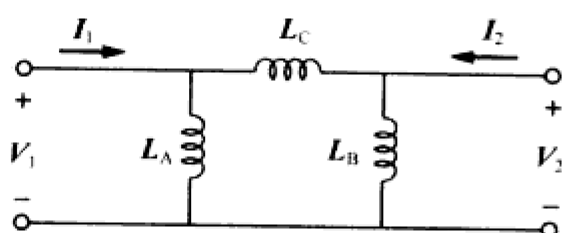


图 13-23 等效 Π 型电路

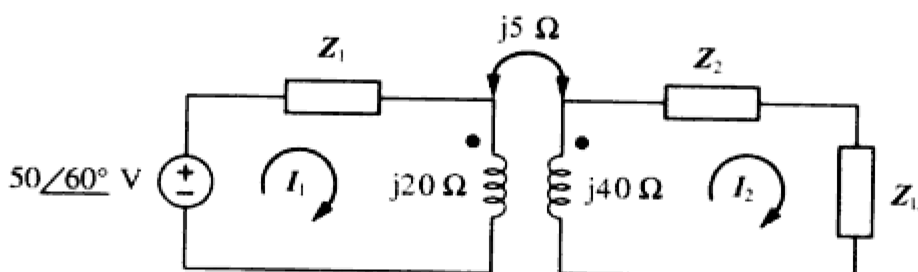


图 13-24 例题 13-4 的电路原理图

解 由式(13-41)可得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}_{\text{in}} &= \boldsymbol{Z}_1 + \text{j}20 + \frac{(5)^2}{\text{j}40 + \boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_L} \\ &= 60 - \text{j}100 + \text{j}20 + \frac{25}{110 + \text{j}140} \\ &= 60 - \text{j}80 + 0.14\angle{-51.84^\circ} \\ &= 60.09 - \text{j}80.11 = 100.14\angle{-53.1^\circ}\,\Omega\end{aligned}$$

因此，

$$\boldsymbol{I}_1 = \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{Z}_{\text{in}}} = \frac{50\angle 60^\circ}{100.14\angle{-53.1^\circ}} = 0.5\angle 113.1^\circ\,\text{A}$$

练习题13-4 试求如图13-25所示电路的输入阻抗以及电压源的电流。

答 $8.58\angle 58.05^\circ\ \Omega$，$1.165\angle{-58.05^\circ}$ A。

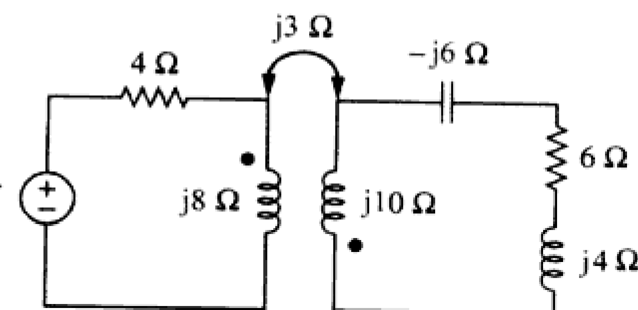


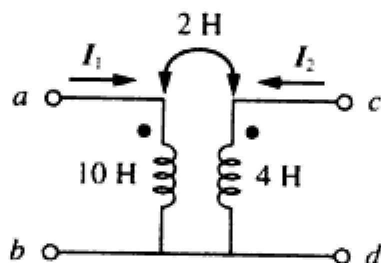
图 13-25 练习题 13-4 的电路原理图

例题13-5 试确定如图13-26a所示线性变压器的T型等效电路。

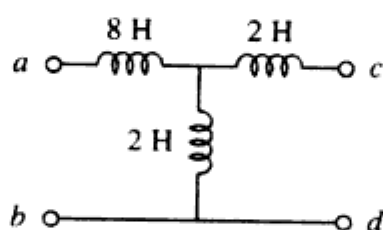
解 已知$L_1=10$，$L_2=4$，$M=2$，于是，T型网络的参数如下：

$$L_a = L_1 - M = 10 - 2 = 8\ \text{H}$$
$$L_b = L_2 - M = 4 - 2 = 2\ \text{H},\quad L_c = M = 2\ \text{H}$$

T型等效电路如图13-26b所示。已经假定初级线圈与次级线圈的电流参考方向和电压极性符合图13-21所示情况。否则就需要用$-M$取代M，参见例题13-6。



(a) 线性变压器



(b) T 型等效电路

图 13-26 例题 13-5 的电路原理图

练习题13-5 试求如图13-26a所示线性变压器的Π型等效网络。

答 $L_A=18$ H，$L_B=4.5$ H，$L_C=18$ H。

例题13-6 试利用线性变压器的T型等效电路求解如图13-27（与练习题13-1的电路相同）所示电路

中的$\boldsymbol{I}_1$、$\boldsymbol{I}_2$与$\boldsymbol{V}_o$。

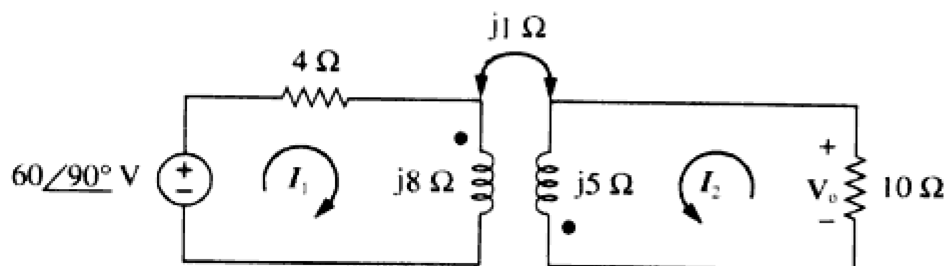


图 13-27　例题 13-6 的电路原理图

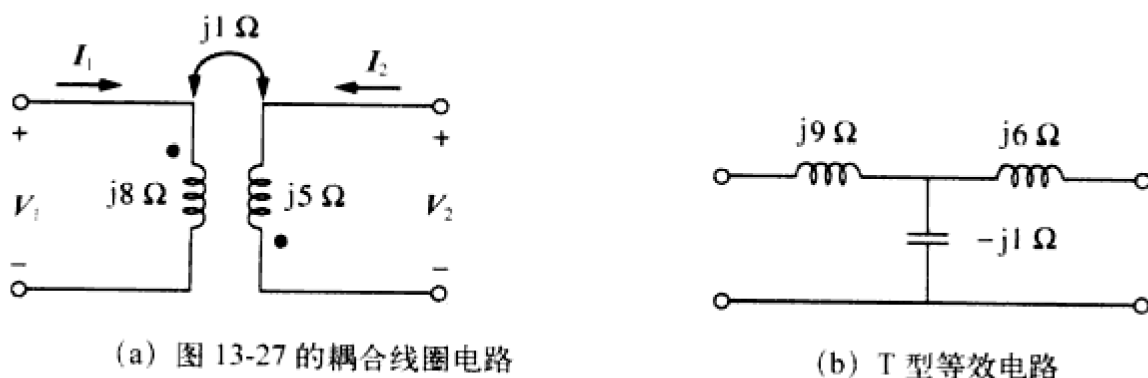
解　图13-27所示电路与图13-10所示电路相同，只是电流$\boldsymbol{I}_2$的参考方向相反，仅需使磁耦合线圈的电流参考方向符合图13-21所示情况即可。

将磁耦合线圈用其等效T型电路取代，图13-27所示电路的相关部分如图13-28a所示。比较图13-28a与图13-21可知，有两处不同。首先，由于电流参考方向与电压极性不同，必须用$-M$取代M，从而使得图13-28a所示电路符合图13-21所示情况。其次，图13-21所示电路为时域电路，而图13-28a所示电路为频域电路，不同之处在于因子$\mathrm{j}\omega$，也就是说，图13-21中的L应该用$\mathrm{j}\omega L$取代，M应该用$\mathrm{j}\omega M$取代。由于本题并未规定ω的值，因此可以假定$\omega=1$ rad/s或者其他值，这并不会影响本题的求解。明确以上两处不同后，可得：

$$L_a = L_1 - (-M) = 8 + 1 = 9\ \mathrm{H}$$

$$L_b = L_2 - (-M) = 5 + 1 = 6\ \mathrm{H}, \qquad L_c = -M = -1\ \mathrm{H}$$

于是，耦合线圈的T型等效电路如图13-28b所示。



(a) 图 13-27 的耦合线圈电路　　(b) T 型等效电路

图 13-28　例题 13-6 的电路原理图

利用如图13-28b所示的T型等效电路取代图13-27中的两个耦合线圈，得到如图13-29所示的等效电路，于是就可以利用节点电压分析法或网孔电流分析法求解该电路。由网孔电流分析法，可得：

$$\mathrm{j}\,6 = \boldsymbol{I}_1(4 + \mathrm{j}\,9 - \mathrm{j}\,1) + \boldsymbol{I}_2(-\mathrm{j}\,1) \tag{13-6-1}$$

并且

$$0 = \boldsymbol{I}_1(-\mathrm{j}\,1) + \boldsymbol{I}_2(10 + \mathrm{j}\,6 - \mathrm{j}\,1) \tag{13-6-2}$$

由式(13-6-2)可得：

$$\boldsymbol{I}_1 = \frac{(10+\mathrm{j}5)}{\mathrm{j}}\boldsymbol{I}_2 = (5-\mathrm{j}10)\boldsymbol{I}_2 \tag{13-6-3}$$

将式(13-6-3)代入式(13-6-1)得到：

$$\mathrm{j}\,6 = (4+\mathrm{j}\,8)(5-\mathrm{j}\,10)\boldsymbol{I}_2 - \mathrm{j}\,\boldsymbol{I}_2 = (100-\mathrm{j})\boldsymbol{I}_2 \simeq 100\boldsymbol{I}_2$$

由于100比1大得多，所以上式中$(100-\mathrm{j})$的虚部可以忽略，于是，$100-\mathrm{j}\approx 100$。因此，

$$\boldsymbol{I}_2 = \frac{\mathrm{j}6}{100} = \mathrm{j}0.06 = 0.06\underline{/90^\circ}\mathrm{A}$$

由式(13-6-3)得到：

$$I_1=(5-\mathrm{j}\,10)\,\mathrm{j}\,0.06=0.6+\mathrm{j}\,0.3\ \mathrm{A}$$

并且

$$V_o=-10I_2=-\mathrm{j}0.6=0.6\angle-90°\mathrm{V}$$

上述结果与练习题13-1的答案一致。当然，图13-10中的I_2方向与图13-27中I_2的方向相反，但是这并不会影响V_o，只是本题中I_2的值与练习题13-1中I_2的值符号相反。利用T型等效模型取代磁耦合线圈的优点是，在图13-29所示电路中无需再考虑耦合线圈中的同名端问题。

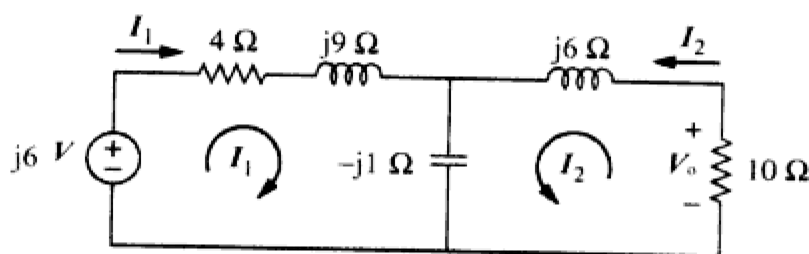


图 13-29 例题 13-6 的电路原理图

练习题13-6 试利用T型等效电路取代磁耦合线圈，求解例题13-1（参见图13-9）。

答 $13\angle-49.4°$ A，$2.91\angle14.04°$ A。

13.5 理想变压器

理想变压器是一种完全耦合（即$k=1$）的变压器。它由大量缠绕在高磁导率的公共磁芯上的绕组构成的两个（或多个）线圈组成，由于磁芯的磁导率高，所以磁通量与两个线圈的所有绕组交链，从而得到完全耦合的变压器。

为了说明理想变压器是两个完全耦合的电感值趋于无穷的耦合线圈的极限情况，下面考虑如图13-14所示电路。在频域中可以得到：

$$V_1=\mathrm{j}\,\omega L_1 I_1+\mathrm{j}\,\omega M I_2 \tag{13-49a}$$

$$V_2=\mathrm{j}\,\omega M I_1+\mathrm{j}\,\omega L_2 I_2 \tag{13-49b}$$

由式(13-49a)可得：$I_1=(V_1-\mathrm{j}\,\omega M I_2)/\mathrm{j}\,\omega L_1$，将其代入式(13-49b)得到：

$$V_2=\mathrm{j}\omega L_2 I_2+\frac{MV_1}{L_1}-\frac{\mathrm{j}\omega M^2 I_2}{L_1}$$

但在完全耦合（$k=1$）条件下，$M=\sqrt{L_1L_2}$，所以，

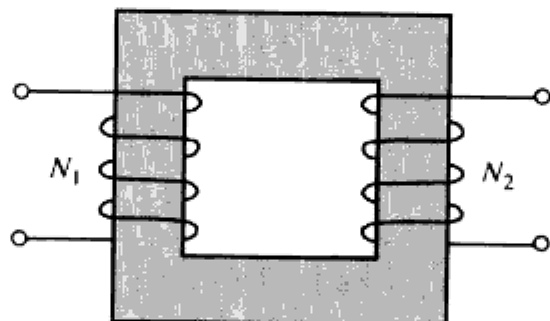
$$V_2=\mathrm{j}\omega L_2 I_2+\frac{\sqrt{L_1L_2}V_1}{L_1}-\frac{\mathrm{j}\omega L_1L_2 I_2}{L_1}=\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}V_1=nV_1$$

其中，$n=\sqrt{L_2/L_1}$，称为完全耦合变压器的变比或匝比（turns ratio）。当L_1、L_2、$M\to\infty$，且保持n不变时，耦合线圈就变为理想变压器了。因此，当变压器具有如下属性时，称之为理想变压器：

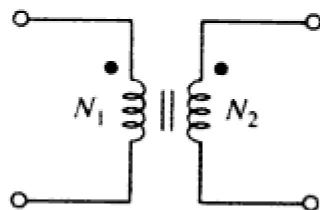
（1）线圈具有非常大的电抗（L_1, L_2, $M\to\infty$）；

（2）耦合系数等于单位1（即$k=1$）；

（3）初级线圈与次级线圈是无损耗的（即$R_1=0=R_2$）。



（a）理想变压器



（b）理想变压器的电路符号

图 13-30

理想变压器是初级线圈与次级线圈具有无穷大自感的、完全耦合的、无损变压器。

铁芯变压器是理想变压器的最佳近似，通常用于电力系统或电子设备中。

图13-30a所示为一个典型的理想变压器，其电路符号如图13-30b所示，图中两线圈之间的竖线表示铁芯，以区别于线性变压器中的空气芯。初级线圈为N_1匝，次级线圈为N_2匝。

当正弦电压作用于变压器的初级线圈上时，如图13-31所示，两个线圈中通过的磁通量ϕ相同，按照法拉第定理，初级线圈两端的电压为：

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt} \tag{13-50a}$$

而次级线圈两端的电压为：

$$v_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt} \tag{13-50b}$$

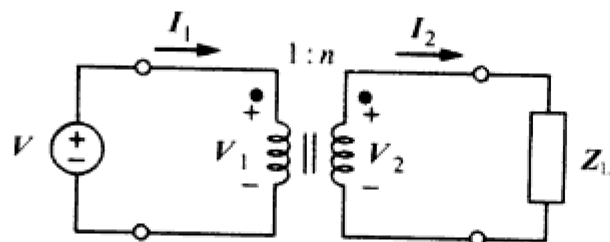


图 13-31 理想变压器中初级变量与次级变量之间的关系

用式(13-50a)去除式(13-50b)，得到：

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{N_2}{N_1} = n \tag{13-51}$$

其中，n仍然是匝比或变比。利用相量电压$\mathbf{V}_1$与$\mathbf{V}_2$，而不是瞬时值v_1与v_2表示时，式(13-51)可以写为：

$$\boxed{\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{N_2}{N_1} = n} \tag{13-52}$$

按照功率守恒定理，由于理想变压器没有任何损耗，所以初级线圈提供的能量必定等于次级线圈吸收的能量，这意味着：

$$v_1 i_1 = v_2 i_2 \tag{13-53}$$

采用相量表示后，由式(13-53)与式(13-52)可得：

$$\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = n \tag{13-54}$$

即初级电流、次级电流与匝比之间的关系同电压与匝比之间的关系是相反的，因此：

$$\boxed{\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{n}} \tag{13-55}$$

当$n=1$时，一般称该变压器为隔离变压器（isolation transformer），13.9.1节将说明其原因。当$n>1$时，称为升压变压器（step-up transformer），因为电压从初级变到次级是升高的（即$\mathbf{V}_2 > \mathbf{V}_1$）；当$n<1$时，称为降压变压器（step-down transformer），因为电压从初级变到次级是降低的（即$\mathbf{V}_2 < \mathbf{V}_1$）。

降压变压器是指次级电压低于初级电压的变压器。

升压变压器是指次级电压大于初级电压的变压器。

变压器的额定值通常用V_1/V_2来规定。额定值为2 400/120 V的变化器，是指其初级电压为2 400 V，次级电压为120 V（即降压变压器）。需要记住的是，额定电压值均指有效值。

电力公司通常产生适当大小的电压，并利用升压变压器将电压升高，从而在传输线上实现以极高的电压和很低的电流输送电力，以节省大量的相关费用。而到了用户住宅附近，再利用降压变压器使电压降至120 V，13.9.3节将详细讨论这一问题。

掌握如何确定如图13-31所示变压器的正确电压极性与电流方向非常重要。如果图中$\mathbf{V}_1$或$\mathbf{V}_2$的极性改变，或者$\mathbf{I}_1$或$\mathbf{I}_2$的方向改变，都应该将式(13-51)～式(13-55)中的n替换为$-n$。于是，得到如下两个简单规则：

（1）如果同名端处的V_1与V_2均为正，或者均为负，则在式(13-52)中采用$+n$，否则，就采用$-n$。

（2）如果I_1与I_2均进入或者均流出同名端，则在式(13-55)中采用$-n$，否则，就采用$+n$。

如图13-32所示的四个电路可以很好地说明上述规则。

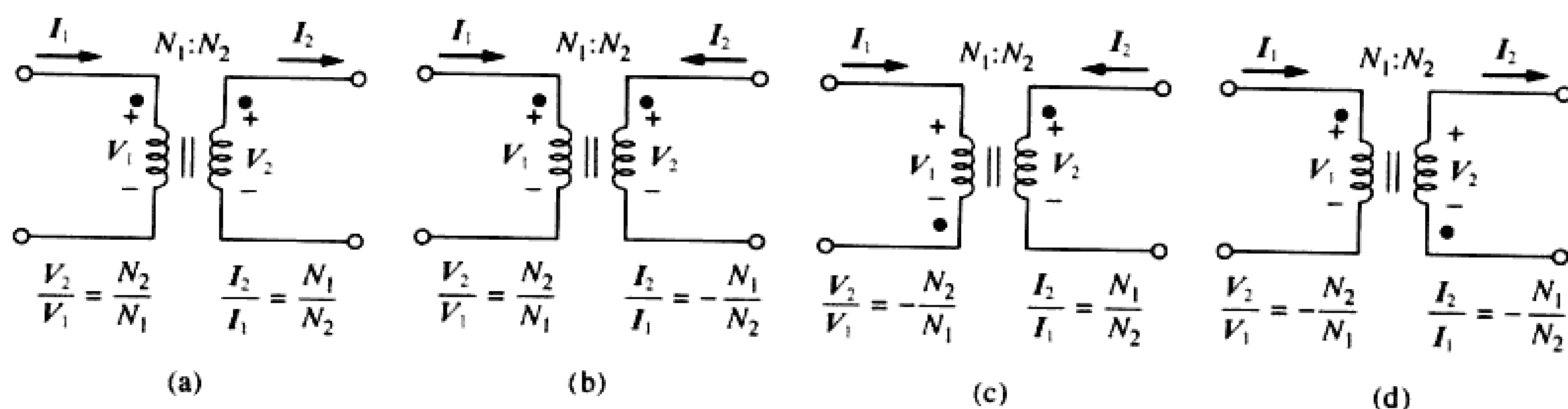


图 13-32 说明理想变压器电压极性与电流方向的四个典型电路

利用式(13-52)与式(13-55)，总可以用V_2来表示V_1，用I_2来表示I_1，反之亦然，所以有：

$$V_1=\frac{V_2}{n} \qquad 或 \qquad V_2=nV_1 \tag{13-56}$$

$$I_1=nI_2 \qquad 或 \qquad I_2=\frac{I_1}{n} \tag{13-57}$$

初级线圈的复功率为：

$$\boxed{S_1=V_1I_1^*=\frac{V_2}{n}(nI_2)^*=V_2I_2^*=S_2} \tag{13-58}$$

上式表明，提供给初级的复功率没有损耗地都传送到次级，即变压器不吸收功率，这一结论应该是可以预期的，因为理想变压器是无损耗的。由式(13-56)与式(13-57)可以得出从如图13-31所示电路电源端看进去的输入阻抗为：

$$Z_{in}=\frac{V_1}{I_1}=\frac{1}{n^2}\frac{V_2}{I_2} \tag{13-59}$$

由图13-31显然可见，$V_2/I_2=Z_L$，因此，

$$\boxed{Z_{in}=\frac{Z_L}{n^2}} \tag{13-60}$$

由于输入阻抗看起来好像是负载阻抗反射到初级的阻抗，因此也称之为*反射阻抗*（reflected impedance）。变压器的这种将给定阻抗变换为另一阻抗的能力提供了一种实现最大功率传输的*阻抗匹配*（impedance matching）方法。阻抗匹配的思想在实际中非常有用，将在13.9.2节中详细地讨论。

注意：理想变压器将阻抗映射为匝比的平方倍。

在分析包含理想变压器的电路时，通常是将阻抗与电源从变压器一侧映射到另一侧，以消除电路中的变压器。例如，在如图13-33所示电路中，假定要将变压器的次级电路映射到初级。需求出端口a—b右侧电路的戴维南等效电路，其中V_{TH}为端口$a-b$处的开路电压，如图13-34a所示。

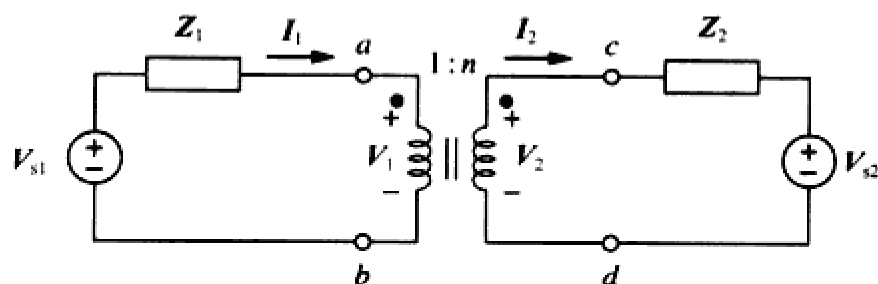
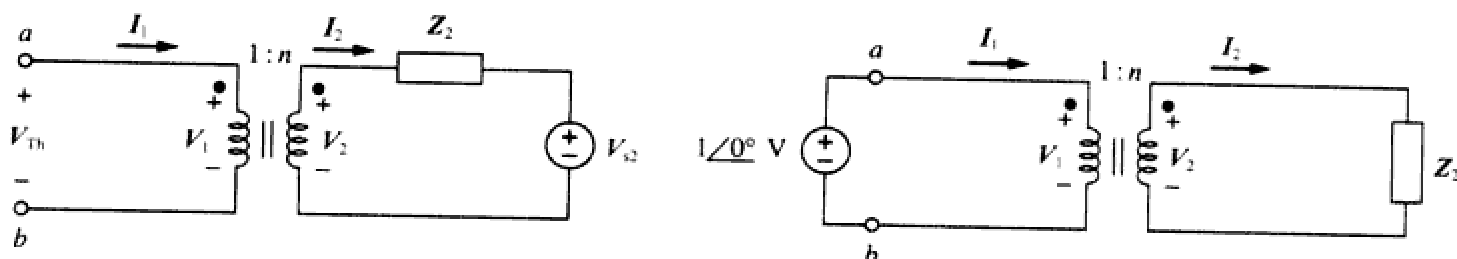


图 13-33 欲求等效电路的理想变压器电路



（a）确定图 13-33 所示电路的 V_{Th} 的电路原理图　　（b）确定图 13-33 所示电路的 Z_{Th} 的电路原理图

图　13-34

由于端口$a-b$是开路的，所以$I_1=0=I_2$，从而$V_2=V_{s2}$。因此，由式(13-56)可以得到：

$$V_{Th}=V_1=\frac{V_2}{n}=\frac{V_{s2}}{n} \tag{13-61}$$

为了确定Z_{Th}，将次级线圈的电压源短路，并在端口$a-b$处输入一个单位电压源，如图13-34b所示。由式(13-56)与式(13-57)可得，$I_1=nI_2$且$V_1=V_2/n$，于是，

$$Z_{Th}=\frac{V_1}{I_1}=\frac{V_2/n}{nI_2}=\frac{Z_2}{n^2}, \qquad V_2=Z_2I_2 \tag{13-62}$$

这也是由式(13-60)可以预期的结果。一旦求出V_{Th}与Z_{Th}，即可用该戴维南等效电路取代图13-33所示电路端口$a-b$右侧的部分，得到如图13-35所示电路。

将次级电路映射到初级从而消去变压器的一般规则是，次级阻抗除以n^2，次级电压除以n，并且次级电流乘以n。

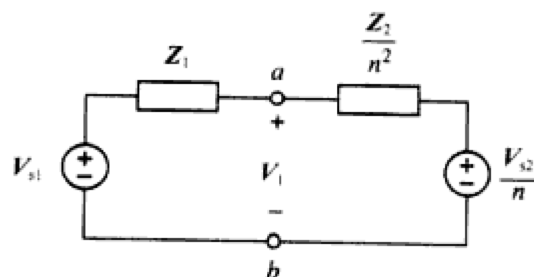


图13-35　将次级电路映射到初级所确定的图13-33的等效电路

当然，也可以将图13-33所示电路的初级映射到次级，得到如图13-36所示的等效电路。

将初级电路映射到次级从而消去变压器的一般规则是，初级阻抗乘以n^2，初级电压乘以n，并且初级电流除以n。

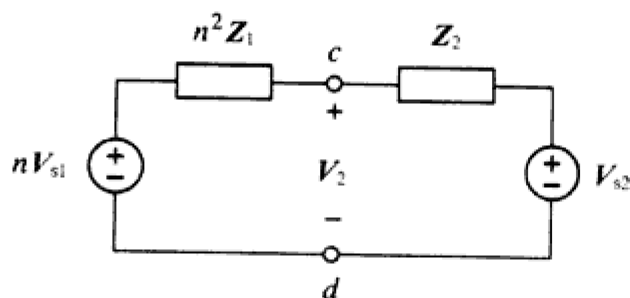


图13-36　将初级电路映射到次级所确定的图13-33的等效电路

根据式(13-58)，不论是按初级计算还是按次级计算，功率是保持不变的。但是，需要注意的是，这种映射方法仅适用于初级线圈与次级线圈之间无外部连接的情况。当初级线圈与次级线圈之间有外部连接时，通常采用网孔分析法与节点分析法来求解电路。初级线圈与次级线圈之间有外部连接的电路实例如图13-39与图13-40所示。另外，如果图13-33中的同名端位置发生变化，则为了遵循同名端规则，就需要用$-n$取代n，如图13-32所示。

例题13-7　某理想变压器的额定值为2 400/120 V，9.6 kVA，并且次级线圈为50匝。试计算：(a) 匝比；(b) 初级线圈的匝数；(c) 初级线圈与次级线圈的额定电流值。

解　(a) 由于$V_1=2\,400\text{ V}>V_2=120\text{ V}$，所以这是一个降压变压器，

$$n=\frac{V_2}{V_1}=\frac{120}{2\,400}=0.05$$

(b)

$$n=\frac{N_2}{N_1} \quad\Rightarrow\quad 0.05=\frac{50}{N_1}$$

即：

$$N_1 = \frac{50}{0.05} = 1\,000\text{匝}$$

（c）$S = V_1 I_1 = V_2 I_2 = 9.6$ kVA，因此，

$$I_1 = \frac{9\,600}{V_1} = \frac{9\,600}{2\,400} = 4\text{A}$$

$$I_2 = \frac{9\,600}{V_2} = \frac{9\,600}{120} = 80\text{A} \quad \text{或} \quad I_2 = \frac{I_1}{n} = \frac{4}{0.05} = 80\text{A}$$

练习题13-7 某额定值为3 300/110 V的理想变压器的初级电流为3 A，试计算：（a）匝比；（b）kVA额定值；（c）次级电流。

答 （a）1/30；（b）9.9 kVA；（c）90 A。

例题13-8 对于如图13-37所示的理想变压器电路，试求（a）电源电流$\boldsymbol{I}_1$；（b）输出电压$\boldsymbol{V}_o$；（c）电源提供的复功率。

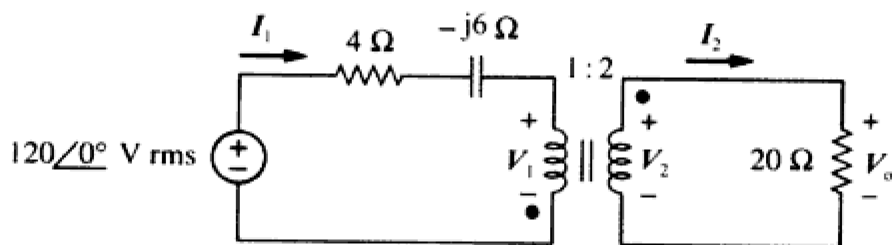


图 13-37 例题 13-8 的电路原理图

解 （a）20 Ω阻抗可以反射到初级，得到：

$$\boldsymbol{Z}_R = \frac{20}{n^2} = \frac{20}{4} = 5\,\Omega$$

于是，

$$\boldsymbol{Z}_{in} = 4 - \text{j}6 + \boldsymbol{Z}_R = 9 - \text{j}6 = 10.82\underline{/-33.69^\circ}\,\Omega$$

$$\boldsymbol{I}_1 = \frac{120\underline{/0^\circ}}{\boldsymbol{Z}_{in}} = \frac{120\underline{/0^\circ}}{10.82\underline{/-33.69^\circ}} = 11.09\underline{/33.69^\circ}\text{A}$$

（b）由于$\boldsymbol{I}_1$与$\boldsymbol{I}_2$均从同名端流出，所以：

$$\boldsymbol{I}_2 = -\frac{1}{n}\boldsymbol{I}_1 = -5.545\underline{/33.69^\circ}\text{A}$$

$$\boldsymbol{V}_o = 20\boldsymbol{I}_2 = 110.9\underline{/213.69^\circ}\text{V}$$

（c）电源提供的复功率为：

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{V}_s\boldsymbol{I}_1^* = (120\underline{/0^\circ})(11.09\underline{/-33.69^\circ}) = 1\,330.8\underline{/-33.69^\circ}\text{VA}$$

练习题13-8 在如图13-38所示的理想变压器电路中，试求$\boldsymbol{V}_o$与电源提供的复功率。

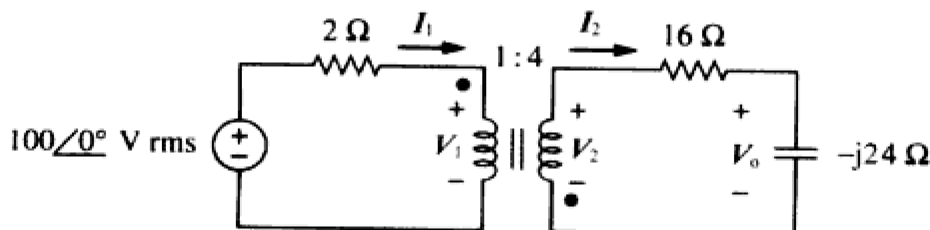


图 13-38 练习题 13-8 的电路原理图

答 $178.9\underline{/116.56^\circ}$ V，$2\,981.5\underline{/-26.56^\circ}$ VA。

例题13-9 试计算如图13-39所示的理想变压器电路中提供给10 Ω电阻器的功率。

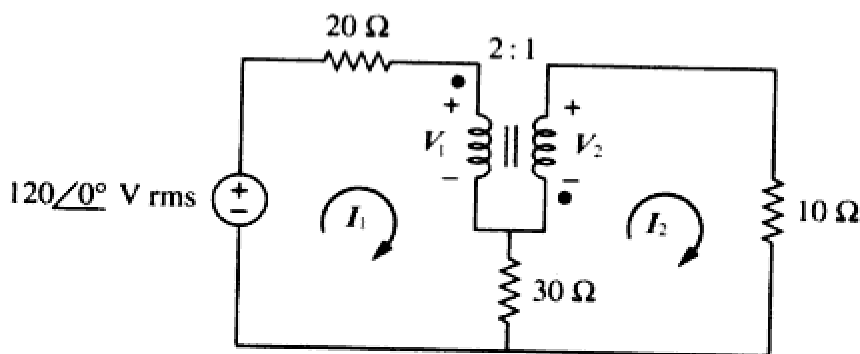


图 13-39 例题 13-9 的电路原理图

解 由于本题电路中初级与次级之间通过一个30 Ω电阻器直接相连，所以既不能将该电路映射到次级，也不能映射到初级。需应用网孔分析法求解，对于网孔1，有：

$$-120+(20+30)\boldsymbol{I}_1-30\boldsymbol{I}_2+\boldsymbol{V}_1=0$$

即：

$$50\boldsymbol{I}_1-30\boldsymbol{I}_2+\boldsymbol{V}_1=120 \tag{13-9-1}$$

对于网孔2，有：

$$-\boldsymbol{V}_2+(10+30)\boldsymbol{I}_2-30\boldsymbol{I}_1=0$$

即：

$$-30\boldsymbol{I}_1+40\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{V}_2=0 \tag{13-9-2}$$

在变压器两端，有：

$$\boldsymbol{V}_2=-\frac{1}{2}\boldsymbol{V}_1 \tag{13-9-3}$$

$$\boldsymbol{I}_2=-2\boldsymbol{I}_1 \tag{13-9-4}$$

（注意，$n=1/2$）于是得到包含四个未知数的四个方程，但本题需要求出的是$\boldsymbol{I}_2$，所以在式(13-9-1)与式(13-9-2)中，利用$\boldsymbol{V}_2$与$\boldsymbol{I}_2$取代$\boldsymbol{V}_1$与$\boldsymbol{I}_1$，式(13-9-1)成为：

$$-55\boldsymbol{I}_2-2\boldsymbol{V}_2=120 \tag{13-9-5}$$

式(13-9-2)成为：

$$15\boldsymbol{I}_2+40\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{V}_2=0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{V}_2=55\boldsymbol{I}_2 \tag{13-9-6}$$

将式(13-9-6)代入式(13-9-5)，得到：

$$-165\boldsymbol{I}_2=120 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{I}_2=-\frac{120}{165}=-0.727\,2\text{A}$$

于是，10 Ω电阻器吸收的功率为：

$$P=(-0.727\,2)^2(10)=5.3\text{ W}$$

练习题13-9 试求如图13-40所示电路中的$\boldsymbol{V}_o$。

答 24 V。

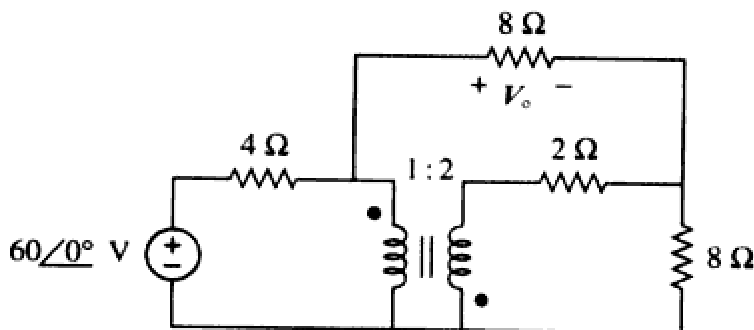


图 13-40 练习题 13-9 的电路原理图

13.6 理想自耦变压器

与之前介绍的传统的两线圈变压器不同，**自耦变压器**（autotransformer）仅包括一个连续线圈，其初级与次级之间通过一个称为**抽头**（tap）的连接点相互关联。抽头通常是可调整的，用以提供升压或降压时所需的匝比。这样，自耦变压器就可以为其负载提供可变的电压。

自耦变压器是指初级与次级为同一个线圈的变压器。

图13-41所示为一个典型的自耦变压器。如图13-42所示，自耦变压器既可以工作在降压模式，也可以工作在升压模式。自耦变压器是功率变压器的一种，它较两线圈的变压器的优势在于，自耦变压器能够实现较大视在功率的传递，例题13-10将对此予以说明。自耦变压器的另一优势在于，其体积比等效的两线圈变压器更小，其重量比等效的两线圈变压器更轻。但是，由于初级线圈与次级线圈为同一个线圈，因而就失去了**电气隔离**（electrical isolation，没有直接的电气连接）的功能（13.9.1节将介绍电气隔离属性在传统变压器中的实际应用）。初级线圈与次级线圈之间缺乏电气隔离正是自耦变压器的主要缺点。

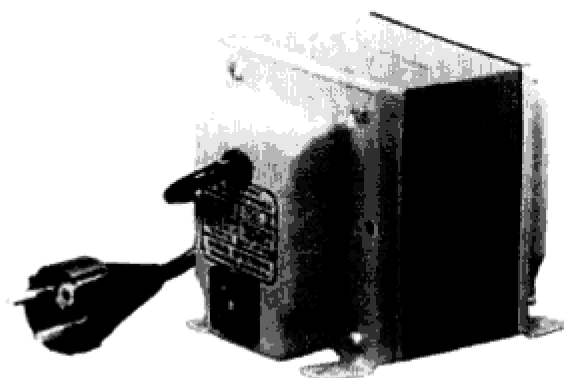
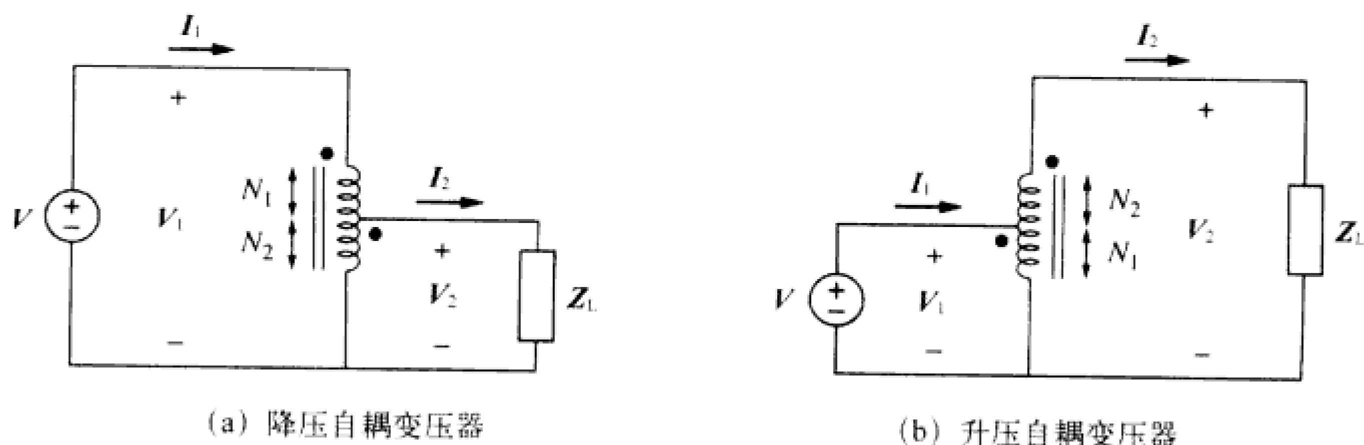


图 13-41 典型的自耦变压器



(a) 降压自耦变压器 (b) 升压自耦变压器

图 13-42

之前推导的理想变压器的一些公式同样适用于自耦变压器。对于如图13-42a所示的降压自耦变压器，由式(13-52)可得：

$$\boxed{\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2}=\frac{N_1+N_2}{N_2}=1+\frac{N_1}{N_2}} \tag{13-63}$$

对于理想自耦变压器，同样没有功率损耗，所以初级线圈与次级线圈中的复功率是相同的：

$$\mathbf{S}_1=\mathbf{V}_1\mathbf{I}_1^*=\mathbf{S}_2=\mathbf{V}_2\mathbf{I}_2^* \tag{13-64}$$

式(13-64)还可以表示为：

$$V_1I_1=V_2I_2$$

即：

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{I_1}{I_2} \tag{13-65}$$

于是，初级与次级的电流关系为：

$$\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2}=\frac{N_2}{N_1+N_2} \tag{13-66}$$

对于如图13-42b所示的升压自耦变压器，有：

$$\frac{\boldsymbol{V}_1}{N_1}=\frac{\boldsymbol{V}_2}{N_1+N_2}$$

即：

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{V}_1}{\boldsymbol{V}_2}=\frac{N_1}{N_1+N_2}} \tag{13-67}$$

式(13-64)给出的复功率同样适用于升压自耦变压器，因此式(13-65)对于升压自耦变压器也是成立的，于是，初级与次级的电流关系为：

$$\frac{\boldsymbol{I}_1}{\boldsymbol{I}_2}=\frac{N_1+N_2}{N_1}=1+\frac{N_2}{N_1} \tag{13-68}$$

传统变压器与自耦变压器之间的主要区别在于：自耦变压器的初级与次级之间不仅存在磁耦合，而且存在电导耦合。在无需电气隔离的应用场合，可以利用自耦变压器取代传统变压器。

例题13-10 试比较如图13-43a所示的两线圈变压器与如图13-43b所示的自耦变压器的额定功率值。

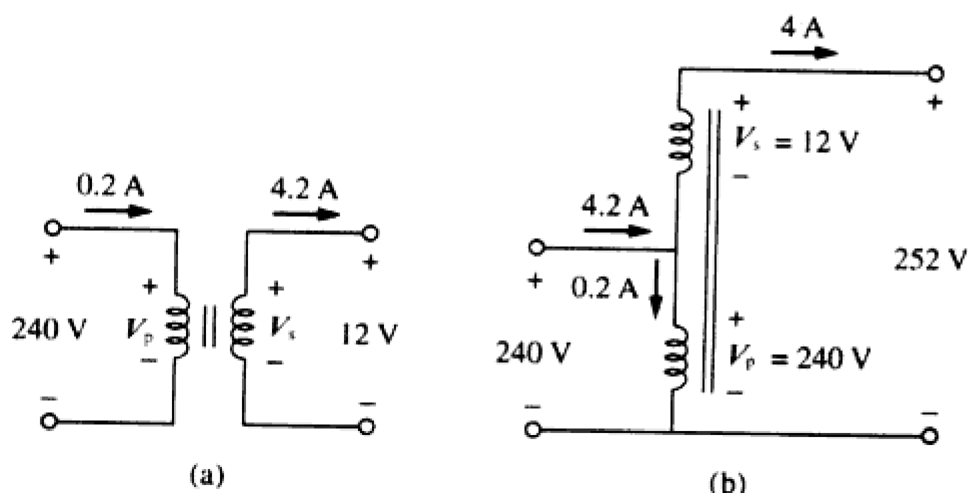


图 13-43 例题 13-10 的电路原理图

解 虽然自耦变压器的初级线圈与次级线圈是同一个连续线圈，但在图13-43b中，为了清楚起见，将它们分开画出。注意，图13-43b所示自耦变压器各线圈中的电流和电压与图13-43a所示两线圈变压器的电流和电压是相同的，这是比较这两个变压器额定功率的基础。

对于两线圈变压器而言，其额定功率为：

$$S_1=0.2(240)=48\text{ VA} \qquad 或 \qquad S_2=4(12)=48\text{ VA}$$

对于自耦变压器而言，其额定功率为：

$$S_1=4.2(240)=1\,008\text{ VA} \qquad 或 \qquad S_2=4(252)=1\,008\text{ VA}$$

显然，自耦变压器的额定功率是两线圈变压器的21倍。

练习题13-10 参见如图13-43所示电路，如果两线圈变压器是一个60 VA、120V/10V的变压器，试问自耦变压器的额定功率为多少？

答 780 VA。

例题13-11 参见如图13-44所示的自耦变压器电路，试计算：(a) 当$\boldsymbol{Z}_L=8+j6\ \Omega$时的$\boldsymbol{I}_1$，$\boldsymbol{I}_2$与$\boldsymbol{I}_o$；(b) 提供给负载的复功率。

解 (a) 这是一个$N_1=80$、$N_2=120$的升压自耦变压器，由于$\boldsymbol{V}_1=120\underline{/30^\circ}$，于是由式(13-67)可以求出$\boldsymbol{V}_2$：

$$\frac{\boldsymbol{V}_1}{\boldsymbol{V}_2}=\frac{N_1}{N_1+N_2}=\frac{80}{200}$$

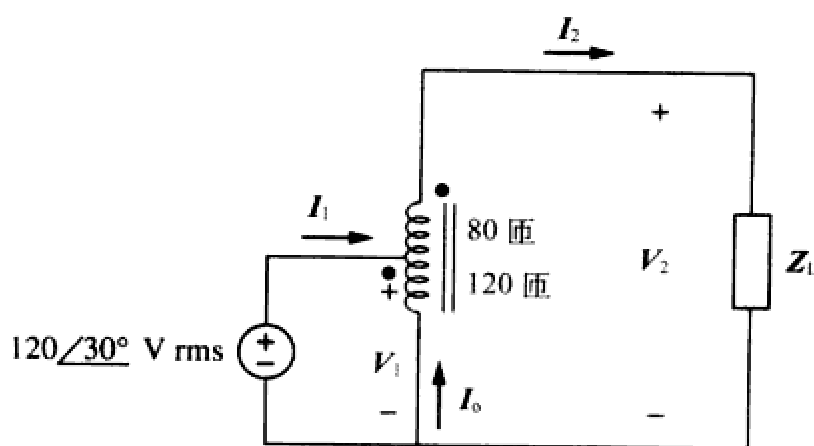


图 13-44 例题 13-11 的电路原理图

即：

$$V_2 = \frac{200}{80}V_1 = \frac{200}{80}(120\angle 30^\circ) = 300\angle 30^\circ\ \text{V}$$

$$I_2 = \frac{V_2}{Z_L} = \frac{300\angle 30^\circ}{8+\text{j}6} = \frac{300\angle 30^\circ}{10\angle 36.87^\circ} = 30\angle -6.87^\circ\ \text{A}$$

但是，

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_1+N_2}{N_1} = \frac{200}{80}$$

即：

$$I_1 = \frac{200}{80}I_2 = \frac{200}{80}(30\angle -6.87^\circ) = 75\angle -6.87^\circ\text{A}$$

在抽头处应用KCL，可以得到：

$$I_1 + I_o = I_2$$

即：

$$I_o = I_2 - I_1 = 30\angle -6.87^\circ - 75\angle -6.87^\circ = 45\angle 173.13^\circ\ \text{A}$$

（b）提供给负载的复功率为：

$$S_2 = V_2 I_2^* = |I_2|^2 Z_L = (30)^2(10\angle 36.87^\circ) = 9\angle 36.87^\circ\ \text{kVA}$$

练习题13-11 在如图13-45所示的自耦变压器电路中，试求电流I_1、I_2和I_o。假定$V_1 = 1\,250$ V，$V_2 = 800$ V。

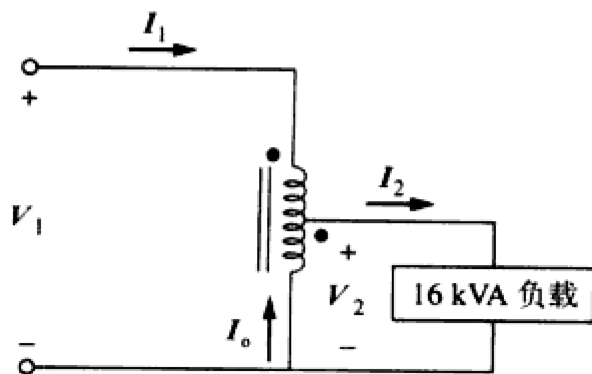


图 13-45 练习题 13-11 的电路原理图

答 12.8 A，20 A，7.2 A。

13.7 †三相变压器

为满足三相电传输的要求，就需要与三相电工作相兼容的变压器连接。可以通过如下两种方式

实现上述变压器连接：一种是连接三个单相变压器，构成所谓的变压器组（transformer bank），另一种采用专用的三相变压器。对于相同的kVA额定功率，三相变压器比三个单相变压器体积小、价格低。如果采用单相变压器，必须保证三个变压器的匝比n一致，从而构成平衡的三相系统。在三相系统中，三个单相变压器或者三相变压器有四种标准的连接方式：Y−Y、Δ−Δ、Y−Δ与Δ−Y。

无论何种连接方式，其总的视在功率S_T，有功功率P_T与无功功率Q_T为：

$$S_T = \sqrt{3}\ V_L I_L \tag{13-69a}$$

$$P_T = S_T \cos\theta = \sqrt{3}\ \ V_L I_L \cos\theta \tag{13-69b}$$

$$Q_T = S_T \sin\theta = \sqrt{3}\ \ V_L I_L \sin\theta \tag{13-69c}$$

其中，V_L与I_L分别等于初级的线电压V_{Lp}与线电流I_{Lp}，或者分别等于次级的线电压V_{Ls}与线电流I_{Ls}。因为功率在理想变压器中必须是守恒的，所以由式(13-69)可知，对于四种连接中的每一种，都有$V_{Ls}I_{Ls} = V_{Lp}I_{Lp}$。

对于如图13-46所示的Y−Y连接，由式(13-52)与式(13-55)可知，初级线电压V_{Lp}、次级线电压V_{Ls}、初级线电流I_{Lp}和次级线电流I_{Ls}与变压器每一相的匝比n之间的关系为：

$$V_{Ls} = nV_{Lp} \tag{13-70a}$$

$$I_{Ls} = \frac{I_{Lp}}{n} \tag{13-70b}$$

对于如图13-47所示的Δ−Δ连接，式(13-70)同样适用于其线电压与线电流。这种连接的一个独特的性质是：如果其中某个变压器需要取走进行维修或维护，其他两个变压器构成开路Δ连接，则仍然能够以原三相变压器的简化方式提供三相电压。

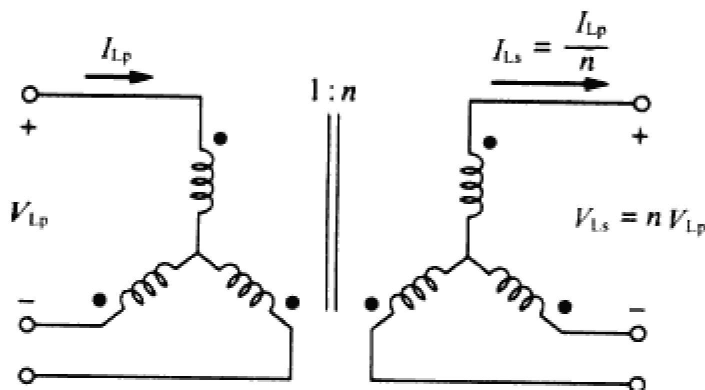


图 13-46 Y−Y 三相变压器连接

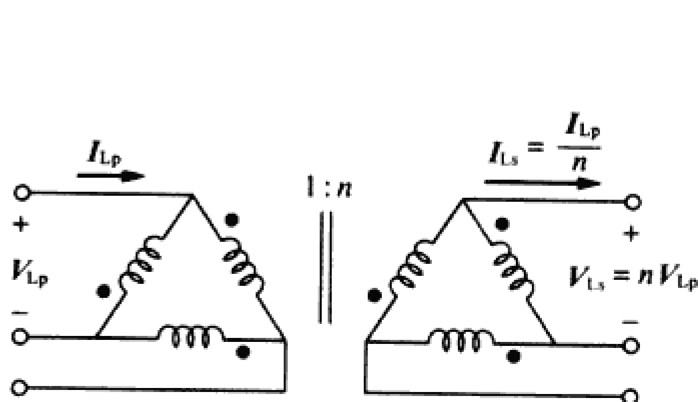


图 13-47 Δ−Δ 三相变压器连接

对于如图13-48所示的Y−Δ连接，除变压器的每相匝比n以外，其线−相值之间还存在一个$\sqrt{3}$的因子，所以：

$$V_{Ls} = \frac{nV_{Lp}}{\sqrt{3}} \tag{13-71a}$$

$$I_{Ls} = \frac{\sqrt{3}I_{Lp}}{n} \tag{13-71b}$$

同理，对于如图13-49所示的Δ−Y连接，有：

$$V_{Ls} = n\sqrt{3}V_{Lp} \tag{13-72a}$$

$$I_{Ls} = \frac{I_{Lp}}{n\sqrt{3}} \tag{13-72b}$$

例题13-12 某三相变压器为如图13-50所示的42 kVA对称三相负载供电。(a) 试确定变压器的连接方式；(b) 试求初级的线电压与线电流；(c) 试确定变压器组中每个变压器的kVA额定功率。假定变压器均为理想的。

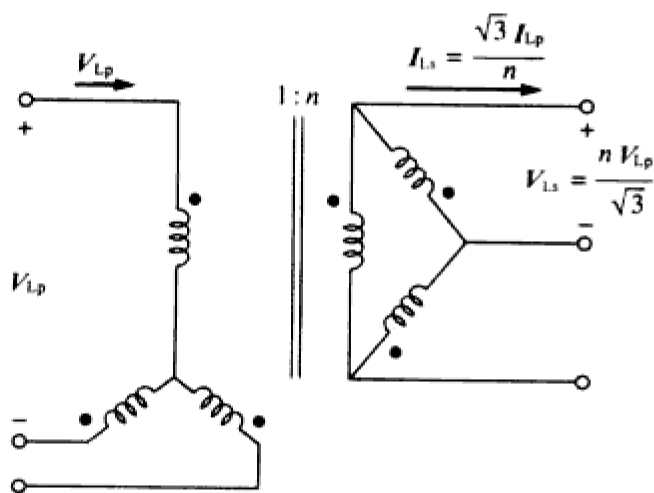


图 13-48　Y－Δ 三相变压器连接

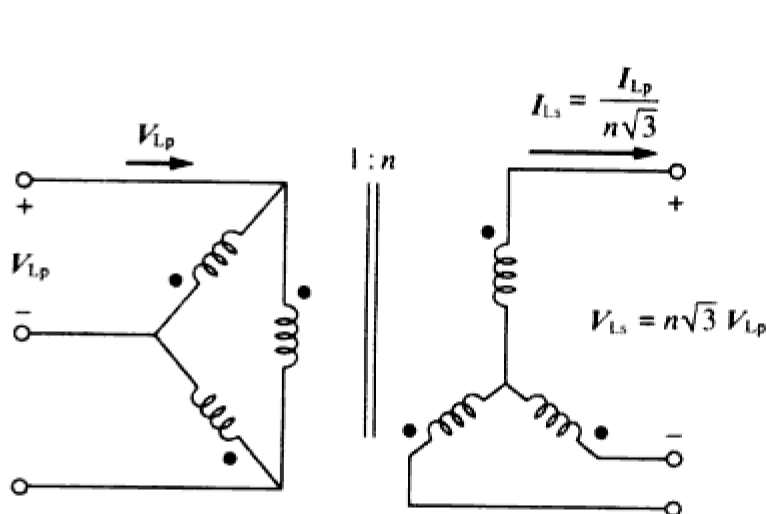


图 13-49　Δ－Y 三相变压器连接

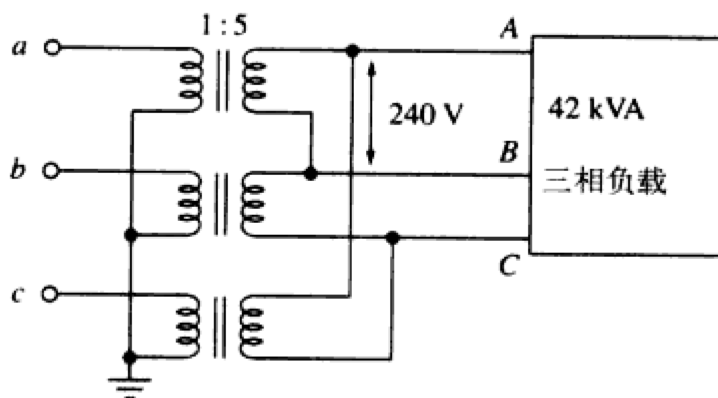


图 13-50　例题 13-12 的电路原理图

解　(a) 仔细观察如图13-50所示电路可知，变压器的初级为Y型连接，而次级为Δ型连接，因此三相变压器的连接为Y－Δ连接，与图13-48所示相同。

(b) 已知负载总的视在功率为$S_T = 42\text{kVA}$，匝比为$n = 5$，次级线电压为$V_{Ls} = 240$ V，利用式(13-69a)可以求出次级线电流为：

$$I_{Ls} = \frac{S_T}{\sqrt{3}V_{Ls}} = \frac{42\,000}{\sqrt{3}(240)} = 101\text{A}$$

由式(13-71)可以得到：

$$I_{Lp} = \frac{n}{\sqrt{3}} I_{Ls} = \frac{5 \times 101}{\sqrt{3}} = 292\text{A}$$

$$V_{Lp} = \frac{\sqrt{3}}{n} V_{Ls} = \frac{\sqrt{3} \times 240}{5} = 83.14\text{V}$$

(c) 由于负载是对称的，并且变压器为无功耗的理想变压器，所以每个变压器平分其总负载，所以每个变压器的kVA额定功率为$S = S_T/3 = 14$ kVA。另外，变压器的额定功率也可以由其初级或次级的相电流与相电压的乘积确定。例如，本题的初级为Δ型连接，所以相电压与线电压相等，均为240 V，而相电流为$I_{Lp}/\sqrt{3} = 58.34$ A，因此$S = 240 \times 58.34 = 14$ kVA。

练习题13-12　利用一个三相Δ－Δ变压器降低625 kV线电压，为工作线电压为12.5 kV的一家工厂供电，该工厂在功率因数为85%滞后时提取的功率为40 MW。试求：(a) 工厂所提取的电流；(b) 匝比；(c) 变压器的初级电流；(d) 各变压器的负载功率。

答　(a) 2.1736 kA；(b) 0.02；(c) 43.47 A；(d) 15.69 MVA。

13.8　基于 PSpice 的磁耦合电路分析

除必须遵循同名端规则外，利用PSpice软件分析磁耦合电路与分析电感器电路的方法是类似的。

在PSpice电路原理图中，当电感器L无旋转水平放置时，同名端总是位于电感器的引脚1处，即左边端点。所以当电感器逆时针旋转90°时，同名端即引脚1将位于下方，因为旋转总是围绕引脚1进行的。磁耦合电感器按照同名端规则放置在电路中，并设定好其取值，单位为亨利（H），就可以利用耦合符号K_LINEAR来定义耦合属性。对于每一对耦合电感器，应按照如下步骤予以定义：

（1）选择Draw/Get New Part菜单并键入K_LINEAR。

（2）回车或单击OK，将K_LINEAR符号放置在电路原理图中，如图13-51所示（注意，K_LINEAR并不是一个实际的元件，因此没有引脚）。

（3）双击耦合框COUPLING，设置耦合系数值k。

（4）双击耦合符号框K，输入耦合电感器的部件名Li，i＝1，2，…，6。例如，当L20与L23为耦合电感器时，则设置L1＝L20且L2＝L23。L1与至少另一个Li必须被赋值，而其他Li则可以空白。

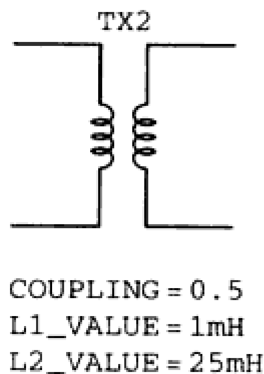
```
[K] K1
K_Linear
 COUPLING = 1
```

图 13-51 定义耦合系数的 K_Linear

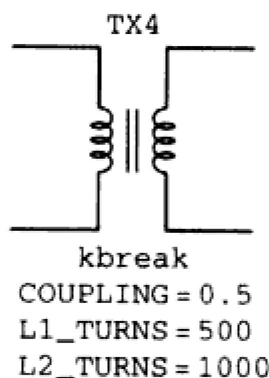
在步骤4中，最多可以定义6个耦合相同耦合电感器。

对于空芯变压器，部件名称为XFRM-LINEAR，选择Draw/Get Part Name菜单，并键入部件名称即可将其插入电路，或者从库文件analog.slb中选择部件名称插入电路。如图13-51a所示，线性变压器的主要属性包括：耦合系数k，电感值L1与L2（单位为H）。如果定义互感M，则必须利用M与L1、L2的值计算k值，注意，$0 < k < 1$。

对于理想变压器，部件名称为XFRM_NONLINEAR，可以在库文件breakout.slb中找到，选择并点击Draw/Get Part Name，即可键入其部件名称。其属性为耦合系数以及L1、L2的匝数，如图13-52b所示，互耦合系数的值为$k = 1$。



（a）线性变压器 XFRM_LINEAR



（b）理想变压器 XFRM_NONLINEAR

图 13-52

PSpice软件中该提供另外一些变压器结构，本书暂不讨论。

例题13-13 试利用PSpice求解如图13-53所示电路中的i_1、i_2与i_3。

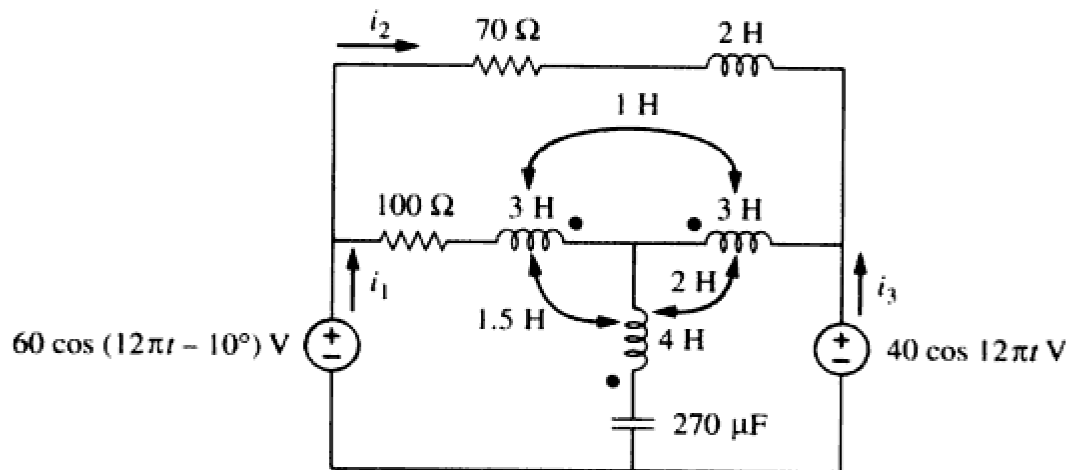


图 13-53 例题 13-13 的电路原理图

解 三个耦合电感器的耦合系数为：

$$k_{12}=\frac{M_{12}}{\sqrt{L_1L_2}}=\frac{1}{\sqrt{3\times 3}}=0.3333$$

$$k_{13}=\frac{M_{13}}{\sqrt{L_1L_3}}=\frac{1.5}{\sqrt{3\times 4}}=0.433$$

$$k_{23}=\frac{M_{23}}{\sqrt{L_2L_3}}=\frac{2}{\sqrt{3\times 4}}=0.5774$$

由图13-53可得其工作频率为$\omega=12\pi=2\pi f\rightarrow f=6$ Hz。

该电路的PSpice原理图如图13-54所示，注意同名端规则在该图中是如何体现的。对于L2而言，同名端位于引脚1（电感器左端），因此其位置无需旋转；对于L1而言，为了使同名端位于电感器的右端，该电感器必须旋转180°；对于L3而言，电感必须转90°，这样同名端才能位于下端。注意，2H电感器(L_4)是无耦合电感。对于上述三个耦合电感器，利用库文件analog.lib中提供的三个K_LINEAR部件设置其属性（双击对话框中的符号K）：

```
K1 - K_LINEAR
L1 = L1
L2 = L2
COUPLING = 0.3333
K2 - K_LINEAR
L1 = L2
L2 = L3
COUPLING = 0.433
K3 - K_LINEAR
L1 = L1
L2 = L3
COUPLING = 0.5774
```

右边的值是电路原理图中电感器的参考命名。

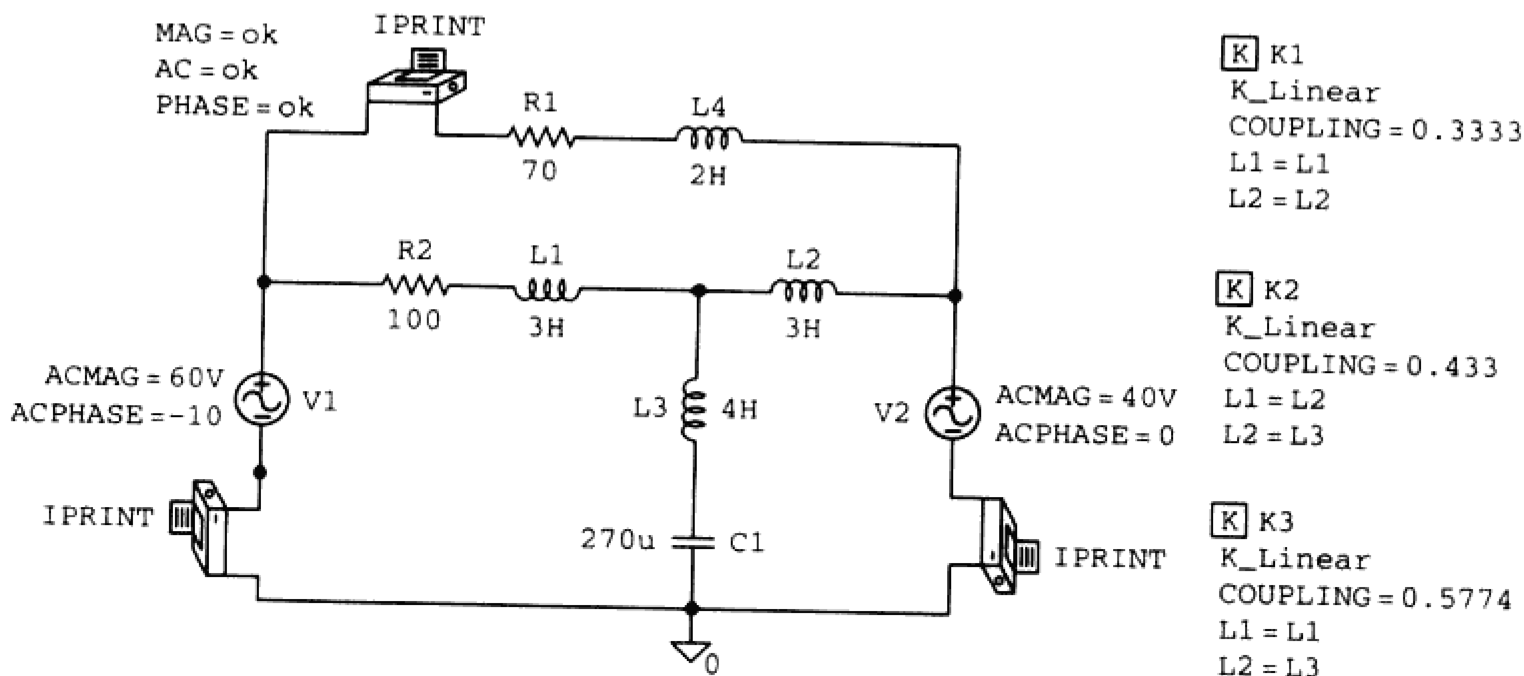


图 13-54 图 13-53 所示电路的 PSpice 原理图

在适当的支路加入三个伪元件IPRINT，用于确定所要求解的电流i_1、i_2与i_3。对于交流单频分析，选择Analysis/Setup/AC Sweep并在对话框中键入Total Pts = 1，Start Freq = 6且Final Freq = 6，存储电路原理图之后，运行Analysis/Simulate程序对电路进行模拟，得到如下输出文件：

```
FREQ            IM(V_PRINT2)    IP(V_PRINT2)
6.000E+00       2.114E-01       -7.575E+01
FREQ            IM(V_PRINT1)    IP(V_PRINT1)
6.000E+00       4.654E-01       -7.025E+01
FREQ            IM(V_PRINT3)    IP(V_PRINT3)
6.000E+00       1.095E-01       1.715E+01
```

由此得到：

$$\boldsymbol{I}_1 = 0.4654\underline{/-70.25^\circ}$$

$$\boldsymbol{I}_2 = 0.2114\underline{/-75.75^\circ}, \quad \boldsymbol{I}_3 = 0.1095\underline{/17.15^\circ}$$

于是，其时域表达式为：

$$i_1 = 0.465\,4\cos(12\pi t - 70.25^\circ)\ \mathrm{A}$$

$$i_2 = 0.211\,4\cos(12\pi t - 75.75^\circ)\ \mathrm{A}$$

$$i_3 = 0.109\,5\cos(12\pi t + 17.15^\circ)\ \mathrm{A}$$

练习题13-13 试利用PSpice求解如图13-55所示电路中的i_o。

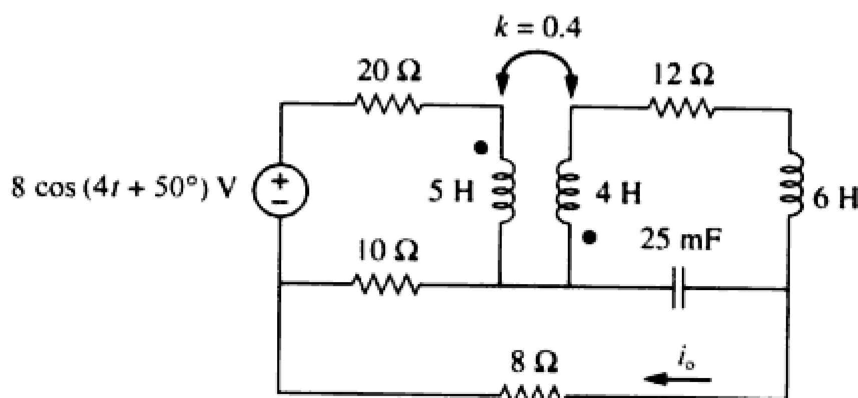


图 13-55 练习题 13-13 的电路原理图

答 $0.100\,6\cos(4t + 68.52^\circ)$ A。

例题13-14 试利用PSpice求解如图13-56所示理想变压器电路中的$\boldsymbol{V}_1$与$\boldsymbol{V}_2$。

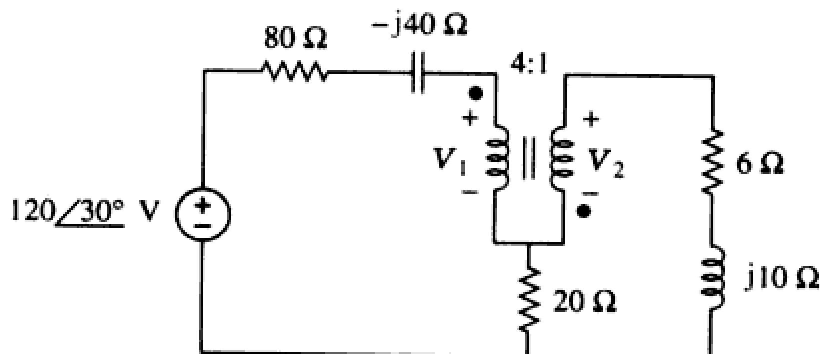


图 13-56 例题 13-14 的电路原理图

解 （1）**明确**问题。本例题所要解决的问题已明确，可以进行下一个步骤。

（2）**表述**对问题的理解。本题要求确定理想变压器的输入电压与输出电压，同时要求利用PSpice求解这些电压。

（3）确定**可选**解。本题要求利用PSpice求解，之后可以利用网孔分析法进行验证。

（4）**尝试**问题的解。假定$\omega = 1$，可求出相应元件的电容值与电感值：

$$j10 = j\omega L \quad \Rightarrow \quad L = 10\text{H}$$

$$-j40 = \frac{1}{j\omega C} \quad \Rightarrow \quad C = 25\text{mF}$$

图13-57所示为PSpice电路原理图。对于理想变压器，设耦合系数为0.99999，匝数为400 000和100 000。将两个伪元件VPRINT2连接在变压器两端，以便确定V_1与V_2。对于单频分析，应在Analysis/Setup/AC Sweep对话框中键入Total Pts = 1，Start Freq = 0.1592，Final Freq = 0.1592。存储电路原理图后，运行Analysis/simulate程序模拟电路，得到如下输出文件：

```
FREQ            VM($N_0003, $N_0006)        VP($N_0003, $N_0006)
1.592E-01         9.112E+01                   3.792E+01
FREQ            VM($N_0006, $N_0005)        VP($N_0006, $N_0005)
1.592E-01         2.278E+01                   -1.421E+02
```

由此可以得到：

$$\mathbf{V_1 = 91.12\angle 37.92°V} \quad 和 \quad \mathbf{V_2 = 22.78\angle -142.1°V}$$

记住：对于理想变压器而言，其初级线圈与次级线圈的电感值均为无穷大。

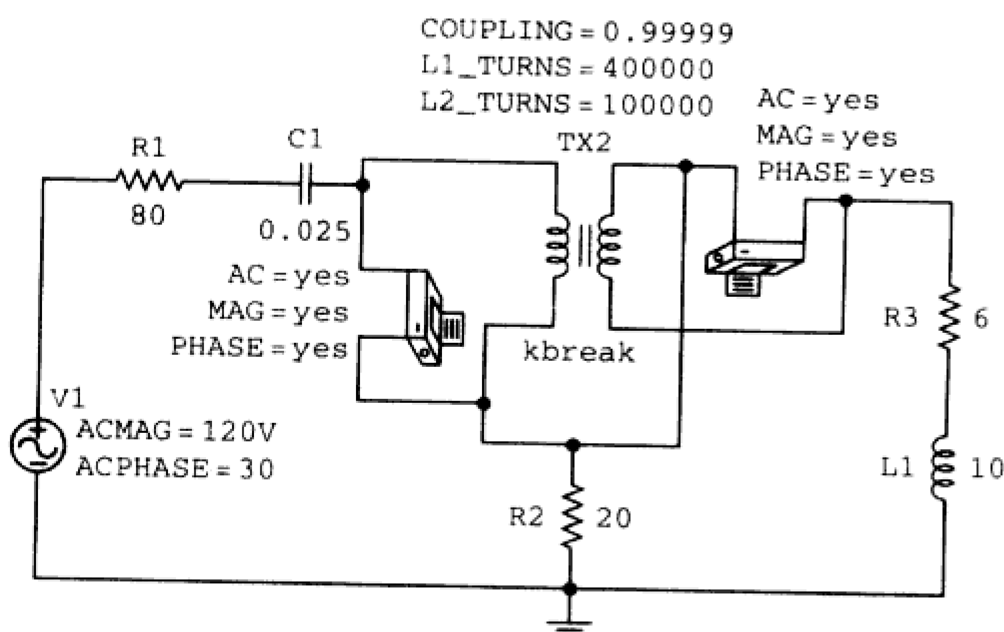


图 13-57 图 13-56 所示电路的 PSpice 原理图

（5）**评价**得到的结果。下面网孔分析法验证所得到的结果。

对于网孔1：

$$-120\angle 30° + (80 - j40)I_1 + V_1 + 20(I_1 - I_2) = 0$$

对于网孔2：

$$20(-I_1 + I_2) - V_2 + (6 + j10)I_2 = 0$$

但是，$V_2 = -V_1/4$，$I_2 = -4I_1$，由此得到：

$$-120\angle 30° + (80 - j40)I_1 + V_1 + 20(I_1 + 4I_1) = 0$$

$$(180 - j40)I_1 + V_1 = 120\angle 30°$$

$$20(-I_1 - 4I_1) + V_1/4 + (6 + j10)(-4I_1) = 0$$

$$(-124 - j40)I_1 + 0.25V_1 = 0 \quad 或 \quad I_1 = V_1/(496 + j160)$$

将其代入第一个方程可以得到：

$$(180-\mathrm{j}40)V_1/(496+\mathrm{j}160)+V_1=120\underline{/30^\circ}$$
$$(184.39\underline{/-12.53^\circ}/521.2\underline{/17.88^\circ})V_1+V_1$$
$$=(0.3538\underline{/-30.41^\circ}+1)V_1=(0.3051+1-\mathrm{j}0.17909)V_1=120\underline{/30^\circ}$$
$$V_1=120\underline{/30^\circ}/1.3173\underline{/-7.81^\circ}=\mathbf{91.1\underline{/37.81^\circ}V}\quad 和$$
$$V_2=\mathbf{22.78\underline{/-142.19^\circ}}\ \mathrm{V}$$

验证了所得到的答案。

(6) 对结果是否**满意**？本题的求解过程与答案的验证均令人满意，可以将其作为本题的答案。

练习题13-14 试利用PSpice求解如图13-58所示电路中的$\boldsymbol{V}_1$与$\boldsymbol{V}_2$。

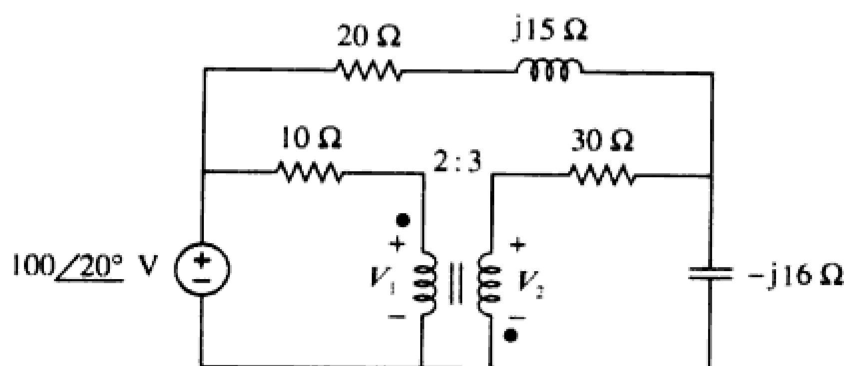


图 13-58　练习题 13-14 的电路原理图

答　$63.1\underline{/28.65^\circ}$ V, $94.64\underline{/-151.4^\circ}$ V。

13.9 †应用

变压器通常是体积最大、质量最重，也是价格最贵的电路元件。但是，它却是电子电路中不可缺少的无源设备，在众多高效设备中，变压器的效率一般为95%，但是也可以达到99%。变压器的应用不胜枚举，例如：

- 升高或降低电压与电流，使其适合于电力传输与分配。
- 将电路的一部分与另一部分隔离（即在没有任何电气连接的情况下传输功率）。
- 用作阻抗匹配设备，以实现最大功率传输。
- 用于感应性响应的选频电路中。

由于变压器应用的多样性，所以出现了许多专用变压器（本章仅讨论其中几种类型），如：电压变压器、电流变换器、功率转换器、配电变压器、阻抗匹配变压器、声频变压器、单相变压器、三相变压器、整流变压器、反相变压器等。本节仅介绍变压器的三种重要应用：变压器作为隔离设备、变压器作为匹配器以及电力配电系统。

关于各类变压器的详细介绍，可以参阅W.M.Flanagan编著的《变压器设计与应用手册》第二版（纽约：McGraw－Hill出版集团，1993）。

13.9.1 隔离变压器

当两个设备之间不存在物理连接时，则称这两个设备之间存在电气隔离。变压器的初级电路与次级电路之间无电气连接，能量是通过磁耦合传输的。下面介绍利用变压器电气隔离特性的三种实际应用。

首先，考虑如图13-59所示电路。图中整流器是将交流电转换为直流电的电子电路，变压器在该电路中的作用是将交流电耦合到整流器中。这里的变压器起两个作用：第一个作用是升高或降低电压；第二个作用是在交流电源与整流器之间提供电气隔离，从而降低电子电路在工作时出现电击的

危险性。

隔离变压器的第二个应用实例是用于耦合放大器的两级，从而防止前一级的直流电压影响下一级的直流偏置，直流偏置是晶体管放大器或其他电子电路在要求模式下工作所需的直流电压。放大器的各级都有其在特定模式下工作所需的偏置电压，如果没有变压器提供直流隔离，就会影响各级其特定的工作模式。如图13-60所示，接入变压器后，仅交流信号从前一级耦合到后一级，我们知道直流电压源中是不存在磁耦合的。在无线电接收机或电视接收机中，变压器通常用于高频放大器各级之间的耦合。当变压器仅用于提供电气隔离时，应将其匝比制作为1，即隔离变压器的$n=1$。

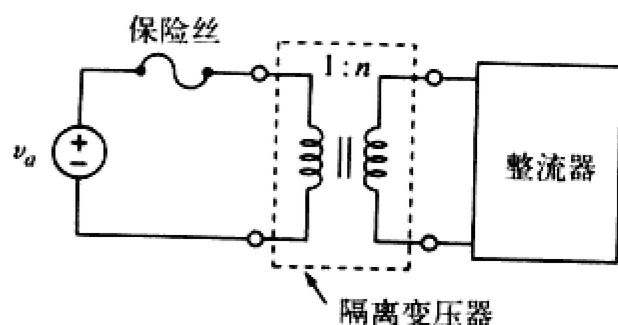


图 13-59 用于隔离交流电源与整流器的变压器

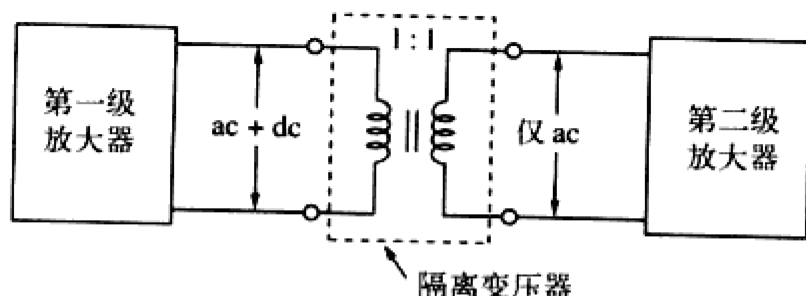


图 13-60 在放大器两级之间提供电气隔离的变压器

隔离变压器的第三个应用实例是测量13.2 kV线路两端的电压。将伏特表直接接到这种高压线路中是非常不安全的。此时采用变压器既可以起到隔离电力线与伏特表的作用，又可以将电压降至安全的电平，如图13-61所示。如果利用伏特表测量变压器的次级电压，则可根据匝比确定其初级线电压。

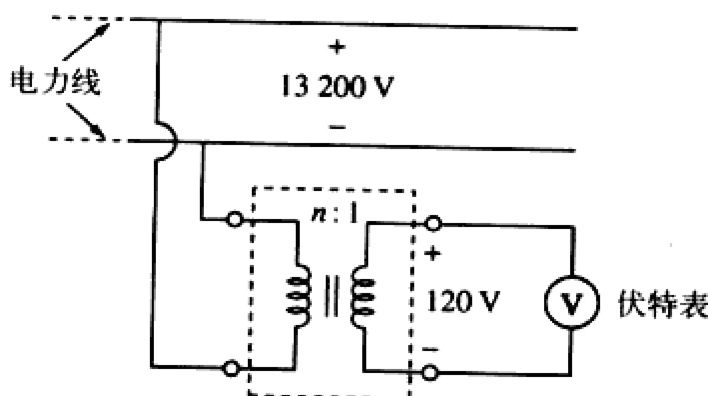


图 13-61 在电力线与伏特表之间提供隔离的变压器

例题13-15 试确定如图13-62所示电路中负载两端的电压。

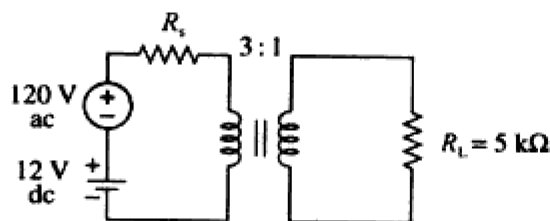
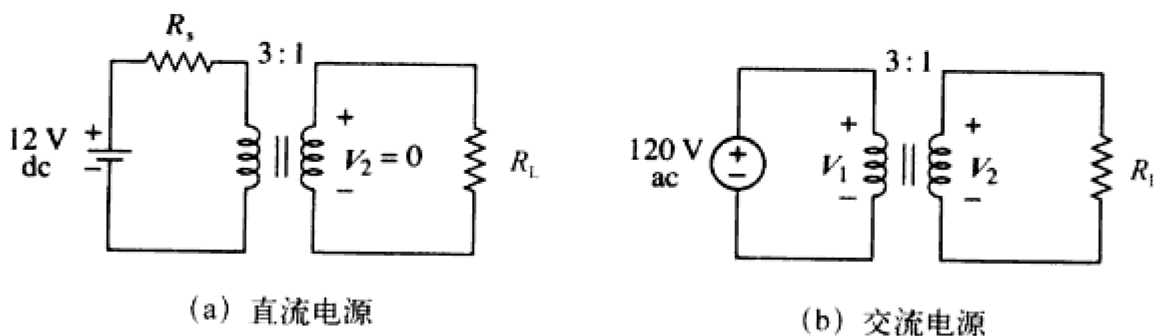


图 13-62 例题 13-15 的电路原理图

解 利用迭加原理求解负载电压，令$v_L = v_{L1} + v_{L2}$，其中v_{L1}为由直流电源在负载上产生的电压，v_{L2}为由交流电源在负载上产生的电压。仅包含直流电源与交流电源的电路分别如图13-63所示。由直流电源引起的负载电压为零，因为要在次级电路中产生感应电压，初级必须是时变电压源，于是，$v_{L1}=0$。对于交流电源，其内阻R_s很小可以忽略：

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2}{120} = \frac{1}{3} \quad \text{或} \quad V_2 = \frac{120}{3} = 40\text{V}$$

因此，$V_{L2}=40$ V交流，即$v_{L2}=40\cos\omega t$。也就是说，只有交流电压才能通过变压器达到负载。本例也说明了变压器的直流隔离作用。



(a) 直流电源 (b) 交流电源

图 13-63 例题 13-15 的电路原理图

练习题13-15 参见如图13-61所示电路，试计算将13.2 kV线电压降至120 V安全电压所要求的变压器的匝比。

答 110。

13.9.2 匹配变压器

之前已经介绍过，实现最大功率传输的条件是负载电阻R_L必须与电源电阻R_s相匹配，但在大多数情况下，R_L与R_s是不匹配的，而且两者都是固定的，不能改变。然而，可以利用铁心变压器实现负载电阻与电源电阻相匹配，该过程称为阻抗匹配。例如，扬声器与音频功率放大器相连接时，就需要采用变压器，因为扬声器的电阻只有几欧姆，而音频功率放大器的内部电阻却高达几千欧姆。

R_s 1 : n v_s R_L 电源 匹配变压器 负载

图 13-64 用于阻抗匹配的变压器

考虑如图13-64所示电路，由式(13-60)可知，理想变压器将其负载阻抗通过比例因子n^2反射到初级。为使反射负载R_L/n^2与电源电阻R_s相匹配，应该使得：

$$R_s=\frac{R_L}{n^2} \tag{13-73}$$

选择适当的匝比n就可以满足式(13-73)。由式(13-73)可知，当$R_s>R_L$时，需采用降压变压器（$n<1$）实现阻抗匹配；当$R_s<R_L$时，则需采用升降变压器（$n>1$）实现阻抗匹配。

例题13-16 如图13-65所示的理想变压器用于匹配放大电路与扬声器，从而使扬声器的功率最大，放大器的戴维南阻抗（即输出阻抗）为192 Ω，而扬声器的内部阻抗为12 Ω，试确定变压器的匝比。

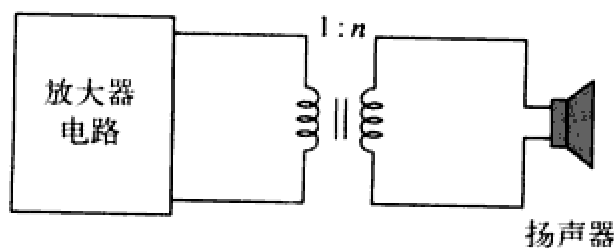


图 13-65 例题 13-16 的电路原理图：利用理想变压器实现扬声器与放大器的阻抗匹配

解 利用戴维南等效电路取代放大器，并将扬声器的阻抗$\mathbf{Z}_L=12$ Ω反射到理想变压器的初级，得到如图13-66所示的电路。要实现最大功率传输，必须满足：

$$\mathbf{Z}_{Th}=\frac{\mathbf{Z}_L}{n^2} \quad 或 \quad n^2=\frac{\mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_{Th}}=\frac{12}{192}=\frac{1}{16}$$

于是，匝比为$n = 1/4 = 0.25$。

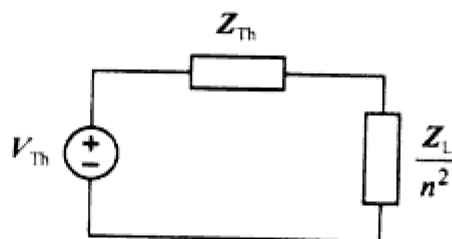


图 13-66 图 13-65 所示电路的等效电路

利用$P = I^2R$可以证明，传送给扬声器的功率的确比不采用理想变压器时大得多，如果不采用理想变压器，将放大器与扬声器直接相连，则传送给扬声器的功率为：

$$P_L = \left(\frac{V_{Th}}{Z_{Th} + Z_L}\right)^2 Z_L = 288V_{Th}^2 \mu W$$

采用变压器后，初级与次级的电流为：

$$I_p = \frac{V_{Th}}{Z_{Th} + Z_L/n^2}, \qquad I_s = \frac{I_p}{n}$$

于是，

$$P_L = I_s^2 Z_L = \left(\frac{V_{Th}/n}{Z_{Th} + Z_L/n^2}\right)^2 Z_L$$

$$= \left(\frac{nV_{Th}}{n^2 Z_{Th} + Z_L}\right)^2 Z_L = 1\,302V_{Th}^2 \mu W$$

证实了前面的说法。

练习题13-16 要实现100 Ω负载与内部阻抗为2.5 kΩ的电源匹配，试计算所需理想变压器的匝比，并求出电源电压为30 V时的负载电压。

答 0.2，3 V。

13.9.3 电力配送

电力系统主要由三部分组成：发电、输电与配电。本地电力公司的发电厂在大约18 kV时，发出几百兆伏安（MVA）的功率。如图13-67所示，利用三相升压变压器将所产生的电功率输送至传输线上。为什么要用升压变压器呢？假定要将100 000 VA的电功率输送到50 km以外的地方，由于$S = VI$，如果线电压为1 000 V，则传输线上必须承载100 A的电流负荷，这就要求传输线的直径很大。但是，如果线电压为10 000 V，则传输线的电流负荷仅10 A，电流减小使得所需的导线尺寸也相应地减小，在最小化传输线损耗I^2R的同时，也大大节省了材料开销。为了使损耗最小，就需要采用一个升压变压器。否则，就会有大部分电功率消耗在传输线上。变压器能够实现升压、降压及其经济的配电功能正是电力传输中广泛采用交流发电而不是直流发电的主要原因之一。因此，在一定的发电功率下，

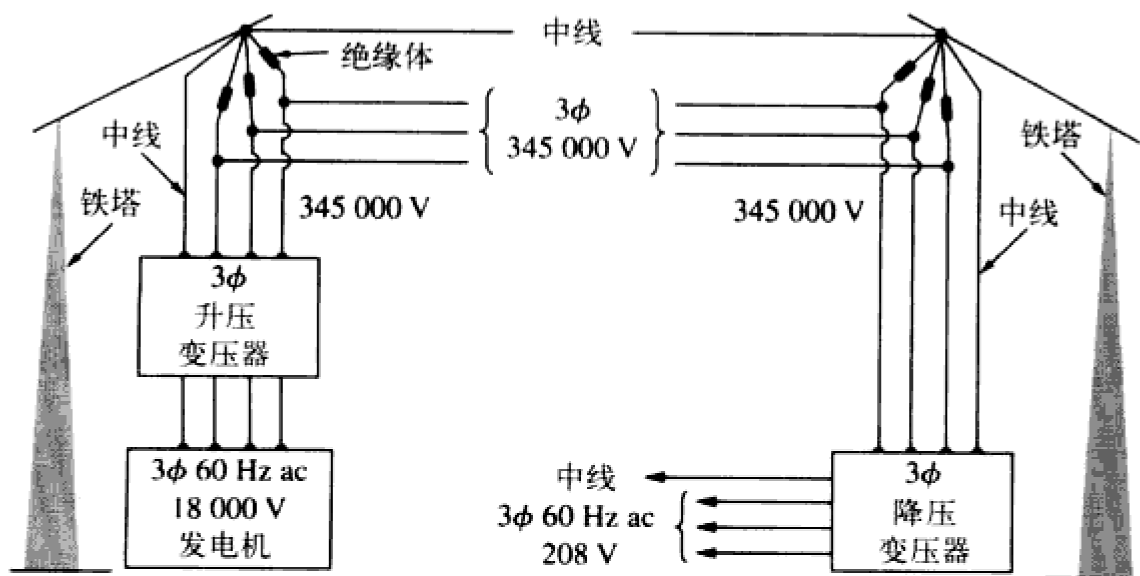


图 13-67 典型的电力输送配电系统

电压越高越好。目前，实用中的最高电压为1 MV，随着研究和实验的进展，电压还有可能进一步提高。

有读者可能会问，为什么升高电压，并不会增大电流，从而使损耗I^2R也不增加呢？因为$I=V_l/R$，其中V_l为传输线发送端与接收端之间的电位差，而被升高的电压为发送端的电压V，而不是V_l，如果接收端电压为V_R，则$V_l=V-V_R$，因为V与V_R非常接近，所以即使电压V升高了，V_l仍然是很小的。

除发电厂外，电能通过称作*电力网*（power grid）的网络发送到几百英里以外的远方。电网中的三相电是通过架设在各种尺寸、各种形状的钢铁塔上的传输线输送的。（铝制、钢加强型）传输线的典型直径高达40 mm，并能承载高达1 380 A的电流负荷。

在变电站，利用配电变压器降压，降压过程通常是分级进行的。电力既可以通过架设的电缆，也可以通过地下电缆配送给本地用户。变电站负责给居民、商业或工业用户配电。在接收端，居民用户最终得到的是120/240V电源，而工业或商业用户的馈电电压更高，例如460/208 V等。居民用户的供电通常由架设在电力公司电线杆上的配电变压器实现。在需要直流电的情况下，可以将交流电转换为直流电。

例题13-17 某配送变压器用于为家庭供电，如图13-68所示。用电负载包括：8只100 W灯泡，一台350 W电视机以及一个15 kW厨房用具。如果变压器的次级为72匝，试计算：（a）初级线圈的匝数；（b）初级线圈中的电流I_p。

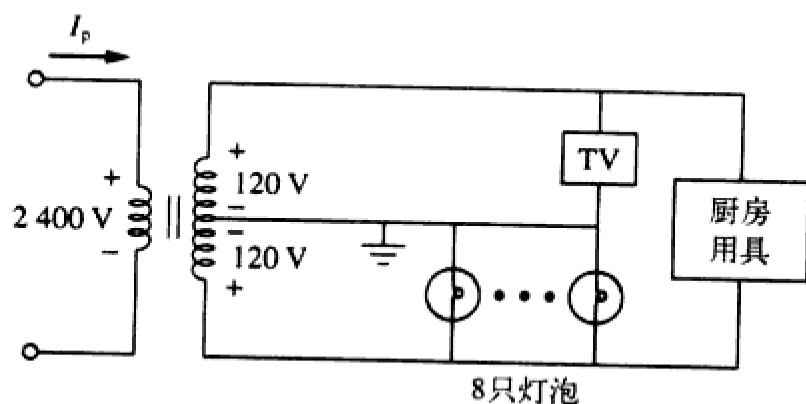


图 13-68 例题 13-17 的电路原理图

解 （a）由于本题仅关心电压与电流的大小，所以线圈同名端的位置并不重要。由于：

$$\frac{N_p}{N_s}=\frac{V_p}{V_s}$$

于是得到：

$$N_p=N_s\frac{V_p}{V_s}=72\frac{2\,400}{240}=720 \text{ 匝}$$

（b）负载吸收的总功率为：

$$S=8\times100+350+15\,000=16.15 \text{ kW}$$

但是，$S=V_pI_p=V_sI_s$，所以

$$I_p=\frac{S}{V_p}=\frac{16\,150}{2\,400}=6.729\text{A}$$

练习题13-17 在例题13-17中，如果利用12只60 W的灯泡取代8只100 W的灯泡，并且利用4.5 kW空调器取代厨房用具，试求：（a）电源提供的总功率；（b）初级线圈中的电流I_p。

答 （a）5.57 kW；（b）2.321 A。

13.10 本章小结

（1）如果一个线圈的磁通量ϕ穿过另一个线圈，则称这两个线圈是相互耦合的，两个线圈之间的互感值为：

$$M = k\sqrt{L_1L_2}$$

其中，k为耦合系数，且$0 < k < 1$。

（2）如果v_1与i_1为线圈1中的电压与电流，v_2与i_2为线圈2中的电压与电流，则有：

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \qquad 和 \qquad v_2 = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

因此，耦合线圈中的感应电压由自感电压与互感电压两部分组成。

（3）互感电感电压的极性在电路中的表示需遵循同名端规则。

（4）存储在两个耦合线圈中的能量为：

$$\frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 \pm Mi_1i_2$$

（5）变压器是一种包含两个或两个以上的磁耦合线圈的四端设备，用于改变电路中的电流、电压与阻抗。

（6）线性（或松散耦合）变压器的线圈缠绕在磁性线性材料上。为了便于分析，可以利用等效的T型网络或Π型网络取代线性变压器。

（7）理想（或铁心）变压器是耦合系数$k=1$、电感值为无穷大（L_1、L_2、$M \to \infty$）的无损（$R_1 = R_2 = 0$）变压器。

（8）对于理想变压器，有：

$$\mathbf{V}_2 = n\mathbf{V}_1, \quad \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{I}_1}{n}, \quad \mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_2, \quad \mathbf{Z}_R = \frac{\mathbf{Z}_L}{n^2}$$

其中，$n = N_2/N_1$为匝比，N_1为初级线圈的匝数，N_2为次级线圈的匝数。当$n > 1$时，变压器将初级电压升高，当$n < 1$时，变压器将初级电压降低，而当$n = 1$时，变压器为匹配隔离装置。

（9）自耦变压器是初级电路与次级电路共用一个线圈的变压器。

（10）PSpice软件是分析磁耦合电路的有用工具。

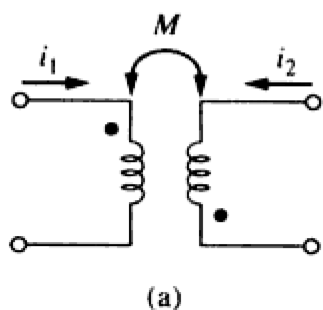
（11）在配电系统的各个输送环节都需要采用变压器，三相电压可以通过变压器实现升压或降压。

（12）变压器在电子系统中的重要应用包括用作电气隔离装置与阻抗匹配装置。

复习题

13-1 参见如图13-69a所示的两个磁耦合线圈，其互感电压的极性为：

（a）正　　（b）负



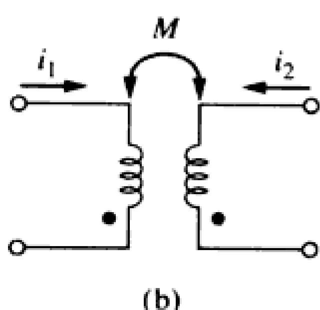


图 13-69 复习题 13-1 与复习题 13-2 的电路原理图

13-2 对于如图13-69b所示的两个磁耦合线圈，其互感电压的极性为：

（a）正　　（b）负

13-3 $L_1 = 2$ H、$L_2 = 8$ H、$M = 3$ H的两个耦合线圈的耦合系数为：

（a）0.1875　　（b）0.75

（c）1.333　　（d）5.333

13-4 变压器是用于升高或降低什么的？

（a）直流电压　　（b）交流电压

（c）直流电压与交流电压

13-5 如图13-70a所示理想变压器的匝比$N_2/N_1 = 10$，则V_2/V_1为：

(a) 10 (b) 0.1
(c) −0.1 (d) −10

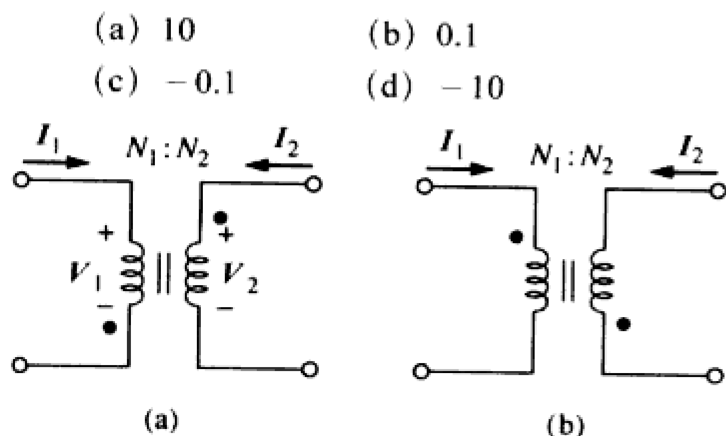


图 13-70 复习题 13-5 与复习题 13-6 的电路原理图

13-6 如图13-70b所示理想变压器的匝比N_2/N_1，则V_2/V_1为：
(a) 10 (b) 0.1
(c) −0.1 (d) −10

13-7 某三绕组变压器的连接如图13-71a所示，输出电压V_o的值为：
(a) 10 (b) 6
(c) −6 (d) −10

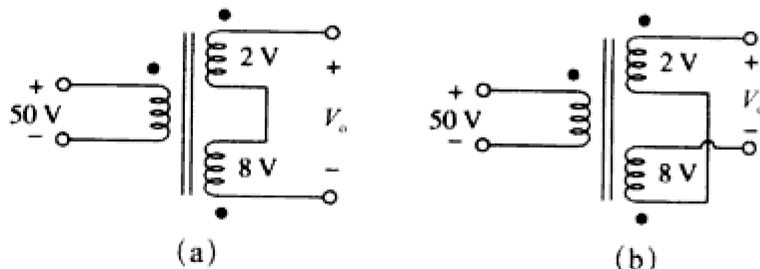


图 13-71 复习题 13-7 与复习题 13-8 的电路原理图

13-8 某三绕组变压器的连接如图13-71b所示，则输出电压V_o为：
(a) 10 (b) 6
(c) −6 (d) −10

13-9 为了使内部阻抗为500 Ω的电源与15 Ω的负载相匹配，需要如下哪种设备？
(a) 升压线性变压器
(b) 降压线性变压器
(c) 升压理想变压器
(d) 降压理想变压器
(e) 自耦变压器

13-10 以下哪种变压器可以用作隔离装置？
(a) 线性变压器
(b) 理想变压器
(c) 自耦变压器
(d) 上述三种变压器均可

答案 13-1b；13-2a；13-3b；13-4b；13-5d；13-6b；13-7c；13-8a；13-9d；13-10b。

习题

13.2 节

13-1 对于如图13-72所示的三个耦合线圈，试计算其总电感值。

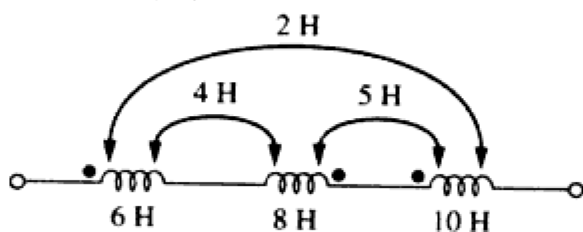


图 13-72 习题 13-1 的电路原理图

13-2 试确定如图13-73所示三个串联连接电感器的电感值。

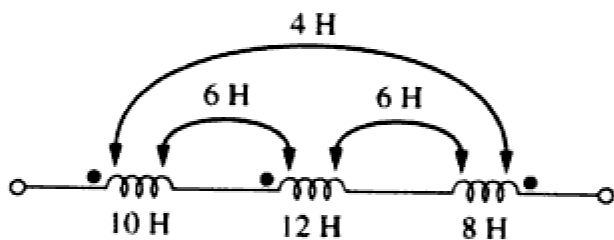


图 13-73 习题 13-2 的电路原理图

13-3 正向串联连接的两个线圈的总电感为250 mH，当这两个线圈反向串联连接时，总电感为150 mH，如果其中一个线圈（L_1）的电感值为另一个线圈的三倍，试求L_1、L_2与M，并计算耦合系数k。

13-4 (a) 对于如图13-74a所示的耦合线圈，试证明：

$$L_{eq}=L_1+L_2+2M$$

(b)对于如对图13-74b的耦合线圈，试证明：

$$L_{eq}=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}$$

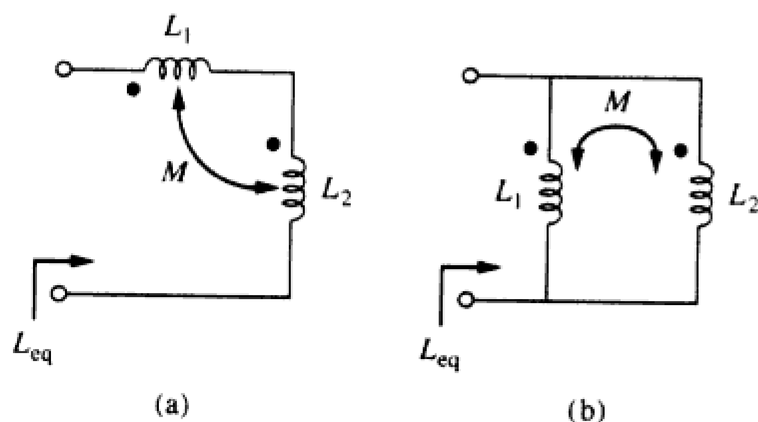


图 13-74 习题 13-4 的电路原理图

13-5 两个线圈相互耦合，并且$L_1=25$ mH、$L_2=60$ mH、$k=0.5$。试计算如下两种情况下的最大等效电感：

(a) 两个线圈相互串联；

(b) 两个线圈相互并联。

13-6 如图13-75所示线圈的$L_1=40$ mH、$L_2=5$ mH，耦合系数$k=0.6$。如果$v_1(t)=10\cos\omega t$，$i_2(t)=2\sin\omega t$，$\omega=2000$ rad/s，试求$i_1(t)$与$v_2(t)$。

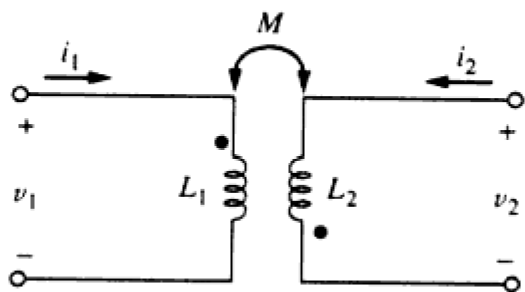


图 13-75 习题 13-6 的电路原理图

13-7 对于如图13-76所示电路，试求V_o。

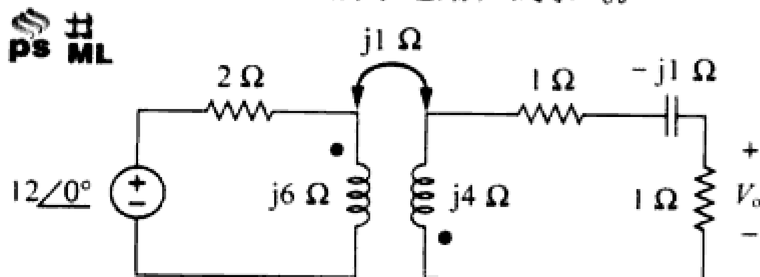


图 13-76 习题 13-7 的电路原理图

13-8 试求如图13-77所示电路中的$v(t)$。

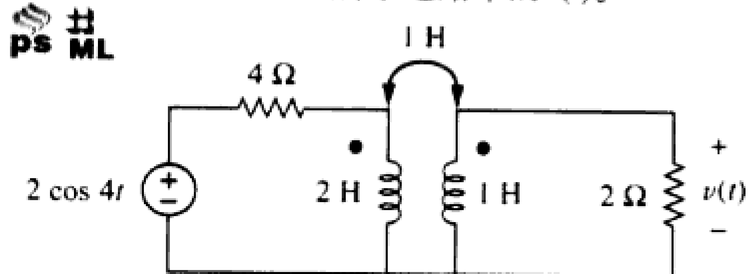


图 13-77 习题 13-8 的电路原理图

13-9 试求如图13-78所示网络中的V_x。

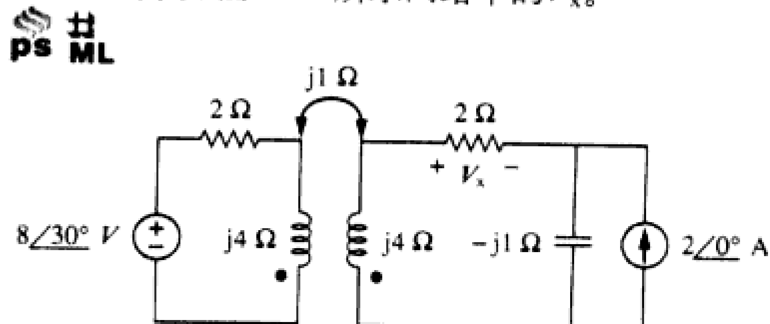


图 13-78 习题 13-9 的电路原理图

13-10 试求如图13-79所示电路中的v_o。

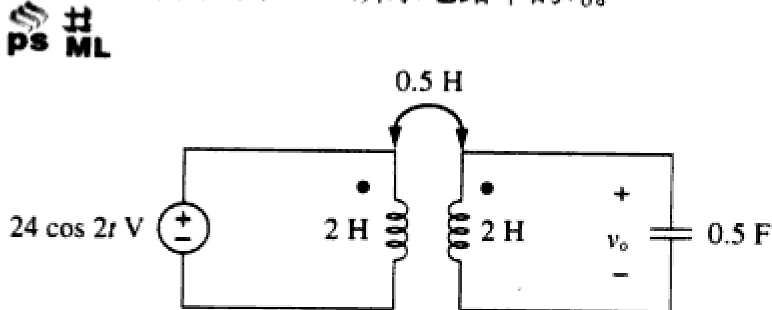


图 13-79 习题 13-10 的电路原理图

13-11 试利用网孔分析法求解如图13-80所示电路中的i_x，其中$i_s=4\cos(600t)$ A且$v_s=110\cos(600t+30°)$ V。

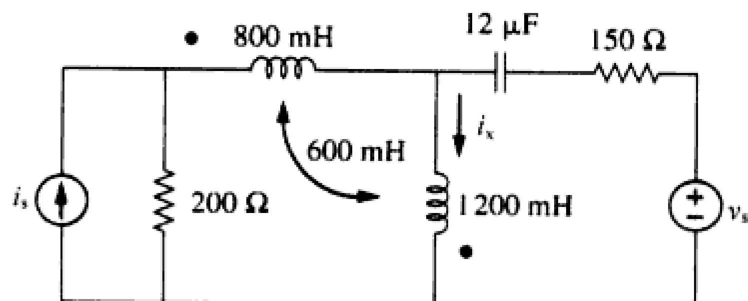


图 13-80 习题 13-11 的电路原理图

13-12 试确定如图13-81所示电路中等效电感L_{eq}。

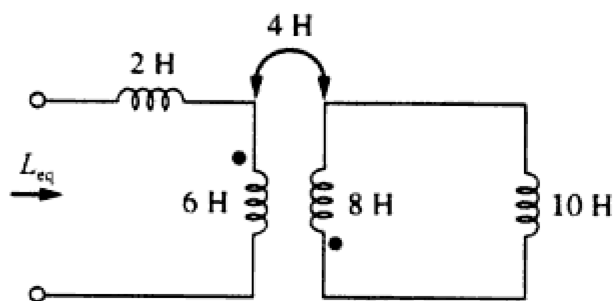


图 13-81 习题 13-12 的电路原理图

13-13 对于如图13-82所示电路，试确定从电源端看进去的阻抗。



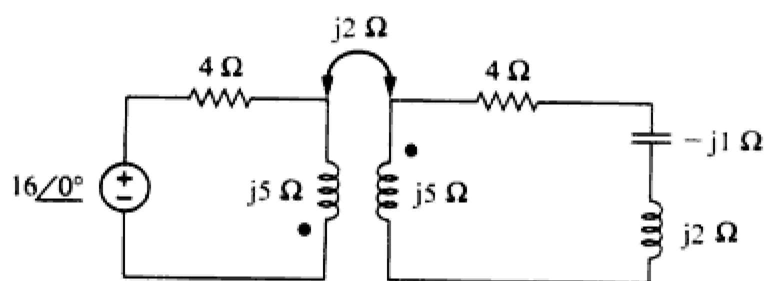


图 13-82 习题 13-13 的电路原理图

13-14 试确定如图13-83所示电路在端口$a-b$处的戴维南等效电路。

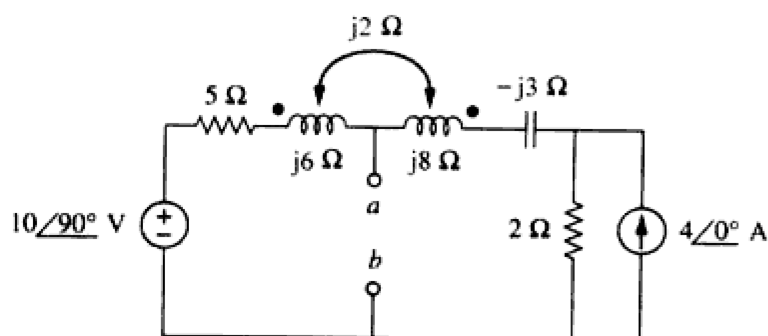


图 13-83 习题 13-14 的电路原理图

13-15 试确定如图13-84所示电路在端口$a-b$处的诺顿等效电路。

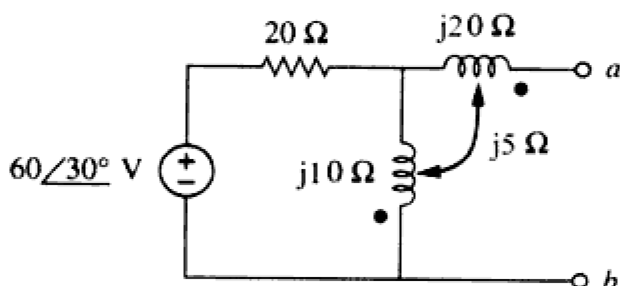


图 13-84 习题 13-15 的电路原理图

13-16 试确定如图13-85所示电路在端口$a-b$处的诺顿等效电路。

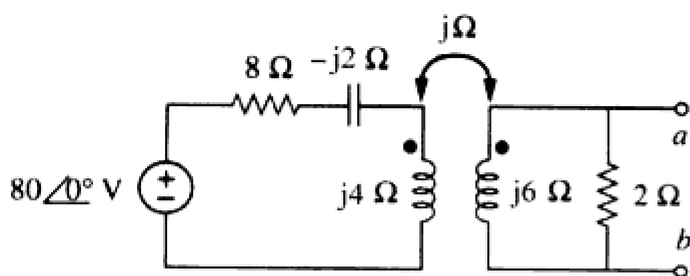


图 13-85 习题 13-16 的电路原理图

13-17 在如图13-86所示电路中，Z_L为15 mH电感器，阻抗为j40 Ω。试确定$k=0.6$时的Z_{in}。

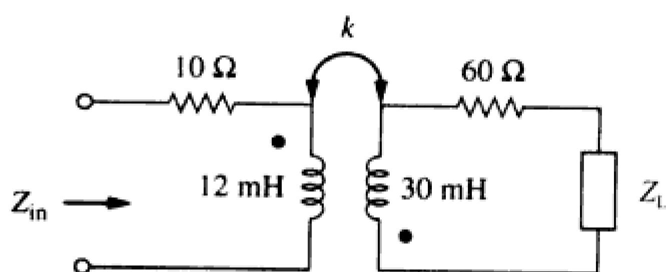


图 13-86 习题 13-17 的电路原理图

13-18 试确定如图13-87所示电路在负载**Z**左侧的戴维南等效电路。

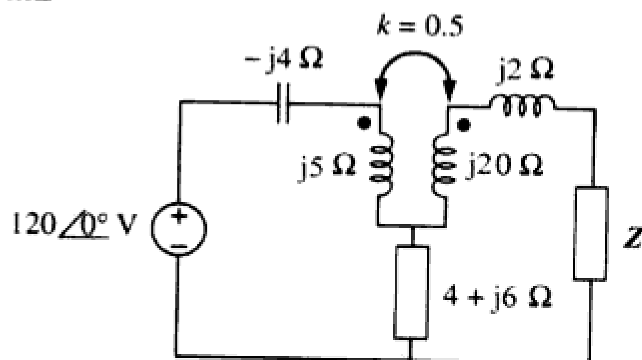


图 13-87 习题 13-18 的电路原理图

13-19 试确定可用于取代如图13-88所示变压器的等效T型电路。

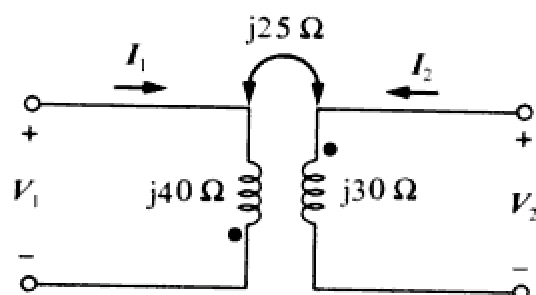


图 13-88 习题 13-19 的电路原理图

13.3 节

13-20 试确定如图13-89所示电路中的电流I_1、I_2与I_3，并求出$t=2$ ms时耦合线圈中存储的能量，假定角频率$\omega=1\,000$ rad/s。

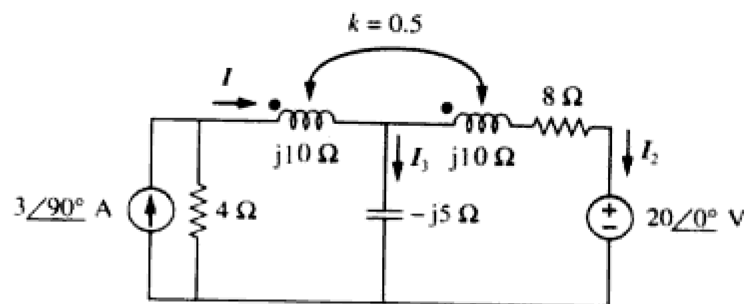


图 13-89 习题 13-20 的电路原理图

13-21 试求如图13-90所示电路中的I_1与I_2，并计算4 Ω电阻器吸收的功率。

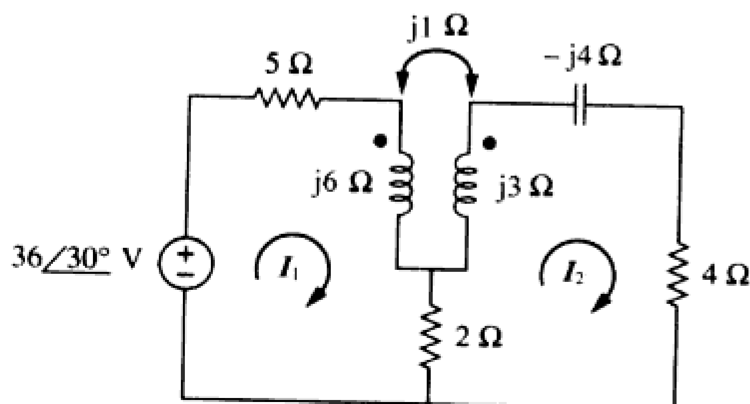


图 13-90 习题 13-21 的电路原理图

*13-22 试求如图13-91所示电路中的I_o。

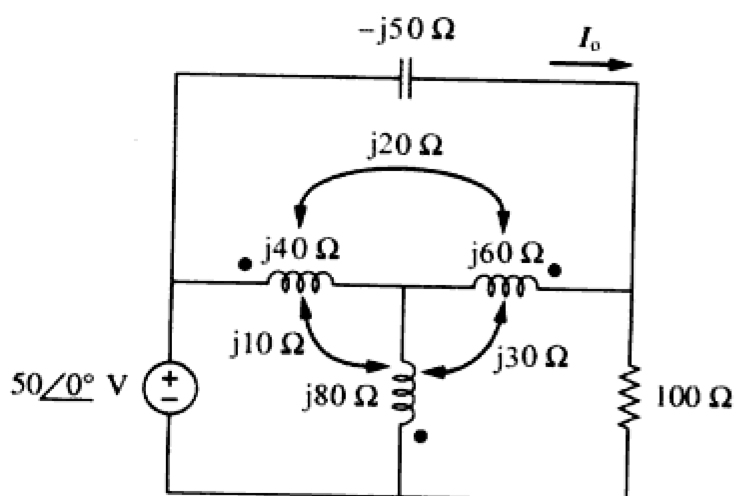


图 13-91 习题 13-22 的电路原理图

13-23 在如图13-92所示电路中，如果$M=0.2$ H，$v_s=12\cos\omega 10t$ V，试求i_1与i_2，并计算$t=15$ ms时耦合线圈中存储的能量。

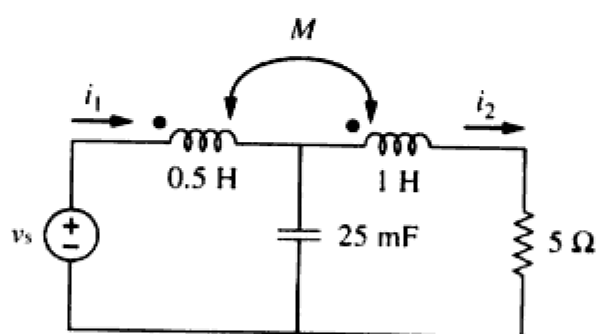


图 13-92 习题 13-23 的电路原理图

13-24 在如图13-93所示电路中：

(a) 试求耦合系数；(b) 试计算v_o；

(c) 试确定$t=2$s时耦合电感器中存储的能量。

13-25 在如图13-94所示网络中，试求Z_{ab}与I_o。

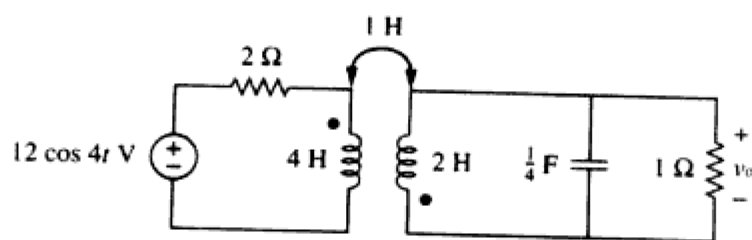


图 13-93 习题 13-24 的电路原理图

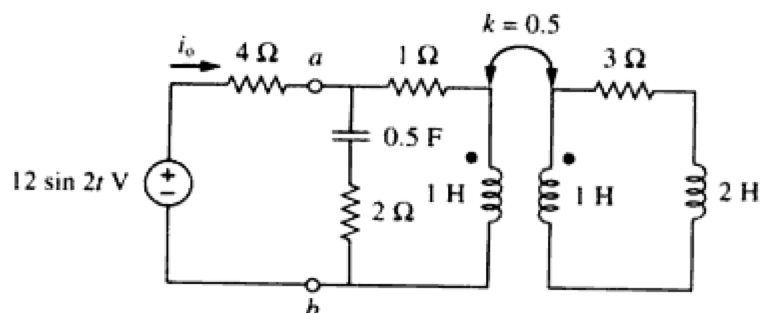


图 13-94 习题 13-25 的电路原理图

13-26 试求如图13-95所示电路中的I_o。如果将右边线圈的同名端更换一下，再求I_o。

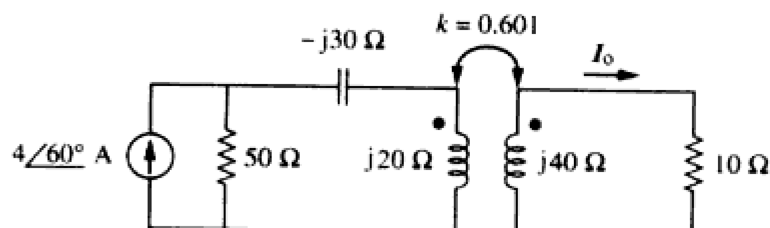


图 13-95 习题 13-26 的电路原理图

13-27 试求如图13-96所示电路传递给50 Ω电阻器的平均功率。

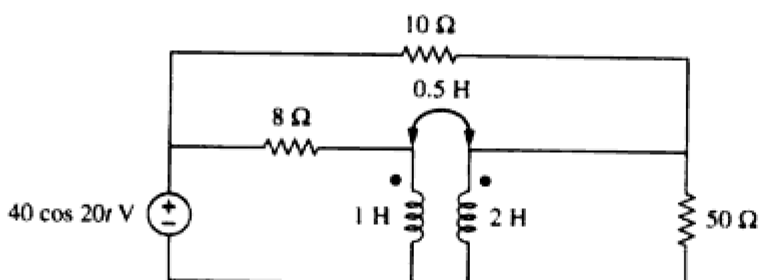


图 13-96 习题 13-27 的电路原理图

*13-28 在如图13-97所示电路中，试求传递给20 Ω负载的功率最大时的X值。

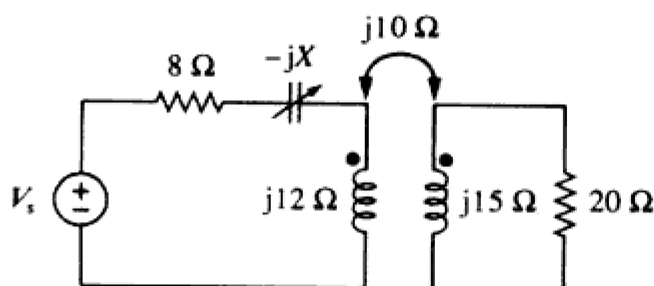


图 13-97 习题 13-28 的电路原理图

13.4 节

13-29 在如图13-98所示电路中，试求使10 Ω电阻器消耗的功率为320 W的耦合系数k的值，对于该k值，试确定$t = 1.5$ s时耦合线圈中储存的能量。

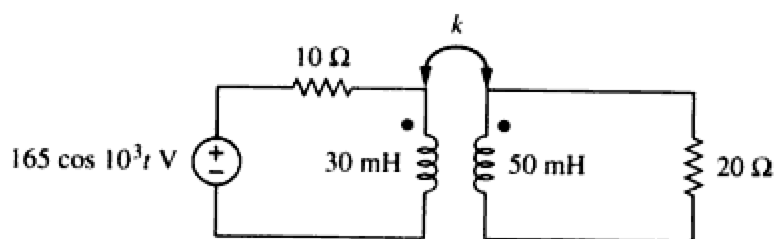


图 13-98 习题 13-29 的电路原理图

13-30 (a) 试利用反射阻抗的概念确定如图13-99所示电路的输入阻抗。

(b) 试利用T型等效电路取代线性变压器确定其输入阻抗。

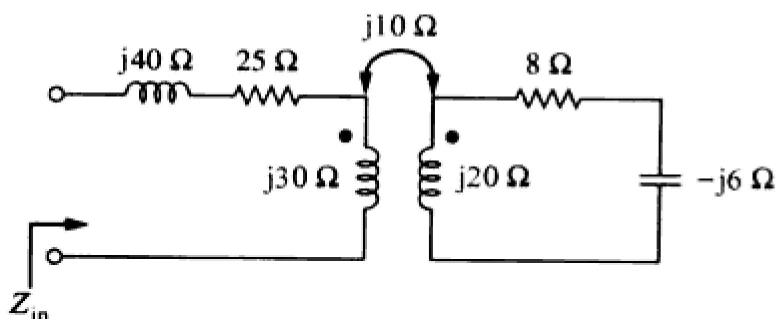


图 13-99 习题 13-30 的电路原理图

13-31 对于如图13-100所示电路，试求：(a) T型等效电路；(b) Π型等效电路。

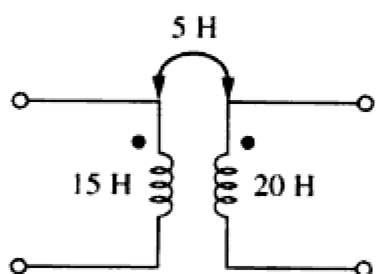


图 13-100 习题 13-31 的电路原理图

*13-32 两个相互串联的线性变压如图13-101所示，试证明：

$$Z_{in} = \frac{\omega^2 R\left(L_a^2 + L_a L_b - M_a^2\right) + j\omega^3\left(L_a^2 L_b + L_a L_b^2 - L_a M_b^2 - L_b M_a^2\right)}{\omega^2\left(L_a L_b + L_b^2 - M_b^2\right) - j\omega R\left(L_a + L_b\right)}$$

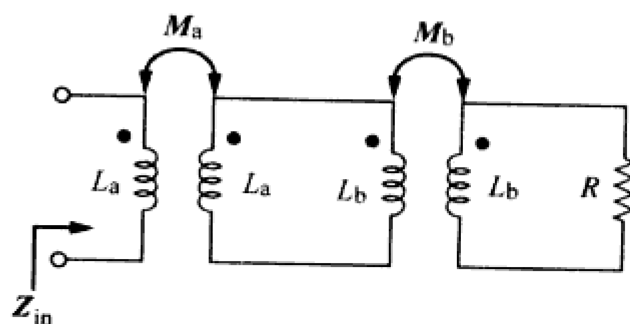


图 13-101 习题 13-32 的电路原理图

13-33 试确定如图13-102所示空心变压器电路的输入阻抗。

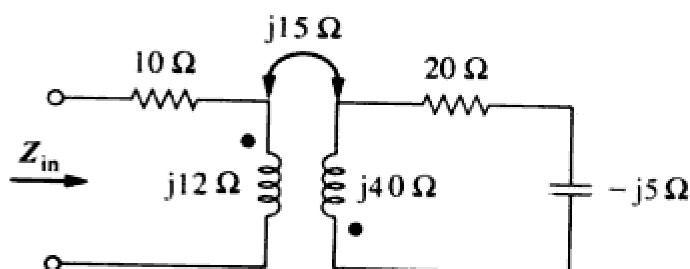


图 13-102 习题 13-33 的电路原理图

13-34 试求如图13-103所示电路的输入阻抗。

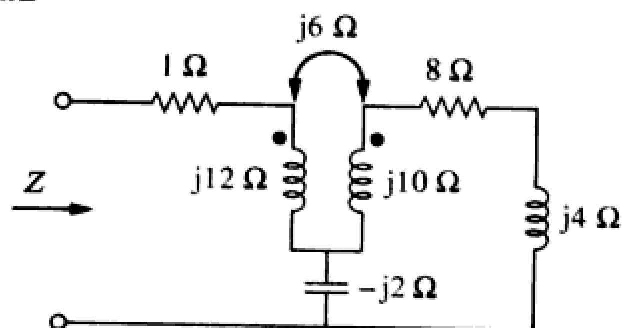


图 13-103 习题 13-34 的电路原理图

*13-35 试求如图13-104所示电路中的I_1、I_2与I_3。

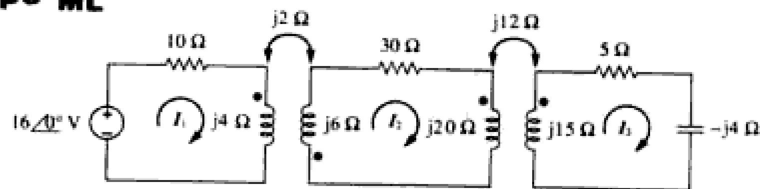


图 13-104 习题 13-35 的电路原理图

13.5 节

13-36 类似图13-32，试确定如图13-105所示各理想变压器的端电压与电流之间的关系。

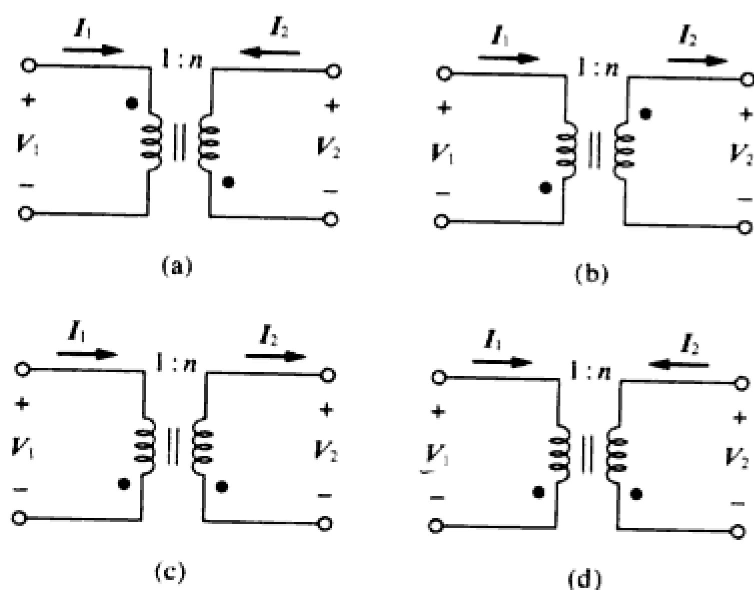


图 13-105 习题 13-36 的电路原理图

13-37 某480/2400 Vrms升压理想变压器传递给电阻性负载的功率为50 kW，试计算：
(a) 匝比；(b) 初级电流；(c) 次级电流。

13-38 某4 kVA、2300/230 V rms变压器的初级等效阻抗为$2\angle 10^\circ\ \Omega$，如果该变压器与一个功率因数为0.6超前的负载相连接，试计算其输入阻抗。

13-39 某1 200/240 V rms变压器在其高压端的阻抗为$60\angle -30^\circ\ \Omega$，如果在该变压器的低压端连接一个$0.8\angle 10^\circ\ \Omega$负载，试确定该变压器输入电压为1 200 Vrms的初级电流与次级电流。

13-40 某匝比为5的理想变压器初级与一戴维南等效电压为$v_{th} = 10\cos 2\,000t$ V、等效电阻为$R_{th} = 100\ \Omega$的电压源相连接，试确定传递给与次级线圈相连的200 Ω电阻器的平均功率。

13-41 试确定如图13-106所示电路中的$\boldsymbol{I}_1$与$\boldsymbol{I}_2$。

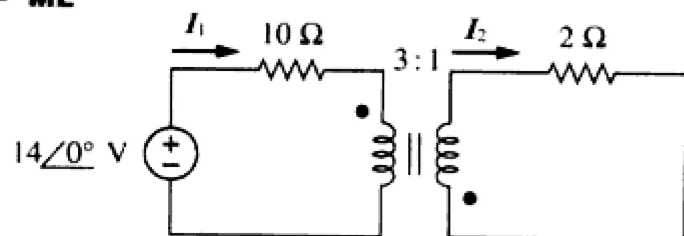


图 13-106 习题 13-41 的电路原理图

13-42 对于如图13-107所示电路，试确定2 Ω电阻器吸收的功率。假定图中80 V为rms值。

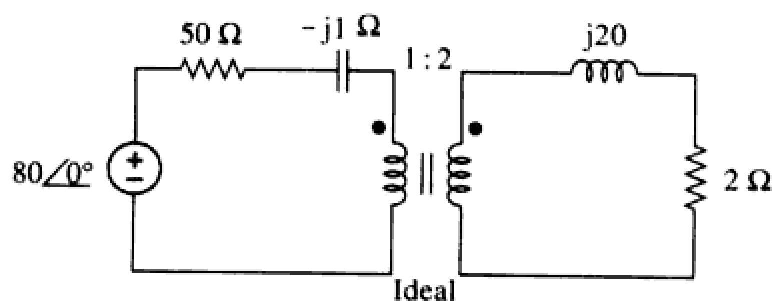


图 13-107 习题 13-42 的电路原理图

13-43 试确定如图13-108所示理想变压器电路中的$\boldsymbol{V}_1$与$\boldsymbol{V}_2$。

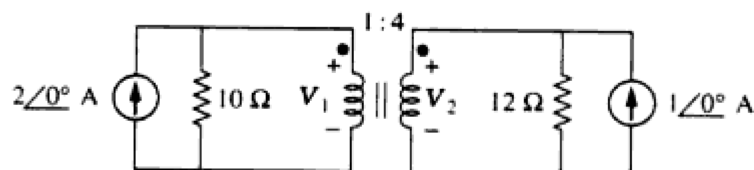


图 13-108 习题 13-43 的电路原理图

*13-44 在如图13-109所示理想变压器电路中，试求$i_1(t)$与$i_2(t)$。

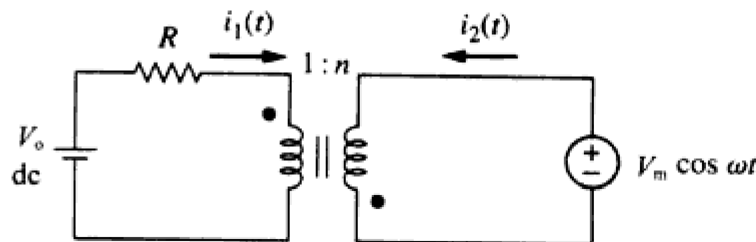


图 13-109 习题 13-44 的电路原理图

13-45 对于如图13-110所示电路，试求8 Ω电阻器吸收的平均功率。

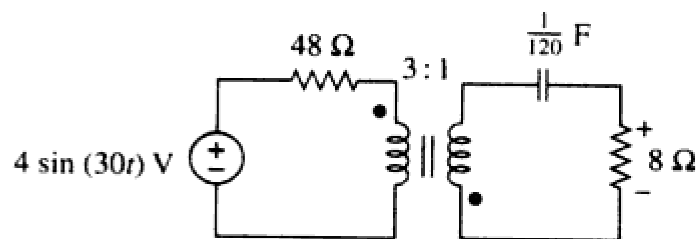


图 13-110 习题 13-45 的电路原理图

13-46 (a) 试求如图13-111所示电路中的$\boldsymbol{I}_1$与$\boldsymbol{I}_2$；
(b) 将其中一个线圈的同名端改变，试重新求解$\boldsymbol{I}_1$与$\boldsymbol{I}_2$。

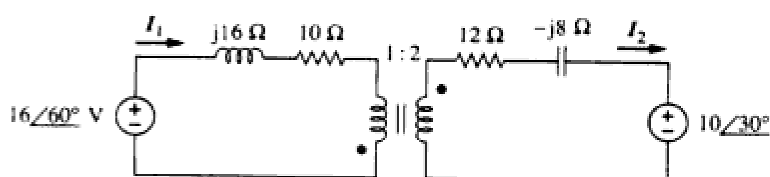


图 13-111 习题 13-46 的电路原理图

13-47 试求如图13-112所示电路中的$v(t)$。

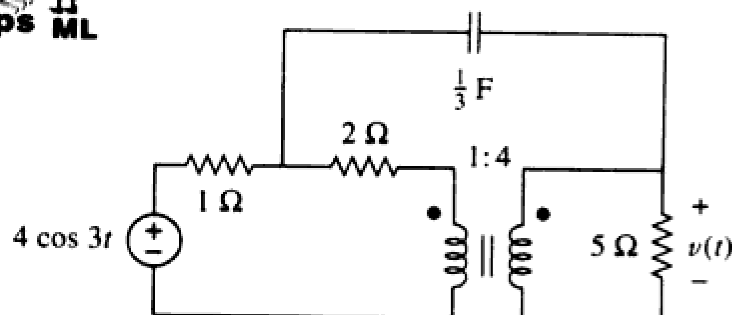


图 13-112 习题 13-47 的电路原理图

13-48 试求如图13-113所示理想变压器电路中的I_x。

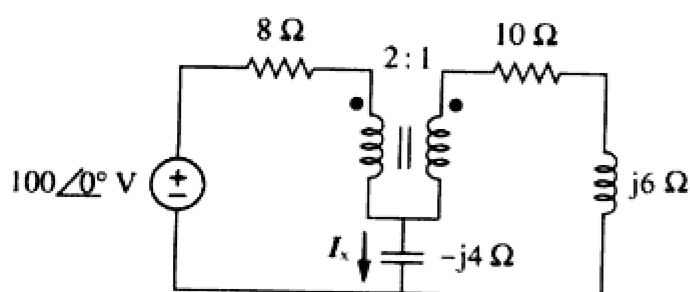


图 13-113 习题 13-48 的电路原理图

13-49 试求如图13-114所示理想变压器电路中的i_x。

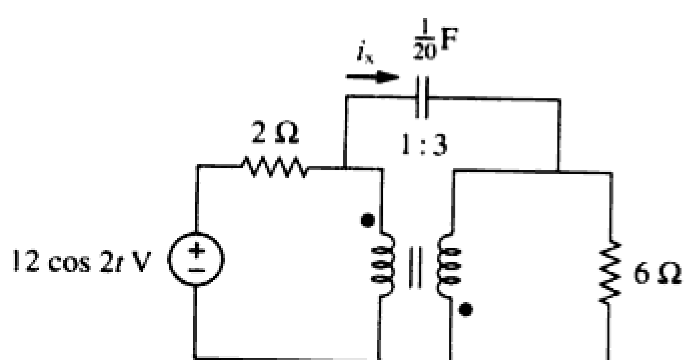


图 13-114 习题 13-49 的电路原理图

13-50 试计算如图13-115所示网络的输入阻抗。

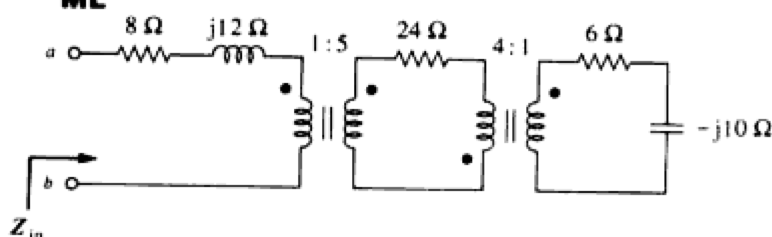


图 13-115 习题 13-50 的电路原理图

13-51 试利用反射阻抗的概念求解如图13-116所示电路的输入阻抗与电流I_1。

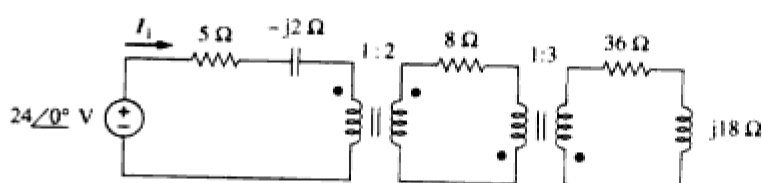


图 13-116 习题 13-51 的电路原理图

13-52 对于如图13-117所示电路，确定传递给负载的平均功率最大时的变压器匝比n，并计算该最大平均功率。

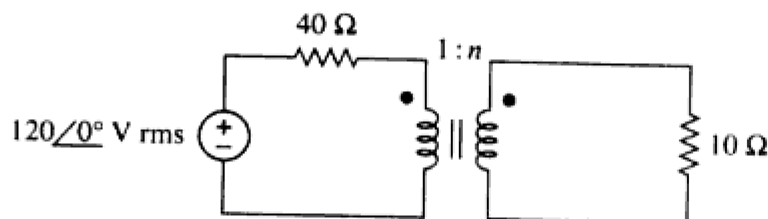


图 13-117 习题 13-52 的电路原理图

13-53 参见如图13-118所示网络：

(a) 试求传递给200 Ω负载功率最大时的匝比n；

(b) 如果$n=10$，试确定200 Ω负载的功率。

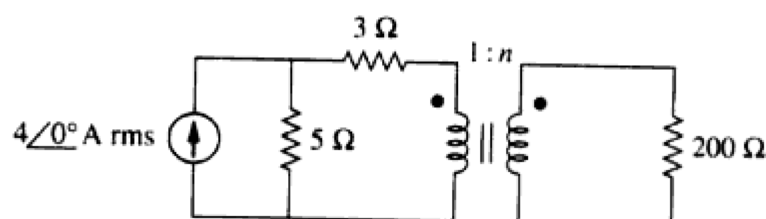


图 13-118 习题 13-53 的电路原理图

13-54 在如图13-119所示电路中，变压器用于实现放大器与8 Ω负载的匹配，放大器的戴维南等效参数为：$V_{Th}=10$ V，$Z_{Th}=128$ Ω。

(a) 试求实现最大功率传递时所需的匝比；

(b) 试确定初级电流与次级电流；

(c) 试计算初级电压与次级电压。

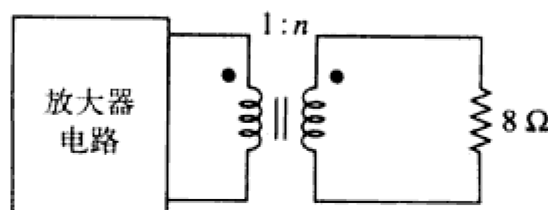


图 13-119 习题 13-54 的电路原理图

13-55 对于如图13-120所示电路，试计算等效电阻。

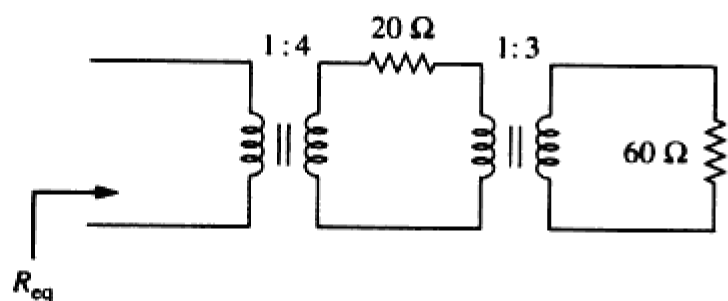


图 13-120 习题 13-55 的电路原理图

13-56 试求如图13-121所示理想变压器电路中10 Ω电阻器吸收的功率。

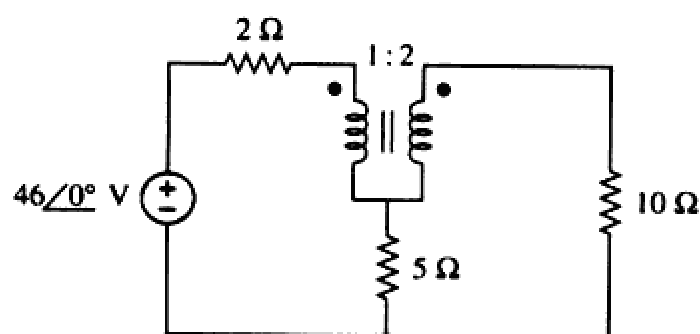


图 13-121 习题 13-56 的电路原理图

13-57 对于如图13-122所示理想变压器电路，试求：(a) I_1与I_2；(b) V_1、V_2与V_o；(c) 电源提供的复功率。

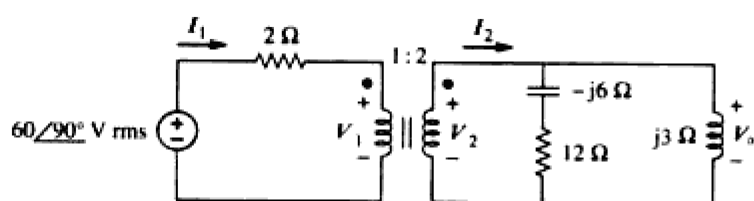


图 13-122 习题 13-57 的电路原理图

13-58 试确定如图13-123所示电路中各电阻器吸收的平均功率。

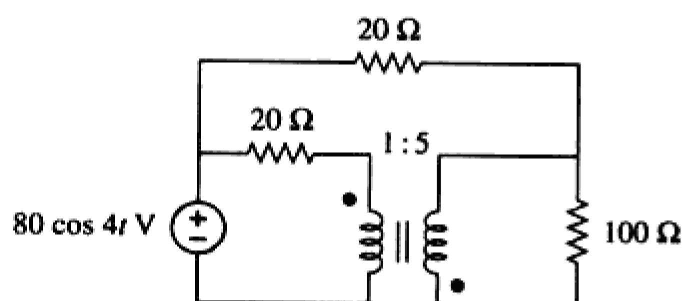


图 13-123 习题 13-58 的电路原理图

13-59 在如图13-124所示电路中，设$v_s = 40\cos 1\,000t$，试求传递给各电阻器的平均功率。

13-60 参见如图13-125所示电路。

(a) 试求电流I_1、I_2与I_3；

(b) 试求40 Ω电阻器消耗的功率。

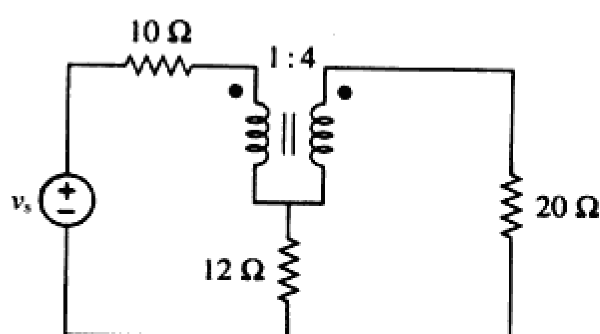


图 13-124 习题 13-59 的电路原理图

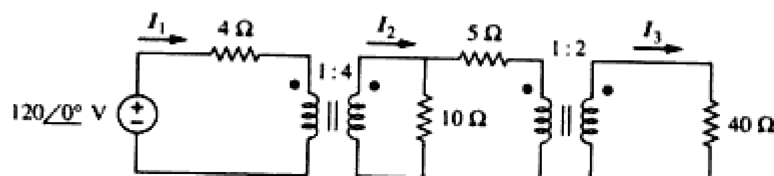


图 13-125 习题 13-60 的电路原理图

*13-61 试求如图13-126所示电路中的I_1、I_2与V_o。

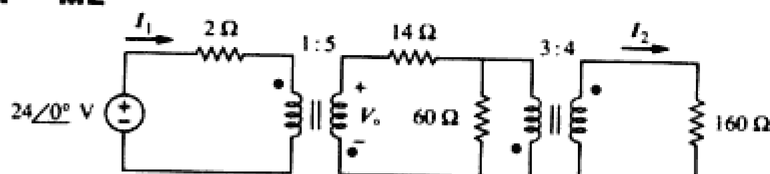


图 13-126 习题 13-61 的电路原理图

13-62 对于图13-127所示网络，试求：

(a) 电源提供的复功率；

(b) 传递给18 Ω电阻器平均功率。

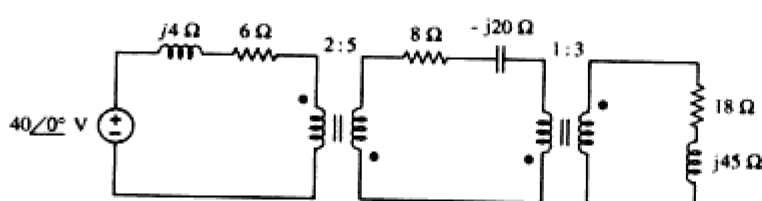


图 13-127 习题 13-62 的电路原理图

13-63 试求如图13-128所示电路中的网孔电流。

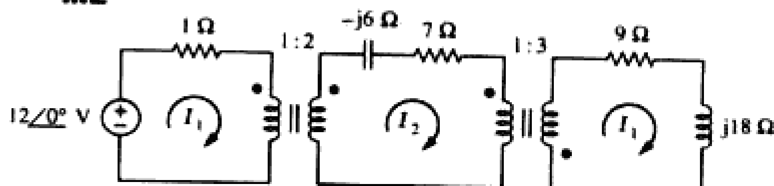


图 13-128 习题 13-63 的电路原理图

13-64 对于如图13-129所示电路，试求传递给30 kΩ电阻器功率最大时的匝比。

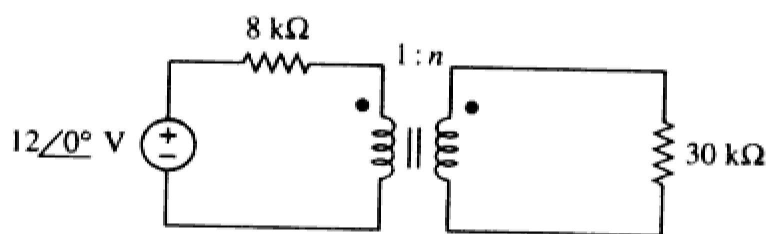


图 13-129 习题 13-64 的电路原理图

*13-65 试计算如图13-130所示电路中20 Ω电阻器消耗的平均功率。

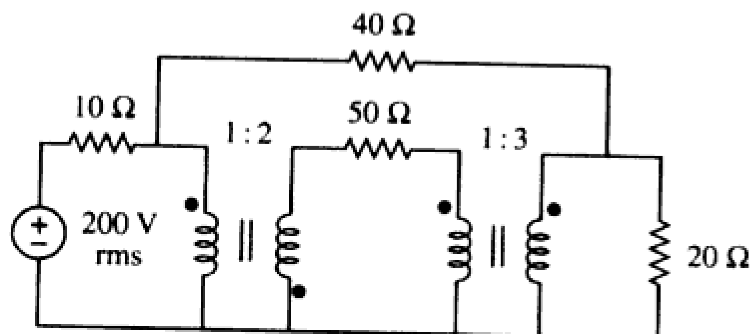


图 13-130 习题 13-65 的电路原理图

13.6 节

13-66 某升压匝比为1 : 4的理想自耦变压器的次级与120 Ω负载相连，初级与420 V电源相连，试确定其初级电流。

13-67 抽头比为40%的自耦变压器由400 V、60 Hz电源供电，并工作在升压状态下，某单位功率因数下的5 kVA负载与该变压器次级相连。试求：

(a) 次级电压；(b) 次级电流；

(c) 初级电流。

13-68 在如图13-131所示理想自耦变压器电路中，试计算I_1、I_2与I_o并确定传递给负载的平均功率。

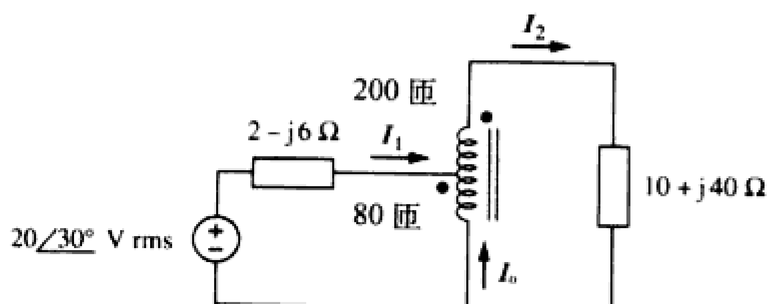


图 13-131 习题 13-68 的电路原理图

*13-69 在如图13-132所示电路中，调节Z_L使得传递给Z_L的平均功率最大，试求Z_L以及传递给它的最大平均功率，假定$N_1 = 600$匝，$N_2 = 200$匝。

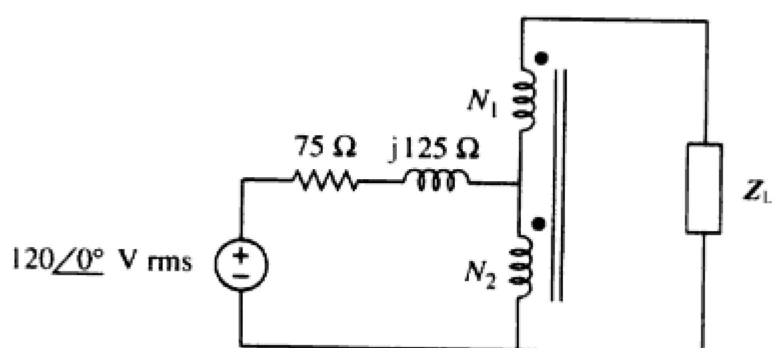


图 13-132 习题 13-69 的电路原理图

13-70 在如图13-133所示理想变压器电路中，试确定传递给负载的平均功率。

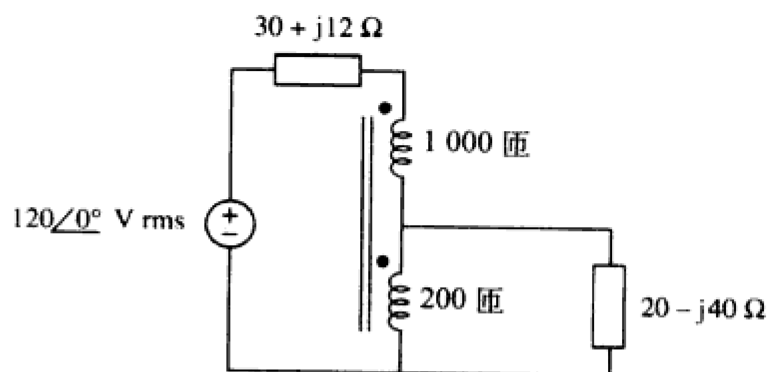


图 13-133 习题 13-70 的电路原理图

13-71 在如图13-134所示自耦理想变压器电路中，试证明：

$$Z_{in} = \left(1 + \frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L$$

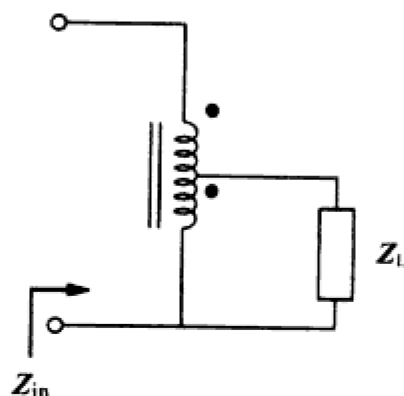


图 13-134 习题 13-71 的电路原理图

13.7 节

13-72 为了应急需要，将三个12 470/7 200 V rms单相变压器接成Δ–Y型连接，从而构成一个由12 470 V输电线供电的三相变压器，如果该变压器给负载提供60 MVA的功率，试求：

(a) 各变压器的匝比；

(b) 变压器初级线圈与次级线圈中的电流；

(c) 从输电线流入的电流与流出的电流。

13-73 如图13-135所示为一个给Y型连接负载供电的三相变压器，
(a) 试说明变压器的连接方法；
(b) 试计算电流I_2与I_c；
(c) 试求负载吸收的平均功率。

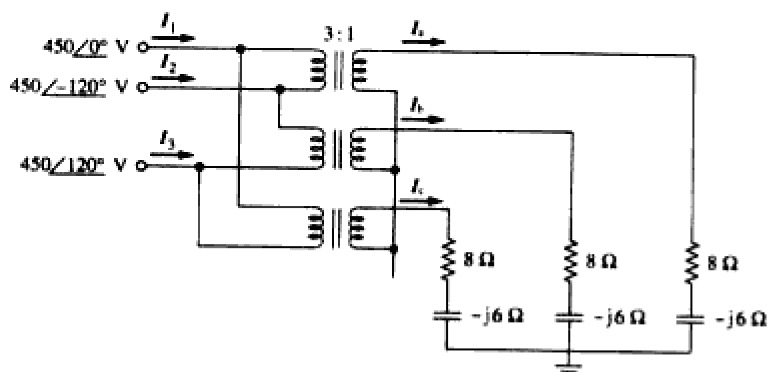


图 13-135 习题 13-73 的电路原理图

13-74 对于如图13-136所示的三相变压器电路，其初级的馈电电压是线电压为2.4 kVrms的三相电源，而次级为pf=0.8的三相对称负载提供120 kW功率，试确定：
(a) 变压器的连接类型；(b) I_{LS}与I_{PS}的值；(c) I_{LP}与I_{PP}的值；(d) 变压器各相的kVA值。

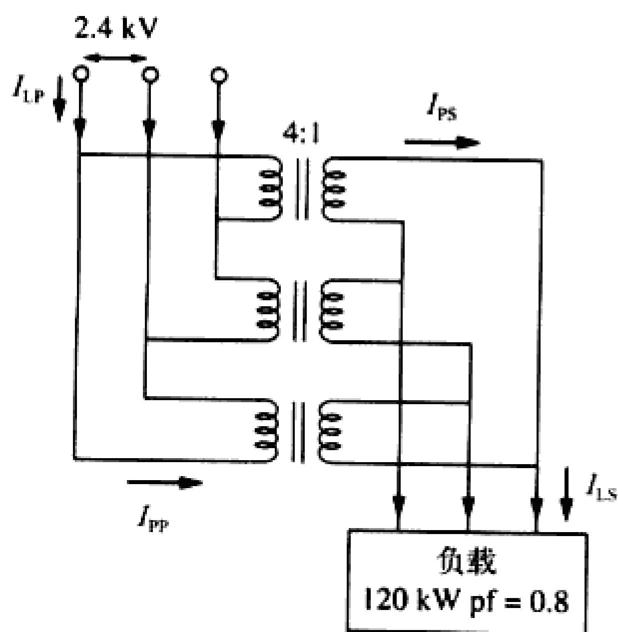


图 13-136 习题 13-74 的电路原理图

13-75 如图13-137所示的Δ-Y型连接对称三相变压器组用于将4 500 V rms线电压降至900 V rms，如果变压器给120 kVA负载供电，试求：
(a) 变压器的匝比；
(b) 初级与次级的线电流。

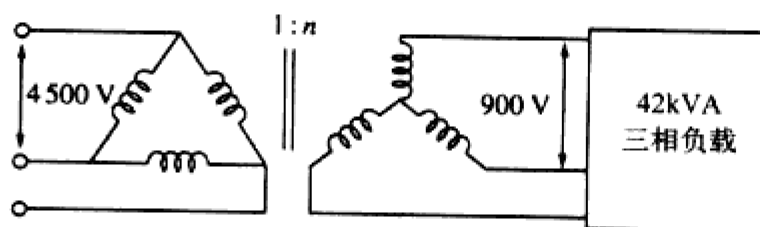


图 13-137 习题 13-75 的电路原理图

13-76 某Y-Δ型连接三相变压器与一个功率因数为0.85（超前）的60 kVA负载通过各相阻抗为0.05+j 0.1 Ω的馈线相连接，如图13-138所示，试求下列各值的大小：
(a) 负载端的线电流；(b) 变压器次级的线电压；(c) 变压器初级的线电流。

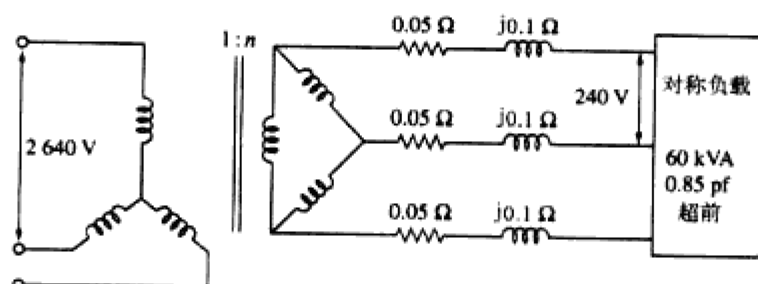


图 13-138 习题 13-76 的电路原理图

13-77 某城市配电三相系统的线电压为13.2 kV，架设在电线杆上的变压器与一路线相连，并将高压线降至120 V rms供住宅用户使用，如图13-139所示。
(a) 试计算得到120 V电压所采用的变压器的匝比；
(b) 试确定与120 V火线相连的一个100 W灯泡从高压线上提取的电流为多大？

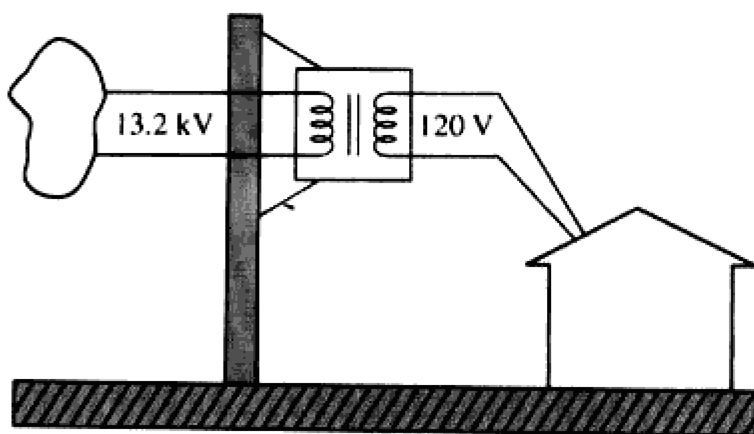


图 13-139 习题 13-77 的电路原理图

13.8 节

13-78 试利用PSpice确定如图13-140所示电路中的网孔电流，假定$\omega = 1$ rad/s。

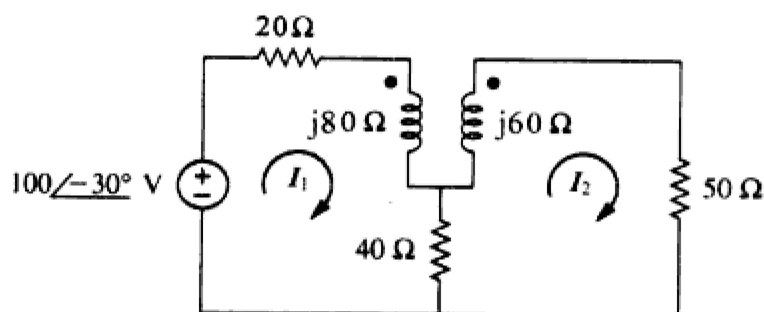


图 13-140 习题 13-78 的电路原理图

13-79 试利用PSpice确定如图13-141所示电路中的I_1、I_2与I_3。

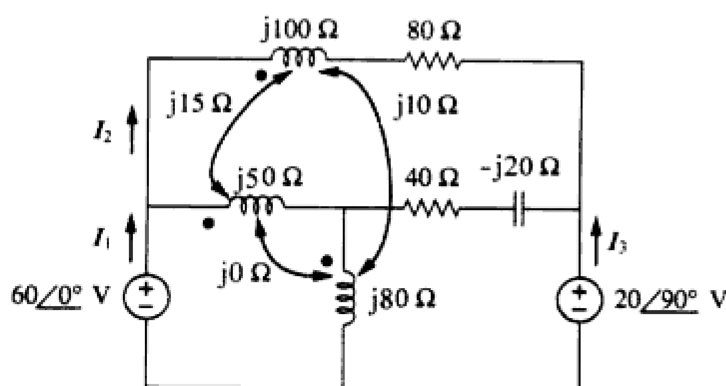


图 13-141 习题 13-79 的电路原理图

13-80 试利用PSpice重做习题13-22。

13-81 试利用PSpice确定如图13-142所示电路中的I_1、I_2与I_3。

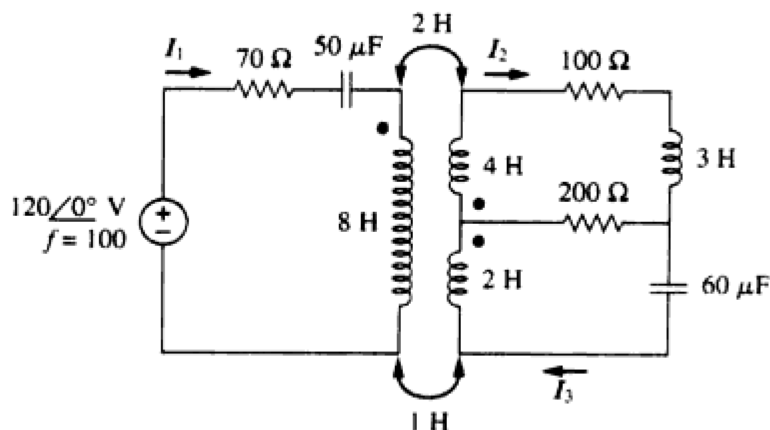


图 13-142 习题 13-81 的电路原理图

13-82 试利用PSpice确定如图13-143所示电路中的V_1、V_2与I_o。

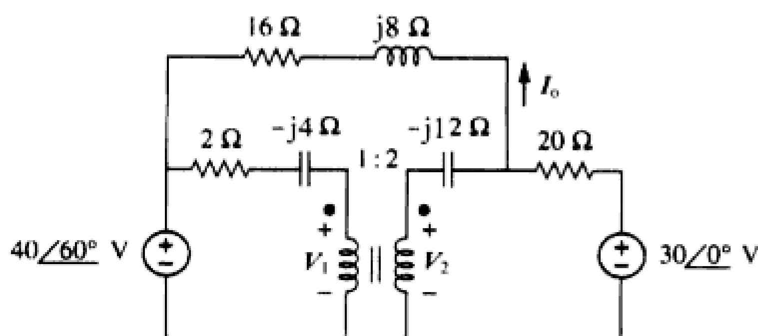


图 13-143 习题 13-82 的电路原理图

13-83 试利用PSpice确定如图13-144所示电路中的I_x与V_x。

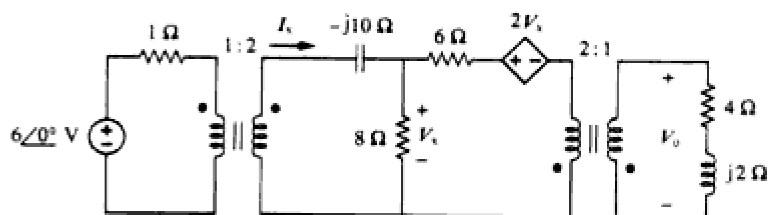


图 13-144 习题 13-83 的电路原理图

13-84 试利用PSpice确定如图13-145所示理想变压器电路中的I_1、I_2与I_3。

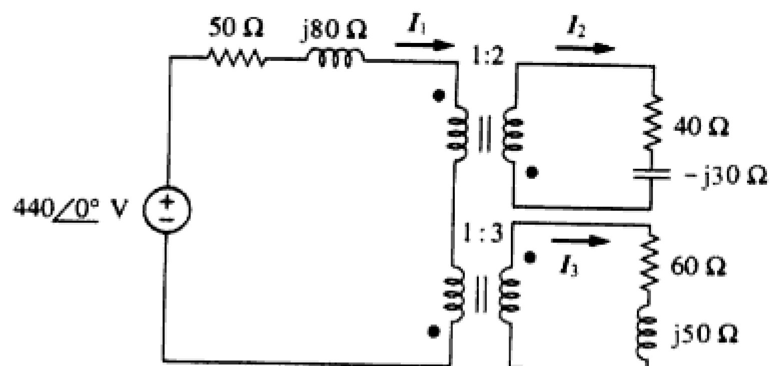


图 13-145 习题 13-84 的电路原理图

13.9 节

13-85 某输出阻抗为7.2 kΩ的立体声放大电路通过一个初级匝数为3 000的变压器与一个输入阻抗为8 Ω的扬声器相匹配，试计算该变压器次级线圈的匝数。

13-86 某初级匝数为2 400、次级匝数为48的变压器用作阻抗匹配器件，试问与次级相连接的3 Ω负载的反射阻抗为多大？

13-87 某无线电接收机的输入电阻为300 Ω，当它与特征阻抗为75 Ω的天线系统直接相连时，阻抗是不匹配的。在接收机之前连接一个阻抗匹配变压器，即可实现最大功率传送。试计算所需变压器匝比。

13-88 某匝比为$n=0.1$的降压变压器给某电阻性负载提供12.6 V rms的电压，如果其初级电流为2.5 A rms，试问传递给该负载的功率为多少？

13-89 某240/120 V rms电源变压器的额定功率为10 kVA。试确定其匝比、初级电流以及次级电流。

13-90 某4 kVA，2 400/240 V rms变压器在初级匝数为250，试计算：

(a) 匝比；(b) 次级匝数；(c) 初级电流与

次级电流。

13-91 某25 000/240 V rms配电变压器初级电流的额定值为75 A。
(a) 试求变压器的额定kVA功率；
(b) 试计算次级电流。

13-92 4 800 V rms的传输线给初级匝数为1 200、次级匝数为28的配电变压器供电，当次级负载为10 Ω时，试求：
(a) 次级电压；(b) 初级电流与次级电流；
(c) 提供给负载的功率。

综合题

13-93 如图13-146所示的四线圈变压器通常用在既可以在110 V电压下工作又可以在220 V电压下工作的设备（例如计算机、录像机等）中，这就使得这类设备既可以在国内使用，也可以在国外使用，试说明提供如下电压所需的变压器连接方式：
(a) 输入110 V时，输出14 V；
(b) 输入220 V时，输出50 V。

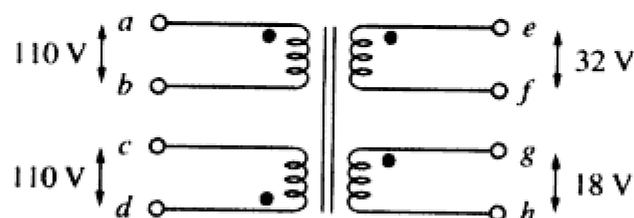


图 13-146 习题 13-93 的电路原理图

*13-94 440 V/110 V理想变压器可以连接成550/440 V理想自耦变压器，四种可能的连接方式中有两种连接是错误的，试求：
(a) 错误连接的输出电压；
(b) 正确连接的输出电压。

13-95 10只相互并联的灯泡由7 200 V/120 V变压器供电，如图13-147所示，灯泡可以建模为144 Ω的电阻器，试求：
(a) 变压器的匝比n；
(b) 流过初级线圈的电流。

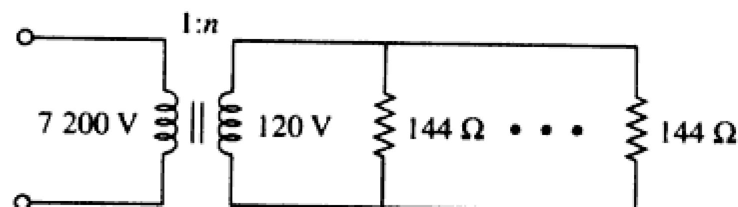


图 13-147

第14章 频率响应

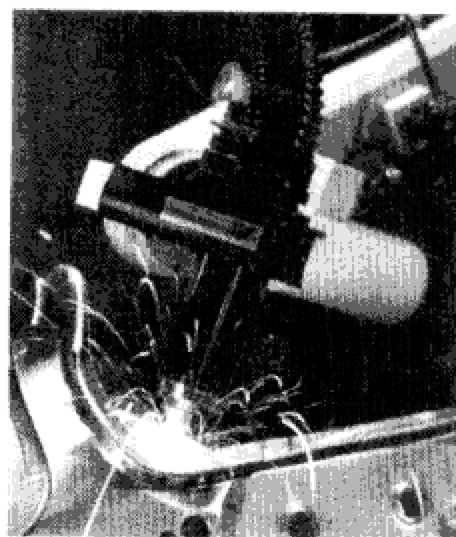
你的朋友有自己的朋友，而你朋友的朋友也有自己的朋友，你应该谨慎理智。

——犹太法典

拓展职业生涯

控制系统领域的职业生涯

控制系统是电子工程学科中应用电路分析的另一个领域，所设计的控制系统按照某种期望的方式调整一个或多个变量的行为特征。控制系统在人们的日常生活中起着非常重要的作用。诸如供暖系统与空调系统等家用电器、开关调温器、洗衣机与烘干机、机动车巡航控制器、电梯、交通指示灯、制造业工厂、导航系统等都会用到控制系统。在航空航天技术领域中，太空探测器的精确导航、航天飞机的运行模式控制，以及宇宙飞船的地面遥控等都必须掌握控制系统的知识。在制造业领域，批量生产流水线的控制日益依赖于机器人来完成，而机器人则是一个可编程控制系统，可以长期不知疲劳地工作。



焊接机器人

控制工程汇集了电路理论与通信理论的知识，它并不局限于任何一项专门的工程，而可能包含环境学、化学、航空学、机械学、土木工程学以及电子工程学等。例如，控制系统工程师的一项重要任务可能是设计一个磁盘驱动器读写头的转速调节器。

系统地理解控制系统的各项技术是对电子工程师的基本要求，这对于设计实现特定功能的控制系统具有极大的实际意义。

14.1 引言

在正弦电路分析中，已经学习了如何求解固定频率正弦电源激励下的电压与电流。如果假定正弦电源的幅度保持不变，而改变其频率，则会得到电路的*频率响应*（frequency response）。频率响应可以看作是电路的正弦稳态特性随频率变化的一种完整描述。

电路的频率响应是指电路的行为特征随信号频率变化的波动描述。

在许多应用特别是通信系统与控制系统中，电路的正弦稳态频率响应起到非常重要的作用。其中一种特殊的应用是电子滤波器，滤波器可以阻止或消除不需要的频率信号，而让期望频率的信号通过。在无线电收音机、电视机与电话机等系统中滤波器用于将不同广播频率相互隔离开。

电路的频率响应也可以看作是电路的增益与相位随频率变化的特性。

本章首先利用传递函数来分析简单电路的频率响应，之后介绍描述频率响应的工业标准方法——伯德图。同时学习串联谐振电路与并联谐振电路，并建立一些重要概念，如谐振、品质因数、截止频率以及带宽等。接着再讨论几种不同的滤波器以及电路参量的比例变换问题，最后一节介绍谐振电路的一个实际应用以及滤波器的两个应用实例。

14.2 传递函数

传递函数$H(\omega)$（也称作网络函数（network function））是求解电路频率响应的一种有用的数学工具。实际上，电路的频率响应就是传递函数$H(\omega)$随ω由0到∞变化的关系曲线。

传递函数是电路依赖于频率的受迫函数与激励函数（或输出信号与输入信号）之比。以前在利用阻抗或导纳表示电压与电流的关系时，实际上隐含了传递函数的概念。一般而言，线性网络可以利用如图14-1所示的方框图表示。

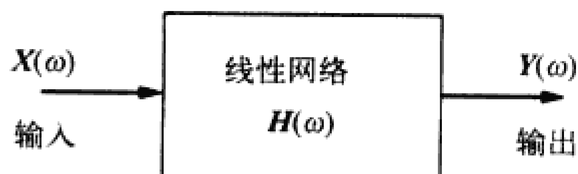


图 14-1 表示线性网络的方框图

电路的传递函数$H(\omega)$是随频率而变化的输出相量$Y(\omega)$（元件的电压或电流）与输入相量$X(\omega)$（源电压或电流）之比。

本书中，$X(\omega)$与$Y(\omega)$分别表示网络的输入相量与输出相量，不要和表示电抗与导纳的同样符号相混淆。由于没有足够的英文符号可以将所有的电路变量区分开来，所以用某些符号表示多种意思一般来讲是允许的。

于是，传递函数可以表示为：

$$\boxed{H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}} \tag{14-1}$$

其中假定初使条件为零。由于输入与输出可以是电路中任意位置的电压或电流，所以存在四种可能的传递函数：

$$H(\omega)=\text{电压增益}=\frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)} \tag{14-2a}$$

$$H(\omega)=\text{电流增益}=\frac{I_o(\omega)}{I_i(\omega)} \tag{14-2b}$$

$$H(\omega)=\text{转移阻抗}=\frac{V_o(\omega)}{I_i(\omega)} \tag{14-2c}$$

$$H(\omega)=\text{转移导纳}=\frac{I_o(\omega)}{V_i(\omega)} \tag{14-2d}$$

有些学者喜欢用$H(j\omega)$表示传递函数而不用$H(\omega)$，因为ω与j是分不开的一对。

其中，下标i与o分别表示输入值与输出值。$H(\omega)$是一个复数量，其模值为$H(\omega)$，相角为ϕ，也就是说，$H(\omega)=H(\omega)\angle\phi$。

利用式（14-2）确定传递函数时，首先要将电路中的电阻器、电感器与电容器用它们的阻抗R、$j\omega L$与$1/j\omega C$取代，得到频域等效电路，之后再利用已经掌握的电路分析方法确定式（14-2）中的相关变量。这样，就可以画出电路传递函数的模与相位随频率变化的曲线，从而得到电路的频率响应。在绘制传递函数时利用计算机的确能够节省大量的时间。

传递函数$H(\omega)$也可以用其分子多项式$N(\omega)$与分母多项式$D(\omega)$之比来表示：

$$\boxed{H(\omega)=\frac{N(\omega)}{D(\omega)}} \tag{14-3}$$

其中，$N(\omega)$与$D(\omega)$未必和输出函数与输入函数具有同样的表达式。式（14-3）中$H(\omega)$的表达式假定分式中分子与分母的公因式已经消去，得到的是最简多项式之比。$N(\omega)=0$的根称为$H(\omega)$的零点（zero），通常用$j\omega=z_1$，z_2，… 表示；同样，$D(\omega)=0$的根称为$H(\omega)$的极点（pole），用$j\omega=p_1$，p_2，…

表示。

分子多项式的根——零点是使得传递函数等于零的点；分母多项式的根——极点是使得传递函数趋于无穷大的点。

零点也可以看作是使得$\boldsymbol{H}(s)$为零的$s=\mathrm{j}\omega$的值，极点则是使得$\boldsymbol{H}(s)$为无穷大的$s=\mathrm{j}\omega$的值。

为了避免复数的运算，在计算$\boldsymbol{H}(\omega)$时，可以暂时利用s取代$\mathrm{j}\omega$，这样会比较方便，而在计算完毕后，再将s替换为$\mathrm{j}\omega$。

例题14-1 对于如图14-2a所示的RC电路，试确定传递函数$\boldsymbol{V}_o/\boldsymbol{V}_S$及其频率响应。假定$v_s=V_m\cos\omega t$。

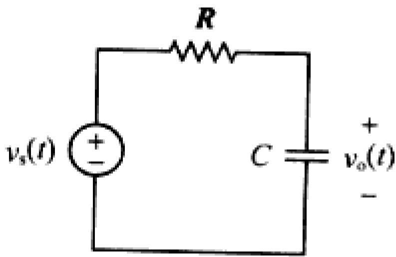
解 该电路的频域等数电路如图14-2b所示，根据分压原理，其传递函数为：

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\frac{\boldsymbol{V}_o}{\boldsymbol{V}_s}=\frac{1/\mathrm{j}\omega C}{R+1/\mathrm{j}\omega C}=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC}$$

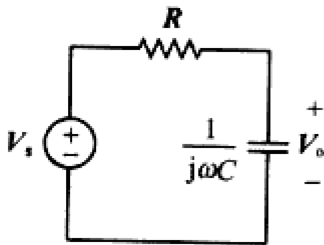
上式与式（9-18e）比较即可得到$\boldsymbol{H}(\omega)$的模与相位为：

$$H=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}},\qquad \phi=-\tan^{-1}\frac{\omega}{\omega_0}$$

其中，$\omega_0=1/RC$。要画出$0<\omega<\infty$时H与ϕ的变化曲线，需确定一些关键点处的值，以便绘图。



(a) 时域RC电路



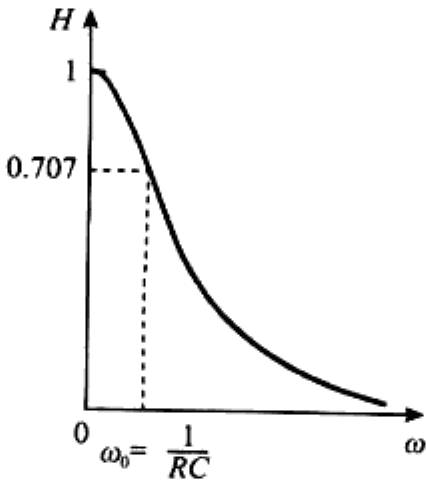
(b) 频域RC电路

图 14-2 例题 14-1 的电路原理图

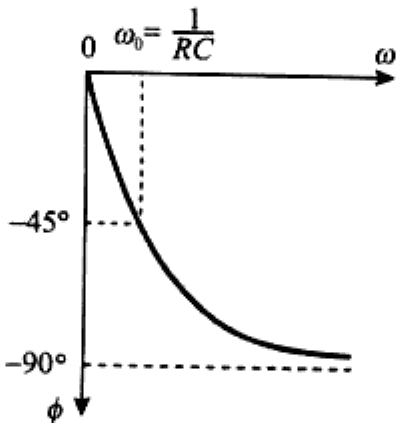
当$\omega=0$时，$H=1$且$\phi=0$；当$\omega=\infty$时，$H=0$且$\mathrm{j}\omega=-90°$。而当$\omega=\omega_0$时，$H=1/\sqrt{2}$ 且$\phi=-45°$。利用上述各点以及表14-1所示的若干点，即可求得如图14-3所示的频率响应。图14-3中频率响应曲线的某些特征将在14.6.1节介绍低频滤波器时予以说明。

表 14-1 例题 14-1 中的相关数据

ω/ω_0	H	ϕ	ω/ω_0	H	ϕ
0	1	0	10	0.1	−84°
1	0.71	−45°	20	0.05	−87°
2	0.45	−63°	100	0.01	−89°
3	0.32	−72°	∞	0	−90°



(a) 幅频响应



(b) 相频响应

图 14-3 RC 电路的频率响应

练习题14-1 试确定如图14-4所示RL电路的传递函数$\boldsymbol{V}_o/\boldsymbol{V}_s$，并画出其频率响应。假定$v_s=V_m\cos\omega t$。

答　$j\omega L/(R+j\omega L)$；频率响应如图14-5所示。

图 14-4　练习题 14-1 的 RL 电路

例题14-2　对于图14-6所示电路，试计算增益$\boldsymbol{I}_o(\omega)/\boldsymbol{I}_i(\omega)$及其极点与零点。

解　根据分流原理可得：

$$\boldsymbol{I}_o(\omega)=\frac{4+j2\omega}{4+j2\omega+1/j0.5\omega}\boldsymbol{I}_i(\omega)$$

即：

$$\frac{\boldsymbol{I}_o(\omega)}{\boldsymbol{I}_i(\omega)}=\frac{j0.5\omega(4+j2\omega)}{1+j2\omega+(j\omega)^2}=\frac{s(s+2)}{s^2+2s+1},s=j\omega$$

其零点为：

$$s(s+2)=0\ \Rightarrow\ z_1=0,\ z_2=-2$$

其极点为：

$$s^2+2s+1=(s+1)^2=0$$

因此，在$p=-1$处有一个重复极点（即二重极点）。

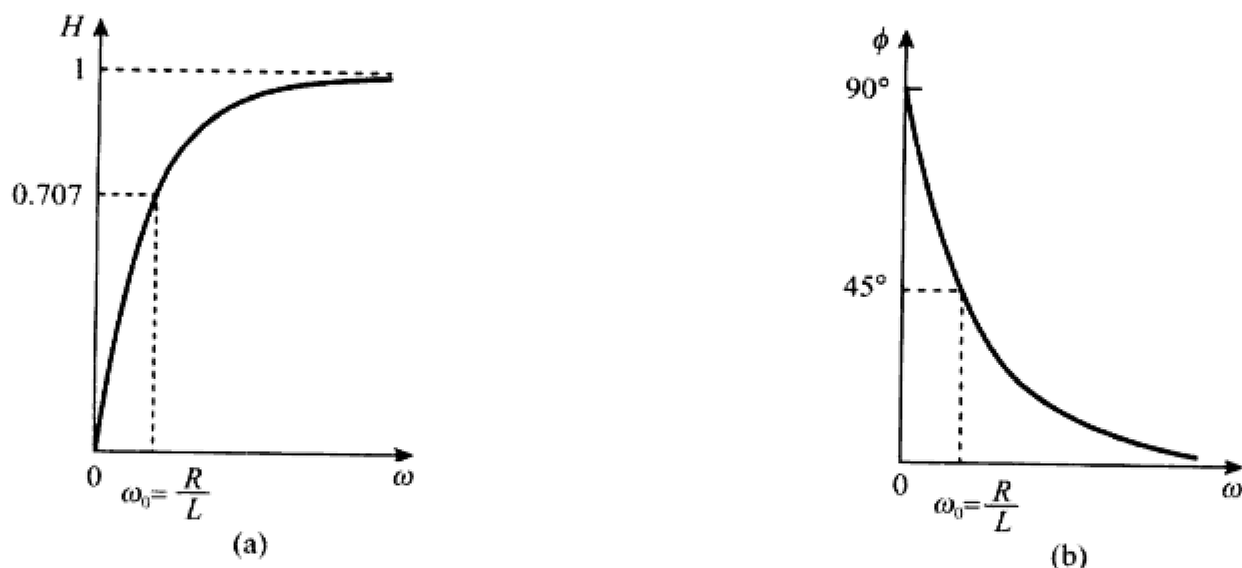


图 14-5　图 14-4 所示 RL 电路的频率响应

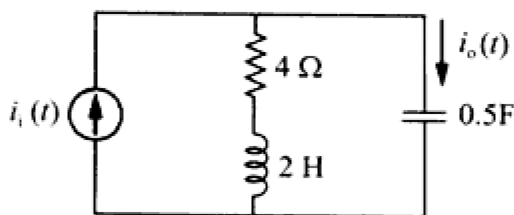


图 14-6　例题 14-2 的电路原理图

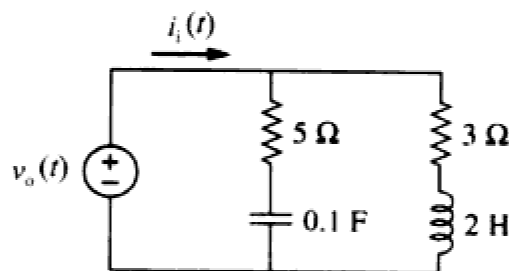


图 14-7　练习题 14-2 的电路原理图

练习题14-2　试求如图14-7所示电路的传递函数$\boldsymbol{V}_o(\omega)/\boldsymbol{I}_i(\omega)$，并确定其零点与极点。

答　$\dfrac{5(s+2)(s+1.5)}{s^2+4s+5}$，零点：$-2$，$-1.5$；极点：$-2\pm j$。

14.3　†分贝表示法

快速地绘制出传递函数的幅频特性与相频特性通常不会像上述例题那么容易。确定频率响应一种更为系统的方法是利用伯德图。在学习绘制伯德图之前，首先明确两个重要问题：在增益表达式

中对数与分贝的使用方法。

由于伯德图是基于对数坐标的，所以牢记如下对数性质是非常重要的：

(1) $\log P_1P_2 = \log P_1 + \log P_2$

(2) $\log P_1/P_2 = \log P_1 - \log P_2$

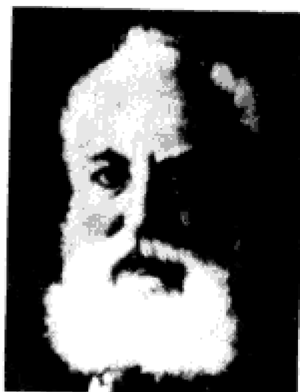
(3) $\log P^n = n\log P$

(4) $\log 1 = 0$

在通信系统中，增益以贝尔（bel）为单位来度量。从历史上看，贝尔是用来度量两个功率电平之比的，即功率增益G：

$$G = \text{贝尔数} = \log_{10}\frac{P_2}{P_1} \tag{14-4}$$

历史人物



亚历山大·格雷厄姆·贝尔（Alexander Graham Bell，1847—1922），苏格兰裔美国科学家，电话的发明人。

贝尔出生在苏格兰的爱丁堡，其父亲亚历山大·梅尔维尔·贝尔是一位著名的语言教师。小亚历山大从爱丁堡大学和伦敦大学毕业后也成为一位语言教师。1866年，他对语音的电传输产生了浓厚的兴趣。在其兄长因肺结核病而去世之后，父亲决定移居加拿大。此后小亚历山大来到波士顿一家聋哑学校工作，在那里他结识了托马斯·沃森（Thomas A. Watson），此人后来成为他从事电磁发射实验研究的助手。1876年3月10日，亚历山大发送了著名的第一条电话消息："Watson，come here I want you." 第14章介绍的对数单位——贝尔，就是为了纪念他而以他的名字命名的。

分贝（dB）是一个比贝尔更小一些的单位，相当于1/10贝尔，即：

$$\boxed{G_{\text{dB}} = 10\log_{10}\frac{P_2}{P_1}} \tag{14-5}$$

当$P_1 = P_2$时，功率没有变化，增益为0 dB，当$P_2 = 2P_1$时，增益为：

$$G_{\text{dB}} = 10\log_{10}2 \simeq 3\text{dB} \tag{14-6}$$

当$P_2 = 0.5P_1$时，增益为：

$$G_{\text{dB}} = 10\log_{10}0.5 \simeq -3\text{ dB} \tag{14-7}$$

式(14-6)与式(14-7)也说明了广泛使用对数的另一个原因，即一个变量倒数的对数就等于该变量对数的相反数。

另外，增益G还可以用电压比或电流比来表达。为了说明这个问题，考虑如图14-8所示的网络，如果P_1为输入功率，P_2为输出（负载）功率，R_1为输入电阻，R_2为负载电阻，则$P_1 = 0.5V_1^2/R_1$，$P_2 = 0.5V_2^2/R_2$，于是，方程（14-5）变为：

$$\begin{aligned} G_{\text{dB}} &= 10\log_{10}\frac{P_2}{P_1} = 10\log_{10}\frac{V_2^2/R_2}{V_1^2/R_1} \\ &= 10\log_{10}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 + 10\log_{10}\frac{R_1}{R_2} \end{aligned} \tag{14-8}$$

$$G_{\text{dB}} = 20\log_{10}\frac{V_2}{V_1} - 10\log_{10}\frac{R_2}{R_1} \tag{14-9}$$

在比较两个电压电平时通常假定$R_2 = R_1$，于是，式(14-9)变为：

$$\boxed{G_{dB} = 20\log_{10}\frac{V_2}{V_1}} \tag{14-10}$$

对于电流而言，如果$P_1 = I_1^2R_1$，$P_2 = I_2^2R_2$，则当$R_1 = R_2$时有：

$$G_{dB} = 20\log_{10}\frac{I_2}{I_1} \tag{14-11}$$

由式(14-5)、式(14-10)与式(14-11)可知，如下三点非常重要：

(1) 由于功率与电压或电流之间呈平方关系（$P = V^2/R = I^2R$），所以"10 $\log_{10}$"用于对功率取对数，而"20 $\log_{10}$"用于对电压或电流取对数。

(2) dB是同一类型的一个变量与另一个变量之比的对数度量。因此，适合于表达式(14-2a)与式(14-2b)所示的无量纲传递函数H，而不适合于表达式(14-2c)与式(14-2d)中的H。

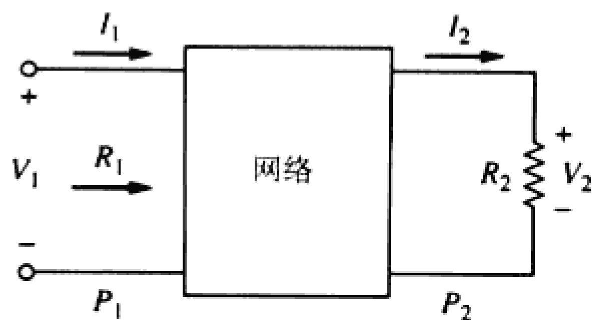


图 14-8 一个四端网络的电压－电流关系

(3) 必须注意的是，在式(14-10)与式(14-11)中仅采用了电压与电流的幅度，负号与角度将做单独的处理，参见14.4节的内容。

下面利用对数与分贝的概念帮助我们学习伯德图的绘制。

14.4 伯德图

14.2节中由传递函数确定频率响应是一项很困难的任务，频率响应所涉及的频率范围通常是非常宽的，如果频率轴采用线性刻度就显得很不方便；另外，传递函数的幅度谱与相位谱的重要特征也有更为系统的方法。鉴于上述原因，在实际中通常利用半对数坐标系绘制传递函数，即，以频率的对数作为横坐标，而幅度谱中纵坐标是单位为分贝的幅度值，在分开的相位谱中纵坐标是单位为度的相位值。传递函数的这种半对数幅频、相频曲线就称为伯德图（Bode plot），现已成为一种工业标准。

历史附注：伯德（Hendrik W. Bode，1905—1982）是贝尔电话实验室的工程师，伯德图就是以他的名字命名的，以纪念他在20世纪30年代到40年代期间所做的前瞻性工作。

伯德图是传递函数的模（单位为分贝）与相位（单位为度）与频率关系的半对数曲线图。

伯德图与前一节介绍的非对数曲线包含有同样的信息，但是稍后我们会看到，绘制起来却容易得多。

传递函数可以写为：

$$\boldsymbol{H} = H\underline{/\phi} = He^{j\phi} \tag{14-12}$$

两边取自然对数可以得到：

$$\ln \boldsymbol{H} = \ln H + \ln e^{j\phi} = \ln H + j\phi \tag{14-13}$$

因此，ln$\boldsymbol{H}$的实部是幅度的函数，而其虚部就是相位。在幅度伯德图中，增益为：

$$\boxed{H_{dB} = 20\log_{10} H} \tag{14-14}$$

增益曲线是一个分贝（dB）—频率关系曲线。表14-2给出了一些H值及其对应的分贝值。在相位伯德图中，相位ϕ 的单位为度。幅频曲线与相频曲线均绘制在半对数坐标纸上。

式(14-3)所示的传递函数可以用带有实部和虚部的因式来表示，其中一种表示方法可以写为：

$$\boldsymbol{H}(\omega) = \frac{K(j\omega)^{\pm1}(1 + j\omega/z_1)[1 + j2\zeta_1\omega/\omega_k + (j\omega/\omega_k)^2]\cdots}{(1 + j\omega/P_1)[1 + j2\zeta_2\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2]\cdots} \tag{14-15}$$

上式可以通过$H(\omega)$中的极点与零点分配而得到。式(14-15)所示的$H(\omega)$的表达式称为标准形式(standard form)。$H(\omega)$中可以包含多达七种不同的因子，这些因子可以是传递函数中各种不同的组合，它们是：

(1) 增益K；

(2) 在原点的极点$(j\omega)^{-1}$或零点$(j\omega)$；

(3) 单极点$1/(1+j\omega/p_1)$或单零点$(1+j\omega/z_1)$；

(4) 二阶极点$1/[1+j2\zeta_2\omega/\omega_n+(j\omega/\omega_n)^2]$或二阶零点$[1+j2\zeta_1\omega/\omega_n+(j\omega/\omega_k)^2]$。

表 14-2 某些特定的增益值及其分贝值

幅度 H	$20\log_{10}H$ (dB)	幅度 H	$20\log_{10}H$ (dB)
0.001	−60	$\sqrt{2}$	3
0.01	−40	2	6
0.1	−20	10	20
0.5	−6	20	26
$1/\sqrt{2}$	−3	100	40
1	0	1 000	60

在绘制伯德图时，首先分别绘制各因子的曲线，之后再将其相加起来。由于采用了对数运算，所以各因子可以单独考虑，再将它们相加组合成伯德图。正是因为对数在数学处理上的方便，使得伯德图成为一种强有力的工程工具。

原点位于$\omega=1$处，即$\log\omega=0$处，且原点处的增益为零。

下面画出以上所列各因子的直线伯德图，我们会看到，这些直线伯德图是真实伯德图的合理近似。

常数项：对于增益K，其幅度为$20\log_{10}K$，相位为0°，两者均与频率无关。于是，增益的幅频特性与相频特性曲线如图14-9所示。如果K是负的，其幅度仍然为$20\log_{10}|K|$，而相位为±180°。

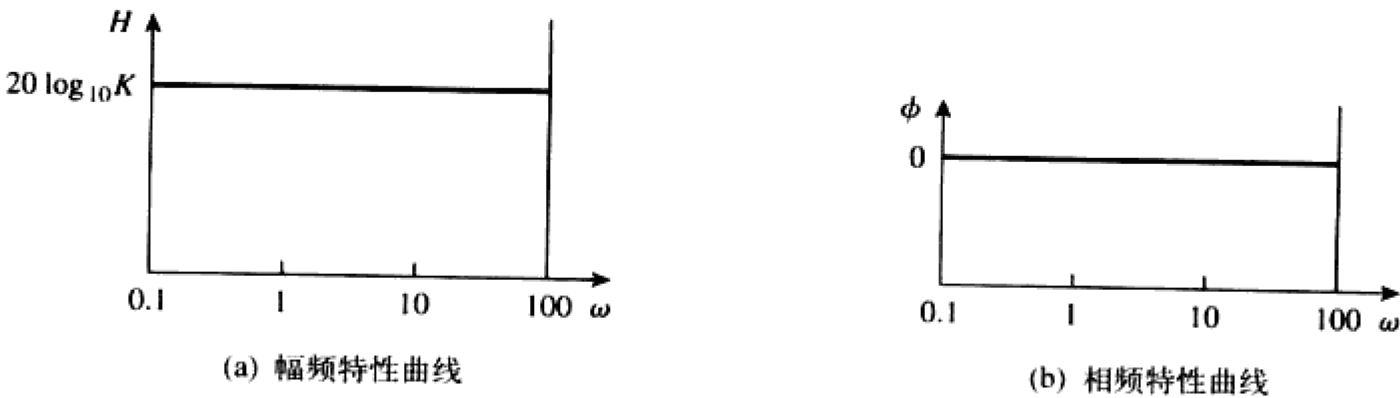


图 14-9 增益 K 的伯德图

位于原点处的极点/零点：对于原点处的零点$(j\omega)$，其幅度为$20\log_{10}\omega$，相位为90°，其伯德图如图14-10所示，由图可见，幅频特性曲线的斜率为20 dB/dec，而相频特性与频率无关。

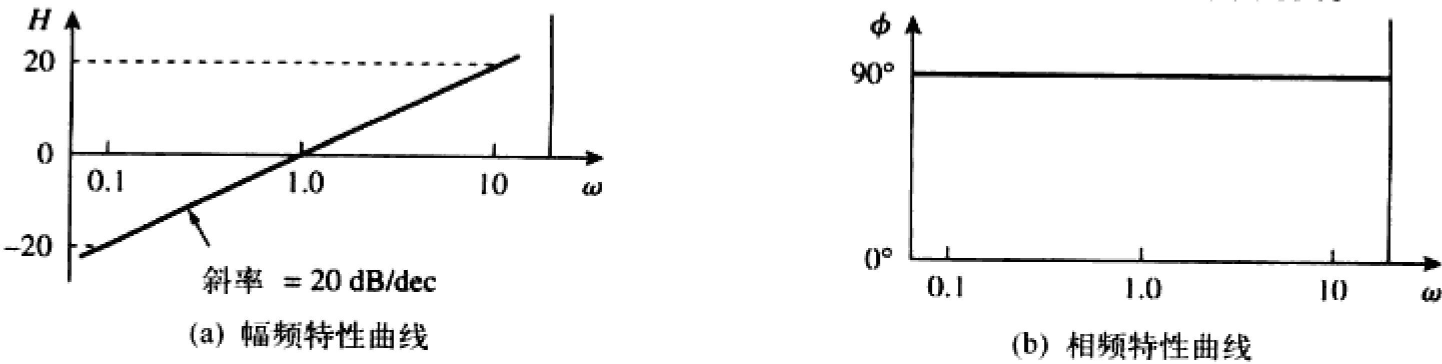


图 14-10 原点处零点$(j\omega)$的伯德图

极点$(j\omega)^{-1}$的伯德图与零点类似，只是幅频特性曲线的斜率为 − 20 dB/dec，而相位为 − 90°。对于一般情况$(j\omega)^N$，N为整数，其幅频特性曲线的斜率为$20N$ dB/dec，而相位为$90N$度。

十倍频（dec）是指频率之比为10的两个频率之间的间隔，例如ω_0与10 ω_0之间的间隔，或者10Hz与100 Hz之间的间隔。所以20 dB/dec表示频率每变化十倍频程，其幅度就改变20 dB。

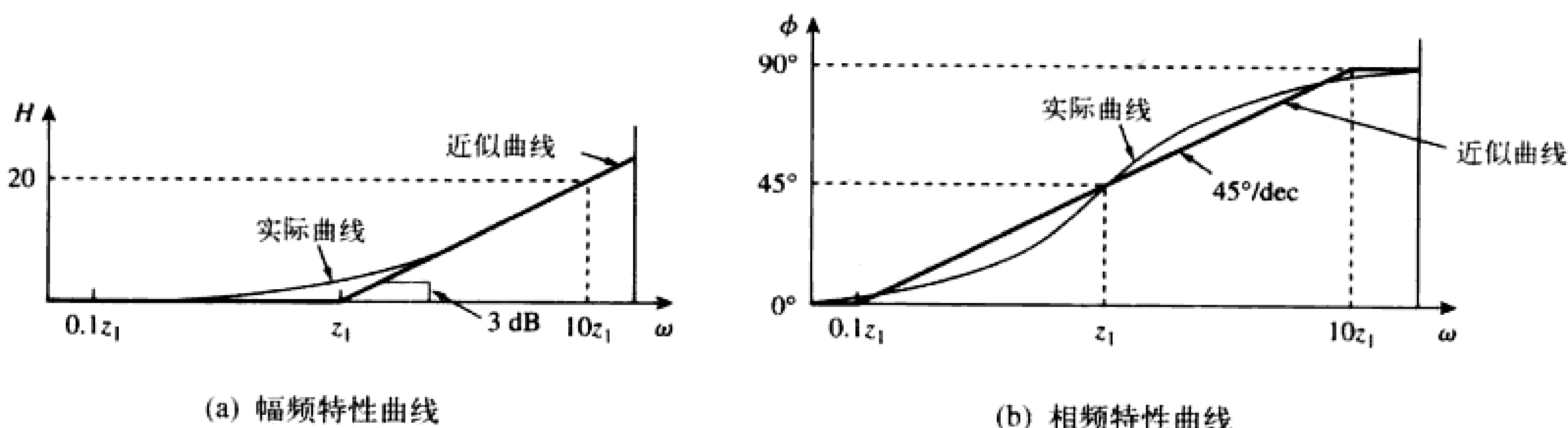
单极点/单零点：对于单零点$(1+j\omega/z_1)$，其幅度为$20\log_{10}|1+j\omega/z_1|$，相位为$\tan^{-1}\omega/z_1$。于是，

$$H_{dB}=20\log_{10}\left|1+\frac{j\omega}{z_1}\right| \Rightarrow 20\log_{10}1=0 \qquad 当\ \omega\to 0 \tag{14-16}$$

$$H_{dB}=20\log_{10}\left|1+\frac{j\omega}{z_1}\right| \Rightarrow 20\log_{10}\frac{\omega}{z_1} \qquad 当\ \omega\to\infty \tag{14-17}$$

由此可见，当ω较小时，可以用零（斜率为零的直线）作为其幅频特性曲线的近似，而当ω较大时，可以用斜率为20 dB/dec的直线作为其幅频特性曲线的近似。两渐近线相交处的频率$\omega=z_1$，称为转折频率（corner frequency或break frequency）。于是，近似幅频特性曲线如图14-11a所示，图中也给出了实际的幅频特性曲线，由图可见，除了在$\omega=z_1$的转折频率处，近似曲线非常接近于实际曲线，而在该频率处，其偏差为$20\log_{10}|1+j1|=20\log_{10}\sqrt{2}\approx 3$dB。

因为log 0 = −∞，所以在伯德图上不会出现直流（$\omega=0$）的特例，这意味着零频率位于伯德图原点左侧无穷远处。



(a) 幅频特性曲线 (b) 相频特性曲线

图 14-11 零点$(1+j\omega/z_1)$的伯德图

相位$\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{z_1}\right)$可以表示为：

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{z_1}\right)=\begin{cases}0, & \omega=0\\ 45°, & \omega=z_1\\ 90°, & \omega\to\infty\end{cases} \tag{14-18}$$

作为直线近似，当$\omega\leqslant z_1/10$时，$\phi\approx 0$；当$\omega=z_1$时，$\phi\approx 45°$；当$\omega\geqslant 10z_1$时，$\phi\approx 90°$，如图14-11b所示，图中也给出了实际的相频特性曲线，直线的斜率为45°/dec。

极点$1/(1+j\omega/p_1)$的伯德图与图14-11类似，只是转折频率为$\omega=p_1$，幅频特性曲线的斜率为 − 20dB/dec，相频特性曲线的斜率为 − 45°/dec。

二阶极点/二阶零点：二阶极点$1/[1+j2\zeta_2\omega/\omega_n+(j\omega/\omega_n)^2]$的幅度为 − 2010g10$|1+j2\zeta_2\omega/\omega_n+(j\omega/\omega_n)^2|$，其相位为$-\tan^{-1}(2\zeta_2\omega/\omega_n)/(1-\omega/\omega_n^2)$。但是，

$$H_{dB}=-20\log_{10}\left|1+\frac{j2\zeta_2\omega}{\omega_n}+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right| \Rightarrow 0 \qquad 当\ \omega\to 0 \tag{14-19}$$

并且，

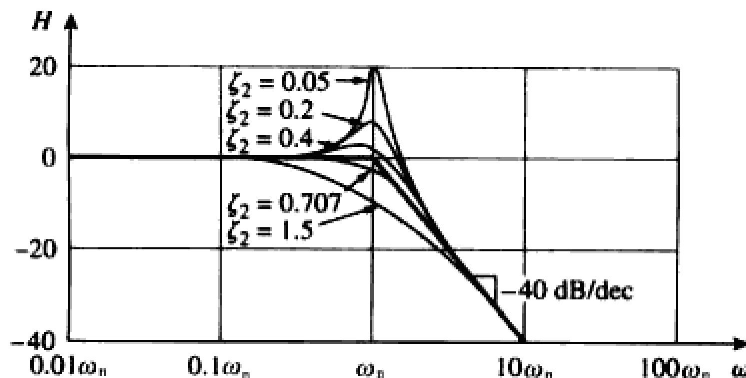
$$H_{\mathrm{dB}} = -20\log_{10}\left|1+\frac{\mathrm{j}2\zeta_2\omega}{\omega_{\mathrm{n}}}+\left(\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_{\mathrm{n}}}\right)^2\right| \quad \Rightarrow \quad -40\log_{10}\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}} \qquad 当\ \omega\to\infty \tag{14-20}$$

因此，幅频特性曲线由两条渐近直线组成：其中一条是$\omega<\omega_n$时，斜率为零的直线，另一条是$\omega>\omega_n$时斜率为-40dB/dec的直线，其中ω_n为转折频率。图14-12a所示为近似幅频特性曲线与实际幅频特性曲线。由图可见，实际的幅频特性取决于阻尼因子ζ_2与转折频率ω_n。如果需要高精度的幅频特性，则需要在直线近似的转折频率的邻域内叠加一个明显的峰值。但是，为了简单起见，仍然可以采用直线近似。

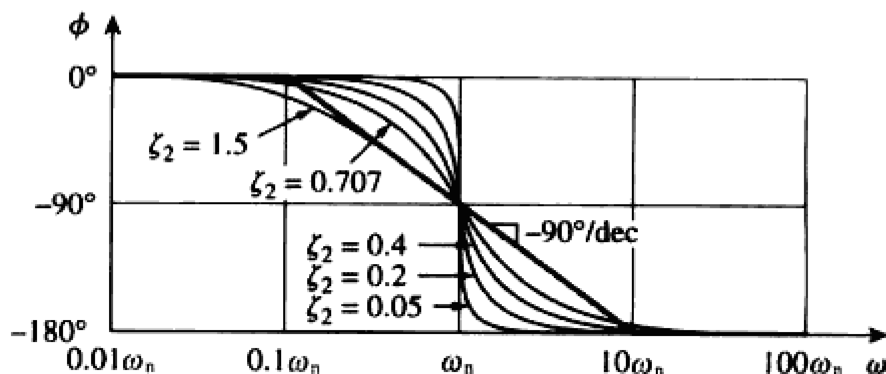
二阶极点的相位可以表达为：

$$\phi = -\tan^{-1}\frac{2\zeta_2\omega/\omega_{\mathrm{n}}}{1-\omega^2\omega_{\mathrm{n}}^2} = \begin{cases} 0, & \omega = 0 \\ -90°, & \omega=\omega_{\mathrm{n}} \\ -180°, & \omega\to\infty \end{cases} \tag{14-21}$$

该相频特性曲线是一条斜率为90°/dec的直线，其起点位于$\omega_n/10$处，终点位于$10\omega_n$处，如图14-12b所示。同样可以观察到由阻尼因子引起的实际曲线与近似直线之间的差别。二阶极点的幅频特性与相频特性的直线近似与重极点［即$(1+\mathrm{j}\omega/\omega_n)^{-2}$］的情况相同，这是因为重极点$(1+\mathrm{j}\omega/\omega_n)^2$就等于$\zeta_2=1$时的二阶极点$1/[1+\mathrm{j}2\zeta_2\omega/\omega_n+(\mathrm{j}\omega/\omega_n)^2]$。因此，只要采用直线近似，二阶极点与重极点就可以同等处理。



(a) 幅频特性曲线



(b) 相频特性曲线

图 14-12 二阶极点$1/[1+\mathrm{j}2\zeta\omega/\omega_n-(\omega/\omega_n)^2]$的伯德图

绘制伯德图的另外一种方法可能比这里介绍的方法速度更快、效率更高。该方法利用零点使斜率增大，极点使斜率下降的特性。从伯德图的低频渐近线开始，沿频率轴移动，在每个转移频率处增大或减小斜率，这样就可以快速地由传递函数绘制出伯德图，而无需逐个画出后再相加。在你能够熟练掌握本节介绍的方法之后，就可以试着利用上述过程来绘制伯德图。

数字计算机已不再采用本节介绍的方法绘制伯德图了。目前诸如PSpice、Matlab、Mathcad以及Micro-Cap等软件包都可以用来绘制频率响应曲线，稍后将讨论利用PSpice软件包绘制伯德图。

对于二阶零点$[1+\mathrm{j}2\ \zeta_1\ \omega/\omega_k+(\mathrm{j}\omega/\omega_k)^2]$，由于其幅频特性曲线的斜率为40 dB/dec，而相频特性曲线的斜率为90°/dec，所以其伯德图只需将图14-12所示曲线反转即可。

表14-3总结了上述7种因子的伯德图，当然，并非每个传递函数都包含上述七个因子。为了画出式(14-15)所示传递函数$\boldsymbol{H}(\omega)$的伯德图，首先要在半对数坐标纸上标记出各转折频率点，按上述方法画出每个因子的伯德图，之后将各个图形相加合并，从而得到传递函数的伯德图。合并的过程通常是从左到右，每次在转折频率处斜率发生变化。以下的例题说明上述绘制伯德图的过程。

表 14-3 幅频特性与相频特性的直线伯德图总结

因　子	幅 频 特 性	相 频 特 性
K	$20\log_{10}K$；ω	0°；ω
$(\mathrm{j}\omega)^N$	20N dB/dec；1；ω	90N°；ω
$\dfrac{1}{(\mathrm{j}\omega)^N}$	1；ω；−20N dB/dec	ω；−90N°
$\left(1+\dfrac{\mathrm{j}\omega}{z}\right)^N$	20N dB/dec；z；ω	90N°；0°；$\dfrac{z}{10}$；z；10z；ω
$\dfrac{1}{(1+\mathrm{j}\omega/p)^N}$	p；ω；−20N dB/dec	$\dfrac{p}{10}$；p；10p；0°；ω；−90N°
$\left[1+\dfrac{2\mathrm{j}\omega\zeta}{\omega_n}+\left(\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_n}\right)\right]^{2N}$	40N dB/dec；ω_n；ω	180N°；0°；$\dfrac{\omega_n}{10}$；ω_n；10ω_n；ω
$\dfrac{1}{[1+2\mathrm{j}\omega\zeta/\omega_k+(\mathrm{j}\omega/\omega_k)^2]^N}$	ω_k；ω；−40N dB/dec	$\dfrac{\omega_k}{10}$；ω_k；10ω_k；0°；ω；−180N°

例题14-3 试画出传递函数

$$H(\omega)=\frac{200\,\mathrm{j}\omega}{(\mathrm{j}\omega+2)(\mathrm{j}\omega+10)}$$

的伯德图。

解 首先将$H(\omega)$的分子、分母分别除以极点与零点，得到其标准形式为：

$$H(\omega)=\frac{10\,\mathrm{j}\omega}{(1+\mathrm{j}\omega/2)(1+\mathrm{j}\omega/10)}$$

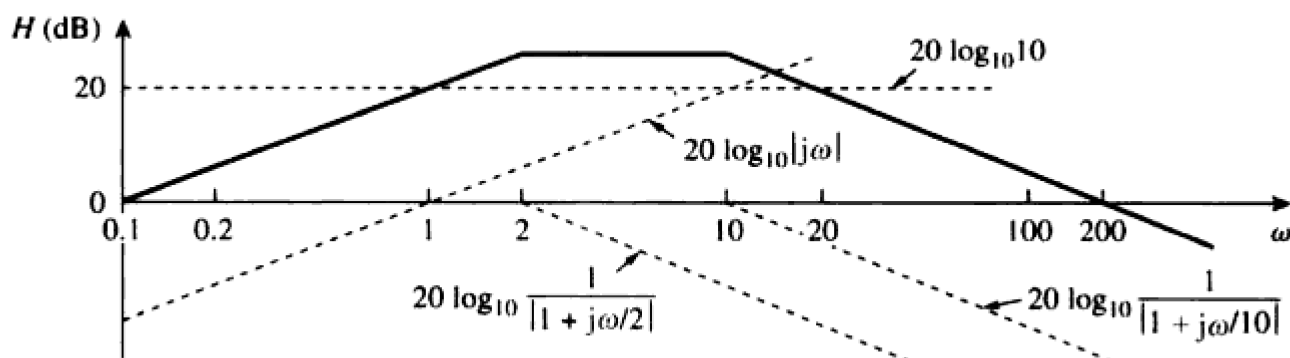
$$=\frac{10|\mathrm{j}\omega|}{|1+\mathrm{j}\omega/2||1+\mathrm{j}\omega/10|}\angle 90^\circ-\tan^{-1}\omega/2-\tan^{-1}\omega/10$$

于是，$H(\omega)$的幅度与相位分别为：

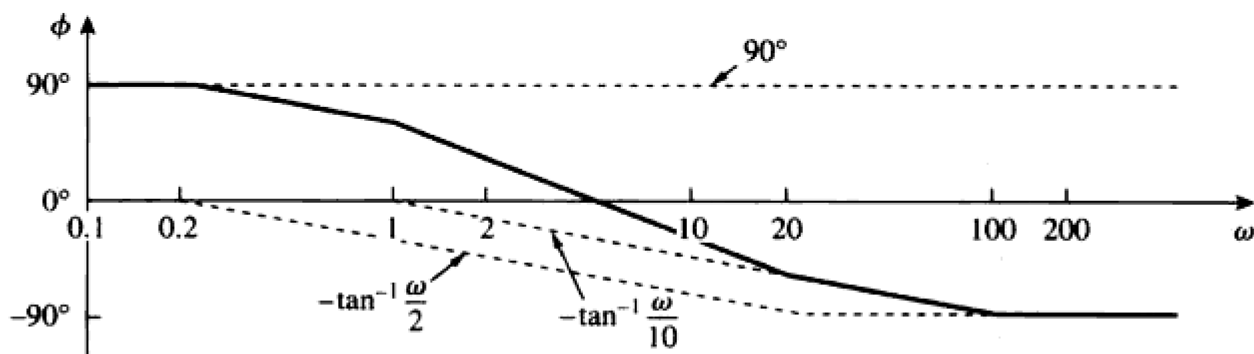
$$H_{\mathrm{dB}}=20\log_{10}10+20\log_{10}|\mathrm{j}\omega|-20\log_{10}\left|1+\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\right|-20\log_{10}\left|1+\frac{\mathrm{j}\omega}{10}\right|$$

$$\phi=90^\circ-\tan^{-1}\frac{\omega}{2}-\tan^{-1}\frac{\omega}{10}$$

由此可见，两个转折频率分别位于$\omega=2$、10处，画出其幅频特性与相频特性中每一项的伯德图如图14-13中虚线所示，之后进行相加合并，得到如图中实线所示总的伯德图。



(a) 幅频特性曲线



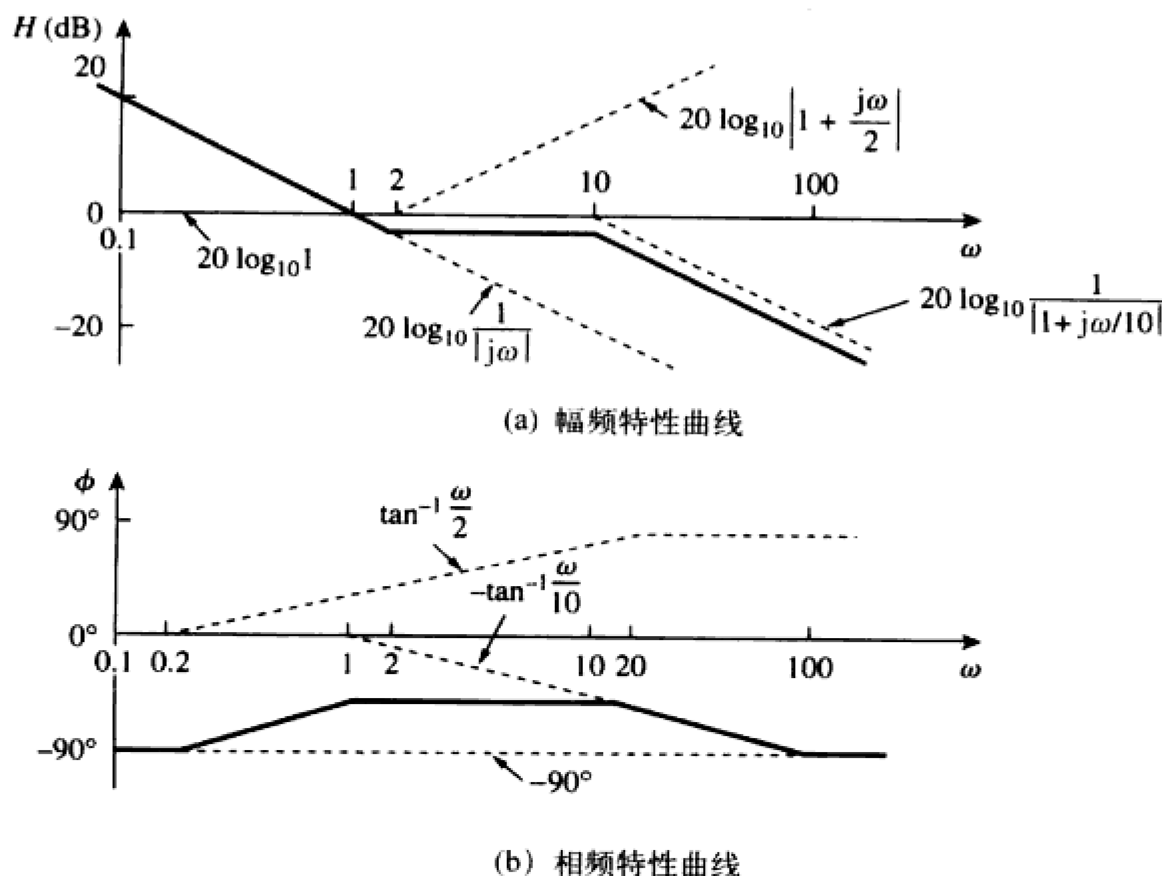
(b) 相频特性曲线

图 14-13 例题 14-3 的伯德图

练习题14-3 试画出如下传递函数的伯德图：

$$H(\omega)=\frac{5(\mathrm{j}\omega+2)}{\mathrm{j}\omega(\mathrm{j}\omega+10)}$$

答 参见图14-14。



(a) 幅频特性曲线

(b) 相频特性曲线

图 14-14 练习题 14-3 的伯德图

例题14-4 试画出如下传递函数的伯德图：

$$H(\omega)=\frac{j\omega+10}{j\omega(j\omega+5)^2}$$

解 将$H(\omega)$转化为标准形式，有：

$$H(\omega)=\frac{0.4(1+j\omega/10)}{j\omega(1+j\omega/5)^2}$$

由标准形式得到的幅度与相位分别为：

$$H_{dB}=20\log_{10}0.4+20\log_{10}\left|1+\frac{j\omega}{10}\right|-20\log_{10}|j\omega|$$
$$-40\log_{10}\left|1+\frac{j\omega}{5}\right|$$
$$\phi=0°+\tan^{-1}\frac{\omega}{10}-90°-2\tan^{-1}\frac{\omega}{5}$$

由此可见，两个转折频率分别位于$\omega=5$，10 rad/s处。对于转折频率$\omega=5$处的极点，由于是平方因子，所以其幅频特性曲线的斜率为 − 40dB/dec，相频特性曲线的斜率为 − 90°/dec。$H(\omega)$中各项的幅频特性曲线与相频特性曲线（如虚线所示）以及整个$H(\omega)$的伯德图（如实线所示）如图14-15所示。

练习题14-4 试画出如下传递函数的伯德图：

$$H(\omega)=\frac{50j\omega}{(j\omega+4)(j\omega+10)^2}$$

答 参见图14-16。

例题14-5 试画出如下传递函数的伯德图：

$$H(s)=\frac{s+1}{s^2+60s+100}$$

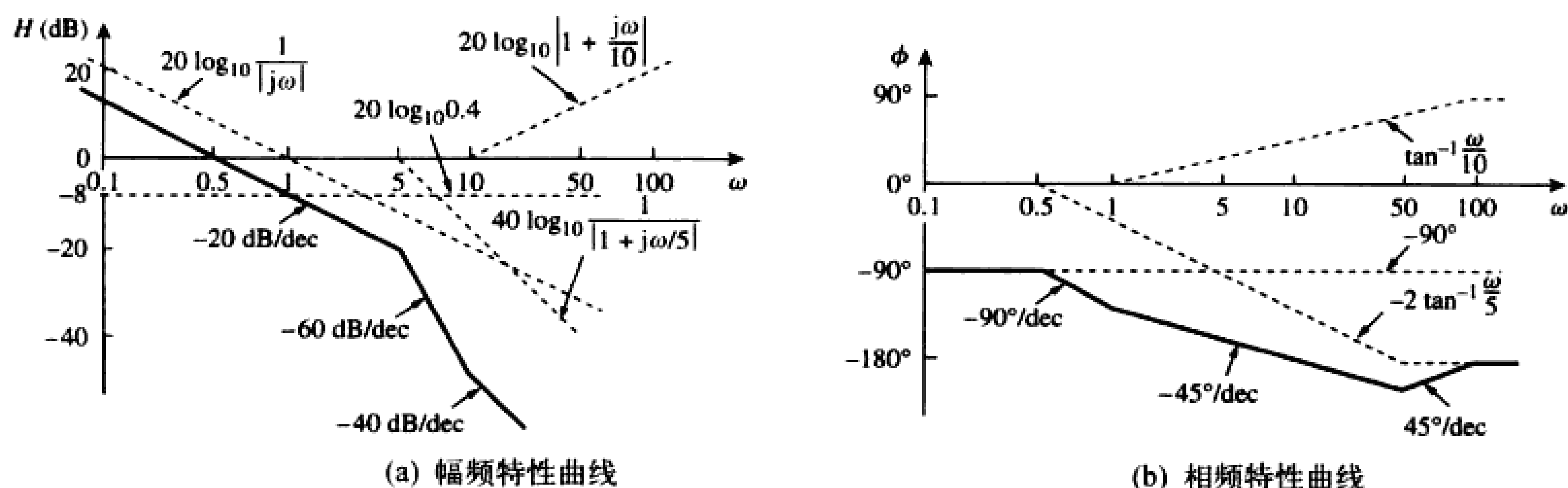


图 14-15 例题 14-4 的伯德图

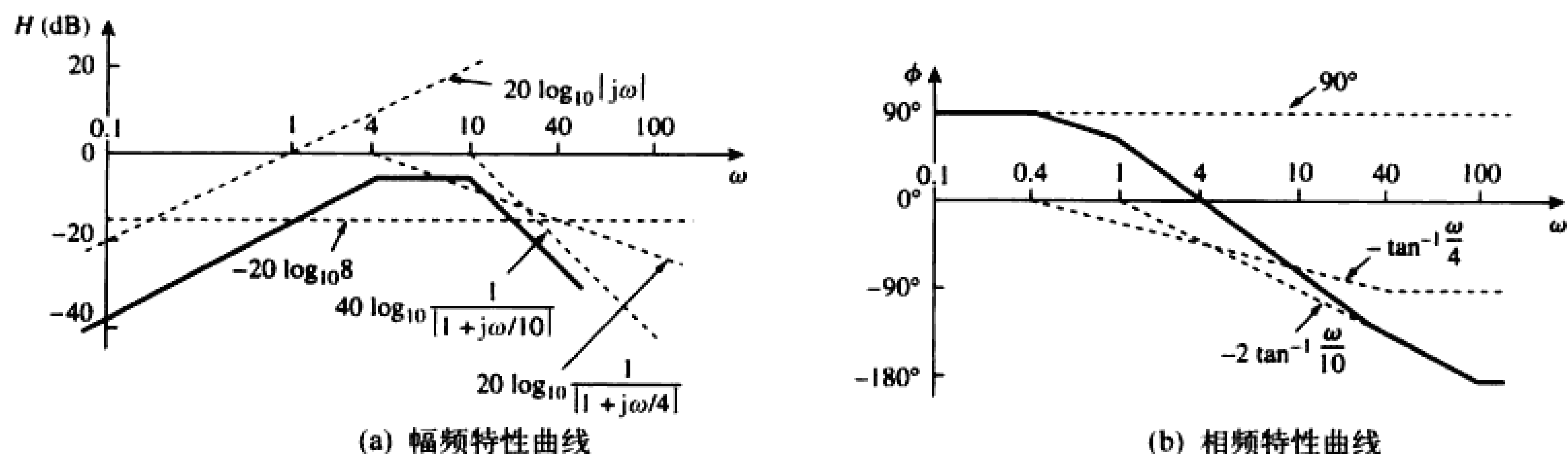


图 14-16 练习题 14-4 的伯德图

解 （1）**明确**问题。本例题所要解决的问题已明确，可以按照本章介绍的方法进行求解。

（2）**表述**对问题的理解。本题要求确定给定传递函数$\boldsymbol{H}(s)$的近似伯德图。

（3）确定**可选**解。求解本题最为有效的两种方法分别是：这里准备利用的本章介绍的近似方法，以及可以绘制精确伯德图的MATLAB。

（4）**尝试**问题的解。将$\boldsymbol{H}(s)$表达为标准形式：

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\frac{1/100(1+\mathrm{j}\omega)}{1+\mathrm{j}\omega6/10+(\mathrm{j}\omega/10)^2}$$

在转折频率$\omega_n=10$ rad/s处为传递函数的二阶极点。$\boldsymbol{H}(\omega)$的幅度与相位分别为：

$$H_{\mathrm{dB}}=-20\log_{10}100+20\log_{10}|1+\mathrm{j}\omega|$$

$$-20\log_{10}\left|1+\frac{\mathrm{j}\omega6}{10}-\frac{\omega^2}{100}\right|$$

$$\phi=0°+\tan^{-1}\omega-\tan^{-1}\left[\frac{\omega6/10}{1-\omega^2/100}\right]$$

$\boldsymbol{H}(\omega)$的伯德图如图14-17所示。注意二阶极点按重极点来处理，在$\omega=\omega_k$处为$(1+\mathrm{j}\omega/\omega_k)^2$，这是一种近似方法。

（5）**评价**得到的结果。虽然可以利用MATLAB验证所得到的结果，但这里采用更为直接的方法进行验证。首先，必须明确在近似方法中，分母假定$\zeta=0$，于是，可以利用如下方程验证答案：

$$\boldsymbol{H}(s)\simeq\frac{s+1}{s^2+10^2}$$

同时，需要求解H_{dB}及其相应的相位ϕ。首先，令$\omega=0$，则有：

$$H_{\mathrm{dB}}=20\log_{10}(1/100)=-40,\qquad \phi=0°$$

令$\omega=1$，则有：

$$H_{dB}=20\log_{10}(1.414\,2/99)=-36.9\ \text{dB}$$

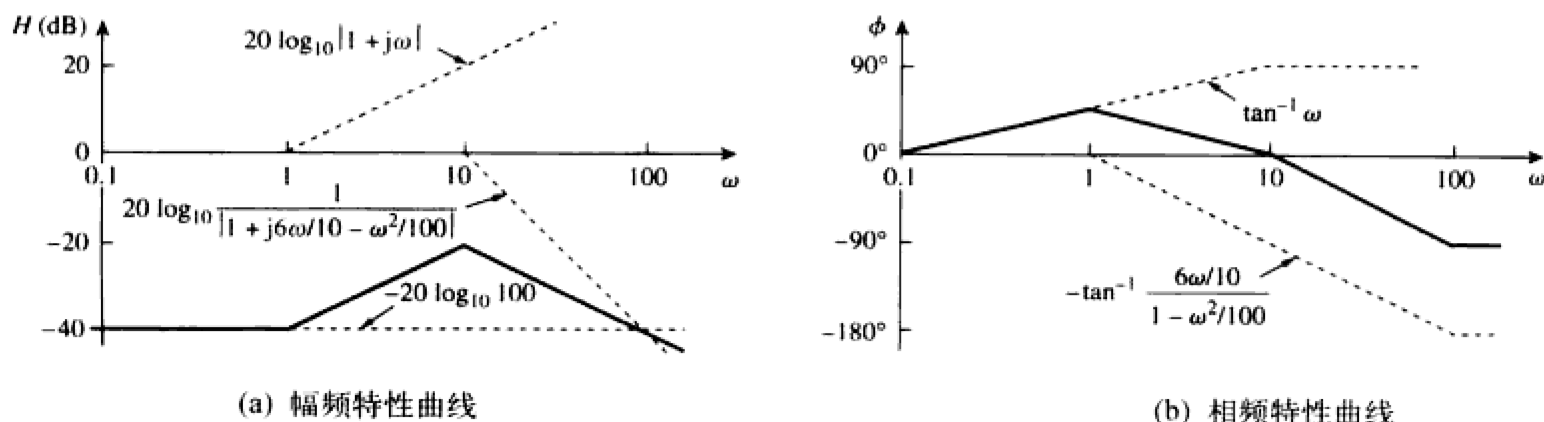
比转折频率处高3dB。

$$\text{由 } \boldsymbol{H}(\mathrm{j})=\frac{\mathrm{j}+1}{-1+100} \text{ 可得 } \phi=45°$$

当$\omega=100$时，

$$H_{dB}=20\log_{10}(100)-20\log_{10}(9\,900)=39.91\ \text{dB}$$

由分子减180°为$-90°$可得$\phi=90°$。至此，已经验证了三个不同的频率点，得到一致的结果，由于是一种近似，所以对上述求解过程是有信心的。



(a) 幅频特性曲线　　(b) 相频特性曲线

图 14-17　例题 14-5 的伯德图

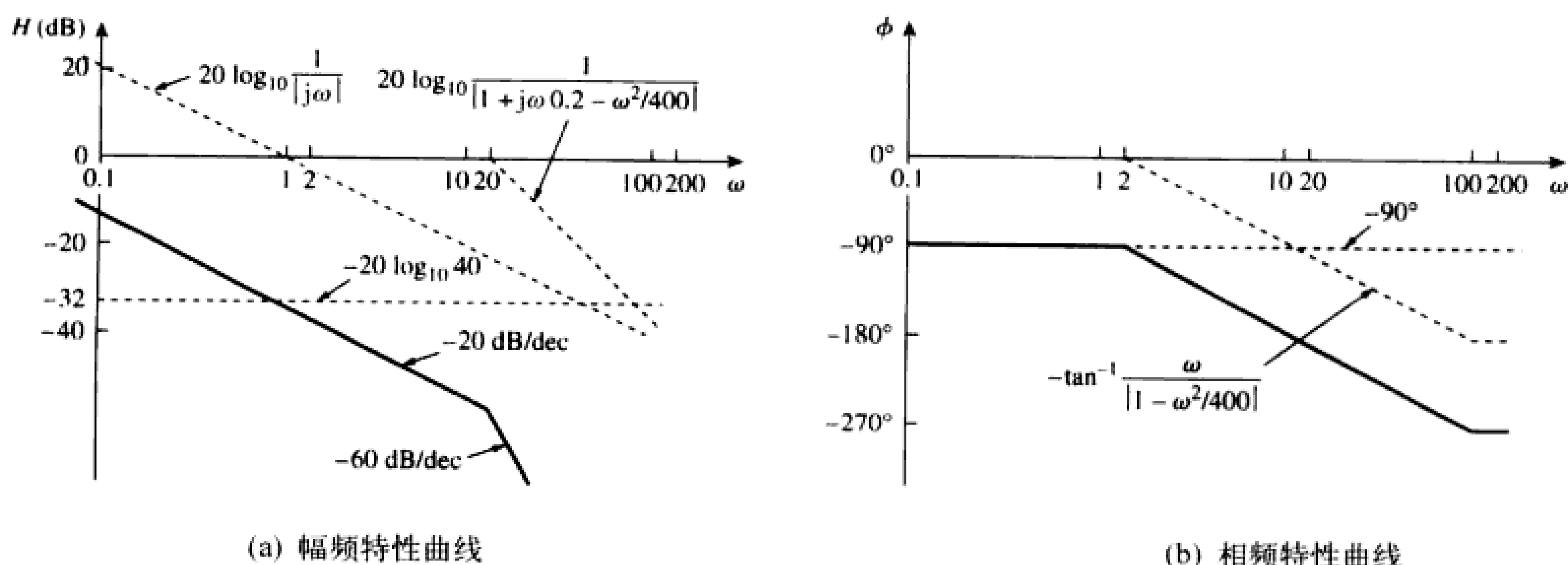
读者自然会问到，为什么不在$\omega=10$处进行验证呢？如果仅利用以上近似值，则会得到一个无穷大的值，这是由$\zeta=0$可以估计到的（参见图14-12a）。由于$\zeta=6$，如果利用$\boldsymbol{H}(\mathrm{j}10)$的实际值，仍然会得到与近似值偏离很大的值，并且图14-12a也给出了与近似值的偏离。当$\zeta=0.707$时重做本题，就可以得到与近似值更接近的结果。但是，目前的点已经足够，无需再做这样的计算。

（6）对结果是否满意？本题的求解过程令人满意，可以将其作为本题的答案。

练习题14-5　试画出如下传递函数的伯德图：

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{10}{s(s^2+80s+400)}$$

答　参见图14-18。



(a) 幅频特性曲线　　(b) 相频特性曲线

图 14-18　练习题 14-5 的伯德图

例题14-6　已知伯德图如图14-19所示，试确定传递函数$\boldsymbol{H}(\omega)$。

解 由伯德图确定$\boldsymbol{H}(\omega)$时，必须记住零点总是在转折频率处引起向上的转折，而极点总是在转折频率处引起向下的转折。由图14-19可见，斜率为 + 20 dB/dec的直线表明在原点处有一个零点jω，与频率轴的交点为$\omega = 1$，该直线平移40dB表明增益为40 dB，也就是说：

$$40 = 20\log_{10} K \quad \Rightarrow \quad \log_{10} K = 2$$

即：

$$K = 10^2 = 100$$

除了原点处的零点jω之外，从图可见，还有三个转折频率分别为$\omega = 1$、5和20 rad/s的因子，因此有：

(1) 在$p = 1$处的极点，其斜率为 − 20 dB/dec，该极点使曲线向下折转并与原点处的零点相互抵消。$p = 1$处的极点由因子$1/(1 + j\omega/1)$所确定。

(2) 在$p = 5$处的另一个极点，其斜率为 − 20 dB/dec，使曲线向下转折，该极点由因子$1/(1 + j\omega/5)$所确定。

(3) 第三个极点在$p = 20$处，其斜率为 − 20dB/dec，使曲线进一步向下转折，该极点由因子$1/(1 + j\omega/20)$确定。

将以上各式合并，即可得到相应的传递函数为：

$$\boldsymbol{H}(\omega) = \frac{100j\omega}{(1 + j\omega/1)(1 + j\omega/5)(1 + j\omega/20)} = \frac{j\omega 10^4}{(j\omega + 1)(j\omega + 5)(j\omega + 20)}$$

即：

$$\boldsymbol{H}(s) = \frac{10^4 s}{(s+1)(s+5)(s+20)}, \qquad s = j\omega$$

练习题14-6 试确定与如图14-20所示伯德图相对应的传递函数$\boldsymbol{H}(\omega)$。

答

$$\boldsymbol{H}(\omega) = \frac{200(s + 0.5)}{(s+1)(s+10)^2}$$

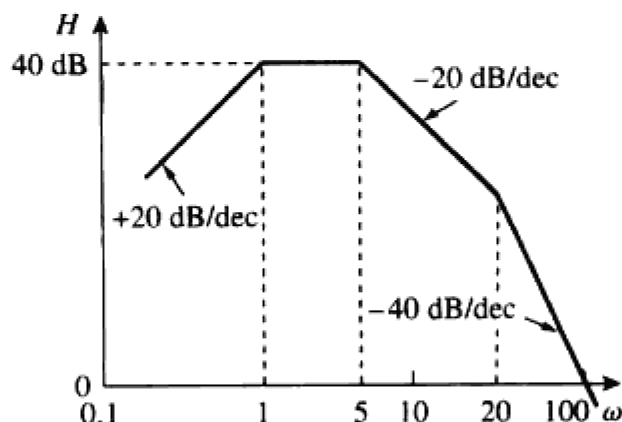


图 14-19 例题 14-6 的伯德图

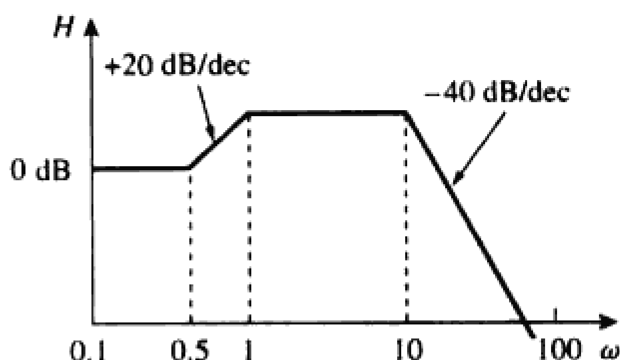


图 14-20 练习题 14-6 的伯德图

14.5 串联谐振电路

电路频率响应的最为显著的特征是其幅度特性中所呈现的尖峰点［即谐振峰（resonant peak）］。谐振的概念应用于科学与工程的诸多领域之中。任何包含复共轭极点对的系统都会出现谐振，这是存储能量从一种形式转换为另一种形式的振荡产生的根源。这种现象在通信网络中可以用于进行频率识别。在至少包含一个电容器与一个电感器的任何电路中，均有可能出现谐振现象。

谐振是RLC电路中容性电抗与感性电抗大小相等时呈现的一种状态，此时该电路呈现出纯电阻的阻抗性质。

谐振电路（串联或并联）对于传递函数具有高度频率选择性的滤波器设计是非常有用的，在诸如无线电收音机与电视机的选频电路等许多应用中都会用到谐振电路。

考虑如图14-21所示的频域RLC串联电路，其输入阻抗为：

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{H}(\omega)=\frac{\boldsymbol{V}_s}{\boldsymbol{I}}=R+\mathrm{j}\omega L+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \tag{14-22}$$

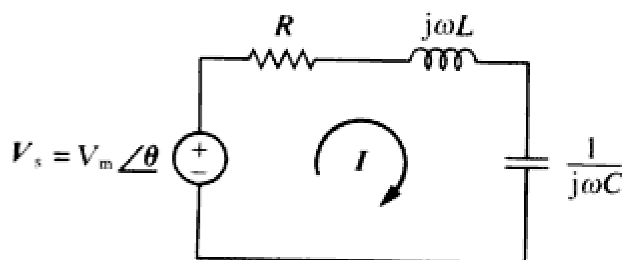


图 14-21　串联谐振电路

即：

$$\boldsymbol{Z}=R+\mathrm{j}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right) \tag{14-23}$$

当传递函数的虚部为零时，就会产生谐振，即：

$$\mathrm{Im}(\boldsymbol{Z})=\omega L-\frac{1}{\omega C}=0 \tag{14-24}$$

满足上述条件的ω值称为*谐振频率*（resonant frequency）ω_0，因此谐振的条件为：

$$\omega_0 L=\frac{1}{\omega_0 C} \tag{14-25}$$

即

$$\boxed{\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}\,\mathrm{rad/s}} \tag{14-26}$$

又由于$\omega_0=2\pi f_0$，所以：

$$f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\,\mathrm{Hz} \tag{14-27}$$

注意，在谐振条件下，有：

(1) 阻抗为纯电阻，即$\boldsymbol{Z}=R$。换言之，LC串联组合相当于短路，整个电压都加在电阻R两端。

(2) 电压$\boldsymbol{V}_s$与电流$\boldsymbol{I}$是同相的，因此功率因数为1。

(3) 传递函数的幅度$\boldsymbol{H}(\omega)=\boldsymbol{Z}(\omega)$最小。

(4) 电感器两端的电压与电容器两端的电压比电源电压高得多。

注意：第4点可由如下关系证实：

$$|\boldsymbol{V}_L|=\frac{V_m}{R}\omega_0 L=QV_m$$

$$|\boldsymbol{V}_C|=\frac{V_m}{R}\frac{1}{\omega_0 C}=QV_m$$

其中，Q为由式(14-38)定义的品质因数。

RLC电路电流幅度的频率响应为：

$$I=|\boldsymbol{I}|=\frac{V_m}{\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}} \tag{14-28}$$

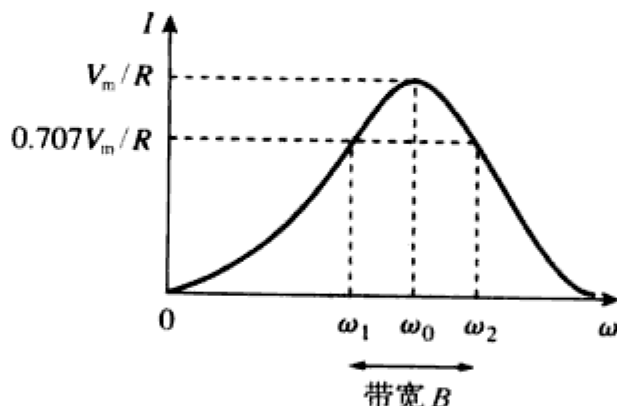


图 14-22　图 14-21 所示串联谐振电路的电流幅度与频率之间的关系曲线

如图14-22所示，当频率轴为对数坐标时，该图仅说明对称特性。RLC电路消耗的平均功率为：

$$P(\omega)=\frac{1}{2}I^2R \tag{14-29}$$

当$I=V_m/R$，即谐振时，电路消耗的功率最大，因此：

$$P(\omega_0)=\frac{1}{2}\frac{V_m^2}{R} \tag{14-30}$$

在某些频率$\omega=\omega_1$、ω_2处，电路消耗的功率为上述最大功率的一半，即：

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\frac{(V_m/\sqrt{2})^2}{2R}=\frac{V_m^2}{4R} \tag{14-31}$$

因此，ω_1、ω_2称为*半功率频率*（half-power frequency）。

半功率频率可以通过设置$Z=\sqrt{2}R$得到，即：

$$\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}=\sqrt{2}R \tag{14-32}$$

求解ω得到：

$$\boxed{\begin{aligned}\omega_1&=-\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}}\\ \omega_2&=\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}}\end{aligned}} \tag{14-33}$$

由式(14-26)与式(14-33)，可以得到半功率频率与谐振频率之间的关系为：

$$\omega_0=\sqrt{\omega_1\omega_2} \tag{14-34}$$

即谐振频率为半功率频率的几何平均值。注意，由于频率响应一般是不对称的，所以ω_1、ω_2通常也不是关于谐振频率ω_0对称的。但是，稍后会说明，半功率频率关于谐振频率的对称性通常是一个比较合理的近似。

虽然如图14-22所示谐振曲线的峰值取决于电阻R，但是该曲线的宽度取决于其他因素。即响应曲线的宽度取决于带宽B，带宽定义为两个半功率频率之差：

$$B=\omega_2-\omega_1 \tag{14-35}$$

带宽的这种定义只是几种常用定义之一。严格地讲，式(14-35)所定义的带宽称为半功率带宽，因为它是半功率频率之间的谐振曲线的频带宽度。

谐振电路中谐振曲线的“锐度”在数量上用*品质因数*（quality factor）Q来度量。电路谐振时，电路中的电抗能量在电感器与电容器之间来回振荡。品质因数建立了谐振时电路储存的最大能量即峰值能量与电路在一个振荡周期所消耗的能量之间的关系：

$$Q=2\pi\frac{\text{电路存储的峰值能量}}{\text{谐振时电路在一个周期所消耗的能量}} \tag{14-36}$$

虽然符号Q与表示无功功率的符号相同，但两者并不相等，不应将它们相互混淆。这里的品质因数Q是无量纲的，而无功功率Q的单位是VAR，通过单位可能会便于两者的区分。

品质因数也是电路的储能属性及其耗能属性之间关系的一个度量。在RLC串联电路中，储能的峰值为$\frac{1}{2}LI^2$，一个周期的耗能为$\frac{1}{2}(I^2R)(1/f_0)$，因此：

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2}LI^2}{\frac{1}{2}I^2R(1/f_0)} = \frac{2\pi f_0 L}{R} \tag{14-37}$$

即：

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} \tag{14-38}$$

注意，品质因数是无量纲的，将式(14-33)代入式(14-35)，并利用式(14-38)的关系即可确定带宽B与品质因数Q之间的关系：

$$B = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \tag{14-39}$$

即$B = \omega_0^2 CR$。因此，

谐振电路的品质因数是其谐振频率与带宽之比。

应该记住的是，式(14-26)、式(14-33)、式(14-38)以及式(14-39)仅适用于RLC串联电路。

如图14-23所示，Q值越高，电路的频率选择性越好，但其带宽也越窄。RLC电路的选择性（selectivity）是指电路对某个频率响应以及辨别其他频率的一种能力。如果被选择或者被拒绝的频带很窄，则要求谐振电路的品质因数必须很高，反之如果频带较宽，则品质因数应相应地降低。

品质因数是电路选择性（即谐振“锐度”）的一种度量。

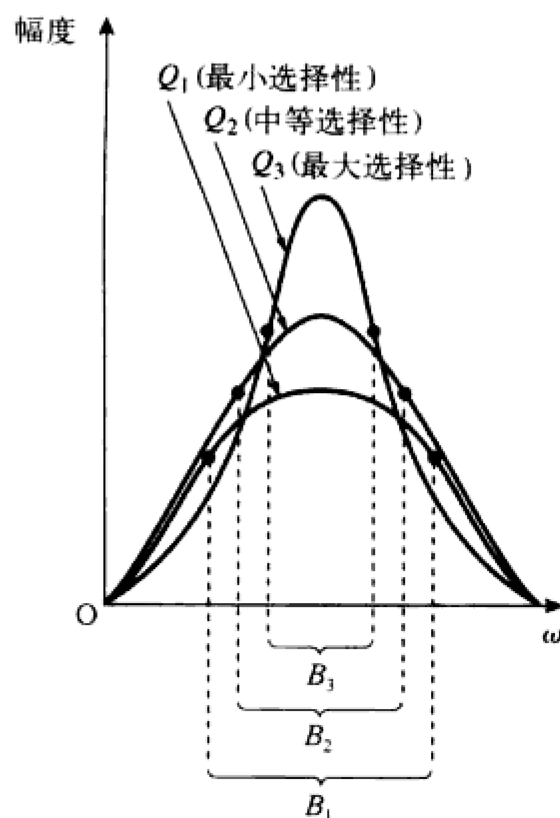


图 14-23 电路的 Q 值越高，其带宽越窄

所设计的谐振电路通常应工作在其谐振频率或其邻近频率处。当电路的品质因数大于或等于10时，称之为高Q值电路（high-Q circuit）。在高Q值电路（$Q \geqslant 10$）的所有实际应用中，其半功率频率均关于谐振频率对称，而且可以近似地表示为：

$$\omega_1 \simeq \omega_0 - \frac{B}{2}, \qquad \omega_2 \simeq \omega_0 + \frac{B}{2} \tag{14-40}$$

高Q值电路通常用在通信网络中。

由此可见，谐振电路可以用如下五个相关参数来表征：两个半功率频率ω_1与ω_2、谐振频率ω_0、带宽B以及品质因数Q。

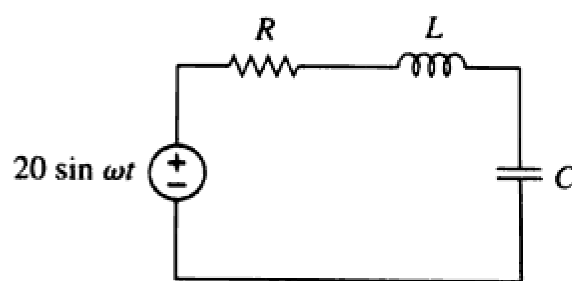


图 14-24 例题 14-7 的电路原理图

例题14-7 在如图14-24所示电路中，$R = 2\ \Omega$，$L = 1\ \text{mH}$，$C = 0.4\ \mu\text{F}$。(a) 试求谐振频率与半功率频率；(b) 试计算品质因数与带宽；(c) 试确定在ω_0、ω_1与ω_2处的电流幅度。

解 (a) 谐振频率为：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-3} \times 0.4 \times 10^{-6}}} = 50\ \text{krad/s}$$

方法1：小于谐振频率的半功率频率为：

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \\ &= -\frac{2}{2 \times 10^{-3}} + \sqrt{(10^3)^2 + (50 \times 10^3)^2} \\ &= -1 + \sqrt{1 + 2\,500}\ \text{krad/s} = 49\ \text{krad/s}\end{aligned}$$

同理，大于谐振频率的半功率频率为：

$$\omega_2 = 1 + \sqrt{1 + 2\,500}\ \text{krad/s} = 51\ \text{krad/s}$$

（b）带宽为：

$$B = \omega_2 - \omega_1 = 2\ \text{krad/s}$$

即：

$$B = \frac{R}{L} = \frac{2}{10^{-3}} = 2\ \text{krad/s}$$

品质因数为：

$$Q = \frac{\omega_0}{B} = \frac{50}{2} = 25$$

方法2：求解品质因数的另一种方法为

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{50 \times 10^3 \times 10^{-3}}{2} = 25$$

由Q值可以求得带宽B为：

$$B = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{50 \times 10^3}{25} = 2\ \text{krad/s}$$

由于$Q > 10$，因此该电路为高Q值电路，其半功率频率为：

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{B}{2} = 50 - 1 = 49\ \text{krad/s}$$

$$\omega_2 = \omega_0 + \frac{B}{2} = 50 + 1 = 51\ \text{krad/s}$$

与前面一种方法求得的结果相同。

（c）当$\omega = \omega_0$时，

$$I = \frac{V_m}{R} = \frac{20}{2} = 10\ \text{A}$$

当$\omega = \omega_1$、ω_2，时，

$$I = \frac{V_m}{\sqrt{2}R} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7.071\ \text{A}$$

练习题14-7 某串联电路中，$R = 4\ \Omega$，$L = 25\ \text{mH}$。（a）试计算要得到品质因数$Q = 50$时的电容器C值；（b）试求ω_1、ω_2与B；（c）试确定$\omega = \omega_0$、ω_1、ω_2时电路消耗的平均功率，假定$V_m = 100\ \text{V}$。

答 （a）0.625 μF；（b）7 920 rad/s，8 080 rad/s，160 rad/s；（c）1.25 kW，0.625 kW，0.625 kW。

14.6 并联谐振电路

如图 14-25 所示的并联谐振电路是 RLC 串联谐振电路的对偶电路。避免不必要的重复，由对偶性质可以直接得到导纳为：

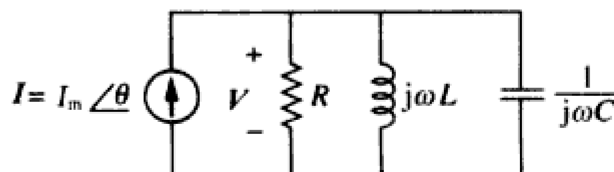


图 14-25 并联谐振电路

$$Y = H(\omega) = \frac{I}{V} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \tag{14-41}$$

即：

$$Y = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \tag{14-42}$$

当Y的虚部为零时，产生谐振：

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0 \tag{14-43}$$

即：

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{rad/s}} \tag{14-44}$$

上式与串联谐振电路的式(14-26)是相同的。并联谐振电路的电压$|\boldsymbol{V}|$与频率之间的关系如图14-26所示。由此可见，在谐振频率处，LC并联组合相当于开路，电流全部流经R。并且在谐振时，流经电感器与电容器的电流比电源电流大得多。

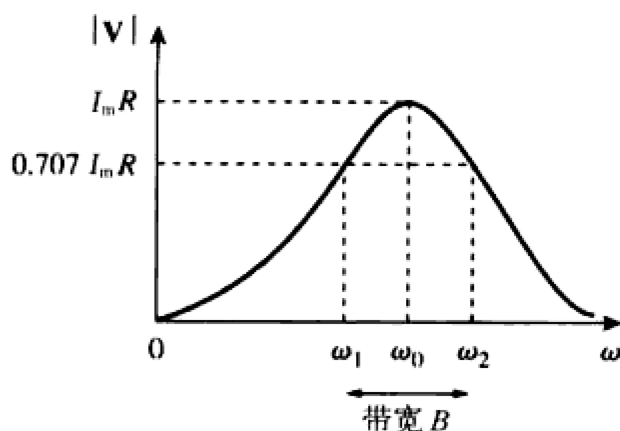


图 14-26　图 14-25 所示并联谐振电路的电压幅度与频率的关系曲线

由

$$|\boldsymbol{I}_L| = \frac{I_m R}{\omega_0 L} = QI_m$$

$$|\boldsymbol{I}_C| = \omega_0 C I_m R = QI_m$$

可以看出，流经电感器与电容器的电流比电源电流大得多。式中Q为由式(14-47)定义的品质因数。

比较式(14-42)与式(14-23)，就可以利用图14-21与图14-25之间的对偶性质，将串联谐振电路表达式中的R、L、C分别利用$1/R$、$1/C$、$1/L$取代，即可得到并联谐振电路的如下表达式：

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \\ \omega_2 &= \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \end{aligned}} \tag{14-45}$$

$$\boxed{B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{RC}} \tag{14-46}$$

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{B} = \omega_0 RC = \frac{R}{\omega_0 L}} \tag{14-47}$$

应该注意，式(14-45)～式(14-47)仅适用于RLC并联谐振电路。利用式(14-45)与式(14-47)可以得到半功率频率与品质因数之间的关系，即：

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} - \frac{\omega_0}{2Q}, \quad \omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} + \frac{\omega_0}{2Q} \tag{14-48}$$

同理，对于高Q值电路（$Q \geqslant 10$）有：

$$\boxed{\omega_1 \simeq \omega_0 - \frac{B}{2}, \qquad \omega_2 \simeq \omega_0 + \frac{B}{2}} \tag{14-49}$$

表14-4总结了串联谐振电路与并联谐振电路的主要特性。除了本章讨论的RLC串联与并联电路外，还存在其他形式的谐振电路，例题14-9就是一个典型的例子。

表 14-4 RLC 谐振电路特性总结

特　性	串 联 电 路	并 联 电 路
谐振频率 ω_0	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$
品质因数 Q	$\frac{\omega_0 L}{R}$ 或 $\frac{1}{\omega_0 RC}$	$\frac{R}{\omega_0 L}$ 或 $\omega_0 RC$
频带宽度 B	$\frac{\omega_0}{Q}$	$\frac{\omega_0}{Q}$
半功率频率 ω_1、ω_2	$\omega_0\sqrt{1+\left(\frac{1}{2Q}\right)^2}\pm\frac{\omega_0}{2Q}$	$\omega_0\sqrt{1+\left(\frac{1}{2Q}\right)^2}\pm\frac{\omega_0}{2Q}$
$Q\geqslant 10$ 时的 ω_1、ω_2	$\omega_0\pm\frac{B}{2}$	$\omega_0\pm\frac{B}{2}$

例题14-8　在如图14-27所示的RLC并联电路中，设$R=8\ \text{k}\Omega$，$L=0.2\ \text{mH}$，$C=8\ \mu\text{F}$。(a) 试计算ω_0、Q与B；(b) 试求ω_1与ω_2；(c) 试确定ω_0、ω_1与ω_2各处所消耗的功率。

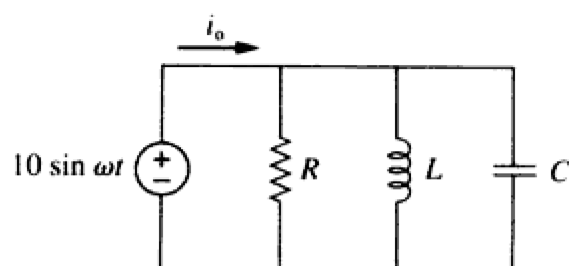


图 14-27　例题 14-8 的电路原理图

解　(a) $$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\frac{1}{\sqrt{0.2\times10^{-3}\times8\times10^{-6}}}=\frac{10^5}{4}=25\text{krad/s}$$

$$Q=\frac{R}{\omega_0 L}=\frac{8\times10^3}{25\times10^3\times0.2\times10^{-3}}=1\,600$$

$$B=\frac{\omega_0}{Q}=15.625\text{rad/s}$$

(b) 由于Q值很高（$Q>10$），可以看作是高Q值电路，于是：

$$\omega_1=\omega_0-\frac{B}{2}=25\,000-7.812=24\,992\text{rad/s}$$

$$\omega_2=\omega_0+\frac{B}{2}=25\,000+7.812=25\,008\text{rad/s}$$

(c) 当$\omega=\omega_0$时，$\boldsymbol{Y}=1/R$，即$\boldsymbol{Z}=R=8\ \text{k}\Omega$，因此：

$$\boldsymbol{I}_o=\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{Z}}=\frac{10\angle-90^\circ}{8\,000}=1.25\angle-90^\circ\text{mA}$$

因为在谐振时，全部电流都流经R，所以当$\omega=\omega_0$时消耗的平均功率为：

$$P=\frac{1}{2}|\boldsymbol{I}_o|^2R=\frac{1}{2}(1.25\times10^{-3})^2(8\times10^3)=6.25\text{mW}$$

即：

$$P=\frac{V_m^2}{2R}=\frac{100}{2\times8\times10^3}=6.25\text{mW}$$

当$\omega=\omega_1$、ω_2时：

$$P=\frac{V_m^2}{4R}=3.125\text{mW}$$

练习题14-8　某并联谐振电路中，$R=100\ \text{k}\Omega$，$L=20\ \text{mH}$和$C=5\ \text{nF}$，试计算ω_0，ω_1，ω_2，Q以及B。

答　100 krad/s、99 krad/s、101 krad/s、50、2 krad/s。

例题14-9　试确定如图14-28所示电路的谐振频率。

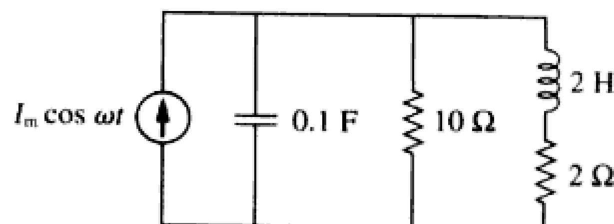


图14-28　例题14-9的电路原理图

解 该电路的输入导纳为：

$$Y = j\omega 0.1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{2 + j\omega 2} = 0.1 + j\omega 0.1 + \frac{2 - j\omega 2}{4 + 4\omega^2}$$

谐振时，$\mathrm{Im}(Y) = 0$，即：

$$\omega_0 0.1 - \frac{2\omega_0}{4 + 4\omega_0^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = 2\mathrm{rad/s}$$

练习题14-9 试计算如图14-29所示电路的谐振频率。

答 2.179 rad/s。

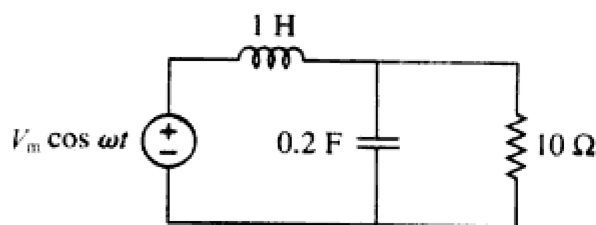


图14-29 练习题14-9的电路原理图

14.7 无源滤波器

滤波器的概念从一开始就是电子工程发展中一个不可或缺的组成部分，没有电子滤波器，某些技术成果的实现将是不可能的。鉴于滤波器的突出作用，许多学者和工程技术人员在其理论、设计与制造等问题上付出了大量的努力，发表并出版了很多关于滤波器的论文和专著。本章对滤波器的讨论只是一个简要介绍。

滤波器是一个使期望频率的信号通过、同时阻止或衰减其他频率的信号的电路。

滤波器作为一种频率选择装置，可以用来将信号的频谱限制在某个特定的频带宽度范围内。在无线电接收机与电视机中，可以利用滤波器从空间大量的广播信号中选出所需的信号频道。

如果滤波器电路仅由无源元件R、L、C组成，则称之为无源滤波器（passive filter）；如果构成滤波器的元件除无源元件R、L、C外，还包括有源器件（例如晶体管、运算放大器等），则称之为有源滤波器（active filter）。本节先讨论无源滤波器，下一节再讨论有源滤波器。在实际应用中，LC滤波器的级联已经超过八阶，在均衡器、阻抗匹配网络、变压器、成型网络、功率分配器、衰减器以及方向耦合器等电路中普遍应用LC滤波器技术，为工程技术人员不断创新提供了大量的机会。除这几节要学习的LC滤波器外，还有一些其他类型的滤波器，如数字滤波器、机电滤波器，微波滤波器等，均已超出本书的讨论范围，不再论及。

无论是无源滤波器还是有源滤波器，都有如图14-30所示的四种形式。

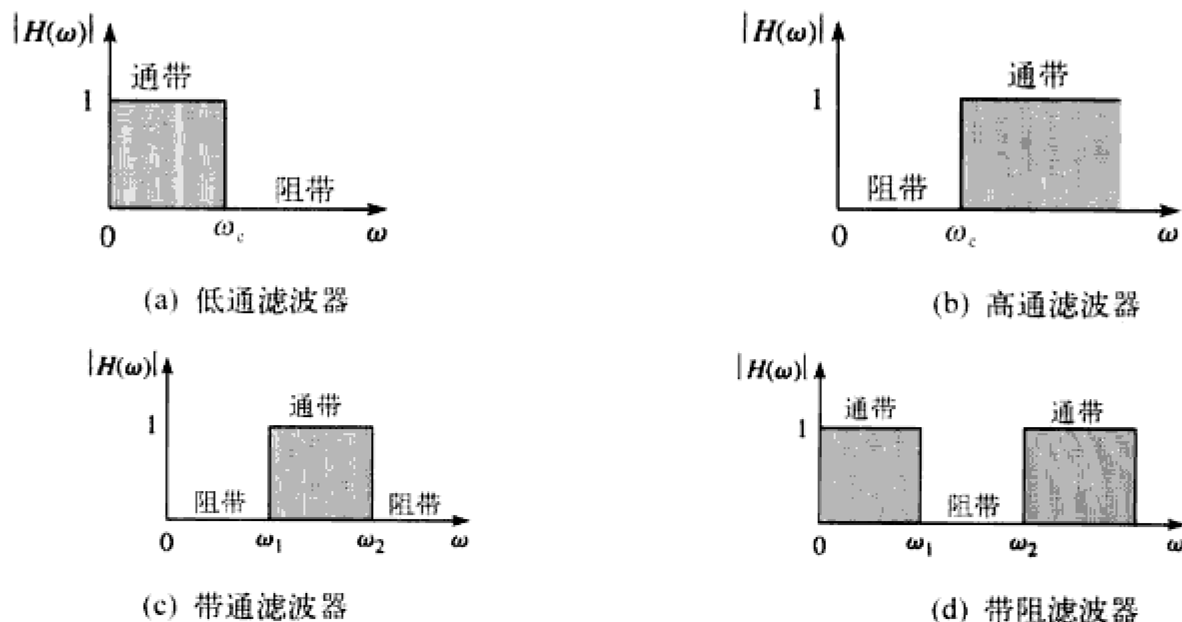


图 14-30 四类滤波器的理想频率响应

（1）低通滤波器（lowpass filter）：允许低频通过，阻止高频通过，其理想频率相应如图14-30a所示。

（2）高通滤波器（highpass filter）：允许高频通过，阻止低频通过，其理想频率相应如图14-30b

所示。

（3）带通滤波器（bandpass filter）：允许某个频带范围内的频率通过，阻止或衰减该频带之外的频率，其理想频率相应如图14-30c所示。

（4）带阻滤波器（bandstop filter）：允许某个频带范围外的频率通过，阻止或衰减该频带内的频率，其理想频率相应如图14-30d所示。

表14-5总结了以上四类滤波器的特性，该表中所列的特性仅适用于一阶或二阶滤波器电路，应该知道滤波器的种类不止表中所列的几种。下面讨论实现表14-5中所列各种滤波器的典型电路。

表 14-5　各类滤波器特性的总结

滤波器类别	$H(0)$	$H(\infty)$	$H(\omega_c)$或$H(\omega_0)$
低通	1	0	$1/\sqrt{2}$
高通	0	1	$1/\sqrt{2}$
带通	0	0	1
带阻	1	1	0

注：ω_c为高通滤波器与低通滤波器的截止频率，ω_0为带通滤波器与带阻滤波器的中心频率。

14.7.1 低通滤波器

当RC电路的输出取自电容器两端的电压时，就构成一个典型的低通滤波器，如图14-31所示。该电路的传递函数为（也可参见例题14-1）：

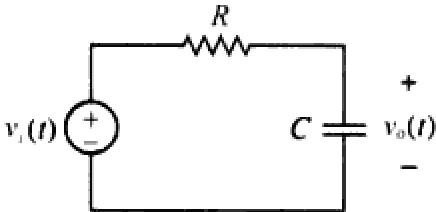


图14-31　低通滤波器

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\frac{\boldsymbol{V}_o}{\boldsymbol{V}_i}=\frac{1/\mathrm{j}\omega C}{R+1/\mathrm{j}\omega C}$$

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC} \tag{14-50}$$

由此可见，$\boldsymbol{H}(0)=1$，$\boldsymbol{H}(\infty)=0$。图14-32所示为$|\boldsymbol{H}(\omega)|$的频率特性曲线以及理想的频率特性曲线，图中的半功率频率相当于伯德图中的转折频率，但在滤波器中通常称为**截止频率**（cutoff frequency）ω_c，令$\boldsymbol{H}(\omega)$的模等于$1/\sqrt{2}$即可得到截止频率：

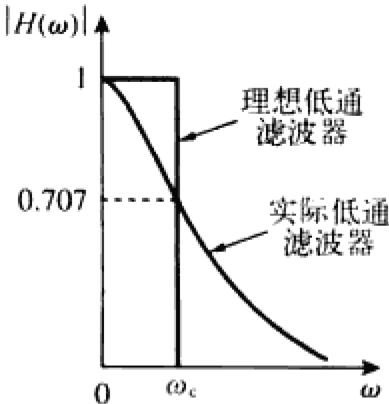


图 14-32　低通滤波器的理想频率响应与实际频率响应

$$\boldsymbol{H}(\omega_c)=\frac{1}{\sqrt{1+\omega_c^2R^2C^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

即

$$\omega_c=\frac{1}{RC} \tag{14-51}$$

截止频率也可以称为**滚降频率**（rolloff frequency）。

低通滤波器是只允许从直流到截止频率ω_c的频率信号通过的滤波器。

截止频率是传递函数H的模降至最大值的70.71%时所对应的频率，也可以认为是电路消耗的功率为其最大值的一半时所对应的频率。

当RL电路的输出取自电阻器两端的电压时，也可以构成低通滤波器。当然，低通滤波器还存在其他多种电路形式。

14.7.2 高通滤波器

当RC电路的输出取自电阻器两端的电压时，就构成了高通滤波器，如图14-33所示。其传递函

数为：

$$H(\omega)=\frac{V_o}{V_i}=\frac{R}{R+1/j\omega C}$$

$$H(\omega)=\frac{j\omega RC}{1+j\omega RC} \tag{14-52}$$

由此可见，$H(0)=0$，$H(\infty)=1$。图14-34所示为$|H(\omega)|$的频率特性曲线，其转折频率或截止频率为：

$$\omega_c=\frac{1}{RC} \tag{14-53}$$

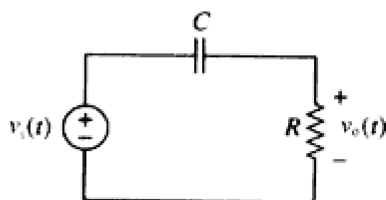


图 14-33 高通滤波器

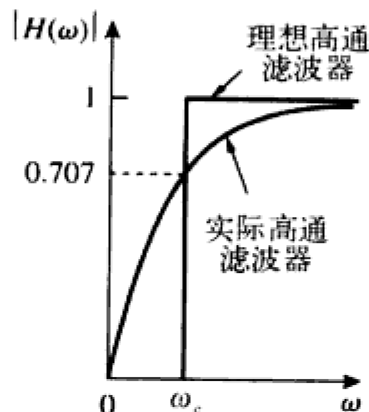


图 14-34 高通滤波器的理想频率响应与实际频率响应

高通滤波器是指使高于其截止频率ω_c的频率信号通过的滤波器。

当RL电路的输出取自电感器两端时，也可以构成一个高通滤波器。

14.7.3 带通滤波器

如果以RLC串联谐振电路中电阻器两端的电压作为输出，就构成一个带通滤波器，如图14-35所示，其传递函数为：

$$H(\omega)=\frac{V_o}{V_i}=\frac{R}{R+j(\omega L-1/\omega C)} \tag{14-54}$$

由此可见，$H(0)=0$，$H(\infty)=0$，图14-36所示为$|H(\omega)|$的幅频特性曲线。带通滤波器使得以ω_0为中心的一个频带（$\omega_1<\omega<\omega_2$）内的信号通过，其中心频率由下式确定：

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{14-55}$$

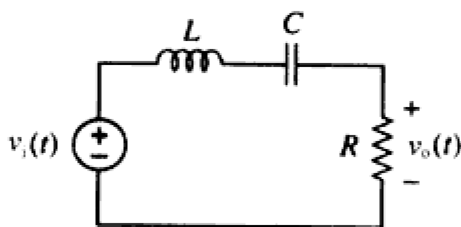


图 14-35 带通滤波器

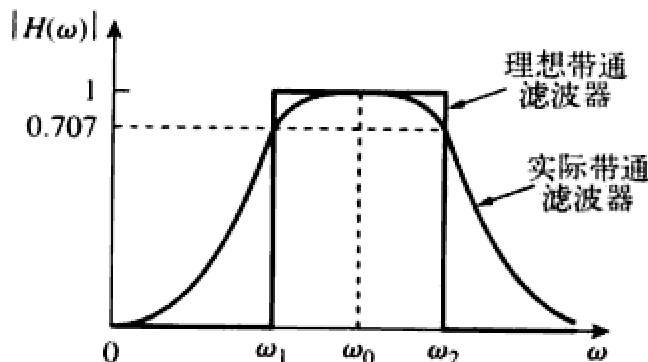


图 14-36 带通滤波器的理想频率响应与实际频率响应

带通滤波器是允许频带（$\omega_1<\omega<\omega_2$）内所有频率通过的滤波器。

由于如图14-35所示的带通滤波是一个串联谐振电路，所以该滤波器的半功率频率、带宽以及品质因数均可由14.5节的公式确定。带通滤波器也可以由如图14-31所示的低通滤波器（其

$\omega_2=\omega_c$）与如图14-33所示的高通滤波器（其$\omega_1=\omega_c$）两者的级联构成。然而，其结果并不仅仅是将低通滤波器的输出叠加到高通滤波器的输入，因为其中一个电路是另一个电路的负载，改变了所期望的传递函数。

14.7.4 带阻滤波器

阻止两个指定频率（ω_1与ω_2）之间的频带信号通过的滤波器称之为带阻滤波器(bandstop / bandreject filter)或陷波滤波器（notch filter）。当RLC串联谐振电路的输出取自LC串联组合两端时，即构成带阻滤波器，如图14-37所示，其传递函数为：

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\frac{\boldsymbol{V}_o}{\boldsymbol{V}_i}=\frac{\mathrm{j}(\omega L-1/\omega C)}{R+\mathrm{j}(\omega L-1/\omega C)} \tag{14-56}$$

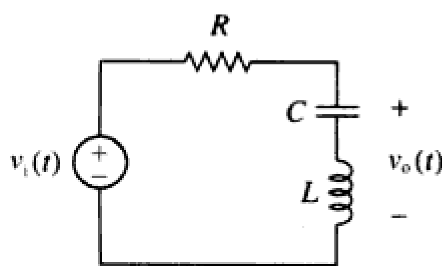


图 14-37 带阻滤波器

由式可见，$\boldsymbol{H}(0)=1$，$\boldsymbol{H}(\infty)=1$。图14-38所示为$|\boldsymbol{H}(\omega)|$的幅频特性曲线，其中心频率为：

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{14-57}$$

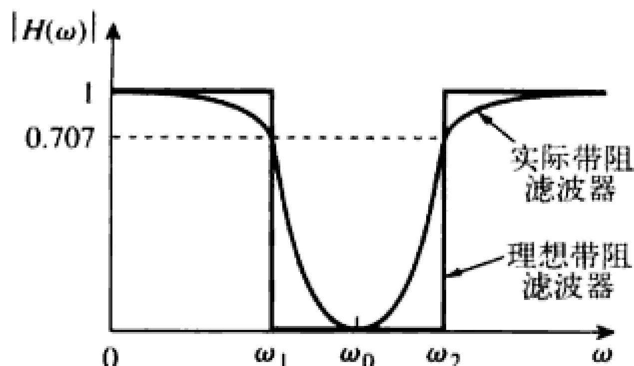


图 14-38 带阻滤波器的理想频率响应与实际频率响应

同理，带阻滤波器的半功率频率、带宽以及品质因数，仍然可以利用14.5节中的串联谐振电路的公式来计算，这里的ω_0称为抑制频率（frequency of rejection），而相应的带宽（$B=\omega_2-\omega_1$）称为抑制带宽（bandwidth of rejection）。因此，

带阻滤波器是抑制或消除在频带$\omega_1<\omega<\omega_2$内所有频率成分的滤波器。

注意，具有相同R、L、C值的带通滤波器的传递函数与带阻滤波器的传递函数相加得到的结果是在任何频率下都为1。这一结论一般而言是不成立的，但对于本节讨论你的电路是成立的，这是因为这两个电路其中一个电路的特性恰好与另一个电路的特性相反。

本节的最后总结几点注意事项：

（1）由式(14-50)、式(14-52)、式(14-54)以及式(14-56)可知，无源滤波器的最大增益为1，要想得到大于1的增益，应该采用下一节介绍的有源滤波器。

（2）还可以采用其他方法得到本节介绍的各种类型的滤波器。

（3）本节讨论的滤波器都比较简单，其他许多滤波器还具有更锐利的选择特性和复杂的频率响应。

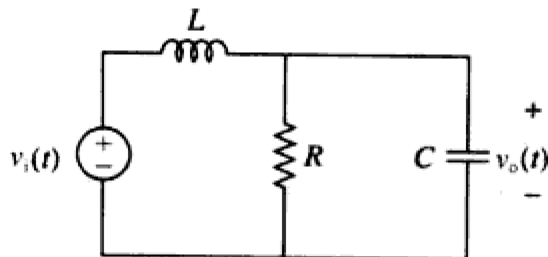


图 14-39 例题 14-10 的电路原理图

例题14-10 试确定如图14-39所示滤波器的类别，并计算其转折（截止）频率，假定电路中$R=2\ \mathrm{k\Omega}$，$L=2\ \mathrm{H}$，$C=2\ \mu\mathrm{F}$。

解 电路的传递函数为：

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{\boldsymbol{V}_o}{\boldsymbol{V}_i}=\frac{R\,\|\,1/sC}{sL+R\,\|\,1/sC},\qquad s=\mathrm{j}\omega \tag{14-10-1}$$

但是，

$$R\left\|\frac{1}{sC}\right.=\frac{R/sC}{R+1/sC}=\frac{R}{1+sRC}$$

将其代入式(14-10-1)，可得：

$$H(s)=\frac{R/(1+sRC)}{sL+R/(1+sRC)}=\frac{R}{s^2RLC+sL+R}, \quad s=j\omega$$

即

$$H(\omega)=\frac{R}{-\omega^2RLC+j\omega L+R} \tag{14-10-2}$$

由于$H(0)=1$且$H(\infty)=0$，所以由表14-5可知图14-39所示电路是一个二阶低通滤波器。H的模为：

$$H=\frac{R}{\sqrt{(R-\omega^2RLC)^2+\omega^2L^2}} \tag{14-10-3}$$

其转折频率就是H下降至其$1/\sqrt{2}$时的半功率频率。由于$H(\omega)$的直流值为1，所以在转折频率处，式(14-10-3)两边取平方可以得到：

$$H^2=\frac{1}{2}=\frac{R^2}{(R-\omega_c^2RLC)^2+\omega_c^2L^2}$$

即

$$2=(1-\omega_c^2LC)^2+\left(\frac{\omega_cL}{R}\right)^2$$

将R、L、C的值代入后得到：

$$2=(1-\omega_c^2\,4\times10^{-6})^2+(\omega_c\,10^{-3})^2$$

假定ω_c的单位为krad/s，则有：

$$2=(1-4\omega_c^2)^2+\omega_c^2 \quad 或 \quad 16\omega_c^4-7\omega_c^2-1=0$$

求解关于ω^2的二次方程，得到$\omega_c^2=0.550\,9$或$-0.113\,4$，由于ω_c为实数，所以：

$$\omega_c=0.742\text{ krad/s}=742\text{ rad/s}$$

练习题14-10 对于如图14-40所示电路，试确定其传递函数$V_o(\omega)/V_i(\omega)$，并判断该电路代表的滤波器类型，同时确定其转折频率。假定$R_1=100\ \Omega=R_2$，$L=2$ mH。

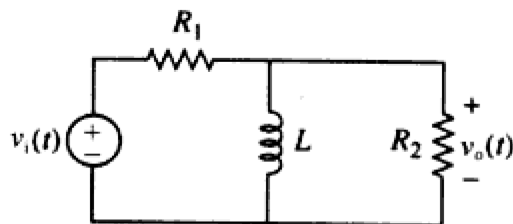


图 14-40 练习题 14-10 的电路原理图

答

$$\frac{R^2}{R_1+R_2}\left(\frac{j\omega}{j\omega+\omega_c}\right)，高通滤波器，$$

$$\omega_c=\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L}=25\text{krad/s}$$

例题14-11 如果如图14-37所示的带阻滤波器阻止200 Hz的正弦信号而允许其他频率通过，试计算其L与C值。假定$R=150\ \Omega$，带宽为100 Hz。

解 利用14.5节串联谐振电路的公式，可以得到：

$$B=2\pi(100)=200\pi\text{ rad/s}$$

但是，

$$B=\frac{R}{L}\Rightarrow L=\frac{R}{B}=\frac{150}{200\pi}=0.238\,7\text{H}$$

抑制200 Hz的正弦信号表明$f_0=200$ Hz，于是图14-38中的ω_0为：

$$\omega_0=2\pi f_0=2\pi(200)=400\pi$$

由于$\omega_0=1/\sqrt{LC}$，所以：

$$C=\frac{1}{\omega_0^2L}=\frac{1}{(400\pi)^2(0.238\,7)}=2.653\ \mu\text{F}$$

练习题14-11 试设计一个如图14-35所示形式的带通滤波器，其低截止频率为20.1 kHz，高截止频率为20.3 kHz。假定$R = 20\ \text{k}\Omega$，试计算L、C与Q。

答 15.92 H，3.9 pF，101。

14.8 有源滤波器

前一节介绍的无源滤波器存在三个主要的限制。首先，不能产生大于1的增益，无源元件不能增加网络中的能量；其次，可能会用到体积笨重、价格昂贵的电感元件；第三，在低于音频范围（300 Hz < f < 3 000 Hz）工作时，滤波器性能很差。然而，无源滤波器在高频时是非常有用的。

有源滤波器由电阻器、电容器以及运算放大器组成，与无源RLC滤波器相比，有源滤波器的优势在于：第一，由于有源滤波器不需要电感器，因而器件体积较小、价格不是很贵，这使得滤波器的集成电路实现成为可能；第二，有源滤波器除了提供与RLC滤波器相同的频率响应外，还可以提供放大器增益；第三，有源滤波器可以与缓冲放大器（电压跟随器）结合使用，从而实现滤波器各级与电源和负载阻抗效应的隔离。利用这种隔离特性，就可以独立设计滤波器各级，之后再将其级联起来实现所要求的传递函数（传递函数级联时，伯德图因为是对数关系所以可以直接相加）。然而，有源滤波器的可靠性和稳定性差，大多数有源滤波器的实际工作频率限制在100 kHz以下，即多数有源滤波器在100 kHz以下可以正常工作。

通常可以按照滤波器的阶数（即极点数）或者特定的设计类型对滤波器进行分类。

14.8.1 一阶低通滤波器

一阶滤波器的一种形式如图14-41所示，其中器件Z_i与Z_f的不同选择决定了滤波器是低通的还是高通的，但其中一个元件必须是电抗元件。

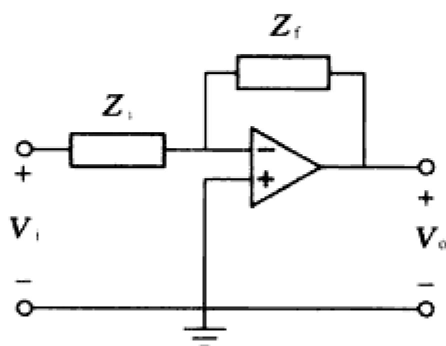


图 14-41 通用的一阶有源滤波器

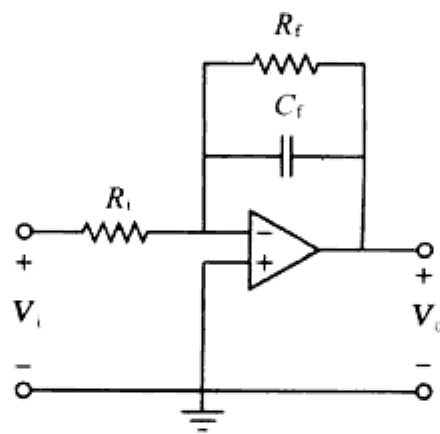


图 14-42 有源一阶低通滤波器

图14-42所示为一个典型的有源低通滤波器，该滤波器的传递函数为：

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\frac{\boldsymbol{V}_o}{\boldsymbol{V}_i}=-\frac{\boldsymbol{Z}_f}{\boldsymbol{Z}_i} \tag{14-58}$$

其中，$\boldsymbol{Z}_i = R_i$，并且：

$$\boldsymbol{Z}_f = R_f \left\| \frac{1}{j\omega C_f} = \frac{R_f / j\omega C_f}{R_f + 1/j\omega C_f} = \frac{R_f}{1+j\omega C_f R_f} \right. \tag{14-59}$$

因此，

$$\boldsymbol{H}(\omega) = -\frac{R_f}{R_i}\frac{1}{1+j\omega C_f R_f} \tag{14-60}$$

由此可见，式(14-60)与式(14-50)基本相同，只是相差一个低频增益($\omega \to \infty$)，即($-R_f/R_i$)的直流增益。

同时，其转折频率为：

$$\omega_c = \frac{1}{R_f C_f} \tag{14-61}$$

由此可见，ω_c不依赖于R_i。这意味着如果需要，几个不同R_i的输入可以相加起来，但各输入的转折频率保持不变。

14.8.2 一阶高通滤波器

图14-43所示为一个典型的高通滤波器，其传递函数为：

$$\boldsymbol{H}(\omega) = \frac{\boldsymbol{V}_o}{\boldsymbol{V}_i} = -\frac{\boldsymbol{Z}_f}{\boldsymbol{Z}_i} \tag{14-62}$$

其中，$\boldsymbol{Z}_i = R_i + 1/j\omega C_i$，$\boldsymbol{Z}_f = -R_f$，因此，

$$\boldsymbol{H}(\omega) = -\frac{R_f}{R_i + 1/j\omega C_i} = -\frac{j\omega C_i R_f}{1 + j\omega C_i R_i} \tag{14-63}$$

上式与(14-52)类似，只是在频率很高时（$\omega \to \infty$），其增益趋于$-R_f/R_i$，转折频率为：

$$\omega_c = \frac{1}{R_i C_i} \tag{14-64}$$

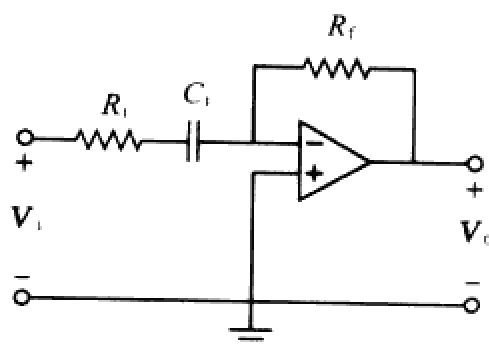
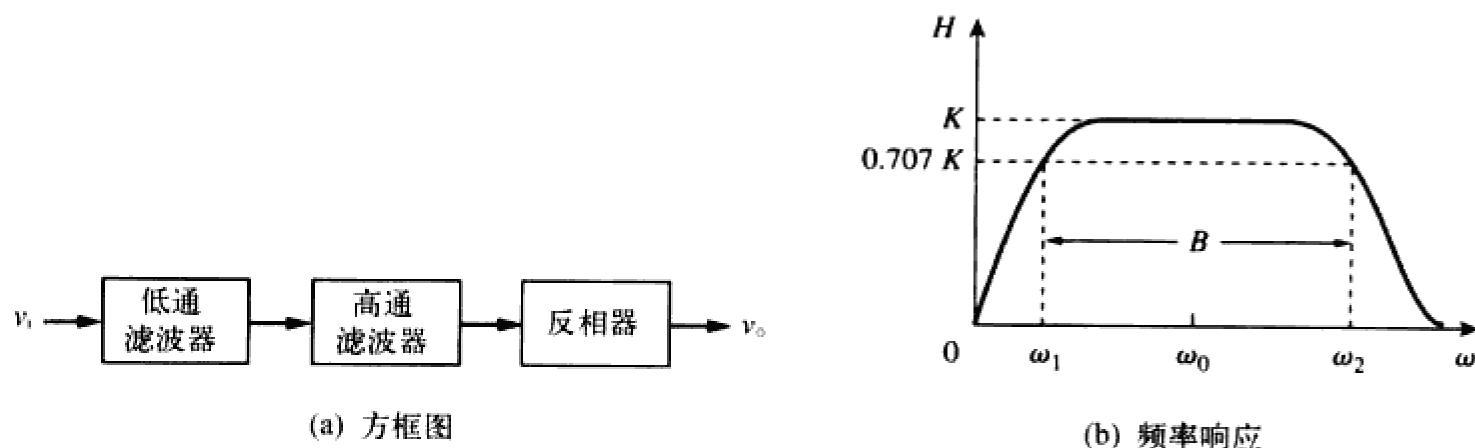


图 14-43 有源一阶高通滤波器

14.8.3 带通滤波器

将图14-42所示低通滤波器与图14-43所示高通滤波器组合起来，就可以构成一个在所需频带内增益为K的带通滤波器。将单位增益的低通滤将波器、单位增益的高通滤波器与增益为$-R_f/R_i$的反相放大器相级联即可构成一个带通滤波器，其框图如图14-44a所示，其频率响应如图14-44b所示。带通滤波器的实际电路结构如图14-45所示。

构成带通滤波器的这种方法未必是最好的方法，但可能是最容易理解的。



(a) 方框图 (b) 频率响应

图 14-44 有源带通滤波器

带通滤波器的分析相当简单，其传递函数为式(14-60)、式(14-63)与反相器增益三者的乘积，即：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\omega) = \frac{\boldsymbol{V}_o}{\boldsymbol{V}_i} &= \left(-\frac{1}{1 + j\omega C_1 R}\right)\left(-\frac{j\omega C_2 R}{1 + j\omega C_2 R}\right)\left(-\frac{R_f}{R_i}\right) \\ &= -\frac{R_f}{R_i}\frac{1}{1 + j\omega C_1 R}\frac{j\omega C_2 R}{1 + j\omega C_2 R}\end{aligned} \tag{14-65}$$

低通部分设定了带通滤波器的上转折频率：

$$\omega_2 = \frac{1}{RC_1} \tag{14-66}$$

而高通部分设定了带通滤波器的下转折频率：

$$\omega_1 = \frac{1}{RC_2} \tag{14-67}$$

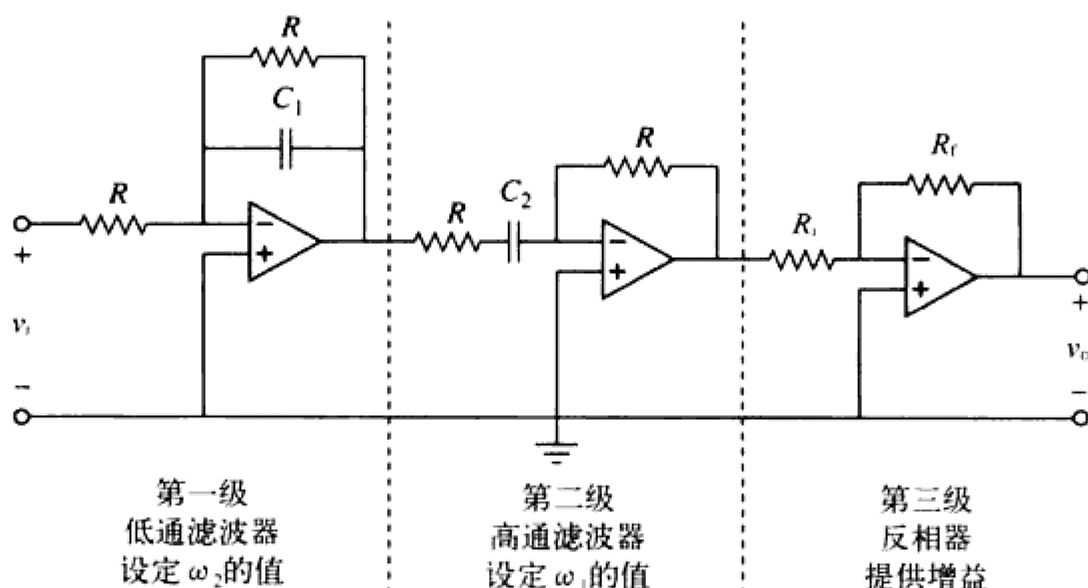


图 14-45 有源带通滤波器

由ω_1与ω_2的值，即可确定带通滤波器的中心频率、带宽以及品质因数分别为：

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2} \tag{14-68}$$

$$B = \omega_2 - \omega_1 \tag{14-69}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{B} \tag{14-70}$$

为了确定带通滤波器的通带增益K，将式(14-65)的传递函数化为式(14-15)所示的标准形式：

$$\boldsymbol{H}(\omega) = -\frac{R_f}{R_i}\frac{j\omega/\omega_1}{(1+j\omega/\omega_1)(1+j\omega/\omega_2)} = -\frac{R_f}{R_i}\frac{j\omega\omega_2}{(\omega_1+j\omega)(\omega_2+j\omega)} \tag{14-71}$$

在中心频率$\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$处，传递函数的模为：

$$|\boldsymbol{H}(\omega_0)| = \left|\frac{R_f}{R_i}\frac{j\omega_0\omega_2}{(\omega_1+j\omega_0)(\omega_2+j\omega_0)}\right| = \frac{R_f}{R_i}\frac{\omega_2}{\omega_1+\omega_2} \tag{14-72}$$

于是，其带通增益为：

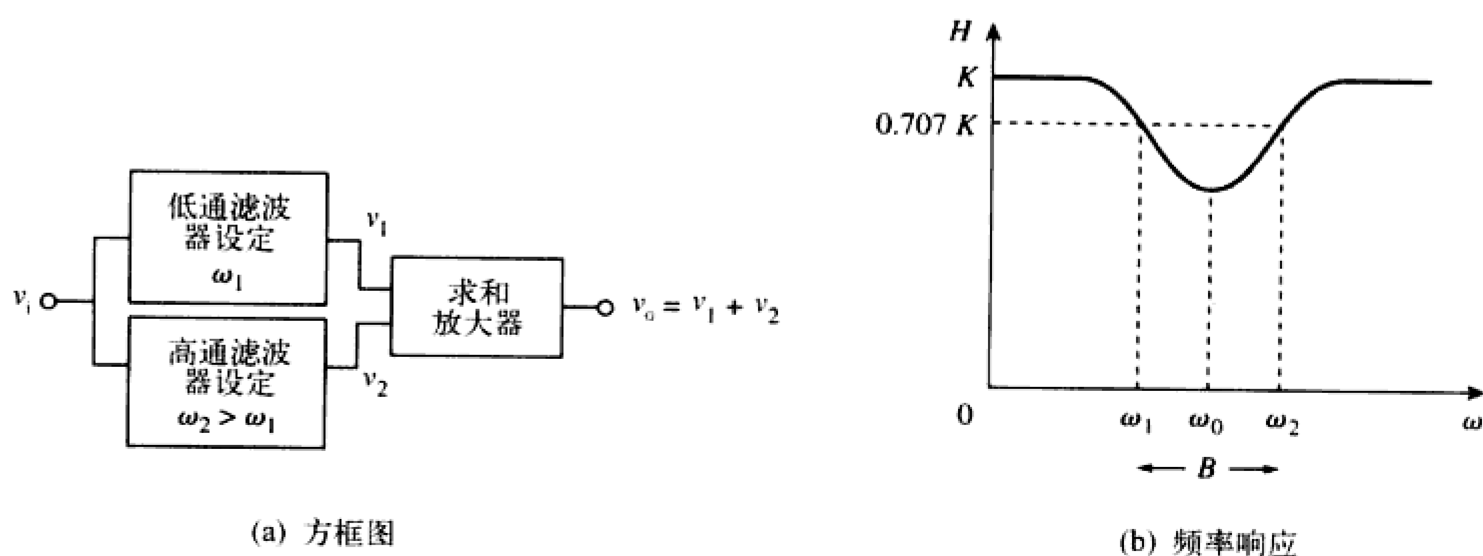
$$K = \frac{R_f}{R_i}\frac{\omega_2}{\omega_1+\omega_2} \tag{14-73}$$

14.8.4 带阻（陷波）滤波器

低通滤波器与高通滤波器的并联组合再加上一个求和放大器就可以构成带阻滤波器，其方框图如图14-46a所示。带阻滤波器的下截止频率由低通滤波器设定，而上截止频率ω_2由高通滤波器设定。ω_1与ω_2之间的频带宽度为带阻滤波器的带宽，如图14-46b所示，带阻滤波器允许低于ω_1和高于ω_2的频率通过。图14-46a所示方框图的实际电路结构如图14-47所示，带阻滤波器的传递函数为：

$$\boldsymbol{H}(\omega) = \frac{\boldsymbol{V}_o}{\boldsymbol{V}_i} = -\frac{R_f}{R_i}\left(-\frac{1}{1+j\omega C_1R} - \frac{j\omega C_2R}{1+j\omega C_2R}\right) \tag{14-74}$$

计算其截止频率ω_1，ω_2的值、中心频率、带宽以及品质因数的公式与式(14-66)～式(14-70)相同。



(a) 方框图

(b) 频率响应

图 14-46 有源带阻滤波器

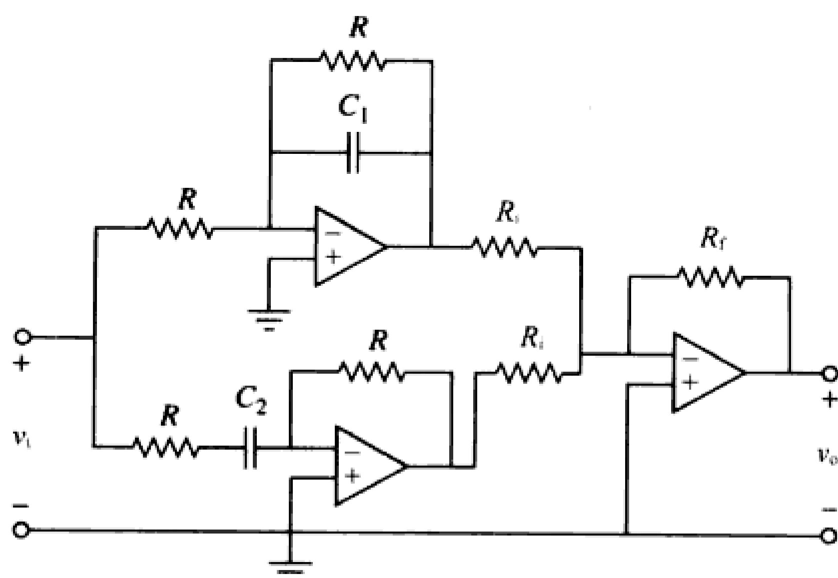


图 14-47 有源带阻滤波器

为了确定带阻滤波器的带通增益K，可以用上、下截止频率表示式(14-74)，有：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\omega)&=\frac{R_{\mathrm{f}}}{R_{\mathrm{i}}}\left(\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega/\omega_2}+\frac{\mathrm{j}\omega/\omega_1}{1+\mathrm{j}\omega/\omega_1}\right)\\&=\frac{R_{\mathrm{f}}}{R_{\mathrm{i}}}\frac{(1+\mathrm{j}2\omega/\omega_1+(\mathrm{j}\omega)^2/\omega_1\omega_1)}{(1+\mathrm{j}\omega/\omega_2)(1+\mathrm{j}\omega/\omega_1)}\end{aligned}\tag{14-75}$$

将上式与式(14-15)所示的传递函数标准形式相比较可知，在两通带（$\omega\to 0$与$\omega\to\infty$）内，其增益为：

$$K=\frac{R_{\mathrm{f}}}{R_{\mathrm{i}}}\tag{14-76}$$

也可以通过中心频率$\omega_0=\sqrt{\omega_1\omega_2}$处传递函数的模确定其通带增益，即：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\omega_0)&=\left|\frac{R_{\mathrm{f}}}{R_{\mathrm{i}}}\frac{(1+\mathrm{j}2\omega_0/\omega_1+(\mathrm{j}\omega_0)^2/\omega_1\omega_1)}{(1+\mathrm{j}\omega_0/\omega_2)(1+\mathrm{j}\omega_0/\omega_1)}\right|\\&=\frac{R_{\mathrm{f}}}{R_{\mathrm{i}}}\frac{2\omega_1}{\omega_1+\omega_2}\end{aligned}\tag{14-77}$$

同样，本节介绍的滤波器仅是一些典型的结构，还有许多更为复杂的其他类型的有源滤波器。

例题14-12 试设计一个直流增益为4、转折频率为500 Hz的低通有源滤波器。

解 由式(14-61)可得：

$$\omega_c = 2\pi f_c = 2\pi(500) = \frac{1}{R_f C_f} \tag{14-12-1}$$

其直流增益为：

$$H(0) = -\frac{R_f}{R_i} = -4 \tag{14-12-2}$$

现在得到包含的三个未知数的两个方程，如果选定$C_f = 0.2\ \mu F$，则有：

$$R_f = \frac{1}{2\pi(500)0.2\times10^{-6}} = 1.59\ k\Omega$$

并且

$$R_i = \frac{R_f}{4} = 397.5\ \Omega$$

取$R_f = 1.6\ k\Omega$，$R_i = 400\ \Omega$，所设计的低通有源滤波器如图14-42所示。

练习题14-12 试设计一个高频增益为5、转折频率为2 kHz的高通滤波器，设计时采用0.1 μF的电容器。

答 $R_i = 800\ \Omega$，$R_f = 4\ k\Omega$。

例题14-13 试设计一个如图14-45所示的带通滤波器，允许250~3 000 Hz范围内的频率成分通过，增益$K = 10$，假定电阻$R = 20\ k\Omega$。

解 （1）**明确**问题。本例题所要解决的问题已阐述清楚，设计中所采用的电路也已明确规定。

（2）**表述**对问题的理解。本题要求使用图14-45所示的运算放大器电路设计一个带通滤波器，已经给定电阻R的值（20 kΩ），另外，可以通过的信号频率范围为250 Hz~3 kHz。

（3）确定**可选**解。我们采用14.8.3节推导的公式求解本例，之后利用所得到的传递函数验证答案的正确性。

（4）**尝试**问题的解。因为$\omega_1 = 1/RC_2$，所以：

$$C_2 = \frac{1}{R\omega_1} = \frac{1}{2\pi f_1 R} = \frac{1}{2\pi\times250\times20\times10^3} = \mathbf{31.83\ nF}$$

同理，由于$\omega_2 = 1/RC_1$，则：

$$C_1 = \frac{1}{R\omega_2} = \frac{1}{2\pi f_2 R} = \frac{1}{2\pi\times3\,000\times20\times10^3} = \mathbf{2.65\ nF}$$

由式(14-73)可得：

$$\frac{R_f}{R_i} = K\frac{\omega_1+\omega_2}{\omega_2} = K\frac{f_1+f_2}{f_2} = \frac{10(3\,250)}{3\,000} = 10.83$$

如果选择$R_i = 10\ k\Omega$，则有$R_f = 10.83R_i \approx 108.3\ k\Omega$。

（5）**评价**得到的结果。第一个运算放大器的输出为：

$$\frac{V_i - 0}{20\ k\Omega} + \frac{V_1 - 0}{20\ k\Omega} + \frac{s2.65\times10^{-9}(V_1 - 0)}{1}$$
$$= 0 \rightarrow V_1 = -\frac{V_i}{1+5.3\times10^{-5}s}$$

第二个运算放大器的输出为：

$$\frac{V_1-0}{20\ \text{k}\Omega+\dfrac{1}{s31.83\ \text{nF}}}+\frac{V_2-0}{20\ \text{k}\Omega}=0\rightarrow$$

$$V_2=-\frac{6.366\times10^{-4}sV_1}{1+6.366\times10^{-4}s}$$

$$=\frac{6.366\times10^{-4}sV_1}{(1+6.366\times10^{-4}s)(1+5.3\times10^{-5}s)}$$

第三个运算放大器的输出为：

$$\frac{V_2-0}{10\ \text{k}\Omega}+\frac{V_o-0}{108.3\ \text{k}\Omega}=0\rightarrow V_o=10.83V_2\rightarrow \text{j}2\pi\times25°$$

$$V_o=-\frac{6.894\times10^{-3}sV_1}{(1+6.366\times10^{-4}s)(1+5.3\times10^{-5}s)}$$

令$s=\text{j}2\pi\times25°$并求出V_o/V_i的模：

$$\frac{V_o}{V_i}=\frac{-\text{j}10.829}{(1+\text{j}1)(1)}$$

$|V_o/V_i|=(0.707\,1)\,10.829$，即低转折频率点。

令$s=\text{j}2\pi\times3\,000=\text{j}18.849\ \text{k}\Omega$，则有：

$$\frac{V_o}{V_i}=\frac{-\text{j}129.94}{(1+\text{j}12)(1+\text{j}1)}$$

$$=\frac{129.94\angle-90°}{(12.042\angle85.24°)(1.4142\angle45°)}=\mathbf{(0.707\,1)10.791\angle-18.61°}$$

显然，这是上截止频率，答案得到验证。

（6）对结果是否**满意**？本题所设计的电路令人满意，可以将其作为本题的答案。

练习题14-13 试设计一个如图14-47所示的陷波器，其$\omega_0=20\ \text{krad/s}$，$K=5$并且$Q=10$，假定$R=R_i=10\ \text{k}\Omega$。

答 $C_1=4.762\ \text{nF}$，$C_2=5.263\ \text{nF}$，$R_f=50\ \text{k}\Omega$。

14.9 †比例转换

在设计、分析滤波器与谐振电路的过程中，以及在一般的电路分析过程中，先采用1Ω、1 H或1 F的元件值，之后再将这些值比例转换为实际值，通常会简化电路的分析与设计。在本书大量的例题与习题中，未采用元件的实际值就是利用了这一思想的优点；利用方便的元件值进行分析设计可以使读者更容易掌握电路分析方法，由于可以通过比例转换得到实际值，所以能够简化电路的计算。

电路的比例转换包括两个方面：一是幅度或阻抗的比例转换；二是频率的比例转换。二者在频率响应的比例转换以及将电路元件变换为实际值时是非常有用的，虽然模的比例运算保持电路的频率响应不变，但频率的比例转换却将频率响应沿频谱上、下移动。

14.9.1 模的比例转换

模的比例转换是指将电路网络中的所有阻抗都增大某个因子，而不改变其频率响应的过程。

电路中各元件R、L、C的阻抗分别为：

$$\boldsymbol{Z}_R=R,\ \boldsymbol{Z}_L=\text{j}\omega L,\qquad \boldsymbol{Z}_C=\frac{1}{\text{j}\omega C}\tag{14-78}$$

在进行模的比例转换时，各电路元件的阻抗都乘以因子K_m，同时保持其频率不变。于是，得到新的

阻抗为：

$$Z'_R = K_m Z_R = K_m R, \quad Z'_L = K_m Z_L = j\omega K_m L, \quad Z'_C = K_m Z_C = \frac{1}{j\omega C / K_m} \tag{14-79}$$

比较式(14-79)与式(14-78)可知，元件值的变化如下：$R \to K_m R$，$L \to K_m L$，$C \to C/K_m$，因此，在进行模的比例转换时，各个元件的新值与频率分别为：

$$\boxed{\begin{aligned} R' &= K_m R, \quad L' = K_m L \\ C' &= \frac{C}{K_m}, \quad \omega' = \omega \end{aligned}} \tag{14-80}$$

其中，带′号的变量为新值，而不带′号的变量为原来的值。对于RLC串联或并联电路而言，比例转换前后的关系为：

$$\omega'_0 = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{K_m LC / K_m}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \tag{14-81}$$

说明比例转换前后的谐振频率是不变的。同样，品质因数与带宽也不会受到比例转换的影响。而且，模的比例转换也不会影响式(14-2a)与式(14-2b)所示的无量纲传递函数的形式。

14.9.2 频率比例变换

频率比例变换是指将网络的频率响应沿频率轴上、下移动并保持阻抗不变的过程。

将频率乘以因子 K_f，并保持阻抗不变就可以实现频率比例变换。

频率比例转换等效于对频率响应曲线中的频率轴进行重新标定，在将谐振频率、转折频率、带宽等平移至其实际值时，就必须用到频率转换。同时，还可以利用频率比例转换使电容值与电感值变换到方便处理的范围内。

由式(14-78)可见，L与C的阻抗是与频率有关的，如果对式(14-78)中的$Z_L(\omega)$与$Z_C(\omega)$应用频率比例转换，由于电感器与电容器的阻抗在转换前后保持不变，于是得到：

$$Z_L = j(\omega K_f)L' = j\omega L \quad \Rightarrow \quad L' = \frac{L}{K_f} \tag{14-82a}$$

$$Z_C = \frac{1}{j(\omega K_f)C'} = \frac{1}{j\omega C} \quad \Rightarrow \quad C' = \frac{C}{K_f} \tag{14-82b}$$

由此可见，元件值的变化如下：$L \to L/K_f$，$C \to C/K_f$。由于R的阻抗是与频率无关的，所以R的值不受任何影响。因此，在进行频率比例转换时，电路元件的新值与频率为：

$$\boxed{\begin{aligned} R' &= R, \quad L' = \frac{L}{K_f} \\ C' &= \frac{C}{K_f}, \quad \omega' = K_f \omega \end{aligned}} \tag{14-83}$$

对于RLC串联或并联电路，其谐振频率为：

$$\omega'_0 = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{(L/K_f)(C/K_f)}} = \frac{K_f}{\sqrt{LC}} = K_f \omega_0 \tag{14-84}$$

其带宽为：

$$B' = K_f B \tag{14-85}$$

但是其品质因数仍保持不变（$Q' = Q$）。

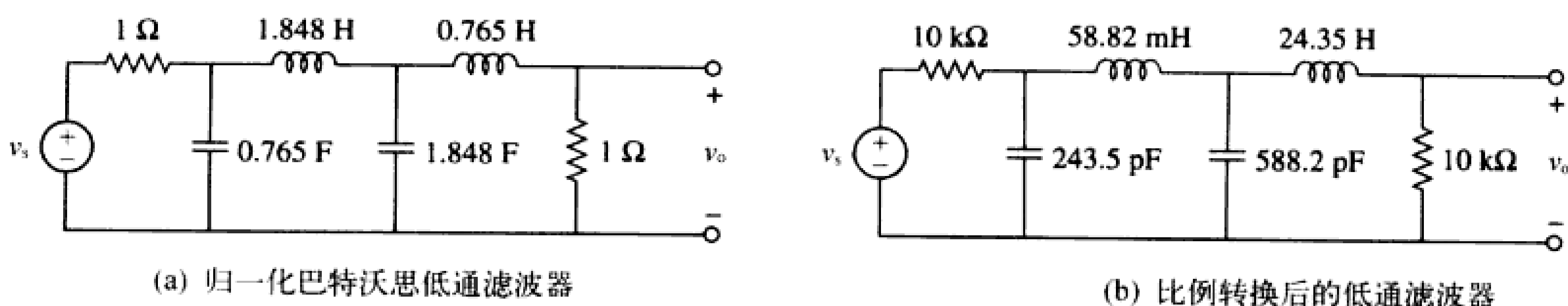
14.9.3 模与频率比例转换

如果对电路同时进行模的比例转换与频率的比例转换，则有：

$$R' = K_m R, \qquad L' = \frac{K_m}{K_f} L$$
$$C' = \frac{1}{K_m K_f} C, \qquad \omega' = K_f \omega \tag{14-86}$$

以上公式是比式(14-80)与式(14-83)更为一般的公式。在不进行模的比例转换的情况下，则令式(14-86)中的$K_m = 1$，在不进行频率比例转换的情况下，则令式(14-86)中的$K_f = 1$。

例题14-14 某四阶巴特沃思（Butterworth）低通滤波器如图14-48a所示。该滤波器的截止频率设计为$\omega_c = 1$ rad/s。试利用10 kΩ电阻器将该电路的截止频率变换为50 kHz。



(a) 归一化巴特沃思低通滤波器　　(b) 比例转换后的低通滤波器

图 14-48 例题 14-14 的电路原理图

解 要将截止频率从$\omega_c = 1$ rad/s平移至 $\omega_c' = 2\pi\,(50)$ krad/s，则频率比例因子为：

$$K_f = \frac{\omega_c'}{\omega_c} = \frac{100\pi \times 10^3}{1} = \pi \times 10^5$$

并且，如果用10 kΩ电阻取代各1 Ω电阻，则模值比例因子为：

$$K_m = \frac{R'}{R} = \frac{10 \times 10^3}{1} = 10^4$$

利用式(14-86)，可以得到：

$$L_1' = \frac{K_m}{K_f} L_1 = \frac{10^4}{\pi \times 10^5}(1.848) = 58.82 \text{ mH}$$

$$L_2' = \frac{K_m}{K_f} L_2 = \frac{10^4}{\pi \times 10^5}(0.765) = 24.35 \text{ mH}$$

$$C_1' = \frac{C_1}{K_m K_f} = \frac{0.765}{\pi \times 10^9} = 243.5 \text{ pF}$$

$$C_2' = \frac{C_2}{K_m K_f} = \frac{1.848}{\pi \times 10^9} = 588.2 \text{ pF}$$

比例转换后的电路如图14-48b所示，该电路采用实际的元件值，并且其传递函数与图14-48b所示的原型一样，只是频率出现了平移。

练习题14-14 某三阶巴特沃思滤波器的归一化频率为$\omega_c = 1$ rad/s，如图14-49所示。试利用15 nF电容器通过比例转换确定截止频率为10 kHz时的电路参数。

答 $R_1' = R_2' = 1.061$ kΩ，$C_1' = C_2' = 15$ nF，$L' = 33.77$ mH。

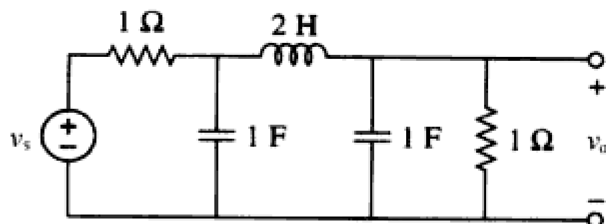


图 14-49 练习题 14-14 的电路原理图

14.10 利用 PSpice 确定频率响应

对于现代电路设计工程师而言，PSpice软件包是一个确定电路频率响应的有力工具。利用PSpice中的AC Sweep功能确定电路的频率响应，要求在AC Sweep对话框中规定Total Pts、Start Freq、End Freq的值，并指定扫描类型，Total Pts为频率扫描中的点数，Start Freq与End Freq分别为起始频率与终止频率，单位为Hz。为了确定Start Freq与End Freq两个频率值，必须通过绘制粗略的频率响应曲线，得出所感兴趣的频段范围。对于复杂电路而言，上述估计可能做不到，只能采用试探性的方法来确定。

扫描类型包括三种：

Linear：频率在Start Freq与End Freq之间的频率范围内的Total Pts个等间隔点（即响应）间线性变化。

Octave：在从Start Freq到End Freq之间的频率范围内，以八倍频程对频率进行对数扫描，其中每八倍频程包括Total Pts个点。所谓八倍频程是指因子为2的频率范围（例如，2 Hz～4 Hz，4 Hz～8 Hz，8 Hz～16 Hz，……）。

Decade：在从Start Freq到End Freq之间的频率范围内，以十倍频程对频率进行对数扫描，其中每十倍频程包括Total Pts个点。所谓十倍频程是指因子为10的频率范围频率（例如，2 Hz ～ 20 Hz，20 Hz～200 Hz，200 Hz～2 kHz，……）。

对于窄频率范围的显示，最好采用线性扫描，因为线性扫描显示窄频率范围较好。反之，对于宽频率范围的显示，最好采用对数扫描（八倍频程或十倍频程）——如果对宽频率范围采用线性扫描，则会出现几乎所有数据都会集中在高频端或低频端，而在另一端没有足够数据的情况。

设定上述参数后，PSpice对所有独立源的频率从Start Freq到End Freq进行扫描，从而实现对电路的正弦稳态分析，得到频率响应。

利用PSpice的A/D程序会给出图形输出，输出数据的类型可以在Trace Command Box窗口中对V或I增加如下后缀来确定：

M　正弦信号的幅度。

P　正弦信号的相位。

dB　正弦信号幅度的单位为分贝，即20 $\log_{10}$（幅度）。

例题14-15　试确定如图14-50所示电路的频率响应。

解　令输入电压v_s是幅度为1 V，相位为0°的正弦信号。图14-51为该电路的PSpice原理图，图中电容器逆时针方向旋转270°以确保引脚1（正极）位于上方，电压标记器设在电容器两端输出电压上。要对$1 < f < 1\ 000$ Hz之间50个点进行线性扫描，需选择Analysis/Setup/AC Sweep菜单，双击Linear，在Total Pts 对话框中键入50，在Start Freq对话框中键入1，在End Freq对话框中键入1 000。保存电路文件后，运行Analysis/Simulate程序对电路进行模拟。如果没有错误，PSpice A/D窗口中会显示V(C1：1)的波形图，与V_o即$H(\omega)=V_o/1$相同，如图14-52a所示，此即幅频特性曲线，因为V(C1：1)与VM(C1：1)相同。要确定相频特性曲线，应在PSpice A/D菜单中选择Trace/Add程序，并在Trace Command对话框中键入VP(C1：1)，从而得到如图14-52b所示的相频特性曲线。手工计算的传递函数为：

$$H(\omega)=\frac{V_o}{V_s}=\frac{1\ 000}{9\ 000+\mathrm{j}\omega 8}$$

即：

$$H(\omega)=\frac{1}{9+\mathrm{j}16\pi\times10^{-3}}$$

由此可见，该电路为低通滤波器，其特性如图14-52所示。注意，图14-52与图14-3类似（图14-52中的纵轴为对数坐标，而图14-3中的纵坐标为线性坐标）。

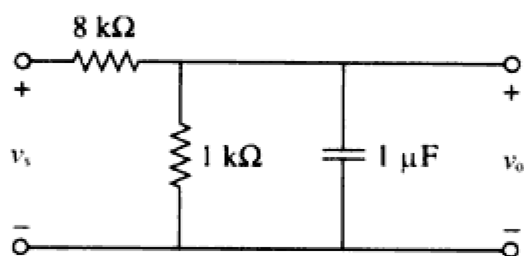


图 14-50 例题 14-15 的电路原理图

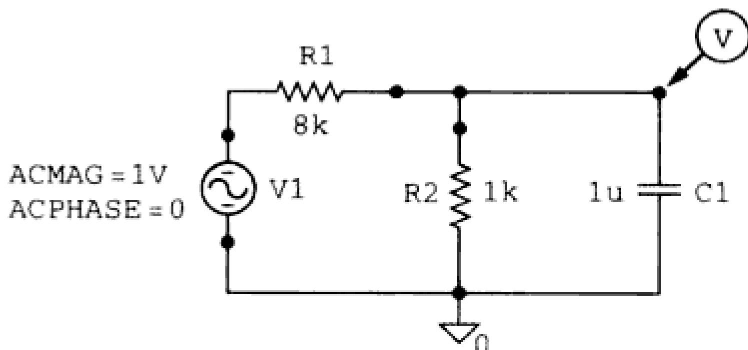
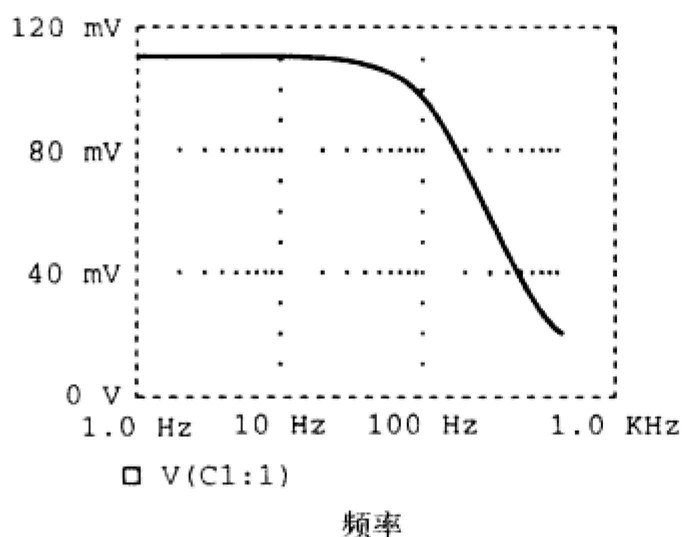
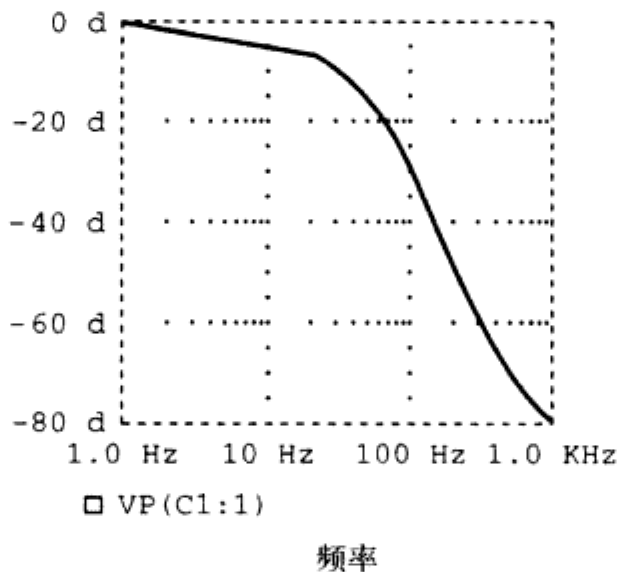


图 14-51 图 14-50 所示电路的 PSpice 原理图



(a) 频率响应的幅频特性曲线



(b) 频率响应的相频特性曲线

图 14-52 例题 14-15 的伯德图

练习题14-15 试利用PSpice确定如图14-53所示电路的频率响应。采用线性频率扫描，并且在1 Hz< f < 1 000 Hz频率范围内包括100个点。

答 参见图14-54。

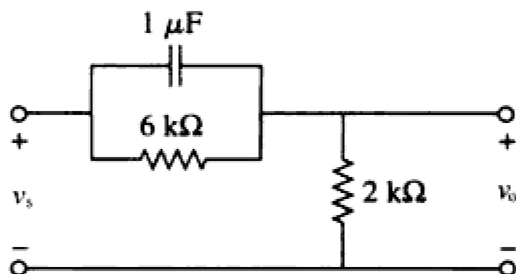
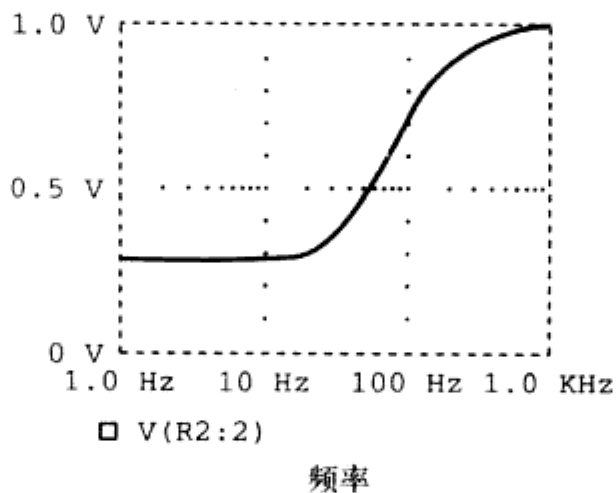
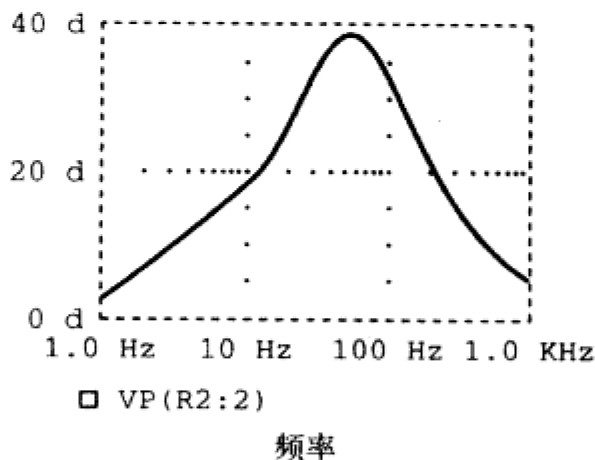


图 14-53 练习题 14-15 的电路原理图

例题14-16 试利用PSpice产生如图14-55所示电路中V的增益伯德图与相位伯德图。



(a) 频率响应的幅频特性曲线



(b) 频率响应的相频特性曲线

图 14-54 练习题 14-15 的伯德图

解 例题14-15中的电路为一阶电路，本例题中的电路为二阶电路。因为要绘制伯德图，所以选用十倍频程扫描，且设定在300Hz < f < 3 000 Hz范围内每十倍频程包括50个点。根据电路参数可知，该电路的谐振频率就位于此频率范围内，因此选定该频率范围作为扫描区间。由电路参数可得：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 5\ \text{krad/s} \quad \text{或} \quad f_0 = \frac{\omega}{2\pi} = 795.8\ \text{Hz}$$

绘制好如图14-55所示电路原理图后，选择Analysis/Setup/AC Sweep菜单，双击Decade，在Total Pts对话框中键入50，在Start Freq对话框中键入300，在End Freq对话框中键入3 000。保存电路后，执行Analysis/Simulate程序对电路进行模拟。之后就会自动出现PSpice A/D窗口，如果仿真无误，则显示V(C1：1)。由于要绘制伯德图，所以应在PSpice A/D菜单中选择Trace/Add，并在Trace Command对话框中键入dB(V(C1：1))，所得到的幅频特性伯德图如图14-56a所示。对于相频特性曲线，在PSpice A/D菜单中选择Trace/Add并在Trace Command对话框中键入VP(C1：1)，于是得到如图14-56b所示的相频特性伯德图。以上两图均证实了谐振频率为795.8 Hz。

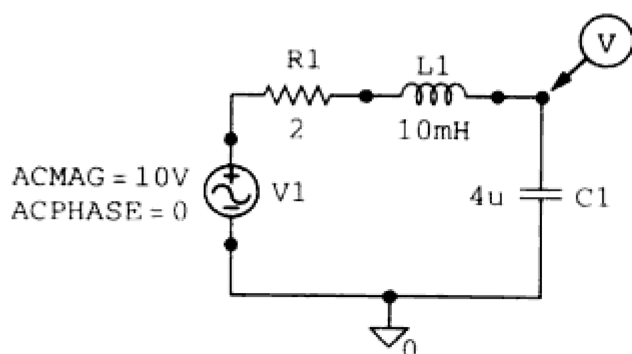
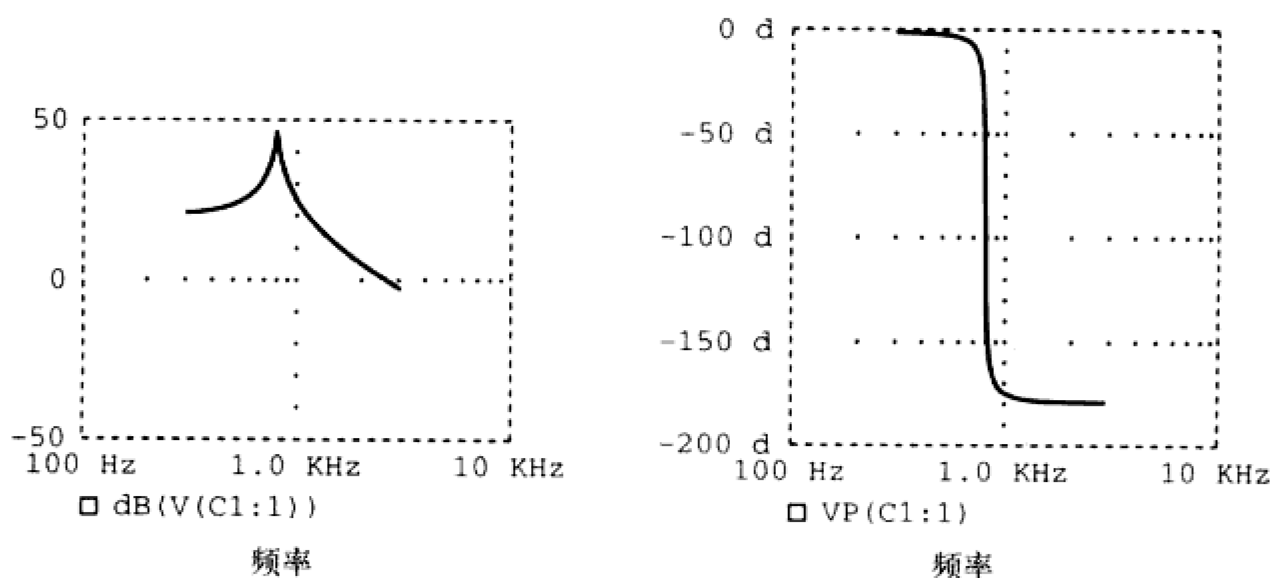


图 14-55 例题 14-16 的电路原理图



(a) 频率响应的幅频特性伯德图

(b) 频率响应的相频特性曲线

图 14-56 例题 14-16 的频率响应

练习题14-16 对于如图14-57所示网络，试利用PSpice确定频率从1 kHz到100 kHz的V_o的伯德图，在该频率范围内每十倍频程20个点。

答 见图14-58。

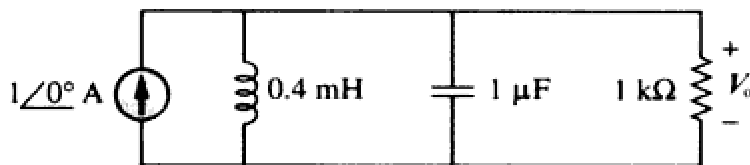
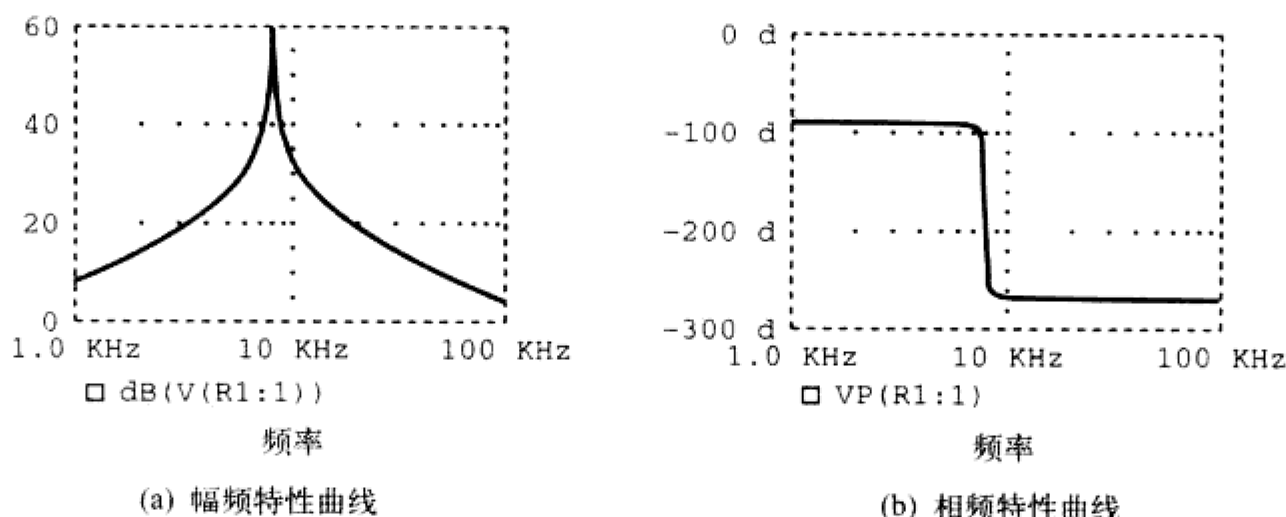


图 14-57 练习题 14-16 的电路原理图



(a) 幅频特性曲线

(b) 相频特性曲线

图 14-58 练习题 14-16 的伯德图

14.11 利用 MATLAB 确定频率响应

MATLAB是工程计算与仿真中应用非常广泛的一款软件包，本节介绍如何利用该软件对本章及第15章介绍的运算进行数值仿真。MATLAB中描述系统的关键是确定系统传递函数的分子（num）与分母（den），确定之后就可以利用几条MATLAB的相关命令绘制系统的伯德图（频率响应），并确定系统对给定输入的响应。

利用bode命令可以得到给定传递函数$H(s)$的伯德图（包括幅频特性与相频特性），该命令的格式为bode(num, den)，其中num为$H(s)$的分子，den为$H(s)$的分母，仿真的频率范围与采样点数是自动选取的。例如，对于例题14-3中的传递函数，首先应将其分子与分母写为多项式形式。

于是，

$$H(s)=\frac{200\mathrm{j}\omega}{(\mathrm{j}\omega+2)(\mathrm{j}\omega+10)}=\frac{200s}{s^2+12s+20},\qquad s=\mathrm{j}\omega$$

利用如下命令即可产生如图14-59所示的伯德图。如果需要，可以采用logspace产生对数间隔的频率，并利用semilogx升成半对数坐标。

```
>> num=[200 0];          % specify the numerator of H(s)
>> den=[1 12 20];        % specify the denominator of H(s)
>> bode(num, den);       % determine and draw Bode plots
```

系统的阶跃响应$y(t)$是指当系统输入$x(t)$为单位阶跃函数时的输出，如果已知系统传递函数的分子与分母，则可利用step命令绘制出系统的阶跃响应曲线，其时间范围与扫描点数也是自动选取的。例如，某二阶系统的传递函数为：

$$H(s)=\frac{12}{s^2+3s+12}$$

利用如下命令即可确定如图14-60所示的系统阶跃响应。

```
>> n=12;
>> d=[1 3 12];
>> step(n, d);
```

求出$y(t)=x(t)*u(t)$或者$Y(s)=X(s)\,H(s)$即可验证如图14-60所示的曲线。

命令lsim是比step更为通用的命令，利用该命令可以计算系统对任意输入信号的时间响应，其命令格式为$y=$ lsim(num, den, x, t)，其中$x(t)$为输入信号，t为时间矢量，$y(t)$为所产生的输出。例如，假定描述系统的传递函数为：

$$H(s)=\frac{s+4}{s^3+2s^2+5s+10}$$

为了求解系统对输入信号$x(t)=10\,\mathrm{e}^{-t}u(t)$的响应$y(t)$，可以采用如下MATLAB命令，响应$y(t)$与输入$x(t)$的曲线如图14-61所示。

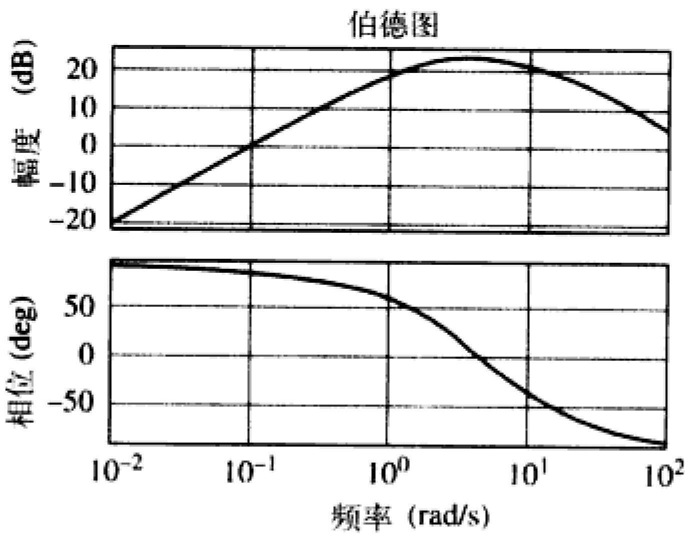


图 14-59 幅频特性曲线与相频特性曲线

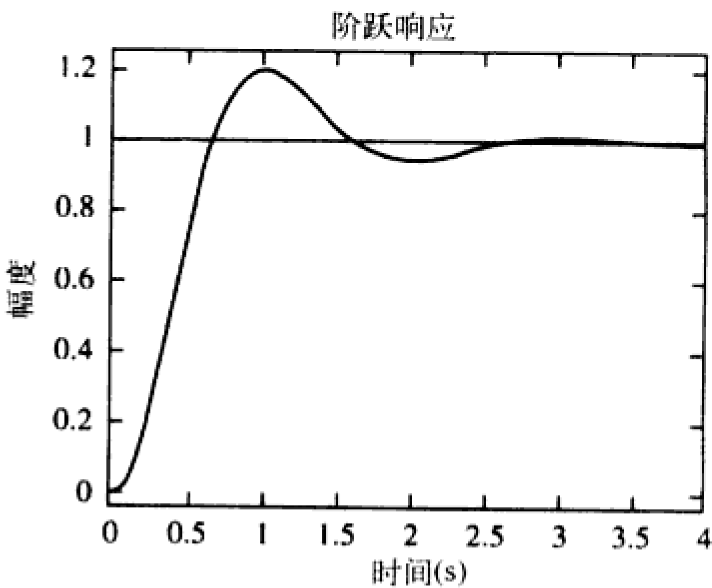


图 14-60 $H(s)=12/(s^2+3s+12)$的阶跃响应

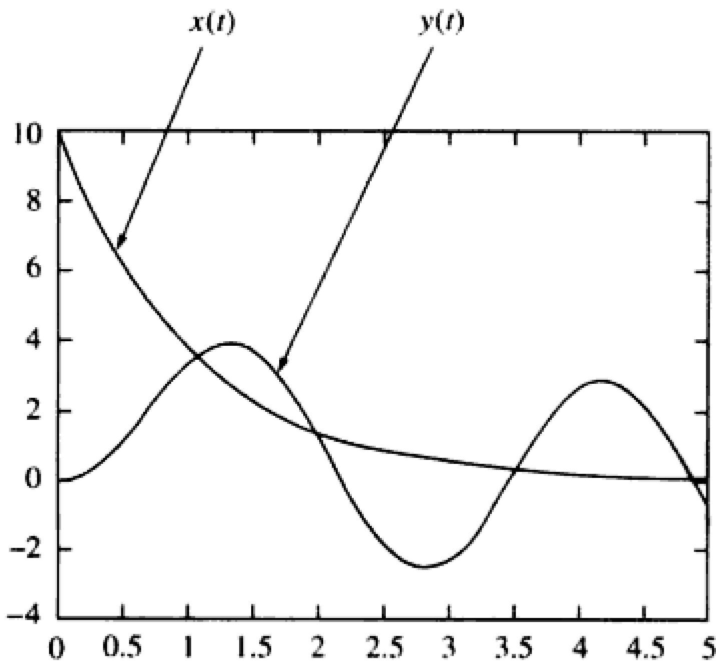


图 14-61 由$H(s)=(s+4)/(s^2+2s^2+5s+10)$描述的系统对指数输入信号的阶跃响应

```
>> t=0: 0.02: 5;                %区间0 < t < 5内增量为0.02的时间矢量
>> x=10*exp(-t);
>> num=[1 4];
>> den=[1 2 5 10];
>> y=lsim(num, den, x, t);
>> plot(t, x, t, y)
```

14.12 †应用

谐振电路与滤波器的应用非常广泛，特别是在电子学、电力系统与通信系统中的应用最多。例如，截止频率为60 Hz的陷波滤波器可以用于消除各种通信电子系统的60 Hz电力线噪声。在通信系统中，为了从相同频率范围内的大量信号中选取出所期望的信号就必须对信号进行滤波（与接下来将要讨论的无线电接收机情况相同），滤波同时也使得噪声与干扰对期望信号的影响最小。本节讨论谐振电路的一种实际应用以及滤波器的两种实际应用，各种应用的重点应该放在本章介绍的电路如

何应用于实际设备中，而不是各种设备如何工作的细节。

14.12.1　无线电接收机

在收音机与电视接收机中一般采用串联与并联谐振电路实现选台，并从射频载波中分离出音频信号。例如，在如图14-62所示的调幅（AM）收音机电路方框图中，入射调幅无线电波（即来自不同广播电台的成千上万个不同频率的电波）由天线接收，之后通过谐振电路（或带通滤波器）选出其中一路入射无线电波，所选出的信号通常很微弱，因而需要多级放大，以便产生可听到的音频信号。因此，需要利用射频（RF）放大器对选出的广播信号进行放大，需要中频（IF）放大器对由RF信号产生的内部信号进行放大，同时需要音频放大器对进入扬声器之前的音频信号进行放大。利用不同的放大器分三级对信号进行放大要比构造一个在通带内实现相同放大功能的放大器容易得多。

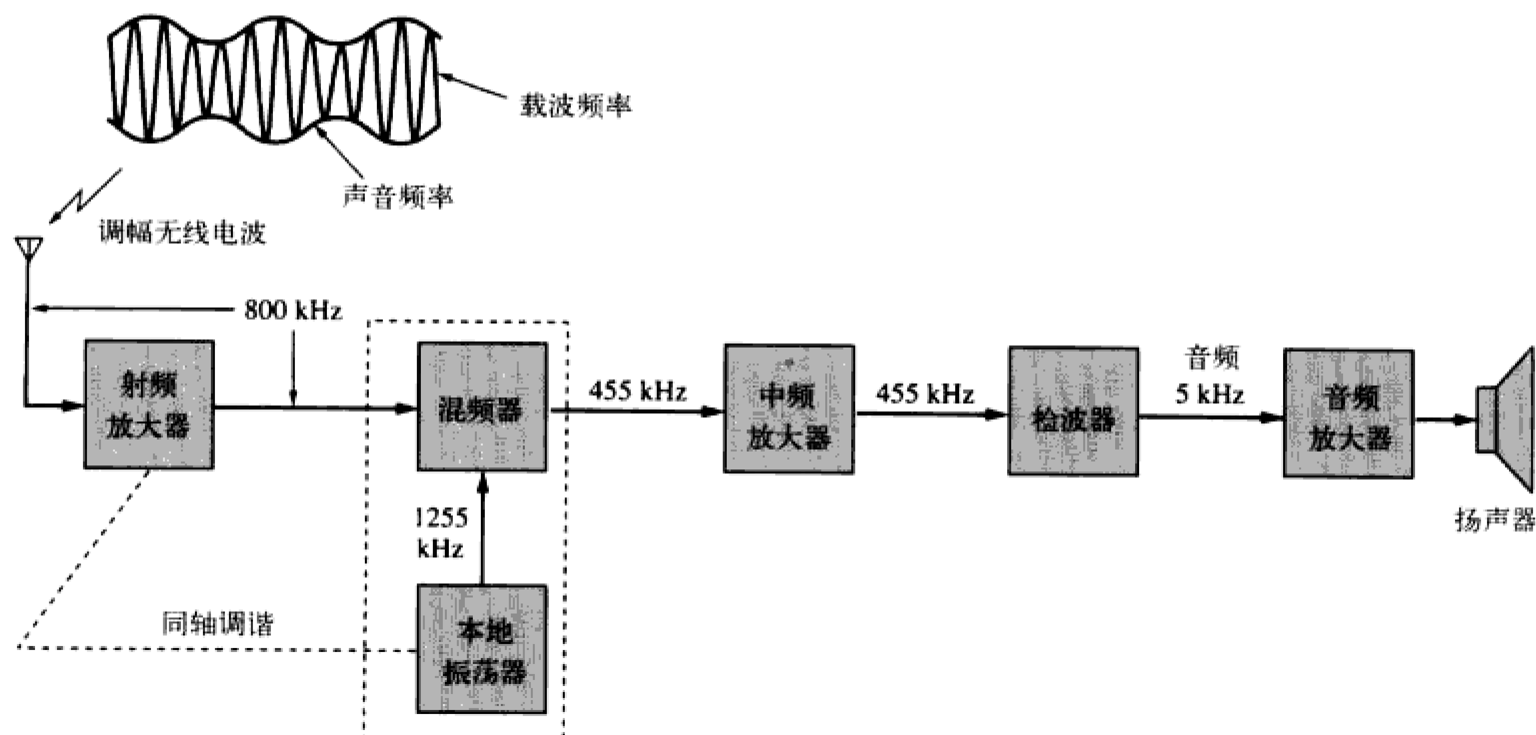


图 14-62　超外差调幅收音机的简化方框图

图14-62所示的调幅收音机称为*超外差接收机*（superheterodyne receiver），在收音机发展的早期，各级放大必须调谐至入射信号的频率。因此，各级放大器必须包括若干个调谐电路才能覆盖整个AM波段（540～1 600 kHz）。为了避免采用若干个谐振电路的问题，现代收音机均采用*混频器*（frequency mixer）或*外差电路*（heterodyne circuit），其输出总是具有相同频率（445kHz）的中频（IF）信号，但入射信号中携带的音频频率保持不变。为了产生恒定的中频频率，两个独立的可变电容器的调节装置在机械上相互耦合，这样就可以通过单个控制部件实现同轴转动调节，称之为*同轴调谐*（ganged tuning）。与RF放大器同轴调谐的*本地振荡器*（local oscillator）产生的射频信号与入射波通过混频器进行混频，从而产生包含两个信号频率差与频率和的输出信号。例如，当谐振电路调谐到接收800 kHz信号时，本地振荡器必须产生1 255 kHz的信号，于是，混频器输出端的信号频率包括两者之和（1 255＋800＝2 055 kHz）以及两者之差（1 255－800＝455 kHz）。然而，实际中仅采用其差频（455 kHz）信号，无论调谐到哪个电台，这一差频也是各级中级放大器的唯一调谐频率。在检波器中，提取出原始的音频信号（包括“智能信息”），因此，检波器的主要功能是去除中频信号，同时保留音频信号。音频信号经放大后驱动扬声器，扬声器实际上就是一个将电信号转换为声音信号的能量转换器。

本节关心的主要问题是调幅收音机的调谐电路。调频收音机的工作原理不同于本节讨论的调幅收音机，其工作频率范围更宽，但是二者的调谐电路基本相同。

例题14-17　图14-63所示为调幅收音机的调谐电路，已知$L=1\ \mu\text{H}$，试确定使谐振频率可由AM频段

的一端调整到另一端所需的电容C的取值范围。

解 调幅广播的频率范围为540～1 600 kHz，本例需要考虑该频段的低端和高端，由于如图14-63所示调谐电路为并联型的，所以可以利用14.6节的公式进行计算。由式(14-44)可知：

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

即：

$$C = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L}$$

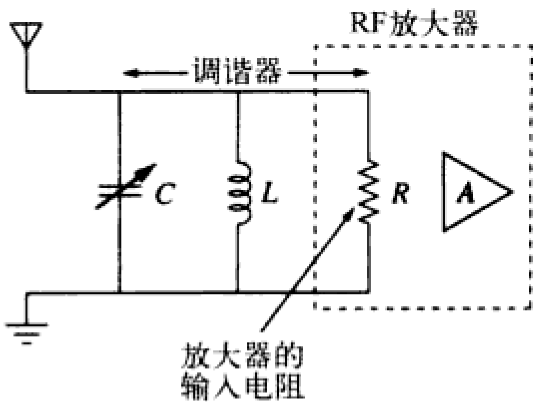


图 14-63 例题 14-17 的调谐电路

对于AM频段的高端，f_0 = 1 600 kHz，相应的电容值C为：

$$C_1 = \frac{1}{4\pi^2 \times 1\,600^2 \times 10^6 \times 10^{-6}} = 9.9 \text{ nF}$$

对于AM频段的低端，f_0 = 540 kHz，相应的电容值C为：

$$C_2 = \frac{1}{4\pi^2 \times 540^2 \times 10^6 \times 10^{-6}} = 86.9 \text{ nF}$$

因此，电容C必须为9.9～86.9 nF的可调（同轴）电容器。

练习题14-17 某调频收音机接收波的频率范围为88～108 MHz，其调谐电路是一个包括4 μH线圈的RLC并联电路，试计算覆盖整个频段所需的可变电容器的容值范围。

答 0.543～0.818 pF。

14.12.2 按键式电话机

滤波的一种典型应用是如图14-64所示的按键式电话机，其键盘包括12个按钮，排列为四行三列。

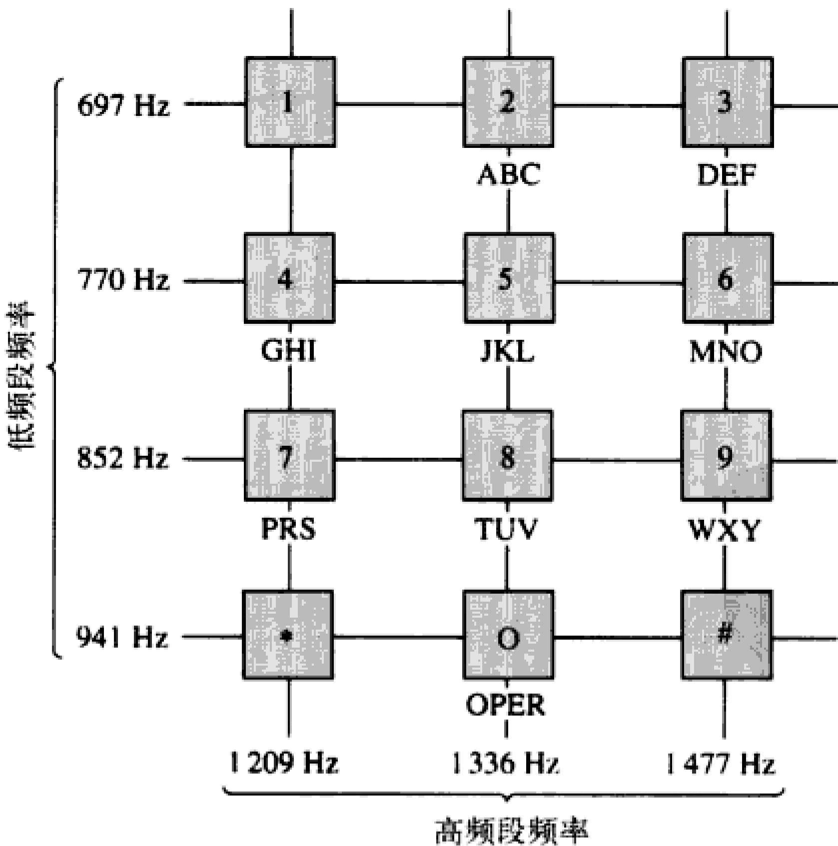


图 14-64 按键式电话机拨号的频率排列

来源：G. Daryanani, *Principles of Active Network Synthesis and Design* [New York: John Wiley & Sons], 1976, p.76

这种排列方式通过分为两组的7种频率提供了12个不同的信号，这两组频率分别为：低频组（697～941 Hz）与高频组（1 209～1 477 Hz）。按下某个按钮时即产生唯一对应于该按钮的一对频率的两个正弦量之和。例如，按下按钮“6”就会产生频率为770 Hz与1 477 Hz的两个正弦信号之和。

拨打电话时，将一组信号传送到电话局，通过检测这组信号中包括的频率实现对按键的解码。图14-65给出了拨号检测方案的方框图。信号首先经过放大，之后通过低通滤波器（LP）与高通滤波器（HP）将信号分到各自相应的频率组，利用限幅器（L）将各组信号转换为方波。接着，利用7个带通滤波器（HP）识别出不同频率的单音信号，即各带通滤波器仅允许其中一个频率通过，而阻止其他频率通过。各滤波器之后为一个检测器（D），当其输入电压超过某个电平时，就触发工作。检测器的输出为交换系统将主叫连接至被叫所需的直流信号。

例题14-18　在电话电路中，采用标准的600 Ω电阻器与RLC串联电路，试设计如图14-65所示的带通滤波器BP_2。

解　带通滤波器为如图14-35所示的RLC串联电路，由于BP_2允许697～852 Hz的频率通过，并且其中心频率为$f_0=770$ Hz，因此，该带通滤波器的带宽为：

$$B=2\pi(f_2-f_1)=2\pi(852-697)=973.89\text{ rad/s}$$

由式(14-39)可得：

$$L=\frac{R}{B}=\frac{600}{973.89}=0.616\text{H}$$

由式(14-27)或者式(14-57)可得：

$$C=\frac{1}{\omega_0^2L}=\frac{1}{4\pi^2f_0^2L}=\frac{1}{4\pi^2\times770^2\times0.616}=69.36\text{ nF}$$

练习题14-18　对于带通滤波器BP_6，重做例题14-18的设计。

答　0.356H，39.83 nF。

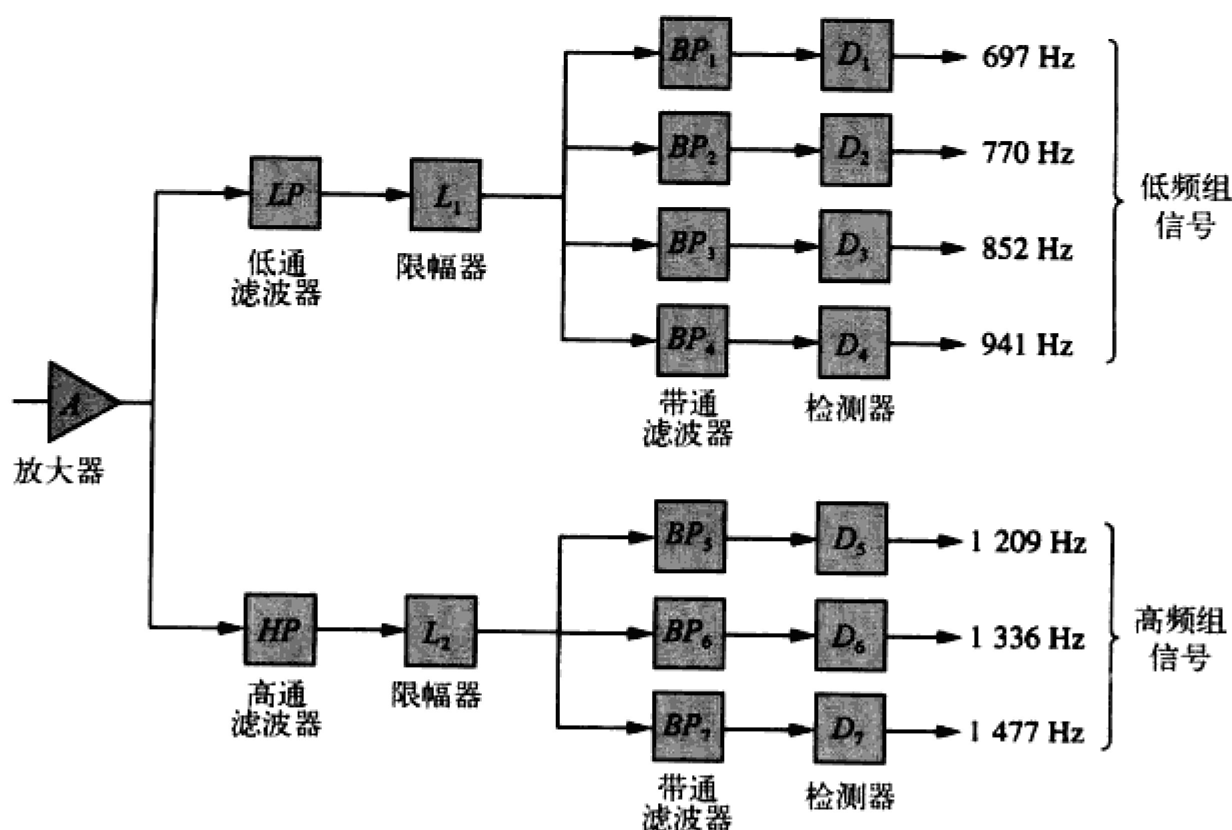


图 14-65　拨号检测方案的方框图

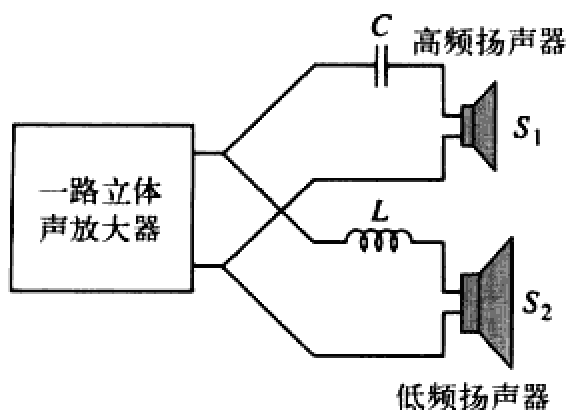
来源：G. Daryanani, *Principles of Active Network Synthesis and Design* [New York: John Wiley & Sons], 1976, p.79

14.12.3 交叉网络

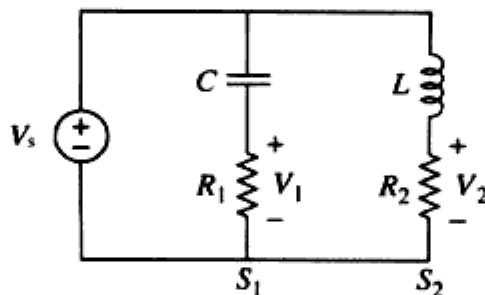
滤波器的另一个典型应用是将音频放大器耦合至低频扬声器与高频扬声器的交叉网络(crossover network)，如图14-66a所示。交叉网络主要由一个高通RC滤波器与一个低通RL滤波器组成，它将高于某预定交叉频率f_c的高频信号送至高音喇叭（即高频扬声器），而将低于f_c的低频信号送至低音喇叭（即低频扬声器）。这些扬声器的设计适应某种频率响应。低音喇叭是重现信号低频部分的低频扬声器，其最高频率约3 kHz，而高音喇叭则重现3～20 kHz的音频信号。两类扬声器相结合即可重现整个音频范围的信号，并给出最优频率响应。

利用电压源取代放大器即可得到如图14-66b所示的交叉网络的近似等效电路，图中扬声器的电路模型为电阻器。高通滤波器的传递函数V_1/V_s为：

$$H_1(\omega)=\frac{V_1}{V_s}=\frac{\mathrm{j}\omega R_1C}{1+\mathrm{j}\omega R_1C} \tag{14-87}$$



(a) 包括两个扬声器的交叉网络



(b) 等效电路模型

图 14-66

同理，低通滤波器的传递函数为：

$$H_2(\omega)=\frac{V_2}{V_s}=\frac{R_2}{R_2+\mathrm{j}\omega L} \tag{14-88}$$

选择R_1、R_2、L与C的值，可以使两个滤波器具有相同的转折频率，即交叉频率（crossover frequency），如图14-67所示。

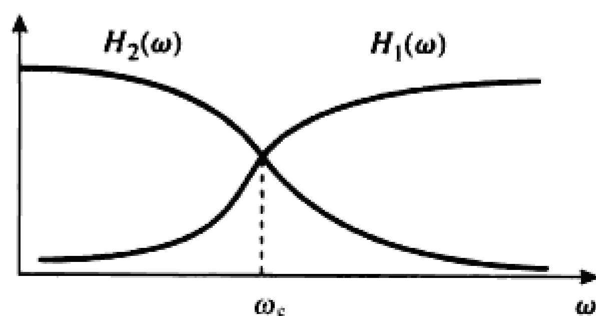


图 14-67 图 14-66 所示交叉网络的频率响应

交叉网络的基本原理也用于电视接收机的谐振电路中，因为电视接收机的谐振电路需将RF载波中的视频波段与音频波段分离开。低频段（即频率为30 Hz～4 MHz的图像信息）信号通过交叉网络进入电视接收机的视频放大器，而高频段（即4.5 MHz左右的声音信息）信号通过交叉网络进入电视接收机的声音放大器。

例题14-19 在如图14-66所示的交叉网络中，假定各扬声器的等效电阻为6 Ω，试求交叉频率为2.5 kHz时的C与L。

解 对于高通滤波器，有：

$$\omega_c=2\pi f_c=\frac{1}{R_1C}$$

即：

$$C=\frac{1}{2\pi f_cR_1}=\frac{1}{2\pi\times2.5\times10^3\times6}=10.61\ \mu\text{F}$$

对于低通滤波器，有：

$$\omega_c = 2\pi f_c = \frac{R_2}{L}$$

即：

$$L = \frac{R_2}{2\pi f_c} = \frac{6}{2\pi \times 2.5 \times 10^3} = 382\ \mu\text{H}$$

练习题14-19 如果图14-63中各扬声器的电阻为8 Ω且$C = 10\ \mu\text{F}$，试求L与交叉频率。

答 0.64 mH，1.989 kHz。

14.13 本章小结

(1) 传递函数$\boldsymbol{H}(\omega)$为输出响应$\boldsymbol{Y}(\omega)$与输入激励$\boldsymbol{X}(\omega)$之比，即$\boldsymbol{H}(\omega) = \boldsymbol{Y}(\omega)/\boldsymbol{X}(\omega)$。

(2) 频率响应是指传递函数随频率的变化关系。

(3) 传递函数$\boldsymbol{H}(s)$的零点是指使$H(s) = 0$的$s = j\omega$的值，而极点是指使$H(s) \to \infty$的s值。

(4) 分贝为对数增益的单位，如果电压增益或电流增益为G，则其等效的分贝值为$G_{dB} = 20\log_{10} G$。

(5) 伯德图是传递函数的幅度与相位随频率变化的半对数曲线，利用由$\boldsymbol{H}(\omega)$的极点与零点定义的转折频率可以绘制H（单位为dB）与ϕ（单位为度）的直线近似。

(6) 谐振频率是指传递函数的虚部趋于零时的频率。对于RLC串联与并联电路而言：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

(7) 半功率频率（ω_1，ω_2）是指在该频率处所消耗的功率等于在谐振频率处所消耗功率一半的频率，半功率频率的几何平均值就是谐振频率，即：

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

(8) 带宽是指两个半功率频率之间的频带宽度：

$$B = \omega_2 - \omega_1$$

(9) 品质因数是谐振峰“锐度”的一种度量，它等于谐振（角）频率与带宽之比：

$$Q = \frac{\omega_0}{B}$$

(10)滤波器是一种使某个频带信号通过而阻止其他频带信号通过的电路，无源滤波器由电阻器、电容器与电感器构成。有源滤波器由电阻器、电容器与有源器件组成，常有的有源器件为运算放大器。

(11) 常用的四类滤波器包括低通滤波器、高通滤波器、带通滤波器与带阻滤波器。低通滤波器仅允许频率低于截止频率ω_c的信号通过，高通滤波器仅允许频率高于截止频率ω_c的信号通过，带通滤波器仅允许频率位于规定范围（$\omega_1 < \omega < \omega_2$）以内的信号通过，带阻滤波器仅允许频率位于规定频率范围（$\omega_1 > \omega > \omega_2$）以外的信号通过。

(12)比例转换是指通过幅度比例因子K_m或者频率比例因子K_f将非实际元件值变换为实际值的过程。

$$R' = K_m R, \qquad L' = \frac{K_m}{K_f} L, \qquad C' = \frac{1}{K_m K_f} C$$

(13) 如果电路响应的频率范围以及该范围内所需的扫描点数在PSpiee软件的AC Sweep中规定好，则可以利用PSpice确定电路的频率响应。

(14) 谐振电路的应用之一——无线电接收机，利用带通谐振电路从天线接收到的所有广播信号中调谐出其中一个频率。

（15）按键式电话机与交叉网络是滤波器的两个典型应用实例。按键式电话系统利用滤波器将不同频率的单音信号分离开，用于驱动电子交换机。交叉网络将不同频率范围的信号分离开，以便将其传送到不同的设备中，对音响系统而言，就是传送到低音喇叭与高音喇叭。

复习题

14-1 传递函数 $H(s)=\dfrac{10(s+1)}{(s+2)(s+3)}$ 的一个零点为：
(a) 10 (b) −1
(c) −2 (d) −3

14-2 在幅度伯德图中，对于较大的ω值，极点$1/(5+j\omega)^2$的斜率为：
(a) 20 dB/dec (b) 40 dB/dec
(c) −40 dB/dec (d) −20 dB/dec

14-3 在相位伯德图中，$0.5<\omega<50$，$[1+j\,10\omega-\omega^2/25]^2$的斜率为：
(a) 45°/dec (b) 90°/dec
(c) 135°/dec (d) 180°/dec

14-4 与12 nF电容器构成的谐振电路，谐振于5 kHz时所需的电感值为多少？
(a) 2 652 H (b) 11.844 H
(c) 3.333 H (d) 84.43 mH

14-5 半功率频率之差称为：
(a) 品质因数 (b) 谐振频率
(c) 带宽 (d) 截止频率

14-6 在RLC串联电路中，以下哪个品质因数在谐振频率处具有最陡峭的幅频响应曲线：
(a) $Q=20$ (b) $Q=12$
(c) $Q=8$ (d) $Q=4$

14-7 在RLC并联电路中，带宽B与R呈正比。
(a) 正确 (b) 错误

14-8 当RLC电路的元件既作了幅度比例转换又作了频率比例变换，下列哪个量不会受影响？
(a) 电阻 (b) 谐振频率
(c) 带宽 (d) 品质因数

14-9 以下哪类滤波器可用于选择某个无线电台的信号？
(a) 低通 (b) 高通
(c) 带通 (d) 带阻

14-10 某电压源为RC低通滤波器提供频率为0～40 kHz、幅度恒定的一个信号，与电容器并联连接的负载电阻电压最大的频率位于：
(a) dc (b) 10 kHz
(c) 20 kHz (d) 40 kHz

答案 14-1 b；14-2 c；14-3 d；14-4 d；14-5 c；14-6 a；14-7 b；14-8 d；14-9 c；14-10 a。

习题

14.2 节

14-1 试求如图14-68所示RC电路的传递函数V_o/V_i，利用$\omega_0=1/RC$表示该传递函数。

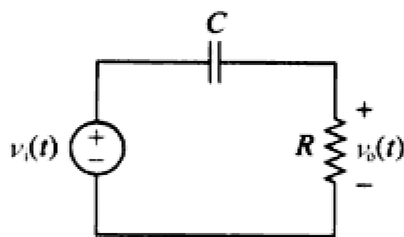


图 14-68 习题 14-1 的电路原理图

14-2 试确定如图14-69所示电路的传递函数V_o/V_i。

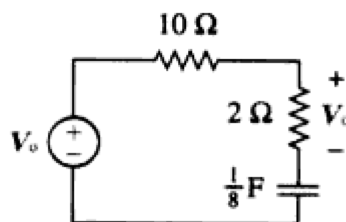


图 14-69 习题 14-2 的电路原理图

14-3 对于如图14-70所示电路，试求$H(s)=V_o(s)/V_i(s)$。

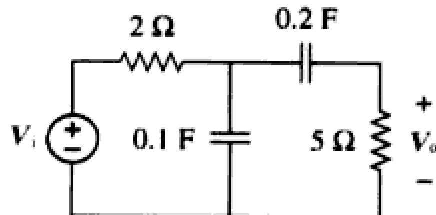


图 14-70 习题 14-3 的电路原理图

14-4 试求如图14-71所示电路的传递函数$H(\omega)=V_o/V_i$。

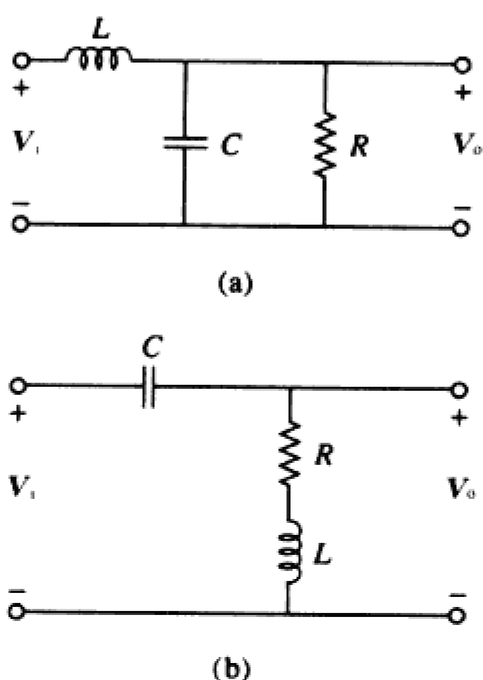


图 14-71　习题 14-4 的电路原理图

14-5　对于如图14-72所示各电路，试求$H(s)=V_o(s)/V_s(s)$。

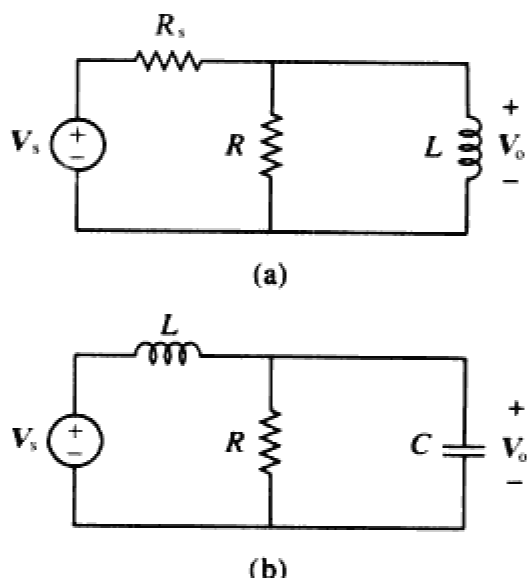


图 14-72　习题 14-5 的电路原理图

14-6　对于如图 14-73 所示电路，试求$H(s)=I_o(s)/I_s(s)$。

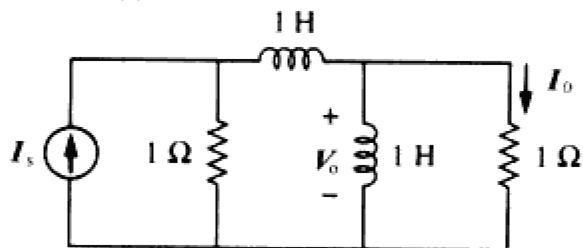


图 14-73　习题 14-6 的电路原理图

14.3 节

14-7　如果H_{dB}等于：

(a) 0.05 dB　　(b) −6.2 dB

(c) 104.7 dB

试计算相应的$|H(\omega)|$。

14-8　如果$H(\omega)$等于：

(a) 0.05　　(b) 125

(c) $\dfrac{10j\omega}{2+j\omega}$　　(d) $\dfrac{3}{1+j\omega}+\dfrac{6}{2+j\omega}$

试确定$H(\omega)$在$\omega=1$时的模（单位为dB）与相位（单位为度）。

14.4 节

14-9　某阶梯网络的电压增益为$H(\omega)=\dfrac{10}{(1+j\omega)(10+j\omega)}$，试画出该增益的伯德图。

14-10　试画出$H(j\omega)=\dfrac{50}{j\omega(5+j\omega)}$的幅度伯德图与相位伯德图。

14-11　试画出$H(\omega)=\dfrac{10+j\omega}{j\omega(2+j\omega)}$的伯德图。

14-12　传递函数为$T(s)=\dfrac{s+1}{s(s+10)}$，试画出其幅度伯德图与相位伯德图。

14-13　试画出$G(s)=\dfrac{s+1}{s^2(s+10)}$，$s=j\omega$的伯德图。

14-14　试画出$H(\omega)=\dfrac{50(j\omega+1)}{j\omega(-\omega^2+10j\omega+25)}$的伯德图。

14-15　试画出$H(s)=\dfrac{40(s+1)}{(s+2)(s+10)}$，$s=j\omega$的幅度伯德图与相位伯德图。

14-16　试画出$H(s)=\dfrac{10}{s(s^2+s+16)}$，$s=j\omega$的幅度伯德图与相位伯德图。

14-17　试画出$G(s)=\dfrac{s}{(s+2)^2(s+1)}$，$s=j\omega$的伯德图。

14-18　某线性网络的传递函数为：
ML

$$H(s)=\frac{7s^2+s+4}{s^3+8s^2+14s+5},\qquad s=j\omega$$

试利用MATLAB绘制该传递函数的幅频特性曲线与相频特性曲线。假定0.1 rad/s < ω < 10 rad/s。

14-19　试画出如下传递函数幅度与相位的近似伯德图：

$$H(s)=\frac{100s}{(s+10)(s+20)(s+40)},\quad s=\mathrm{j}\omega$$

14-20 试画出如下传递函数的幅度的伯德图：

$$H(\omega)=\frac{10\mathrm{j}\omega}{(\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega+5)^2(\mathrm{j}\omega+40)}$$

14-21 试画出如下传递函数的幅度的伯德图：

$$H(s)=\frac{s(s+20)}{(s+1)(s^2+60s+400)},\quad s=\mathrm{j}\omega$$

14-22 试求如图14-74所示幅度伯德图的传递函数 $\boldsymbol{H}(\omega)$。

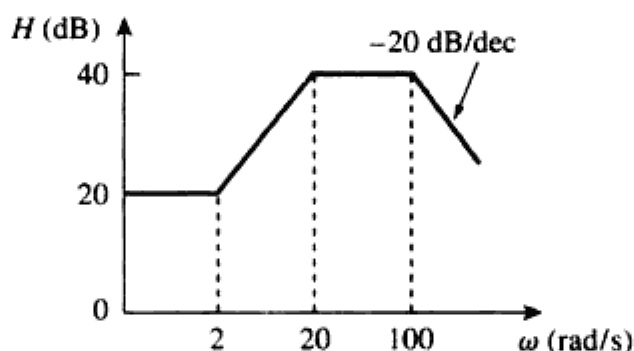


图 14-74 习题 14-22 的电路原理图

14-23 $\boldsymbol{H}(\omega)$的幅度伯德图如图14-75所示，试求 $\boldsymbol{H}(\omega)$。

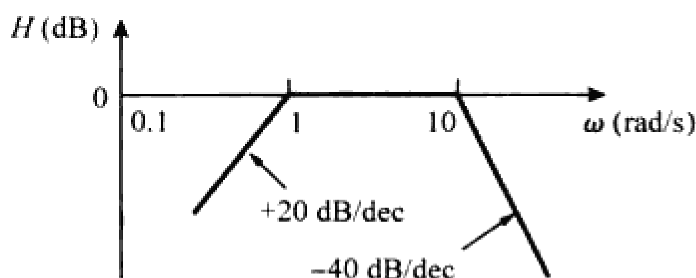


图 14-75 习题 14-23 的电路原理图

14-24 如图14-76所示幅频特性曲线表示某前置放大器的传递函数，试求$\boldsymbol{H}(s)$。

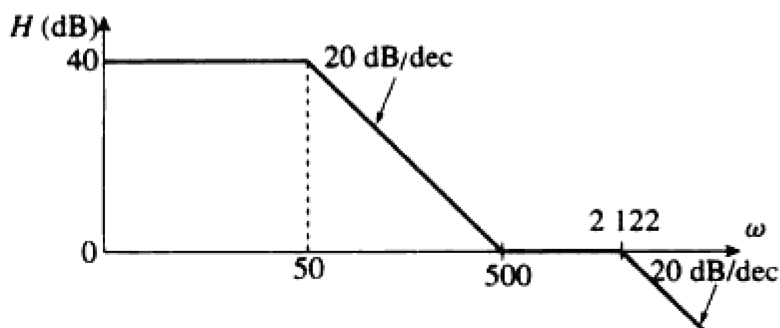


图 14-76 习题 14-24 的电路原理图

14.5 节

14-25 某RLC串联网络中，$R=2\ \mathrm{k\Omega}$，$L=40\ \mathrm{mH}$，$C=1\ \mu\mathrm{F}$，试求谐振时的阻抗以及在1/4、1/2、2、4倍谐振频率处的阻抗。

14-26 某电阻值为3 Ω，电感值为100 mH的线圈与50 pF电容器、6 Ω电阻器以及在所有频率处都产生110 Vrms的信号发生器相串联。试计算该RLC串联谐振电路谐振时的ω_0、Q以及B。

14-27 试设计一个谐振频率为$\omega_0=40$ rad/s，带宽为$B=10$ rad/s的RLC串联谐振电路。

14-28 试设计一个带宽为$B=20$ rad/s，谐振频率为$\omega_0=1\,000$ rad/s 的RLC串联谐振电路，并求该电路的Q值。假定$R=10\ \Omega$。

14-29 在如图14-77所示电路中，$v_s=20\cos(at)$ V，试求从电容器两端看进去的ω_0、Q以及B。

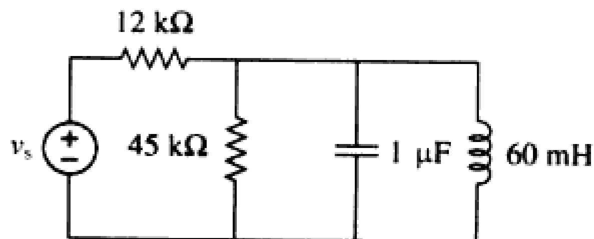


图 14-77 习题 14-29 的电路原理图

14-30 某电路由电感值为10 mH、电阻值为20 Ω的线圈与电容器、电压均值为120 V的信号发生器串联组成。试求：

(a) 使得该电路谐振于15 kHz的电容值；

(b) 谐振时流过该线圈的电流；

(c) 该电路的Q值。

14.6 节

14-31 试设计一个$\omega_0=10$ rad/s、$Q=20$的RLC并联谐振电路，并计算该电路的带宽。假定$R=10\ \Omega$。

14-32 某RLC并联谐振电路的参数如下：

$R=60\ \Omega$，$L=1$ mH，$C=50\ \mu$F

试求该RLC谐振电路的品质因数、谐振频率与带宽。

14-33 某品质因数为120的并联谐振电路的谐振频率为6×10^6 rad/s，试计算其带宽与半功率频率。

14-34 某RLC并联电路的谐振频率为5.6 MHz，品质因数为80，电阻支路的电阻值为40 kΩ。试确定另外两个支路的L与C的值。

14-35 某RLC并联电路的$R=5\ \text{k}\Omega$，$L=8\ \text{mH}$，$C=60\ \mu\text{F}$，试确定：

(a) 谐振频率；(b) 带宽；(c) 品质因数。

14-36 某RLC并联谐振电路的中心频率导纳为25×10^3 S，品质因数为80，谐振频率为200 krad/s，试计算其R、L、C的值，并求出带宽与半功率频率。

14-37 试对并联连接的元件，重做习题14-25。

14-38 试求如图14-78所示电路的谐振频率。

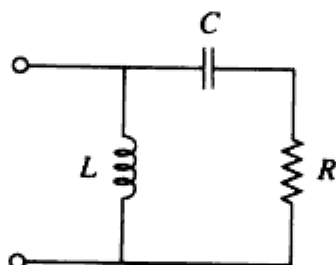


图 14-78 习题 14-38 的电路原理图

14-39 试求如图14-79所示“储能”电路的谐振频率。

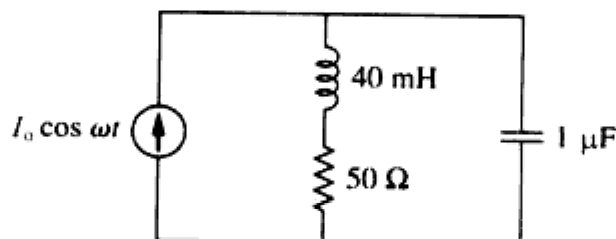


图 14-79 习题 14-39 与习题 14-91 的电路原理图

14-40 某并联谐振电路的电阻为2 kΩ，半功率频率为86 kHz与90 kHz，试确定：

(a) 电容值；(b) 电感值；(c) 谐振频率；(d) 带宽；(e) 品质因数。

14-41 对于如图14-80所示的电路，

(a) 试计算谐振频率ω_0，品质因数Q以及带宽B；

(b) 为使带宽加倍，与20 μF电容器串联的电容值应为多大？

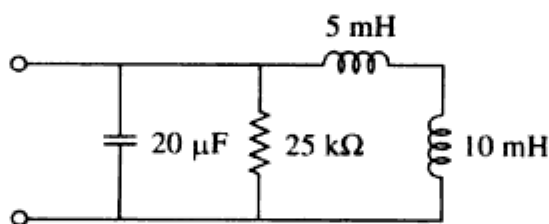
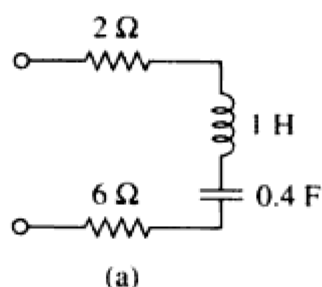


图 14-80 习题 14-41 的电路原理图

14-42 对如图14-81所示电路，试求谐振频率ω_0、品质因数Q以及带宽B。



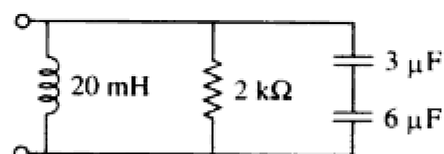
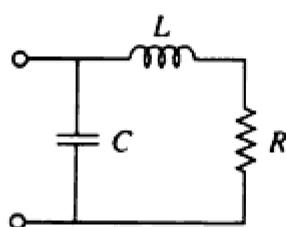


图 14-81 习题 14-42 的电路原理图

14-43 试计算如图14-82所示各电路的谐振频率。



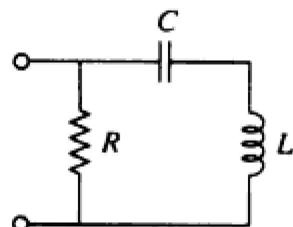


图 14-82 习题 14-43 的电路原理图

*14-44 对如图14-83所示电路，试求：(a) 谐振频率ω_0；(b) $\boldsymbol{Z}_{\text{in}}(\omega_0)$。

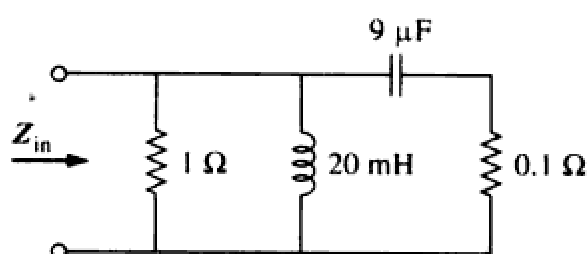


图 14-83

14-45 对如图14-84所示电路，试求从电感器两端看进去的ω_0、B以及Q。

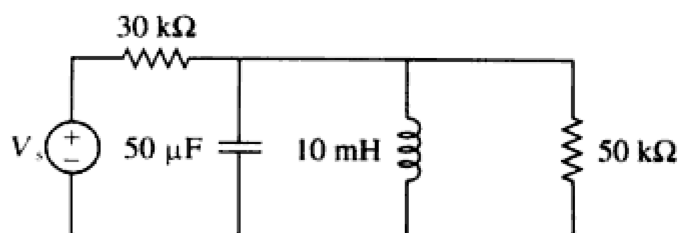


图 14-84 习题 14-45 的电路原理图

14-46 对如图14-85所示网络，试求：(a) 传递函数$\boldsymbol{H}(\omega)=\boldsymbol{V}_o(\omega)/\boldsymbol{I}(\omega)$；(b) $\omega_0=1$ rad/s时$\boldsymbol{H}$的幅度。

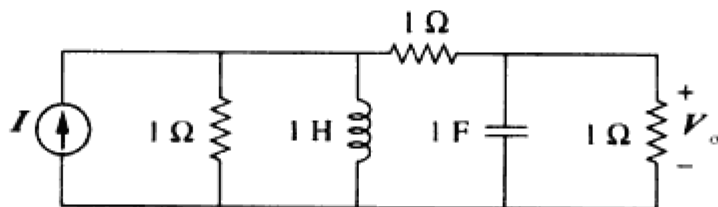


图 14-85　习题 14-46、习题 14-78 与习题 14-92 的电路原理图

14.7 节

14-47　试证明当输出取自电阻器两端时，LR串联电路为低通滤波器，并计算当$L = 2$ mH且$R = 10$ kΩ时的转折频率f_c。

14-48　试求如图14-86所示电路的传递函数V_o/V_s，并证明该电路为低通滤波器。

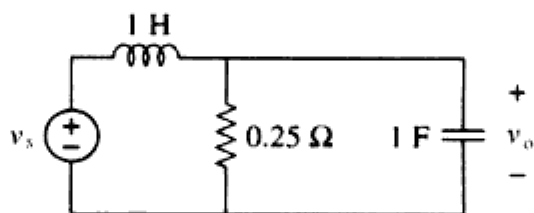


图 14-86　习题 14-48 的电路原理图

14-49　试确定低通滤波器$\boldsymbol{H}(\omega) = \dfrac{4}{2 + j\omega 10}$的转折频率，试求$\omega = 2$ rad/s时$\boldsymbol{H}(\omega)$的增益（单位为dB）与相位。

14-50　试确定如图14-87所示滤波器的类型，并计算转折频率f_c。

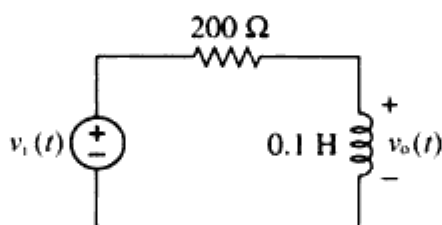


图 14-87　习题 14-50 的电路原理图

14-51 e2d　试利用一个40 mH线圈设计一个截止频率为5 kHz的RL低通滤波器。

14-52　某高通RL滤波器的截止频率为100 kHz，$L = 40$ mH，试求R。

14-53 e2d　试设计一个截止频率为10 kHz与11 kHz的RLC串联带通滤波器，假定$C = 80$ pF，试求R、L与Q。

14-54 e2d　试设计一个$\omega_0 = 10$ rad/s，$Q = 20$的无源带通滤波器。

14-55　试确定$R = 10$ Ω、$L = 25$ mH、$C = 0.4$ μF的RLC串联带通滤波器的频率范围，并计算其品质因数。

14-56　(a) 对于带通滤波器，试证明传递函数为：

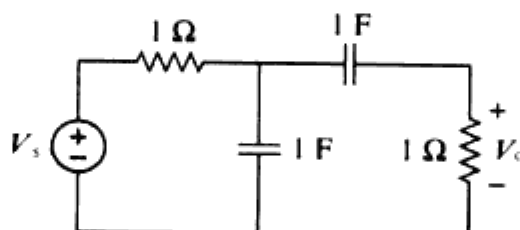
$$\boldsymbol{H}(s) = \frac{sB}{s^2 + sB + \omega_0^2}, \qquad s = j\omega$$

其中，B = 滤波器的带宽，ω_0是中心频率。

(b) 试证明带阻滤波器的传递函数为：

$$\boldsymbol{H}(s) = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + sB + \omega_0^2}, \qquad s = j\omega$$

14-57　试确定如图14-88所示带通滤波器的中心频率与带宽。



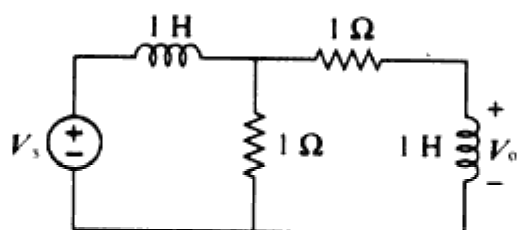


图 14-88　习题 14-57 的电路原理图

14-58　某RLC串联带阻滤波器的电路参数为：$R = 2$ kΩ，$L = 0.1$ H，$C = 40$ pF，试计算：

(a) 中心频率；

(b) 半功率频率；

(c) 品质因数。

14-59　试求如图14-89所示带阻滤波器的带宽与中心频率。

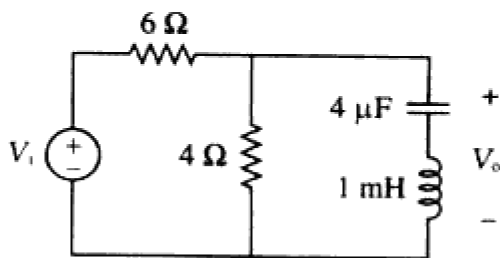


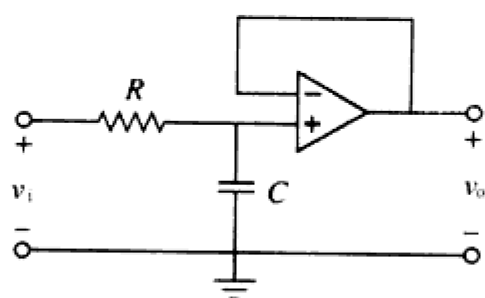
图 14-89　习题 14-59 的电路原理图

14.8 节

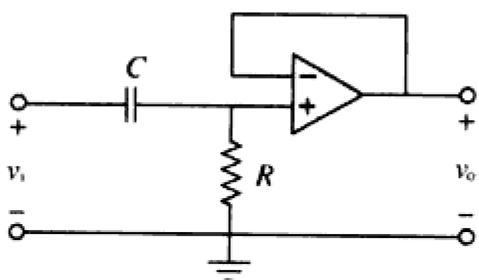
14-60　试确定通带增益为10、截止频率为50 rad/s

的高通滤波器的传递函数。

14-61 试求如图14-90所示各有源滤波器的传递函数。



(a)



(b)

图 14-90 习题 14-61 与习题 14-62 的电路原理图

14-62 如图14-90b所示滤波器的3 dB截止频率为1 kHz。如果输入与一个120 mV频率可变信号相连，试求如下频率处的输出电压：(a) 200 Hz；(b) 2 kHz；(c) 10 kHz

14-63 试利用1 μF电容器设计一个传递函数为$H(s)=-\dfrac{100s}{s+10}$，$s=j\omega$的一阶有源高通滤波器。

14-64 试确定如图14-91所示有源滤波器的传递函数，并说明该滤波器属于哪种类型？

14-65 某高通滤波器如图14-92所示，试证明其传递函数为：

$$H(\omega)=\left(1+\frac{R_f}{R_i}\right)\frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}$$

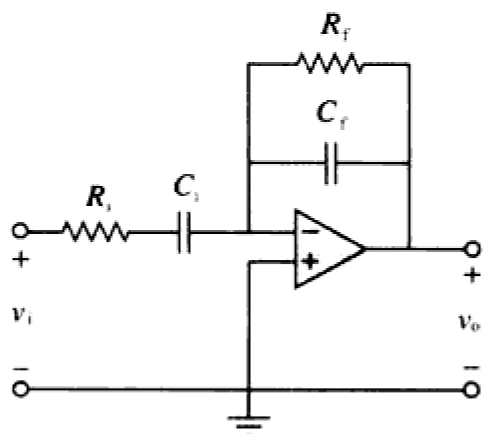


图 14-91 习题 14-64 的电路原理图

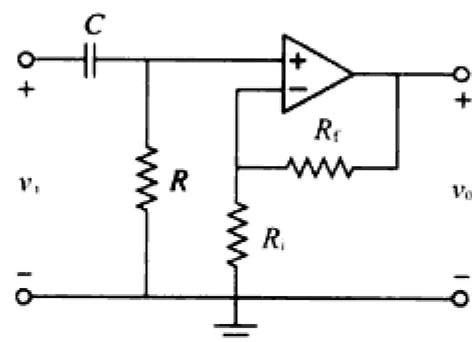


图 14-92 习题 14-65 的电路原理图

14-66 “通用”一阶滤波器如图14-93所示，

(a) 试证明其传递函数为：

$$H(s)=\frac{R_4}{R_3+R_4}\times\frac{s+(1/R_1C)[R_1/R_2-R_3/R_4]}{s+1/R_2C},$$
$$s=j\omega$$

(b) 要使电路成为一个高通滤波器，必须满足什么条件？

(c) 要使电路成为一个低通滤波器，必须满足什么条件？

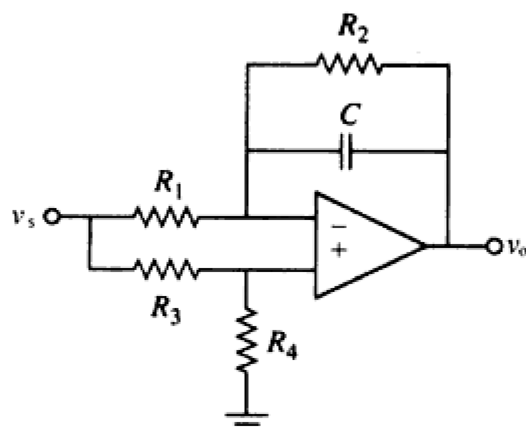


图 14-93 习题 14-66 的电路原理图

14-67 e2d 试设计一个直流增益为0.25，转折频率为500 Hz的有源低通滤波器。

14-68 e2d 试设计一个高频增益为5，转折频率为200 Hz的有源高通滤波器。

14-69 e2d 试设计满足下列要求的如图14-94所示的滤波器：

(a) 滤波器在2kHz时的输出信号比10 MHz时的输出信号衰减3 dB；

(b) 滤波器对于输入$v_s(t)=4\sin(2\pi\times10^8 t)$ V的稳态输出为$v_o(t)=10\sin(2\pi\times10^8 t+180°)$ V。

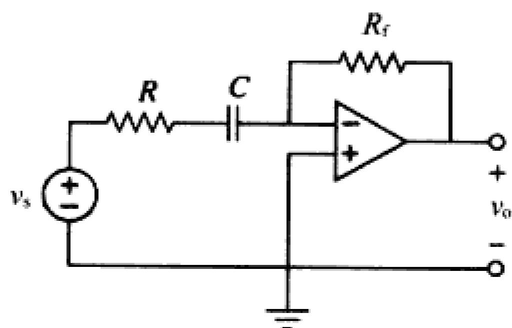


图 14-94

*14-70 某二阶有源巴特沃思滤波器如图14-95所示。

(a) 试求传递函数V_o/V_i；

(b) 试证明该滤波器是一个低通滤波器。

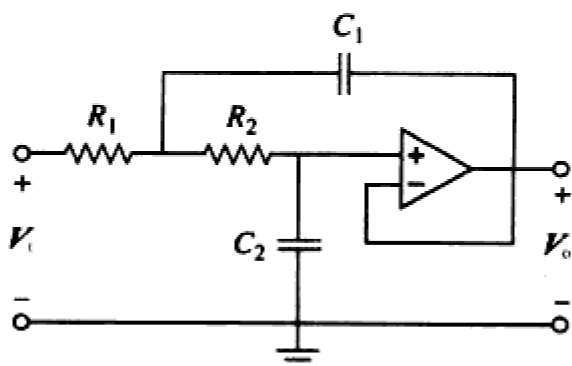


图 14-95 习题 14-70 的电路原理图

14.9 节

14-71 试利用幅度与频率比例变换确定如图14-76所示电路的等效电路，图中电感器与电容器分别为1 H与1 F。

14-72 将4 mH电感器与20 μF电容器转换为1 H与2 F，试问K_m与K_s的值分别为多少？

14-73 当幅度转换比例为800，频率转换比例为1 000时，试计算得到$R=12$ kΩ、$L=40$ μH、$C=300$ nF所需的R、L、C的值。

14-74 某电路的$R_1=3$ Ω，$R_2=10$ Ω，$L=2$ H，$C=1/10$ F，对该电路进行变换的幅度比例因子为100，频率比例因子为10^6，试求电路元件的新值。

14-75 在某RLC电路中，$R=20$ Ω，$L=4$ H，$C=1$ F，对该电路进行变换的幅度比例因子为10，频率比例因子为10^5，试计算元件的新值。

14-76 已知某RLC并联电路的$R=5$ kΩ，$L=10$ mH，$C=20$ μF，如果该电路的幅度比例转换因子为$K_m=500$，频率比例转换因子$K_f=10^5$，试求所得到的R、L与C的值。

14-77 某RLC串联电路的$R=10$ Ω，$\omega_0=40$ rad/s，$B=5$ rad/s，试求电路进行如下比例转换后的L与C的值：

(a) 幅度比例转换因子$K_m=600$；(b) 频率比例转换因子$K_f=1\ 000$；(c) 幅度比例转换因子$K_m=400$且频率比例转换因子$K_f=10^5$。

14-78 试重新设计如图14-85所示电路，使所有电阻元件的比例转换因子为1 000，所有频率元件的比例转换因子为10^4。

*14-79 参见如图14-96所示网络：

(a) 试求$Z_{in}(s)$；(b) 通过$K_m=10$，$K_f=100$对元件进行比例转换，试求$Z_{in}(s)$与ω_0。

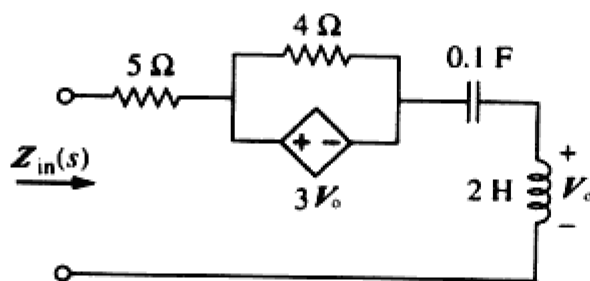


图 14-96 习题 14-79 的电路原理图

14-80 (a) 对于如图14-97所示电路，试画出经$K_m=200$与$K_f=10^4$比例转换后的新电路。

(b) 试确定转换后的新电路在$\omega=10^4$ rad/s时从端口$a-b$处看进去的戴维南等效阻抗。

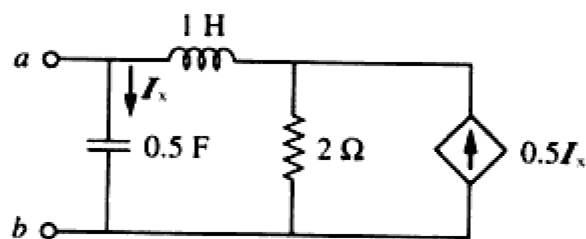


图 14-97 习题 14-80 的电路原理图

14-81 如图14-98所示电路的阻抗为：

$$Z(s)=\frac{1\,000(s+1)}{(s+1+\text{j}50)(s+1-\text{j}50)},\qquad s=\text{j}\omega$$

试求：

(a) R、L、C与G的值；(b) 通过频率比例转换将谐振频率提高10^3倍的元件值。

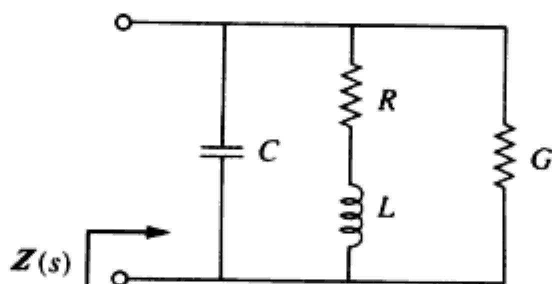


图 14-98 习题 14-81 的电路原理图

14-82 试对如图14-99所示有源低通滤波器进行比例转换，使其转折频率从1 rad/s升高至200 rad/s，采用1 μF电容器。

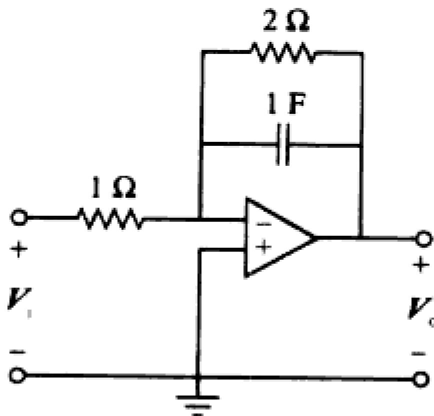


图 14-99 习题 14-82 的电路原理图

14-83 如图14-100所示运算放大器电路的幅度比例转换因子为100，频率比例转换因子为10^5，试求得到的元件值。

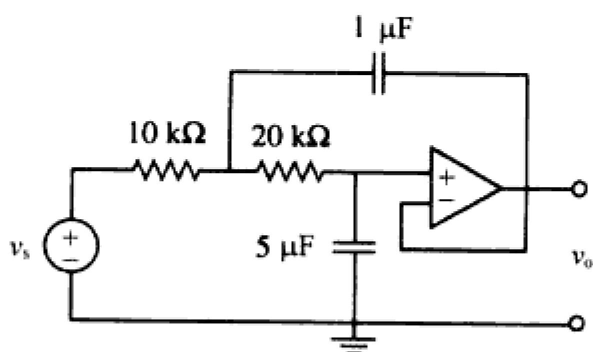


图 14-100 习题 14-83 的电路原理图

14.10 节



14-84 试利用PSpice确定如图14-101所示电路的频率响应。

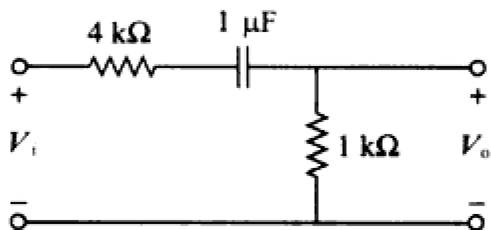


图 14-101 习题 14-84 的电路原理图

14-85 试利用PSpice确定如图14-102所示电路V_o/I_s的幅频特性曲线与相频特性曲线。

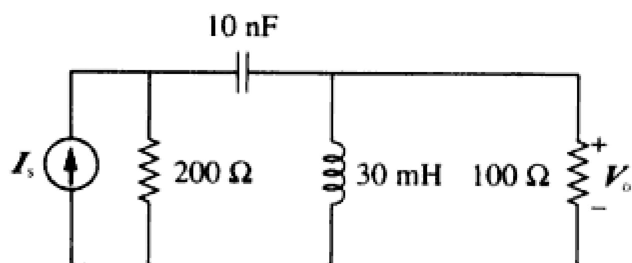


图 14-102 习题 14-85 的电路原理图

14-86 试利用PSpice确定如图14-103所示电路的频率响应（i的幅度和相位），假定线性频率扫描的范围为1 ~ 10 000 Hz。

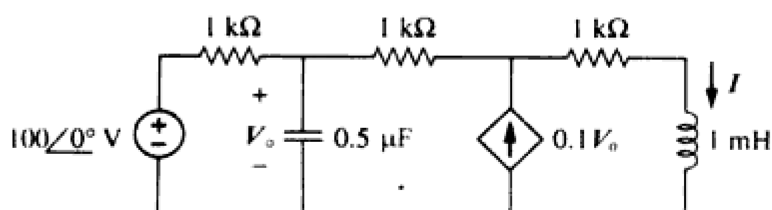


图 14-103 习题 14-86 的电路原理图

14-87 试画出如图14-104所示网络在区间0.1Hz < f < 100 Hz内的响应曲线，并确定该滤波器的类型以及ω_0。

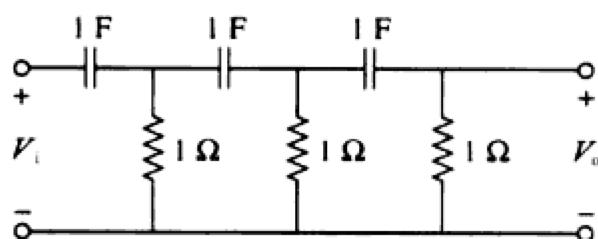


图 14-104 习题 14-87 的电路原理图

14-88 试利用PSpice绘制如图14-105所示电路中V_o的幅度伯德图与相位伯德图。

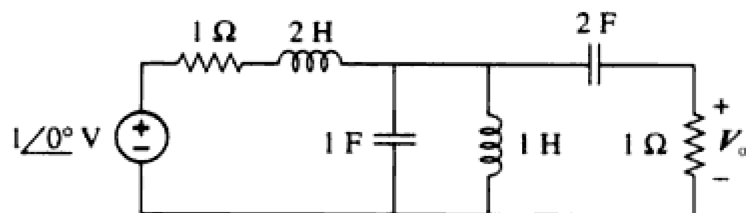


图 14-105 习题 14-88 的电路原理图

14-89 试确定如图14-106所示网络中响应V_o在频率区间100Hz < f < 1000 Hz内的幅频特性曲线。

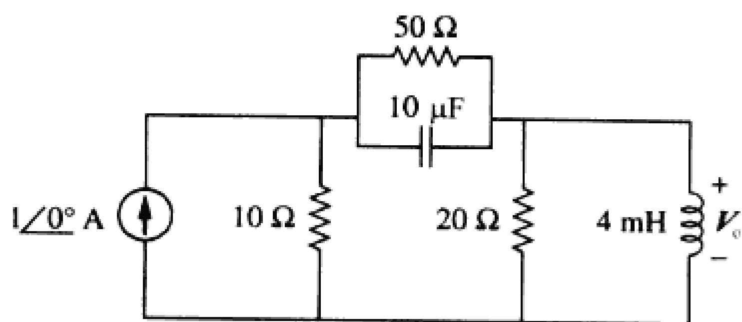


图 14-106 习题 14-89 的电路原理图

14-90 试确定如图14-40所示电路（见练习题14-10）的频率响应，假定$R_1=R_2=100\ \Omega$，$L=2$ mH且频率区间为1Hz < f < 100 000 Hz。

14-91 对于如图14-79所示“储能”电路，试利用PSpice确定(电容器两端电压的)频率响应，并确定该电路的谐振频率。

14-92 试利用PSpice绘制如图14-85所示电路的幅频特性曲线。

14.12 节

14-93 对于如图14-107所示的移相器电路，试求$\boldsymbol{H}=V_o/V_s$。

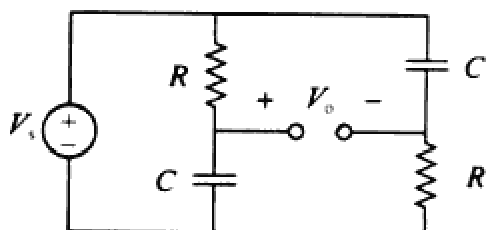


图 14-107 习题 14-93 的电路原理图

14-94 在某紧急情况下，工程师需要构造一个RC高通滤波器，现有一支10 pF电容器，一支30 pF电容器，一支1.8 kΩ电阻器以及一支3.3 kΩ电阻器。试求利用上述元件可能出现的最高截止频率。

14-95 某串联调谐天线电路由一支可变电容器(40～360 pF）与一支直流电阻值为12 Ω的240 μH天线线圈构成。

(a) 试求该收音机可调谐的无线电信号的频率范围；

(b) 试确定该频率范围两端的Q值。

14-96 如图14-108所示的交叉电路是与低频扬声器相连的低通滤波器，试求传递函数$\boldsymbol{H}(\omega)=\boldsymbol{V}_o(\omega)/\boldsymbol{V}_i(\omega)$。

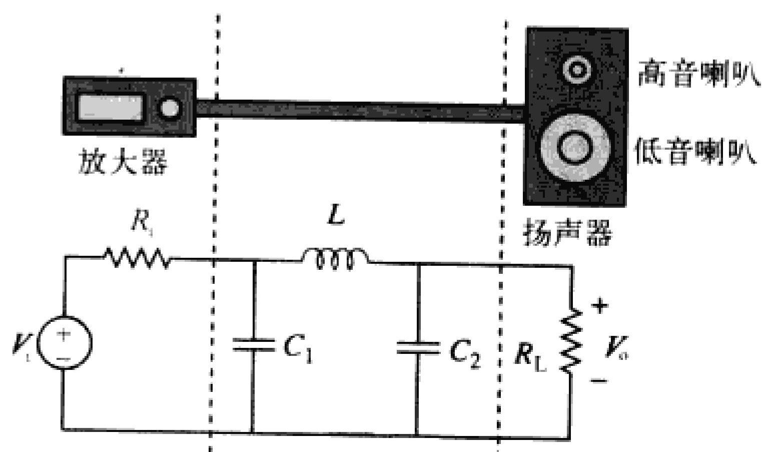


图 14-108 习题 14-96 的电路原理图

14-97 如图14-109所示的交叉电路是与高频扬声器相连的高通滤波器，试确定传递函数$\boldsymbol{H}(\omega)=\boldsymbol{V}_o(\omega)/\boldsymbol{V}_i(\omega)$。

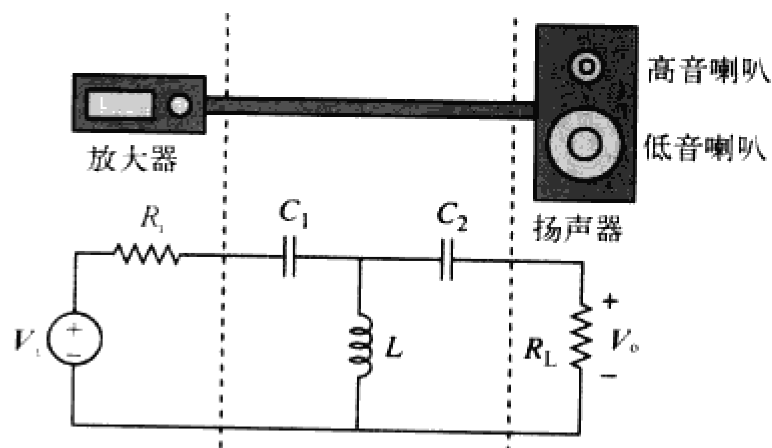


图 14-109 习题 14-97 的电路原理图

综合题

14-98 一个电子测试电路产生的谐振曲线的半功率频率为432 Hz与454 Hz，如果$Q=20$，试求该电路的谐振频率为多少?

14-99 某电子设备中使用了一个串联电路，该串联电路在2 MHz时的电阻值为100 Ω，容性电抗为5 kΩ，感性电抗为300 Ω，试求该电路的谐振频率与带宽。

14-100 在某应用中需设计一个简单的RC低通滤波器降低高频噪声。如果期望的转折频率为20 kHz，$C=0.5$ μF，试求电阻值R。

14-101 在放大器电路中需要采用一个简单的高通RC滤波器来阻隔直流分量，同时通过时变分量，如果要求滚降频率为15 Hz，$C=10$ μF，试求电阻值R。

14-102 实际的RC滤波器应包括电源电阻与负载电阻，如图14-110所示，如果$R=4$ kΩ，

$C=40$ nF，试确定如下两种情况下的截止频率：

(a) $R_s=0$，$R_L=\infty$；

(b) $R_s=1$ kΩ，$R_L=5$ kΩ

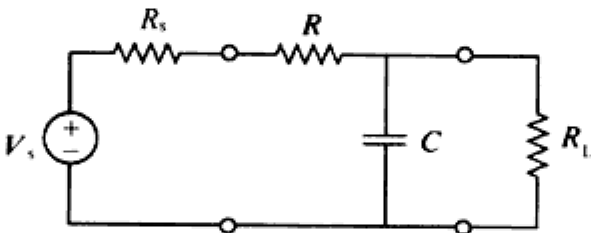


图 14-110

14-103 在系统设计中采用如图14-111所示的RC电路作相位超前补偿器，试确定该电路的传递函数。

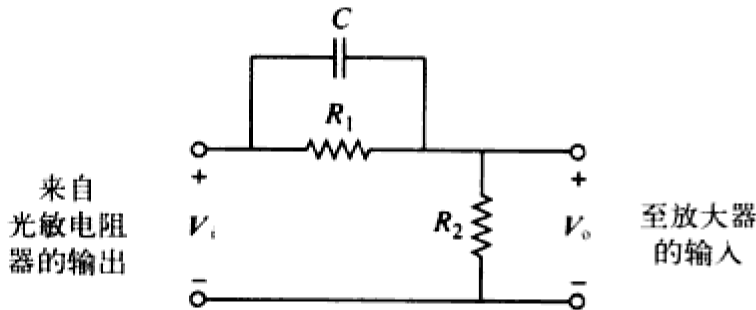


图 14-111 习题 14-103 的电路原理图

14-104 某低品质因数、双调谐带通滤波器如图14-112所示，试利用PSpice绘制$V_o(\omega)$的幅度特性曲线。

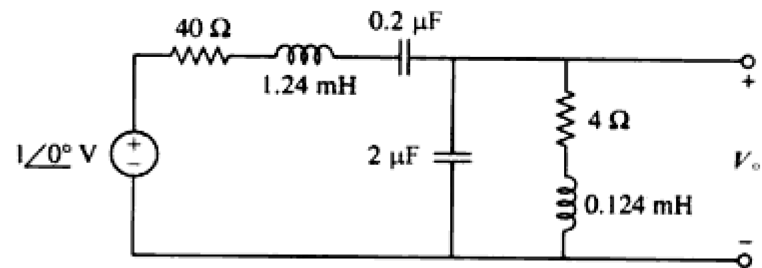


图 14-112

第三篇

高级电路分析

第 15 章 拉普拉斯变换简介

解决一个难题最重要的不是它的解决方法，而是在寻求解决方法的过程中获得的力量。

——无名氏

提高技能，拓展职业生涯

ABET EC 2000 标准（3.h）指出，“从全局与社会的角度理解工程解决方案的影响所必须的宽泛教育”

作为一名学生，必须相信你需要接受“从全局与社会的角度理解工程解决方案的影响所必须的宽泛教育”。在某种程度上，如果你已经注册了 ABET 认证的工程课程，那么要求你必修的某些课程必须满足这一标准。即便你注册了该课程，我也建议你选择所有选修课，从而确保拓展你对全局问题与社会问题的意识。未来社会的工程师必须充分认识到其本人及其从事的活动将以不同的方式影响我们所有人的生活。



查尔斯 · 亚历山大拍摄

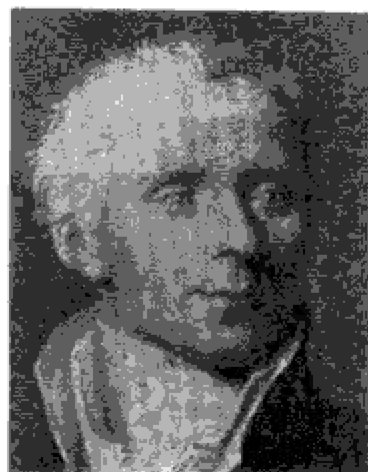
ABET EC 2000 标准（3.i）指出，“终身学习的必要性与能力”

必须充分地认识到“终身学习的必要性与能力”。强调这种必要性与能力看上去似乎很荒谬，然而，令人惊奇的是相当数量的工程师实际上并没有真正理解这一概念。真正能够跟上我们现在所面临的以及将来即将面临的技术发展的唯一途径就是不断地学习，不仅包括你所从事的领域中最新技术的学习，而且包括非技术问题的学习。

跟踪你所从事领域的尖端技术的最佳途径是通过你的同事以及专业技术机构（特别是 IEEE），广泛阅读最新的技术文章也是紧跟前沿的另一种最佳途径。

历史人物

皮埃尔 · 西蒙 · 拉普拉斯(Pierre Simon Laplace，1749—1827)，法国天文学家、数学家，他于 1779 年首先提出了以其名字命名的拉普拉斯变换，并将该变换用于微分方程的求解。



拉普拉斯出生在法国诺曼底的一个贫困家庭，20 岁就成为一位数学教授。他的数学才能令著名数学家西缅 · 泊松（Simeon Poisson）大为惊叹，他将拉普拉斯称为法国的艾萨克 · 牛顿(Isaac Newton)。拉普拉斯在位势理论、概率论、天文学以及天体力学等方面做出了许多重要贡献。他的专著 *Traite de Mecaniq ue Celeste*（天体力学）是对牛顿天文学研究的有益补充，并使他闻名于世。本章的主要内容——拉普拉斯变换——就是以他的名字命名的。

15.1 引言

本章以及后续几章的目的是介绍具有多种输入与响应的电路的分析方法，这类电路可以建模为

微分方程（differential equation），其解所描述的正是电路的完全响应特性，设计出来的数学方法可以系统地确定微分方程的解。下面就介绍这一强有力的方法——拉普拉斯变换（Laplace transformation），该方法可以将微分方程转换为代数方程（algebraic equation），从而极大地简化求解过程。

至此，读者应该对变换的思想比较熟悉了。在利用相量进行电路分析时，需要将电路从时域变换到频域或相量域，得到相量结果后，还可将其逆变换至时域。拉普拉斯变换方法也是同样的过程：首先利用拉普拉斯变换将电路从时域变换到频域，得到解之后，再利用拉普拉斯逆变换将结果逆变换至时域。

拉普拉斯变换的重要性体现在如下几个方面。首先，与相量分析相比，拉普拉斯变换适用于更广泛的输入；其次，由于拉普拉斯变换利用代数方程运算取代了微分方程运算，因此它提供了一种求解包含初始条件的电路问题的简便方法；最后，通过一次拉普拉斯变换即可确定包括固有响应与强迫响应在内的电路的全响应。

本章首先给出拉普拉斯变换的定义，从而得到拉普拉斯变换的重要性质，通过这些性质即可说明如何利用拉普拉斯变换以及为什么要利用拉普拉斯变换，这也有助于我们更好地领会数学变换的思想。同时，研究电路分析中一些非常有用的拉普拉斯变换的性质。之后，讨论拉普拉斯逆变换、传递函数以及卷积。本章着重介绍拉普拉斯变换的基本原理，第 16 章将讨论拉普拉斯变换在电路分析、网络稳定性以及网络综合等方面的应用。

15.2 拉普拉斯变换的定义

给定函数 $f(t)$，$F(s)$或$\mathcal{L}[f(t)]$表示其拉普拉斯变换，定义为：

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{15-1}$$

其中，s 为一个复数变量：

$$s = \sigma + \mathrm{j}\omega \tag{15-2}$$

由于式(15-1)中的指数 e 的辐角 st 必须是无量纲的，因此 s 应具有频率的量纲，单位为秒分之一（s^{-1}）或“频率”。式(15-1)中的积分下限为 0^-，表示恰好从 $t=0$ 时刻前开始。采用 0^- 作为积分下限是为了包括原点以及 $f(t)$在 $t=0$ 处的不连续性。也就是说拉普拉斯变换考虑到了在 $t=0$ 处不连续的函数，例如奇异函数的情况。

对于一般函数 $f(t)$，积分下限可以用 0 取代。

应该注意的是，式(15-1)所示的积分是关于时间的定积分，因此，积分的结果与时间无关，仅包含变量“s”。

式(15-1)说明了变换的一般概念，将函数 $f(t)$变换为函数 $F(s)$，前者的自变量为 t，而后者的自变量为 s。我们称该变换是从 t 域到 s 域的变换，如果将 s 解释为频率，则可得到拉普拉斯变换的如下描述：

拉普拉斯变换是函数 $f(t)$从时域到复频域的积分变换，表示为 $F(s)$。

当拉普拉斯变换用于电路分析时，可以在时域中用微分方程表示该电路，微分方程中的各项取代 $f(t)$，其拉普拉斯变换 $F(s)$构成的代数方程表示频域中的电路。

假定式(15-1)中的 $f(t)$在 $t<0$ 时可以忽略不计，为了确保如此，通常用单位阶跃函数乘以该函数，于是可以将 $f(t)$写为 $f(t)\,u(t)$或 $f(t)$，$t\geqslant 0$。

式(15-1)定义的拉普拉斯变换称为单边（one-sided，unilateral）拉普拉斯变换。双边（two-sided，bilateral）拉普拉斯变换定义为：

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{15-3}$$

式(15-1)所示的单边拉普拉斯变换对于本课程的学习已经足够，本书将仅采用这种单边拉普拉斯变换进行分析。

函数 $f(t)$的拉普拉斯变换可能不存在，为了使 $f(t)$ 的拉普拉斯变换存在，要求式(15-1)的积分必须收敛到一个有限值。由于对任何 t 值而言，$|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}|=1$，因此对某些实数值 $\sigma=\sigma_c$，式(15-1)的收敛条件为：

$$\int_{0^-}^{\infty}\mathrm{e}^{-\sigma t}\left|f(t)\right|\mathrm{d}t<\infty \tag{15-4}$$

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right|=\sqrt{\cos^2\omega t+\sin^2\omega t}=1$$

因此，拉普拉斯变换的收敛域为 $\mathrm{Re}(s)=\sigma>\sigma_c$，如图 15-1 所示。在该区域内$|F(s)|<\infty$，即 $F(s)$存在；在收敛区域外，$F(s)$无定义。幸运的是，本书在电路分析中感兴趣的所有函数均满足式(15-4)所示的收敛准则，均存在拉普拉斯变换。因此，在后续分析中无需确定 σ_c的值。

与式(15-1) 所示拉普拉斯正变换相对应的拉普拉斯逆变换为：

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma_1-\mathrm{j}\infty}^{\sigma_1+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s \tag{15-5}$$

其中，积分是沿收敛域 $\sigma_1>\sigma_c$内的直线（$\sigma_1+\mathrm{j}\omega$，$-\infty<\omega<\infty$）进行的，如图 15-1 所示。直接利用式(15-5)运算，需要具备超出本书范围的复分析的知识，因此，通常不直接利用式(15-5)计算拉普拉斯逆变换，而是利用 15.3 节提供的变换表来确定拉普拉斯逆变换。函数 $f(t)$与 $F(s)$可以看作是一对拉普拉斯变换对：

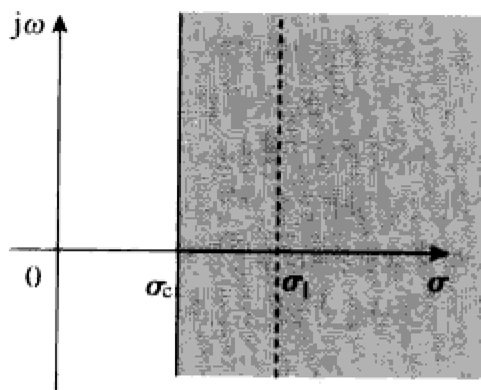


图 15-1 拉普拉斯变换的收敛域

$$f(t)\ \Leftrightarrow\ F(s) \tag{15-6}$$

即 $f(t)$与 $F(s)$之间为一对一的对应关系。以下例题将推导一些重要函数的拉普拉斯变换。

例题 15-1 试确定如下各函数的拉普拉斯变换：(a) $u(t)$；(b) $\mathrm{e}^{-at}u(t)$，$a\geqslant0$；(c) $\delta(t)$。

解 (a) 对于如图 15-2a 所示的单位阶跃函数 $u(t)$，其拉普拉斯变换为：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[u(t)\right]&=\int_{0^-}^{\infty}1\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{\infty}\\&=-\frac{1}{s}(0)+\frac{1}{s}(1)=\frac{1}{s}\end{aligned} \tag{15-1-1}$$

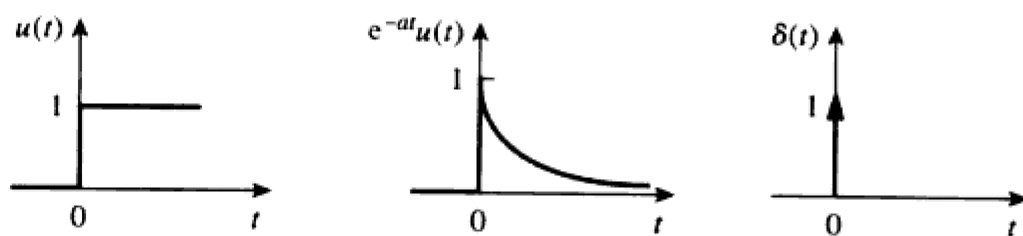
(b) 对于如图 15-2b 所示的指数函数，其拉普拉斯变换为：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-at}u(t)\right]&=\int_{0^-}^{\infty}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{s+a}\mathrm{e}^{-(s+a)t}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s+a}\end{aligned} \tag{15-1-2}$$

(c) 对于如图 15-2c 所示的单位冲激函数，由于冲激函数 $\delta(t)$在 $t=0$ 以外处处为零，因此其拉普拉斯变换为：

$$\mathcal{L}\left[\delta(t)\right]=\int_{0^-}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-0}=1 \tag{15-1-3}$$

式(15-1-3)利用了式(7-33)所示的冲激函数 $\delta(t)$的筛选性质。



(a) 单位阶跃函数 (b) 指数函数 (c) 单位冲激函数

图 15-2 例题 15-1 的波形图

练习题 15-1 试求如下函数的拉普拉斯变换：斜升函数 $r(t)=t\,u(t)$以及 $e^{at}\,u(t)$。
答 $1/s^2$，$1/(s-a)$。

例题 15-2 试确定函数 $f(t)=\sin\omega t\,u(t)$的拉普拉斯变换。
解 利用式(15-1)，即可得到正弦函数的拉普拉斯变换为：

$$F(s)=\mathcal{L}[\sin\omega t]=\int_0^{\infty}(\sin\omega t)e^{-st}\,dt=\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\right)e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{2j}\int_0^{\infty}(e^{-(s-j\omega)t}-e^{-(s+j\omega)t})\,dt$$

$$=\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

练习题 15-2 试求函数 $f(t)=\cos\omega t\,u(t)$的拉普拉斯变换。
答 $s/(s^2+\omega^2)$。

15.3 拉普拉斯变换的性质

掌握拉普拉斯变换的性质有助于我们直接确定函数的拉普拉斯变换，而不必像例题 15-1 那样按照式(15-1)直接计算。但在推导拉普拉斯变换的各项性质时，仍应记住式(15-1)的拉普拉斯变换定义式。

线性性质

如果 $F_1(s)$与 $F_2(s)$分别为$f_1(t)$与$f_2(t)$的拉普拉斯变换，则有：

$$\boxed{\mathcal{L}[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)]=a_1F_1(s)+a_2F_2(s)} \tag{15-7}$$

其中，a_1 与 a_2 为常数。式(15-7)即为拉普拉斯变换线性性质的数学表达式。式(15-7)的证明可由式(15-1)所示的拉普拉斯变换定义式得到。

例如，根据式(15-7)所示的线性性质，可以得到：

$$\mathcal{L}[\cos\omega t u(t)]=\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t})\right]=\frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{j\omega t}\right]+\frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{-j\omega t}\right] \tag{15-8}$$

由例题 15-1（b）可知，$\mathcal{L}[e^{-at}]=1/(s+a)$。因此，

$$\mathcal{L}[\cos\omega t u(t)]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{s+j\omega}\right)=\frac{s}{s^2+\omega^2} \tag{15-9}$$

比例性质

如果 $F(s)$为$f(t)$的拉普拉斯变换，则：

$$\mathcal{L}[f(at)]=\int_{0^-}^{\infty}f(at)e^{-st}\,dt \tag{15-10}$$

其中，a 为常数，且 $a>0$。令 $x=at$，$dx=a dt$，则有：

$$\mathcal{L}[f(at)]=\int_{0^-}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-x(s/a)}\frac{\mathrm{d}x}{a}=\frac{1}{a}\int_{0^-}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-x(s/a)}\mathrm{d}x \tag{15-11}$$

将该积分与式(15-1)所示的拉普拉斯变换的定义式相比较可见，式(15-1)中的 s 必须替换为 s/a，而积分变量 t 应替换为 x。因此，拉普拉斯变换的比例性质为：

$$\boxed{\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)} \tag{15-12}$$

例如，由例题 15-2 可知：

$$\mathcal{L}[\sin\omega t u(t)]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \tag{15-13}$$

利用式(15-12)所示的比例性质，可得：

$$\mathcal{L}[\sin 2\omega t u(t)]=\frac{1}{2}\frac{\omega}{(s/2)^2+\omega^2}=\frac{2\omega}{s^2+4\omega^2} \tag{15-14}$$

在式(15-13)中，用 2ω 取代 ω，同样可以得到上述结果。

时域平移性质

如果 $F(s)$ 为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换，则：

$$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)]=\int_{0^-}^{\infty}f(t-a)u(t-a)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \qquad a\geqslant 0 \tag{15-15}$$

由于当 $t<a$ 时，$u(t-a)=0$，当 $t>a$ 时，$u(t-a)=1$。因此，

$$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)]=\int_{a}^{\infty}f(t-a)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{15-16}$$

如果令 $x=t-a$，则 $dx=dt$，且 $t=x+a$。当 $t\to a$ 时，$x\to 0$，并且当 $t\to\infty$ 时，$x\to\infty$，于是：

$$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)]=\int_{0^-}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-s(x+a)}\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^{-as}\int_{0^-}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-as}F(s)$$

即：

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)]=\mathrm{e}^{-as}F(s)} \tag{15-17}$$

换言之，如果函数沿时间轴延迟时间 a，则在 s 域的结果是函数的（无延时）拉普拉斯变换乘以 e^{-as}，该性质称为拉普拉斯变换的*延时性质*（time delay property）或*时域平移性质*（time-shift property）。

例如，由式(15-9)可知：

$$\mathcal{L}[\cos\omega t u(t)]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

利用式(15-17)的时域平移性质，可以得到：

$$\mathcal{L}[\cos\omega(t-a)u(t-a)]=\mathrm{e}^{-as}\frac{s}{s^2+\omega^2} \tag{15-18}$$

频域平移性质

如果 $F(s)$ 为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换，则有：

$$\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-at}f(t)u(t)\right]=\int_0^{\infty}\mathrm{e}-at\,f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-(s+a)t}\,\mathrm{d}t=F(s+a)$$

即：

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-at}f(t)u(t)\right]=F(s+a)} \tag{15-19}$$

由此可见，$\mathrm{e}^{-at}f(t)$的拉普拉斯变换可以通过将$f(t)$的拉普拉斯变换中的 s 替换为$(s+a)$得到，通常称之为频域平移（frequency shift，frequency translation）性质。

例如，已知：

$$\cos\omega t u(t)\Leftrightarrow\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

和

$$\sin\omega t u(t)\Leftrightarrow\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \tag{15-20}$$

利用式(15-19)所示的平移性质，即可得到阻尼正弦函数与阻尼余弦函数的拉普拉斯变换为：

$$\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-at}\cos\omega t u(t)\right]=\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2} \tag{15-21a}$$

$$\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-at}\sin\omega t u(t)\right]=\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2} \tag{15-21b}$$

时域微分性质

已知 $F(s)$为$f(t)$的拉普拉斯变换，则$f(t)$导数的拉普拉斯变换为：

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}u(t)\right]=\int_{0^-}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \tag{15-22}$$

利用分部积分法，令 $u=\mathrm{e}^{-st}$，$\mathrm{d}u=-s\,\mathrm{e}^{-st}$，并且 $\mathrm{d}v=(\mathrm{d}f/\mathrm{d}t)\mathrm{d}t=\mathrm{d}f(t)$，$v=f(t)$，于是：

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}u(t)\right]=f(t)\mathrm{e}^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty}-\int_{0^-}^{\infty}f(t)\left[-s\mathrm{e}^{-st}\right]\mathrm{d}t$$

$$=0-f(0^-)+s\int_{0^-}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=sF(s)-f(0^-)$$

即：

$$\boxed{\mathcal{L}\left[f'(t)\right]=sF(s)-f(0^-)} \tag{15-23}$$

重复利用式(15-23)，可以得到$f(t)$二阶导数的拉普拉斯变换为：

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}t^2}\right]=s\mathcal{L}\left[f'(t)\right]-f'(0^-)=s\left[sF(s)-f(0^-)\right]-f'(0^-)$$

$$=s^2F(s)-sf(0^-)-f'(0^-)$$

即：

$$\boxed{\mathcal{L}\left[f''(t)\right]=s^2F(s)-sf(0^-)-f'(0^-)} \tag{15-24}$$

依此类推，即可得到$f(t)$ n 阶导数的拉普拉斯变换为：

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0^-)-s^{n-2}f'(0^-)-\cdots-s^0f^{(n-1)}(0^-) \tag{15-25}$$

例如，利用式(15-23)可以由余弦函数的拉普拉斯变换确定正弦函数的拉普拉斯变换：如果令 $f(t)=\cos\omega tu(t)$，则 $f(0)=1$， $f'(t)=-\omega\sin\omega tu(t)$。利用式(15-23)以及比例性质，可以得到：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin\omega tu(t)]&=-\frac{1}{\omega}\mathcal{L}[f'(t)]=-\frac{1}{\omega}\left[sF(s)-f(0^-)\right]\\&=-\frac{1}{\omega}\left(s\frac{s}{s^2+\omega^2}-1\right)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\end{aligned} \tag{15-26}$$

与已知的 $\sin\omega t$ 的拉普拉斯变换一致。

时域积分性质

如果 $F(s)$为$f(t)$的拉普拉斯变换，则$f(t)$积分的拉普拉斯变换为：

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\int_{0^-}^{\infty}\left[\int_0^t f(x)dx\right]e^{-st}dt \tag{15-27}$$

利用分部积分法，令：

$$u=\int_0^t f(x)dx, du=f(t)dt$$

并且，

$$dv=e^{-st}dt, v=-\frac{1}{s}e^{-st}$$

于是，

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\left[\int_0^t f(x)dx\right]\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Bigg|_{0^-}^{\infty}-\int_{0^-}^{\infty}\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}f(t)dt$$

对于上式等号右边的第一项，由于 $e^{-s\infty}$为零，所以该项在 $t=\infty$时等于零，并且由于$\frac{1}{s}\int_0^0 f(x)dx=0$，所以该项在 $t=0$ 时也为零，因此，第一项为零，即：

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\frac{1}{s}\int_{0^-}^{\infty}f(t)e^{-st}dt=\frac{1}{s}F(s)$$

亦即：

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\frac{1}{s}F(s) \tag{15-28}$$

例如，如果令 $f(t)=u(t)$，则由例题 15-1（a）可知，$F(s)=1/s$，利用式(15-28)可以得到：

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\mathcal{L}(t)=\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}\right)$$

因此，斜升函数的拉普拉斯变换为：

$$\mathcal{L}[t]=\frac{1}{s^2} \tag{15-29}$$

利用(15-28)可以得到：

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t tdt\right]=\mathcal{L}\left[\frac{t^2}{2}\right]=\frac{1}{s}\frac{1}{s^2}$$

即：

$$\mathcal{L}\left[t^2\right]=\frac{2}{s^3} \tag{15-30}$$

重复利用式(15-28)，即可得到：

$$\mathcal{L}\left[t^n\right]=\frac{n!}{s^{n+1}} \tag{15-31}$$

同理，利用分部积分法，可以证明：

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}F(s)+\frac{1}{s}f^{-1}(0^-) \tag{15-32}$$

其中，

$$f^{-1}(0^-)=\int_{-\infty}^{0^-} f(t)\mathrm{d}t$$

频域微分性质

如果 $F(s)$是为$f(t)$的拉普拉斯变换，即：

$$F(s)=\int_{0^-}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

两边对 s 求导数可得：

$$\frac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s}=\int_{0^-}^{\infty} f(t)(-t\,\mathrm{e}^{-st})\mathrm{d}t=\int_{0^-}^{\infty}(-tf(t))\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=L\left[-tf(t)\right]$$

于是，得到频域微分性质：

$$\boxed{\mathcal{L}\left[tf(t)\right]=-\frac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s}} \tag{15-33}$$

重复应用上述性质即可得到：

$$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right]=(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n F(s)}{\mathrm{d}s^n} \tag{15-34}$$

例如，由例题 15-1（b）可知$\mathcal{L}$ [e^{-at}] = $1/(s+a)$，利用式(15-33)的频域微分性质，得到：

$$\mathcal{L}\left[t\,\mathrm{e}^{-at}u(t)\right]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{s+a}\right)=\frac{1}{(s+a)^2} \tag{15-35}$$

注意，如果 $a=0$，则可得到$\mathcal{L}$ [t] = $1/s^2$，与式(15-29)相同，重复应用式(15-33)将会得到式(15-31)的结果。

时域周期性

如果函数$f(t)$为如图 15-3 所示的周期性函数，则可以表示为如图 15-4 所示的时间平移函数之和，于是：

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t)+f_3(t)+\cdots=f_1(t)+f_1(t-T)\,u(t-T)+f_1(t-2T)\,u(t-2T)+\cdots \tag{15-36}$$

其中，$f_1(t)$为$f(t)$在区间 $0<t<T$ 时通过门函数的部分，即：

$$f_1(t)=f(t)\left[u(t)-u(t-T)\right] \tag{15-37a}$$

或者

$$f_1(t)=\begin{cases}f(t), & 0<t<T\\ 0, & 其他\end{cases} \tag{15-37b}$$

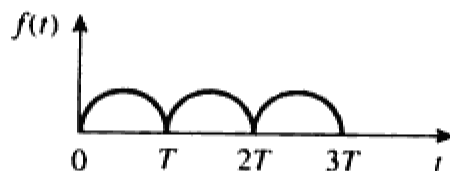


图 15-3 周期函数

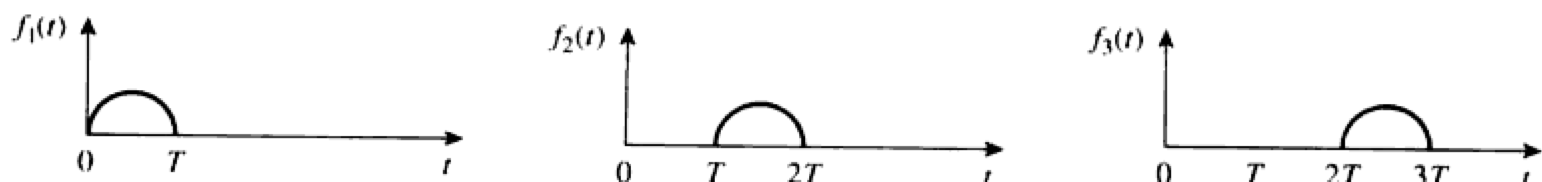


图 15-4　图 15-2 所示周期函数的分解

下面对式(15-36)中的各项进行拉普拉斯变换，并且利用式(15-17)所示的时域平移性质，可以得到：

$$F(s)=F_1(s)+F_1(s)\,\mathrm{e}^{-Ts}+F_1(s)\,\mathrm{e}^{-2Ts}+F_1(s)\,\mathrm{e}^{-3Ts}+\cdots=F_1(s)\,[1+\mathrm{e}^{-Ts}+\mathrm{e}^{-2Ts}+\mathrm{e}^{-3Ts}+\cdots] \tag{15-38}$$

然而，当$|x|<1$时，

$$1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x} \tag{15-39}$$

因此，

$$\boxed{F(s)=\frac{F_1(s)}{1-\mathrm{e}^{-Ts}}} \tag{15-40}$$

其中，$F_1(s)$为$f_1(t)$的拉普拉斯变换。换言之，$F_1(s)$是定义在第一周期的$f(t)$的拉普拉斯变换。式(15-40)表明，周期函数的拉普拉斯变换是该函数第一个周期的拉普拉斯变换除以$(1-\mathrm{e}^{-Ts})$。

初值定理与终值定理

利用初值定理与终值定理可以直接由 $f(t)$的拉普拉斯变换 $F(s)$确定出 $f(t)$的初始值 $f(0)$与终值$f(\infty)$。由式(15-23)所示的微分性质：

$$sF(s)-f(0)=\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right]=\int_{0^-}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \tag{15-41}$$

如果令$s\to\infty$，由于存在指数阻尼因子，因此式(15-41)所示的积分趋于零，即式(15-41)变为：

$$\lim_{s\to\infty}\left[sF(s)-f(0)\right]=0$$

由于$f(0)$与 s 无关，因此有：

$$\boxed{f(0)\lim_{s\to\infty}sF(s)} \tag{15-42}$$

此即初值定理（initial-value theorem）。例如，由式(15-21a)可知：

$$f(t)=\mathrm{e}^{-2t}\cos 10t \Leftrightarrow F(s)=\frac{s+2}{(s+2)^2+10^2} \tag{15-43}$$

利用初值定理，有：

$$\begin{aligned}f(0)&=\lim_{s\to\infty}sF(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s^2+2s}{s^2+4s+104}\\&=\lim_{s\to\infty}\frac{1+2/s}{1+4/s+104/s^2}=1\end{aligned}$$

结果与由$f(t)$确定的初值一致。

在式(15-41)中，令$s\to 0$，则有：

$$\lim_{s\to 0}\left[sF(s)-f(0^-)\right]=\int_{0^-}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{0t}\,\mathrm{d}t=\int_{0^-}^{\infty}\mathrm{d}f=f(\infty)-f(0^-)$$

即：

$$\boxed{f(\infty)=\lim_{s\to 0}sF(s)} \tag{15-44}$$

此即终值定理（final-value theorem）。终值定理成立的条件是 $F(s)$的所有极点必须落在左半 s 平面内

（参见图 15-1 或例题 15-9），也就是说，极点的实部必须是负的。唯一的例外是 $F(s)$在 $s=0$ 处有单极点，因为 $1/s$ 的影响可以被式(15-44)中的 $sF(s)$相抵消。例如，由式(15-21b)可得：

$$f(t)=\mathrm{e}^{-2t}\sin 5tu(t)\Leftrightarrow F(s)=\frac{5}{(s+2)^2+5^2} \tag{15-45}$$

应用终值定理，可以得到：

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0}sF(s)=\lim_{s\to 0}\frac{5s}{s^2+4s+29}=0$$

结果与$f(t)$确定的终值相一致。另一个例子如下：

$$f(t)=\sin tu(t)\Leftrightarrow f(s)=\frac{1}{s^2+1} \tag{15-46}$$

于是，

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0}sF(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s}{s^2+1}=0$$

这个结果是不正确的，因为$f(t)=\sin t$ 是 $+1$ 与 -1 之间的振荡函数，当 $t\to\infty$时的极限不存在。由于$F(s)$的极点位于 $s=\pm\mathrm{j}$，并不在左半 s 平面，所以不能利用终值定理确定 $f(t)=\sin\ t$ 的终值。一般而言，终值定理不适用于求正弦函数的终值，因为这类函数始终振荡，并不存在任何终值。

初值定理与终值定理建立了时域与 s 域中原点与无穷远点之间的关系，由此也可以检验拉普拉斯变换的正确性。

表 15-1 列出了拉普拉斯变换的基本性质，表中最后的一个（关于卷积的）性质将在 15.5 节中证明。虽然拉普拉斯变换还有一些其他性质，但表中所列性质对于本书的学习已经足够了。表 15-2 总结了一些常用函数的拉普拉斯变换，表中除必须之处外，均省略了因子 $u(t)$。

表 15-1 拉普拉斯变换的性质

性 质	$f(t)$	$F(s)$
线性性质	$a_1f_1(t)+a_2f_2(t)$	$a_1F_1(s)+a_2F_2(s)$
比例性质	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
时间平移	$f(t-a)u(t-a)$	$\mathrm{e}^{-as}F(s)$
频域平移	$\mathrm{e}^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
时域微分	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$	$sF(s)-f(0^-)$
	$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}t^2}$	$s^2F(s)-sf(0^-)-f'(0^-)$
	$\frac{\mathrm{d}^3f}{\mathrm{d}t^3}$	$s^3F(s)-s^2f(0^-)-sf'(0^-)$ $-f''(0^-)$
	$\frac{\mathrm{d}^nf}{\mathrm{d}t^n}$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0^-)-s^{n-2}f'(0^-)$ $-\cdots-f^{(n-1)}(0^-)$
时域积分	$\int_0^t f(t)\mathrm{d}t$	$\frac{1}{s}F(s)$
频域微分	$tf(t)$	$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s)$
频域积分	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s)\mathrm{d}s$
时域周期性	$f(t)=f(t+nT)$	$\frac{F_1(s)}{1-\mathrm{e}^{-sT}}$

（续）

性　质	$f(t)$	$F(s)$
初值定理	$f(0)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$
终值定理	$f(\infty)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$
卷积定理	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(s)f_2(s)$

应该指出的是，诸如 Mathcad、MATLAB、Maple 以及 Mathematica 等许多软件均提供符号运算，例如，Mathcad 就可以提供拉普拉斯变换、傅里叶变换和 Z 变换及其逆变换的符号数学运算。

表 15-2 拉普拉斯变换对*

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t+\theta)$	$\frac{s\sin\theta+\omega\cos\theta}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t+\theta)$	$\frac{s\cos\theta-\omega\sin\theta}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

*$f(t)$在 $t\geqslant 0$ 时有定义，当 $t<0$ 时，$f(t)=0$。

例题 15-3 试确定 $f(t)=\delta(t)+2u(t)-3e^{-2t}$，$t\geqslant 0$ 的拉普拉斯变换。

解 根据线性性质，有：

$$F(s)=\mathcal{L}[\delta(t)]+2\mathcal{L}[u(t)]-3\mathcal{L}\left[e^{-2t}u(t)\right]$$

$$=1+2\frac{1}{s}-3\frac{1}{s+2}=\frac{s^2+s+4}{s(s+2)}$$

练习题 15-3 试求 $f(t)=\cos 2t+e^{-3t}$，$t\geqslant 0$ 的拉普拉斯变换。

答 $\dfrac{2s^2+3s+4}{(s+3)(s^2+4)}$。

例题 15-4 试确定 $f(t)=t^2\sin 2t\,u(t)$的拉普拉斯变换。

解 已知

$$\mathcal{L}[\sin 2t]=\frac{2}{s^2+2^2}$$

利用式(15-34)所示的频域微分性质，可以得到：

$$F(s)=\mathcal{L}\left[t^2\sin 2t\right]=(-1)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{-4s}{(s^2+4)^2}\right)=\frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}$$

练习题 15-4 试求 $f(t)=t^2\cos 3t\,u(t)$的拉普拉斯变换。

答 $\dfrac{2s\left(s^2-27\right)}{\left(s^2+9\right)^3}$。

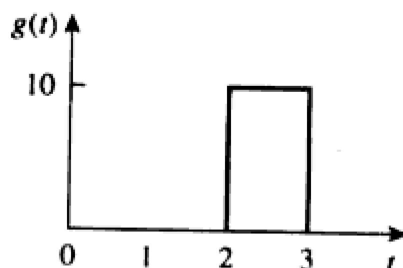


图 15-5 例题 15-5 的门函数

例题 15-5 试求如图 15-5 所示门函数的拉普拉斯变换。

解 如图 15-5 所示的门函数可以表示为：

$$g(t)=10\,[\,u(t-2)\;-u(t-3)\,]$$

由于已知 $u(t)$的拉普拉斯变换，因此利用时域平移性质，可以得到：

$$G(s)=10\left(\frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s}-\frac{\mathrm{e}^{-3s}}{s}\right)=\frac{10}{s}(\mathrm{e}^{-2s}-\mathrm{e}^{-3s})$$

练习题 15-5 试求如图 15-6 所示函数 $h(t)$的拉普拉斯变换。

答 $\dfrac{5}{s}(2-\mathrm{e}^{-2s}-\mathrm{e}^{-4s})$。

例题 15-6 试计算如图 15-7 所示周期函数的拉普拉斯变换。

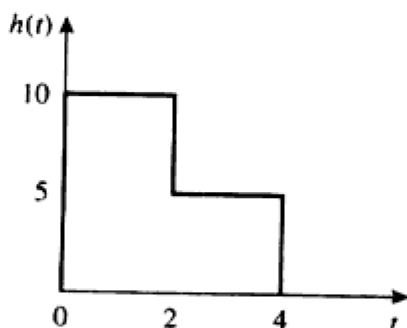


图 15-6 练习题 15-5 的函数波形图

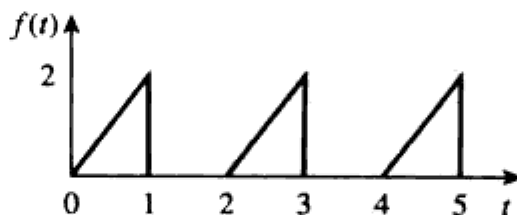


图 15-7 例题 15-6 的周期函数波形图

解 如图所示函数的周期为 $T=2$，首先利用式（15-40）可以确定该函数第一个周期的拉普拉斯变换。

$$f_1(t)=2\,t\,[\,u(t)\;-u(t-1)\,]=2\,t\,u(t)-2\,t\,u(t-1)$$
$$=2\,t\,u(t)-2(t-1+1)\,u(t-1)$$
$$=2\,t\,u(t)-2(t-1)\,u(t-1)-2\,u(t-1)$$

利用时域平移性质，可得：

$$F_1(s)=\frac{2}{s^2}-2\frac{e^{-s}}{s^2}-\frac{2}{s}e^{-s}=\frac{2}{s^2}(1-e^{-s}-se^{-s})$$

因此，如图 15-7 所示周期函数的拉普拉斯变换为：

$$F(s)=\frac{F_1(s)}{1-e^{-Ts}}=\frac{2}{s^2(1-e^{-2s})}(1-e^{-s}-se^{-s})$$

练习题 15-6 试确定如图 15-8 所示周期函数的拉普拉斯变换。

答 $\dfrac{1-e^{-2s}}{s(1-e^{-5s})}$。

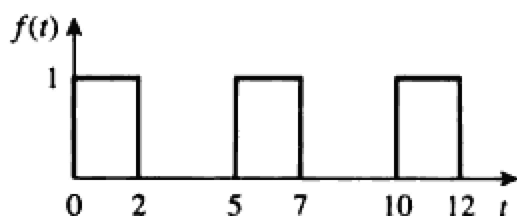


图 15-8 练习题 15-6 的周期函数波形图

例题 15-7 试求拉普拉斯变换为：

$$H(s)=\frac{20}{(s+3)(s^2+8s+25)}$$

的函数的初值域终值。

解 利用初值定理可得：

$$h(0)=\lim_{s\to\infty}sH(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{20s}{(s+3)(s^2+8s+25)}$$

$$=\lim_{s\to\infty}\frac{20/s^2}{(1+3/s)(1+8/s+25/s^2)}=\frac{0}{(1+0)(1+0+0)}=0$$

为了确定终值定理的适用性，需检验 $\boldsymbol{H}(s)$的极点位置。$\boldsymbol{H}(s)$的极点为 $s=-3$，$-4\pm j3$，这些极点的实部均为负数，即极点都位于左半 s 平面（如图 15-9 所示）。因此，满足终值定理的使用条件：

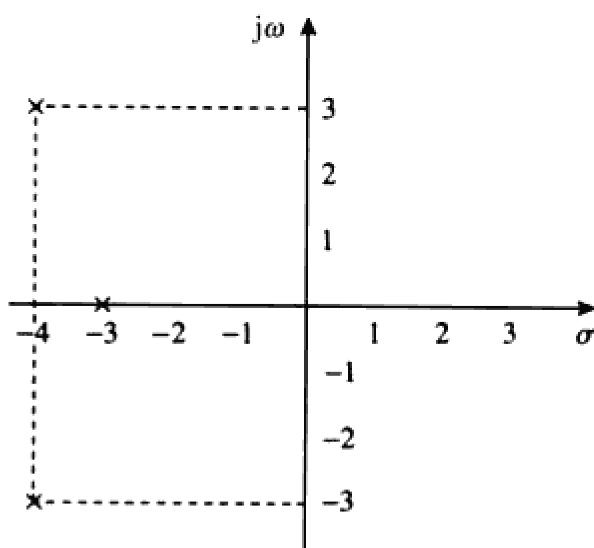


图 15-9 例题 15-7 中 $\boldsymbol{H}(s)$的极点分布图

$$h(\infty)=\lim_{s\to 0}sH(s)=\lim_{s\to 0}\frac{20s}{(s+3)(s^2+8s+25)}=\frac{0}{(0+3)(0+0+25)}=0$$

如果已知函数 $h(t)$，则由 $h(t)$也可以确定其初值与终值，参见例题 15-11，该例给出了函数 $h(t)$。

练习题 15-7 试确定 $G(s)=\dfrac{s^3+2s+6}{s(s+1)^2(s+3)}$ 的初值与终值。

答 1，2。

15.4 拉普拉斯逆变换

如果已知 $F(s)$，应如何将其逆变换至时域，得到对应的 $f(t)$呢？利用表 15-2 给出的拉普拉斯变换对求解 $f(t)$，即可避免使用式(15-5)直接进行计算。

假定 $F(s)$的一般形式为：

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)} \tag{15-47}$$

其中，$N(s)$为分子多项式，$D(s)$为分母多项式。$N(s)=0$ 的根称为 $F(s)$的*零点*（zero），而 $D(s)=0$ 的根称为 $F(s)$的*极点*（pole）。虽然式(15-47)与式(14-3)的形式类似，但是这里的 $F(s)$是某个函数的拉普拉斯变换，未必是传递函数。利用*部分分式展开*（partial fraction expansion）方法将 $F(s)$分解为一些

简单项之和，它们的逆变换可以由表 15-2 中查到。因此，确定 $F(s)$的拉普拉斯逆变换应包括两个步骤。

确定拉普拉斯逆变换的两个步骤如下：

(1) 利用部分分式展开将 $F(s)$分解为若干简单项之和；

(2) 利用表 15-2 给出的变换对确定各简单项的逆变换。

下面考虑 $F(s)$的三种可能形式，并介绍如何利用以上两个步骤确定每一种形式的逆变换。

利用诸如 MATLAB、Mathcad 以及 Maple 等软件包即可很容易地确定部分分式展开式。

15.4.1 单极点形式

由第 14 章可知，单极点就是一阶极点，如果 $F(s)$只有单极点，则 $D(s)$可以表示为一阶因式的乘积，即：

$$F(s)=\frac{N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \tag{15-48}$$

否则，必须首先利用长除法得到 $F(s)=N(s)/D(s)=Q(s)+R(s)/D(s)$，其中长除法的余式 $R(s)$的幂次小于 $D(s)$的幂次。

其中，$s=-p_1$，$-p_2$，…，$-p_n$ 为单极点，且 $p_i\neq p_j$，$i\neq j$（即各极点互不相同）。假定分子多项式 $N(s)$的幂次小于分母多项式 $D(s)$的幂次，利用部分分式展开法可将式(15-48)所示的 $F(s)$的分解为：

$$F(s)=\frac{k_1}{s+p_1}+\frac{k_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{k_n}{s+p_n} \tag{15-49}$$

展开式系数 k_1，k_2，…，k_n 称为 $F(s)$的*留数*（residues）。确定展开式系数的方法有多种，其中之一为*留数法*（residue method）。如果式(15-49)两边乘以$(s+p_1)$，则可得到：

$$(s+p_1)F(s)=k_1+\frac{(s+p_1)k_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{(s+p_1)k_n}{s+p_n} \tag{15-50}$$

由于 $p_i\neq p_j$，因此在式(15-50)中令 $s=-p_1$，将使得该式的右边仅保留 k_1。于是，

$$(s+p_1)F(s)\big|_{s=-p_1}=k_1 \tag{15-51}$$

因此，一般而言：

$$\boxed{k_i=(s+p_i)F(s)\big|_{s=-p_i}} \tag{15-52}$$

称之为*海维赛定理*（Heaviside's theorem）。一旦求出 k_i 的值，即可利用式(15-49)确定的 $F(s)$逆变换。由表 15-2 可知，式(15-49)中每一项的逆变换为$\mathcal{L}^{-1}[k/(s+a)]=k\mathrm{e}^{-at}u(t)$，于是：

$$\boxed{f(t)=(k_1\mathrm{e}^{-p_1t}+k_2\mathrm{e}^{-p_2t}+\cdots+k_n\mathrm{e}^{-p_nt})u(t)} \tag{15-53}$$

历史附注：海维赛定理是以英国工程师、算子微积分的先驱奥利弗·海维赛（Oliver Heaviside, 1850—1925）的名字命名的。

15.4.2 重极点形式

假定 $F(s)$在 $s=-p$ 处有 n 个重极点，则 $F(s)$可以表示为：

$$F(s)=\frac{k_n}{(s+p)^n}+\frac{k_{n-1}}{(s+p)^{n-1}}+\cdots+\frac{k_2}{(s+p)^2}+\frac{k_1}{s+p}+F_1(s) \tag{15-54}$$

其中，$F_1(s)$为 $F(s)$中 $s=-p$ 处没有极点的余部，展开式系数 k_n 的确定方法与前面一样，即：

$$k_n=(s+p)^nF(s)\big|_{s=-p} \tag{15-55}$$

为了确定 k_{n-1}，式(15-54)中的每一项都乘以$(s+p)^n$，并对 s 求导，从而消去 k_n，之后将 $s=-p$ 代入即可得到 k_{n-1}的值，即：

$$k_{n-1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[(s+p)^n F(s)\right]\Big|_{s=-p} \tag{15-56}$$

重复上述过程，有：

$$k_{n-2}=\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left[(s+p)^n F(s)\right]\Big|_{s=-p} \tag{15-57}$$

第 m 项的系数为：

$$k_{n-m}=\frac{1}{m!}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}s^m}\left[(s+p)^n F(s)\right]\Big|_{s=-p} \tag{15-58}$$

其中，$m=1, 2, \cdots, n-1$。随着 m 的增加，高阶微分的处理也较为困难。利用部分分式展开法求出 k_1，k_2，…，k_n的值后，即可确定式(15-54)右边各项的逆变换：

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)^n}\right]=\frac{t^{n-1}\mathrm{e}^{-at}}{(n-1)!}u(t) \tag{15-59}$$

从而得到：

$$f(t)=\left(k_1\mathrm{e}^{-pt}+k_2 t\mathrm{e}^{-pt}+\frac{k_3}{2!}t^2\mathrm{e}^{-pt}+\cdots+\frac{k_n}{(n-1)!}t^{n-1}\mathrm{e}^{-pt}\right)u(t)+f_1(t) \tag{15-60}$$

15.4.3 共轭复极点形式

如果共轭复极点对不是重复的，则称为单重共轭复极点；如果是有重复的，则称为二重或多重复极点。单重复极点的处理方法与单重实极点的处理方法相同，由于包含复数代数运算，所以使得结果相当繁琐。一种更为简便的的方法是完全平方法（completing the square），其思想是将 $D(s)$中的各复极点对（即二次项）表示成$(s+a)^2+\beta^2$的完全平方形式，之后再利用表 15-2 确定各项的逆变换。

由于 $N(s)$与 $D(s)$ 的多项式系数均为实数，而且实系数多项式的复数根必须是共轭成对的，因此，$F(s)$ 的一般形式为：

$$F(s)=\frac{A_1 s+A_2}{s^2+as+b}+F_1(s) \tag{15-61}$$

其中，$F_1(s)$为 $F(s)$的余部，它不含有共轭复极点。令

$$s^2+as+b=s^2+2\alpha s+\alpha^2+\beta^2=(s+\alpha)^2+\beta^2 \tag{15-62}$$

则可得到完全平方形式，同时令：

$$A_1 s+A_2=A_1(s+\alpha)+B_1\beta \tag{15-63}$$

则式(15-61)成为：

$$F(s)=\frac{A_1(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2+\beta^2}+\frac{B_1\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}+F_1(s) \tag{15-64}$$

由表 15-2 可查出其逆变换为：

$$f(t)=(A_1\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\beta t+B_1\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\beta t)u(t)+f_1(t) \tag{15-65}$$

利用式(9-11)可以将正弦项与余弦项合并。

无论是单极点、重极点还是复极点，用于确定多项式展开系数的一般方法称为代数方法（method of algebra），通过例题 15-9 至例题 15-11 予以说明。利用该方法时，首先将 $F(s)=N(s)/D(s)$展开为包含未知常数的表达式，利用一个公共分母乘以该展开式，之后通过系数相等来确定未知常数（即求

解使得 s 的相同幂次系数相等的联立方程组）。

另一种常用方法是代入一些特殊的、便于计算的 s 值，得到一个数量与未知系数一样多的联立方程组，之后求解出未知系数。注意，必须确保所选取的 s 值不能是 $F(s)$的任何一个极点。例题 15-11 说明了这种方法的基本思想。

例题 15-8 试求 $F(s)=\dfrac{3}{s}-\dfrac{5}{s+1}+\dfrac{6}{s^2+4}$的拉普拉斯逆变换。

解 $F(s)$的逆变换为：

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5}{s+1}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{s^2+4}\right)$$
$$=(3-5e^{-t}+3\sin 2t)u(t),t\geqslant 0$$

其中各项的逆变换可以由表 15-2 查出。

练习题 15-8 试确定 $F(s)=1+\dfrac{4}{s+3}-\dfrac{5s}{s^2+16}$ 的拉普拉斯逆变换。

答 $\delta(t)+(4\,e^{-3t}-5\cos 4t)u(t)$。

例题 15-9 已知 $F(s)=\dfrac{s^2+12}{s(s+2)(s+3)}$，试求 $f(t)$。

解 前一个例题中给出的就是部分分式形式，但本例与此不同，首先要确定部分分式展开。由于有三个极点，所以令：

$$\frac{s^2+12}{s(s+2)(s+3)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+3} \tag{15-9-1}$$

其中，A、B、C 为待定常数，可以利用两种方法确定待定常数。

方法 1：留数法

$$A=sF(s)\,|_{s=0}=\left.\frac{s^2+12}{(s+2)(s+3)}\right|_{s=0}=\frac{12}{(2)(3)}=2$$

$$B=(s+2)F(s)\,|_{s=-2}=\left.\frac{s^2+12}{s(s+3)}\right|_{s=-2}=\frac{4+12}{(-2)(1)}=-8$$

$$C=(s+3)F(s)\,|_{s=-3}=\left.\frac{s^2+12}{s(s+2)}\right|_{s=-3}=\frac{9+12}{(-3)(-1)}=7$$

方法 2：代数法，式(15-9-1)两边同乘以 $s(s+2)(s+3)$可以得到

$$s^2+12=A\,(s+2)\,(s+3)+Bs\,(s+3)+Cs\,(s+2)$$

即：

$$s^2+12=A\,(s^2+5s+6)\;\;+B\,(s^2+3s)+C\,(s^2+2s)$$

幂次相同的 s 的系数相等，得到：

常数项： $12=6A \;\Rightarrow\; A=2$

s： $0=5A+3B+2C \;\Rightarrow\; 3B+2C=-10$

s^2： $1=A+B+C \;\Rightarrow\; B+C=-1$

于是，$A=2$，$B=-8$，$C=7$，式（15-9-1）成为：

$$F(s)=\frac{2}{s}-\frac{8}{s+2}+\frac{7}{s+3}$$

求出每项的逆变换，可以得到：

$$f(t)=(2-8\,e^{-2t}+7\,e^{-3t})u(t)$$

练习题 15-9 如果 $F(s)=\dfrac{6(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+4)}$，试求 $f(t)$。

答 $f(t)=(e^{-t}+3e^{-3t}-4e^{-4t})\,u(t)$。

例题 15-10 已知 $V(s)=\dfrac{10s^2+4}{s(s+1)(s+2)^2}$，试计算 $v(t)$。

解 前面的例题说明的均是单极点情况，本例将说明重极点的情况。令：

$$V(s)=\frac{10s^2+4}{s(s+1)(s+2)^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{(s+2)^2}+\frac{D}{s+2} \tag{15-10-1}$$

方法 1：留数法

$$A=sV(s)|_{s=0}=\left.\frac{10s^2+4}{(s+1)(s+2)^2}\right|_{s=0}=\frac{4}{(1)(2)^2}=1$$

$$B=(s+1)V(s)|_{s=-1}=\left.\frac{10s^2+4}{s(s+2)^2}\right|_{s=-1}=\frac{14}{(-1)(1)^2}=-14$$

$$C=(s+2)^2V(s)|_{s=-2}=\left.\frac{10s^2+4}{s(s+1)}\right|_{s=-2}=\frac{44}{(-2)(-1)}=22$$

$$D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[(s+2)^2V(s)\right]\Big|_{s=-2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{10s^2+4}{s^2+s}\right)\Big|_{s=-2}$$

$$=\left.\frac{(s^2+s)(20s)-(10s^2+4)(2s+1)}{(s^2+2)^2}\right|_{s=-2}=\frac{52}{4}=13$$

方法 2：代数法，式(15-10-1)两边同乘以 $s(s+1)(s+2)^2$，可以得到

$$10s^2+4=A(s+1)(s+2)^2+Bs(s+2)^2+Cs(s+1)+Ds(s+1)(s+2)$$

即

$$10s^2+4=A(s^3+5s^2+8s+4)+B(s^3+4s^2+4s)+C(s^2+s)+D(s^3+3s^2+2s)$$

由对应系数相等，可得

常数项：$4=4A \quad\Rightarrow\quad A=1$

s：$0=8A+4B+C+2D \quad\Rightarrow\quad 4B+C+2D=-8$

s^2：$10=5A+4B+C+3D \quad\Rightarrow\quad 4B+C+3D=5$

s^3：$0=A+B+D \quad\Rightarrow\quad B+D=-1$

求解上述联立方程组，可以得到 $A=1$，$B=-14$，$C=22$，$D=13$，于是，

$$V(s)=\frac{1}{s}-\frac{14}{s+1}+\frac{13}{s+2}+\frac{22}{(s+2)^2}$$

对各项取逆变换，可以得到：

$$v(t)=(1-14\,e^{-t}+13\,e^{-2t}+22\,te^{-2t})u(t)$$

练习题 15-10 如果 $G(s)=\dfrac{s^3+2s+6}{s(s+1)^2(s+3)}$，试确定 $g(t)$。

答 $(2-3.25\,e^{-t}-1.5t\,e^{-t}+2.25\,e^{-3t})u(t)$。

例题 15-11 试求例题 15-7 中的频域函数 $H(s)=\dfrac{20}{(s+3)(s^2+8s+25)}$ 的逆变换。

解 本例中 $H(s)$在 $s^2+8s+25=0$ 处，即 $s=-4\pm j3$ 处有一对复共轭极点，令

$$H(s)=\frac{20}{(s+3)(s^2+8s+25)}=\frac{A}{s+3}+\frac{Bs+C}{(s^2+8s+25)} \tag{15-11-1}$$

下面利用两种方法确定展开式系数。

方法 1：几种方法的组合。可以利用留数法确定系数 A。

$$A=(s+3)H(s)|_{s=-3}=\left.\frac{20}{s^2+8s+25}\right|_{s=-3}=\frac{20}{10}=2$$

虽然，也可以利用留数法确定系数 B 与 C，但为了避免复数运算，这里不采用留数法。而是将 s 的两个特定值（例如 $s=0$，1，它们不是 $F(s)$的极点）代入式(15-11-1)中，这样可以得到两个联立方程，由此即可求出 B 与 C 的值。如果令式（15-11-1）中的 $s=0$，则有

$$\frac{20}{75}=\frac{A}{3}+\frac{C}{25}$$

即

$$20=25A+3C \tag{15-11-2}$$

由于 $A=2$，代入式(15-11-2)即可得到 $C=-10$。将 $s=1$ 代入式(15-11-1)可以得到

$$\frac{20}{(4)(34)}=\frac{A}{4}+\frac{B+C}{34}$$

即

$$20=34A+4B+4C \tag{15-11-3}$$

而 $A=2$，$C=-10$，代入式(15-11-3)可得 $B=-2$。

方法 2：代数法。式(15-11-1)两边同乘以$(s+3)(s^2+8s+25)$，得到

$$\begin{aligned}20&=A(s^2+8s+25)+(Bs+C)(s+3)\\&=A(s^2+8s+25)+B(s^2+3s)+C(s+3)\end{aligned} \tag{15-11-4}$$

由系数对应相等，可以得到

s^2： $0=A+B \quad\Rightarrow\quad A=-B$

s： $0=8A+3B+C=5A+C \quad\Rightarrow\quad C=-5A$

常数项： $20=25A+3C=25A-15A \quad\Rightarrow\quad A=2$

于是，$B=-2$，$C=-10$，因此

$$\begin{aligned}H(s)&=\frac{2}{s+3}-\frac{2s+10}{(s^2+8s+25)}=\frac{2}{s+3}-\frac{2(s+4)+2}{(s+4)^2+9}\\&=\frac{2}{s+3}-\frac{2(s+4)}{(s+4)^2+9}-\frac{2}{3}\frac{3}{(s+4)^2+9}\end{aligned}$$

上式中每一项取逆变换，得到

$$h(t)=\left(2e^{-3t}-2e^{-4t}\cos 3t-\frac{2}{3}e^{-4t}\sin 3t\right)u(t) \tag{15-11-5}$$

得到以上形式的答案即可。但是还可以将正弦项与余弦项合并一项，即

$$h(t)=(2\,e^{-3\,t}-Re^{-4t}\cos\,(3t-\theta))u(t) \tag{15-11-6}$$

由式(15-11-5)得到式(15-11-6)需利用式(9-11)。下面确定系数 R 与相位 θ。

$$R=\sqrt{2^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=2.108,\theta=\tan^{-1}\frac{\frac{2}{3}}{2}=18.43^\circ$$

于是得到

$$h(t)=(2\,e^{-3t}-2.108\,e^{-4t}\cos(3t-18.43°))\,u(t)$$

练习题 15-11 已知 $G(s)=\dfrac{10}{(s+1)(s^2+4s+13)}$，试求 $g(t)$。

答 $e^{-t}-e^{-2t}\cos 3t+\dfrac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t$，$t\geqslant 0$。

15.5 卷积积分

卷积（convolution）又称为*褶积*（folding），是工程师的一个无价工具，因为卷积提供了一种观测物理系统并刻划其特征的方法。例如，当已知系统的冲激响应为 $h(t)$时，可以利用卷积求解系统对激励 $x(t)$的响应 $y(t)$。确定系统响应时所利用的*卷积积分*（convolution integral）的定义为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda \tag{15-66}$$

或者简写为

$$y(t)=x(t)*h(t) \tag{15-67}$$

其中，λ 为一个虚变量，$*$号表示卷积。式(15-66)或式(15-67)表明系统的输出等于输入与单位冲激响应的卷积。卷积过程满足交换律。

$$y(t)=x(t)*h(t)=h(t)*x(t) \tag{15-68a}$$

即

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda)x(t-\lambda)\,d\lambda \tag{15-68b}$$

这表明两个函数卷积的顺序是无关紧要的，在稍后介绍的卷积积分的图解法中将会看到卷积积分交换律的应用。

两个信号的卷积包括：其中一个信号的时间反转、平移、与第二个信号的点对点相乘，以及乘积的积分几个过程。

式(15-66)所示的卷积积分为一般形式，适用于任何线性系统。然而，如果系统具有如下两个特性，卷积积分的表达式则可以简化。第一个性质是，如果当 $t<0$ 时，$x(t)=0$。则有：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda=\int_{0}^{\infty}x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda \tag{15-69}$$

第二个性质，如果系统的冲激响应是因果的（即 $h(t)=0$，$t<0$），那么当 $t-\lambda<0$ 即 $\lambda>t$ 时，$h(t-\lambda)=0$，于是，式(15-69)变为：

$$\boxed{y(t)=h(t)*x(t)=\int_{0}^{t}x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda} \tag{15-70}$$

卷积积分具有如下性质：

(1) $x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$（交换律）

(2) $f(t)*[x(t)+y(t)]=f(t)*x(t)+f(t)*y(t)$（分配律）

(3) $f(t)*[x(t)*y(t)]=[f(t)*x(t)]*y(t)$（结合律）

(4) $f(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\delta(t-\lambda)\,d\lambda=f(t)$

(5) $f(t)*\delta(t-t_o)=f(t-t_o)$

(6) $f(t)*\delta'(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\delta'(t-\lambda)\,d\lambda=f'(t)$

(7) $f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)u(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda = \int_{-\infty}^{t} f(\lambda)\mathrm{d}\lambda$

在学习如何计算式（15-70）所示的卷积积分之前，首先建立拉普拉斯变换与卷积积分之间的关系。如果两个函数$f_1(t)$与$f_2(t)$的拉普拉斯变换分别为$F_1(s)$与$F_2(s)$，则二者的卷积为

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\lambda) f_2(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{15-71}$$

取拉普拉斯变换，得到

$$F(s) = \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)F_2(s) \tag{15-72}$$

为了证明式(15-72)的正确性，首先考虑$F_1(s)$的定义。

$$F_1(s) = \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda)\mathrm{e}^{-s\lambda}\mathrm{d}\lambda \tag{15-73}$$

两边同乘以$F_2(s)$，可以得到

$$F_1(s)F_2(s) = \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda)\left[F_2(s)\mathrm{e}^{-s\lambda}\right]\mathrm{d}\lambda \tag{15-74}$$

利用式(15-17)所示的时域平移性质可知，上式中方括号内的项可以写为

$$\begin{aligned} F_2(s)\mathrm{e}^{-s\lambda} &= \mathcal{L}[f_2(t-\lambda)u(t-\lambda)] \\ &= \int_{0^-}^{\infty} f_2(t-\lambda)u(t-\lambda)\mathrm{e}^{-s\lambda}\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{15-75}$$

将式(15-75)代入式(15-74)得到

$$F_1(s)F_2(s) = \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda)\left[\int_{0^-}^{\infty} f_2(t-\lambda)u(t-\lambda)\mathrm{e}^{-s\lambda}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\lambda \tag{15-76}$$

交换积分顺序，得到

$$F_1(s)F_2(s) = \int_{0^-}^{\infty}\left[\int_{0^-}^{t} f_1(\lambda)f_2(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda\right]\mathrm{e}^{-s\lambda}\mathrm{d}t \tag{15-77}$$

因为时延单位阶跃函数当$\lambda < t$时，$u(t-\lambda)=1$，当$\lambda > t$时，$u(t-\lambda)=0$，所以上式方括号中的积分限为从 0 到 t。注意，方括号中的积分正是$f_1(t)$与$f_2(t)$的卷积，形式与式(15-71)相同，因此，

$$\boxed{F_1(s)F_2(s) = \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)]} \tag{15-78}$$

上式表明，时域的卷积等效于 s 域的相乘。例如，如果$x(t)=4e^{-t}$，$h(t)=5e^{-2t}$，那么利用式(15-78)的性质，可以得到

$$\begin{aligned} h(t) * x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[H(s)X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{5}{s+2}\right)\left(\frac{4}{s+1}\right)\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{20}{s+1} + \frac{-20}{s+2}\right] \\ &= 20(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}), t \geqslant 0 \end{aligned} \tag{15-79}$$

虽然可以利用式(15-78)求解两个信号的卷积，但是当$F_1(s)$ $F_2(s)$非常复杂时，求解其逆变换会变得相当困难。另外，在$f_1(t)$与$f_2(t)$为指数形式以及不存在显式拉普拉斯变换的情况下，就必须在时域计算卷积积分。

从图形的角度可以更好地理解时域中两个信号的卷积积分的计算过程。计算式(15-70)所示卷积积分的图解法通常包括如下四个步骤。

计算卷积积分的步骤：

(1) 折叠（反转）：做出$h(\lambda)$关于纵坐标轴的镜像图像，从而得到$h(-\lambda)$。

(2) 平移：将$h(-\lambda)$ 平移或延时 t，得到$h(t-\lambda)$。

(3) 相乘：求出 $h(t-\lambda)$与 $x(\lambda)$的乘积。

(4) 积分：对于给定时刻 t，计算乘积 $h(t-\lambda)\,x(\lambda)$，$0<\lambda<t$ 下的面积，从而得到 t 时刻的 $y(t)$。

步骤(1)中的折叠操作正是卷积这一术语的由来，之后函数 $h(t-\lambda)$扫过或滑过函数 $x(\lambda)$。从这种重叠运算的角度来看，卷积积分也可以称为**重叠积分**（superposition integral）。

利用上述步骤计算卷积积分时，必须画出 $x(\lambda)$与 $h\ (t-\lambda)$的图形。由原函数 $x(t)$得到 $x(\lambda)$，仅需用 λ 只取代自变量 t 即可。画出 $h\ (t-\lambda)$的图形是卷积运算中的关键一步，包含将 $h\ (\lambda)$以纵坐标轴为对称轴反转以及平移时间 t 两个过程。从解析式来看，将 $h(t)$中的每一个 t 都用$(t-\lambda)$来取代即可得到 $h\ (t-\lambda)$。因为卷积满足交换律，所以对 $x(t)$ 而不是 $h(t)$应用步骤（1）与步骤（2）的处理可能更为方便。下面通过一些例题来说明上述计算过程。

例题 15-12 试求如图 15-10 所示两个信号的卷积。

解 本例按照四个步骤确定 $y(t)=x_1(t)*x_2(t)$。首先，将 $x_1(t)$进行反转，如图 15-11a 所示，并将其平移时间 t，如图 15-11b 所示。下面对 t 的不同取值范围，将这两个函数相乘并通过积分计算重叠区域的面积。

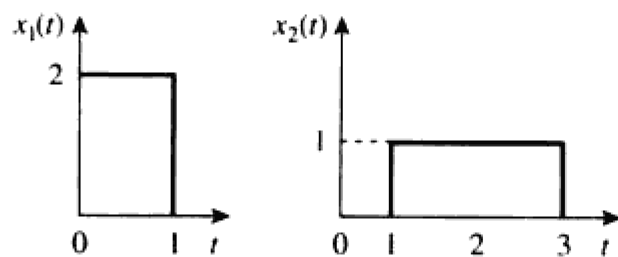


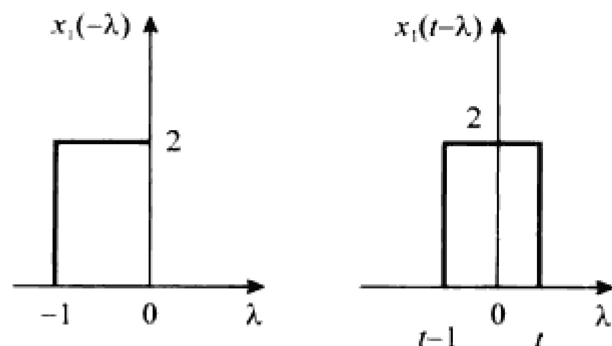
图 15-10 例题 15-12 的波形图

当 $0<t<1$时，两个函数无重叠部分，如图 15-12a 所示。因此

$$y(t)=x_1(t)\ *\ x_2(t)=0,\quad 0<t<1 \qquad (15\text{-}12\text{-}1)$$

当 $1<t<2$ 时，两个信号的重叠区域位于 1 与 t 之间，如图 15-12b 所示，于是

$$y(t)=\int_1^t(2)(1)\mathrm{d}\lambda=2\lambda\Big|_1^t=2(t-1),1<t<2 \qquad (15\text{-}12\text{-}2)$$



(a) 反转 $x_1(\lambda)$ (b) $x_1(-\lambda)$平移 t

图 15-11

当 $2<t<3$ 时，两个信号在$(t-1)$ 与 t 之间完全重叠，如图 15-12c 所示。容易看出，重叠曲线下的面积为 2，即

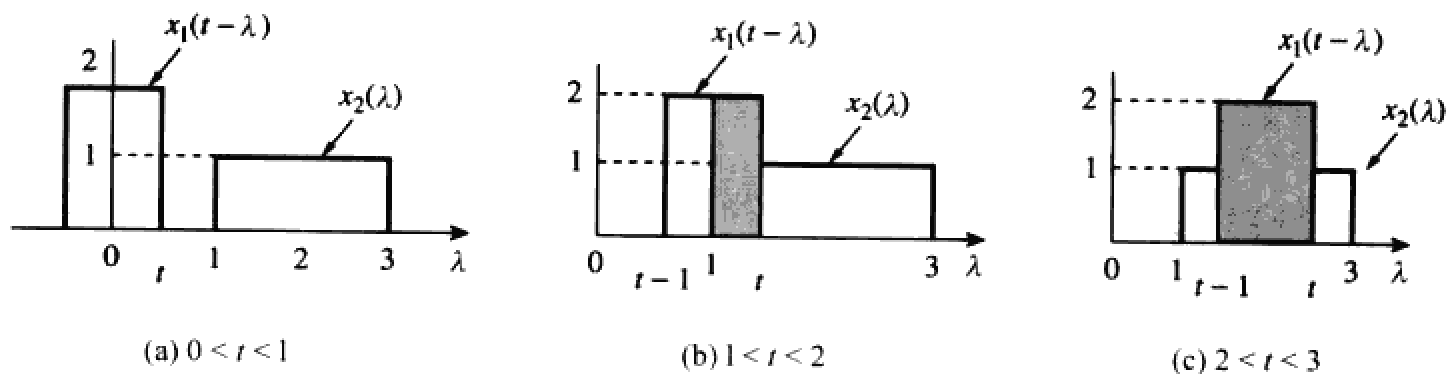
$$y(t)=\int_{t-1}^t(2)(1)\mathrm{d}\lambda=2\lambda\Big|_{t-1}^t=2,\qquad 2<t<3 \qquad (15\text{-}12\text{-}3)$$

当 $3<t<4$ 时，两个信号在$(t-1)$ 与 3 之间重叠，如图 15-12d 所示，于是

$$y(t)=\int_{t-1}^3(2)(1)\mathrm{d}\lambda=2\lambda\Big|_{t-1}^3=2(3-t+1)=8-2t,3<t<4 \qquad (15\text{-}12\text{-}4)$$

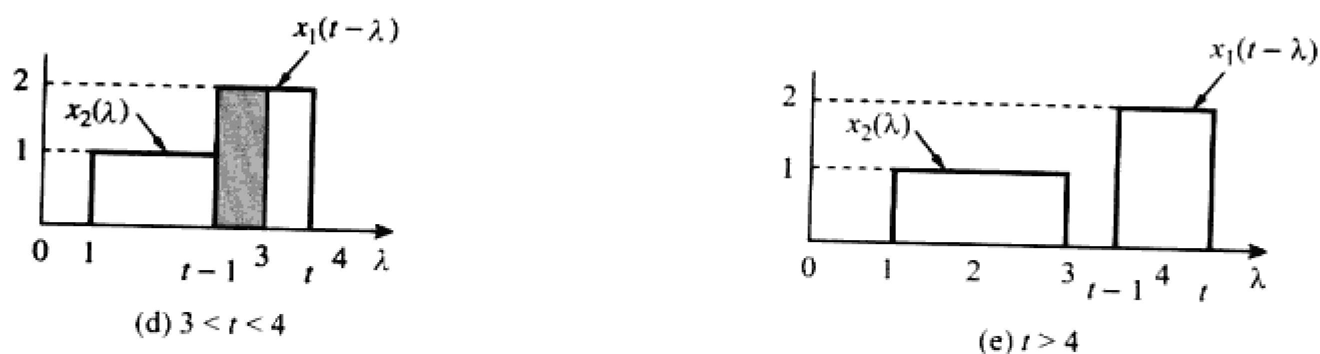
当 $t>4$ 时，两个信号无重叠区域，如图 15-12e 所示，即

$$y(t)=0,\quad t>4 \qquad (15\text{-}12\text{-}5)$$



(a) $0<t<1$ (b) $1<t<2$ (c) $2<t<3$

图 15-12 $x_1(t-\lambda)$与 $x_2(\lambda)$的重叠图形



(d) $3<t<4$ (e) $t>4$

图 15-12 (续)

将式(15-12-1)~式(15-12-5)合并后可以得到

$$y(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant 1\\ 2t-2, & 1\leqslant t\leqslant 2\\ 2, & 2\leqslant t\leqslant 3\\ 8-2t, & 3\leqslant t\leqslant 4\\ 0, & t\geqslant 4\end{cases}\qquad(15\text{-}12\text{-}6)$$

其波形图如图 15-13 所示。注意，该式中的 $y(t)$是连续的，可以利用这一事实检验 t 从一个取值范围变化到另一个取值范围时结果的正确性。不利用图解法，直接利用式(15-70)以及阶跃函数的性质同样可以得到式(15-12-6)的结果，具体过程将在例题 15-14 中予以说明。

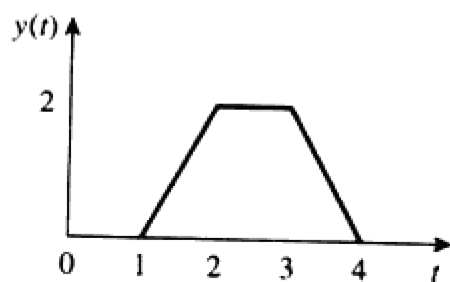


图 15-13 图 15-10 中信号 $x_1(t)$和 $x_2(t)$的卷积

练习题 15-12 试利用图解法确定如图 15-14 所示两个函数的卷积。

答 卷积结果 $y(t)$如图 15-15 所示。其中，

$$y(t)=\begin{cases}t, & 0\leqslant t\leqslant 2\\ 6-2t, & 2\leqslant t\leqslant 3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

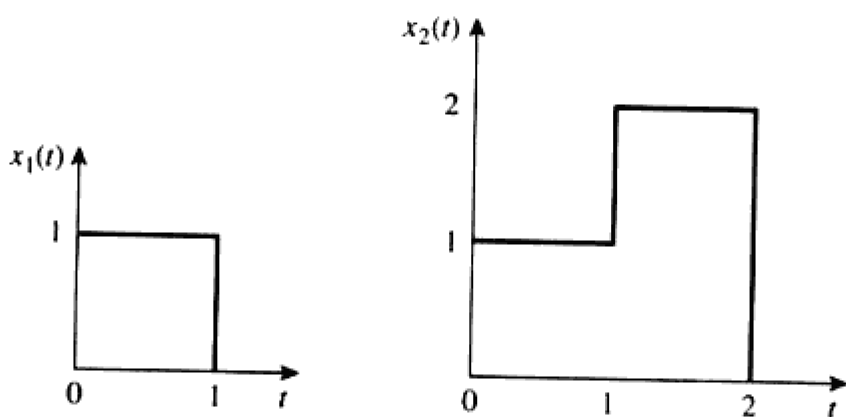


图 15-14 练习题 15-12 的波形图

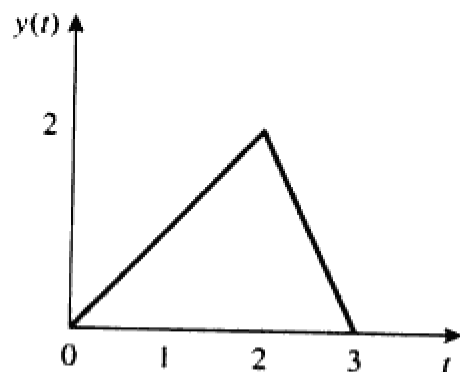


图 15-15 图 15-14 所示信号的卷积

例题 15-13 试利用图解法确定如图 15-16 所示 $g(t)$与 $u(t)$的卷积。



图 15-16 例题 15-13 的波形图

解 令 $y(t)=g(t)*u(t)$，下面利用两种方法求解 $y(t)$。

方法1：对 $g(t)$进行反转，如图15-17a所示，平移时间 t，如图15-17b所示。由于原信号在 $0<t<1$ 时 $g(t)=t$，所以当 $0<t-\lambda<1$ 即 $t-1<\lambda<t$ 时，$g(t-\lambda)=t-\lambda$。当 $t<0$ 时，两个函数没有重叠，所以 $y(0)=0$。

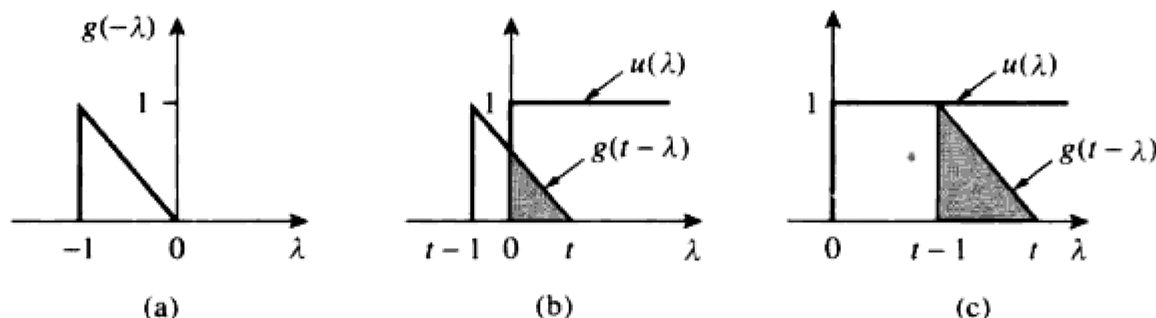


图15-17 将 $g(t)$反转后，图15-16所示信号 $g(t)$与 $u(t)$的卷积

当 $0<t<1$ 时，$g(t-\lambda)$与 $u(\lambda)$在0到 t 时间内重叠，如图15-17b所示，因此，

$$y(t)=\int_0^t(1)(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda=\left(t\lambda-\frac{1}{2}\lambda^2\right)\Bigg|_0^t=t^2-\frac{t^2}{2}=\frac{t^2}{2},\qquad 0\leqslant t\leqslant 1 \tag{15-13-1}$$

当 $t>1$ 时，两个函数在$(t-1)$与 t 之间完全重叠（参见图15-17c），因此，

$$y(t)=\int_{t-1}^t(1)(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda=\left(t\lambda-\frac{1}{2}\lambda^2\right)\Bigg|_{t-1}^t=\frac{1}{2},\qquad t\geqslant 1 \tag{15-13-2}$$

于是，由式(15-13-1)与式(15-13-2)可以得到

$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & t\geqslant 1\end{cases}$$

方法2：函数 $g(t)$保持不变，而将单位阶跃函数 $u(t)$反转，如图15-18a所示，平移时间 t，如图15-18b所示。由于当 $t>0$ 时，信号 $u(t)=1$，当 $t-\lambda>0$ 即 $\lambda<t$ 时，$u(t-\lambda)=1$，两个函数在0到 t 范围内重叠，因此，

$$y(t)=\int_0^t(1)\lambda\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{2}\lambda^2\Bigg|_0^t=\frac{t^2}{2},\qquad 0\leqslant t\leqslant 1 \tag{15-13-3}$$

当 $t>1$ 时，两函数在0到1之间重叠，如图15-18c所示，于是

$$y(t)=\int_0^1(1)\lambda\,\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{2}\lambda^2\Bigg|_0^1=\frac{1}{2},\qquad t\geqslant 1 \tag{15-13-4}$$

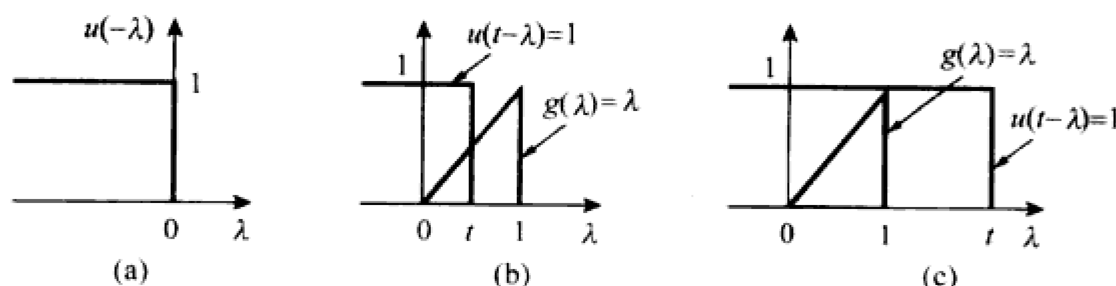


图15-18 将 $u(t)$反转后，图15-16所示信号 $g(t)$与 $u(t)$的卷积

由式(15-13-3)与式(15-13-4)可以得到

$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1\\ \dfrac{1}{2}, & t\geqslant 1\end{cases}$$

由此可见，虽然以上两种方法可以得到相同的结果，但在本例中将 $u(t)$反转要比将 $g(t)$反转，运算起来更为方便。$y(t)$的波形图如图 15-19 所示。

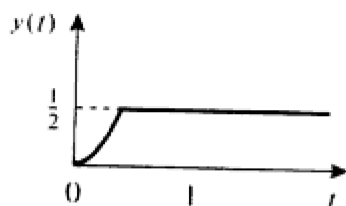


图 15-19 例题 15-13 的卷积结果

练习题 15-13 已知 $g(t)$与 $f(t)$如图 15-20 所示，试利用图解法求 $y(t)=g(t)*f(t)$。

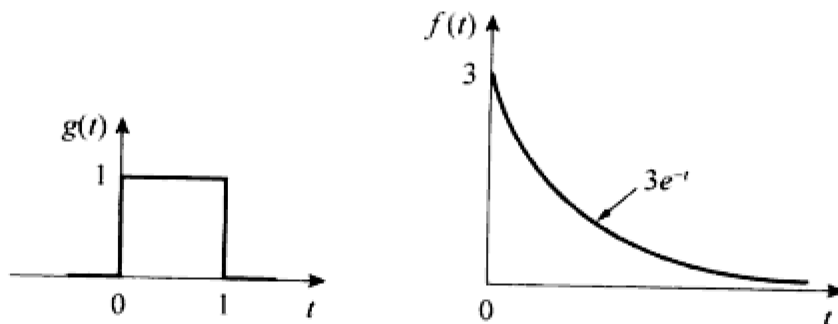


图 15-20 练习 15-13 的波形图

答

$$y(t)=\begin{cases}3(1-\mathrm{e}^{-t}), & 0\leqslant t\leqslant 1\\ 3(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-t}, & t\geqslant 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

例题 15-14 对于如图 15-21a 所示的 *RL* 电路。试利用卷积积分法确定该电路对如图 15-21b 所示激励信号的响应 $i_o(t)$。



图 15-21 例题 15-14 的电路原理图与激励信号波形图

解 (1) **明确**问题。本例题所要解决的问题已阐述清楚，并且规定了所要采用的求解方法。

(2) **表述**对问题的理解。本题要求利用卷积积分求解电路对如图 15-21b 所示激励信号 $i_s(t)$的响应 $i_o(t)$。

(3) 确定**可选**解。我们已经学习了利用卷积积分法和图解法确定信号的卷积。另外，还可以在 s 域中求解电流。本例将采用卷积积分法确定电流，之后再利用图解法进行检验。

(4) **尝试**问题的解。如前所述，可以采用两种方法求解本例：直接利用卷积积分法或者利用图解法。无论采用哪种方法，首先必须求出电路的单位冲激响应 $h(t)$。在 s 域中，对如图 15-22a 所示电路应用分流原理，可以得到

$$I_o=\frac{1}{s+1}I_s$$

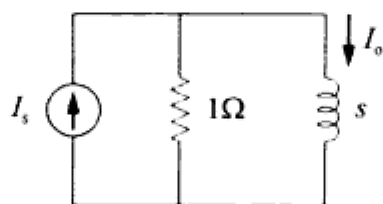
因此，

$$H(s)=\frac{I_o}{I_s}=\frac{1}{s+1} \tag{15-14-1}$$

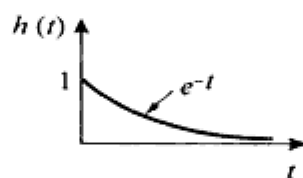
由其拉普拉斯逆变换可以得到

$$h(t)=e^{-t}u(t) \tag{15-14-2}$$

图 15-22b 给出了该电路的冲激响应 $h(t)$。



(a) s 域等效电路



(b) 冲激响应

图 15-22　如图 15-21a 所示的电路

直接用卷积积分法，回顾 s 域中电路的响应为

$$I_o(s)=H(s)\,I_s(s)$$

如图 15-21b 所示的 $i_s(t)$为

$$i_s(t)=u(t)-u(t-2)$$

于是，

$$i_o(t)=h(t)*i_s(t)=\int_0^t i_s(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda=\int_0^t[u(\lambda)-u(\lambda-2)]e^{-(t-\lambda)}\,d\lambda \tag{15-14-3}$$

由于 $u(\lambda-2)=0$，$0<\lambda<2$，所以被积函数 $u(\lambda)$在 $\lambda>0$ 时非零，而被积函数 $u(\lambda-2)$在 $\lambda>2$ 时非零。于是，计算该积分的最佳办法是分两部分分别计算。当 $0<t<2$ 时，

$$\begin{aligned}i_o'(t)&=\int_0^t(1)e^{-(t-\lambda)}\,d\lambda=e^{-t}\int_0^t(1)e^{\lambda}d\lambda\\&=e^{-t}(e^t-1)=1-e^{-t},0<t<2\end{aligned} \tag{15-14-4}$$

当 $t>2$ 时，

$$\begin{aligned}i_o''(t)&=\int_2^t(1)e^{-(t-\lambda)}\,d\lambda=e^{-t}\int_2^t e^{\lambda}d\lambda\\&=e^{-t}\left(e^t-e^2\right)=1-e^2e^{-t},t>2\end{aligned} \tag{15-14-5}$$

将式(15-14-4)与式(15-14-5)代入式(15-14-3)，可以得到

$$\begin{aligned}i_o(t)&=i_o'(t)-i_o''(t)\\&=(1-e^{-t})[u(t-2)-u(t)]-(1-e^2e^{-t})u(t-2)\\&=\begin{cases}1-e^{-t}\,\text{A}, & 0<t<2\\(e^2-1)e^{-t}\,\text{A}, & t>2\end{cases}\end{aligned} \tag{15-14-6}$$

(5) **评价**得到的结果。利用图解法，将图 15-21b 所示的 $i_s(t)$反转，并平移时间 t，得如图 15-23a 所示的图形。当 $0<t<2$ 时，$i_s(t-\lambda)$与 $h(\lambda)$ 的重叠区域位于 0 到 t，所以，

$$i_o(t)=\int_0^t(1)e^{-\lambda}\,d\lambda=-e^{-\lambda}\Big|_0^t=(\mathbf{1}-\mathbf{e}^{-t})\mathbf{A},\quad 0\leqslant t\leqslant 2 \tag{15-14-7}$$

当 $t>2$ 时，两个函数的重叠区域从$(t-2)$到 t，如图 15-23b 所示。因此，

$$i_o(t)=\int_{t-2}^{t}(1)e^{-\lambda}\,d\lambda=-e^{-\lambda}\Big|_{t-2}^{t}=-e^{-t}+e^{-(t-2)}$$
$$=(e^2-1)e^{-t}\text{A},\quad t\geqslant 0 \tag{15-14-8}$$



图 15-23 例题 15-14 的波形图

由式(15-14-7)与式(15-14-8)，可以得到电路的响应为

$$i_o(t)=\begin{cases}1-e^{-t}\text{A}, & 0\leqslant t\leqslant 2\\ (e^2-1)e^{-t}\text{A}, & t\geqslant 2\end{cases} \tag{15-14-9}$$

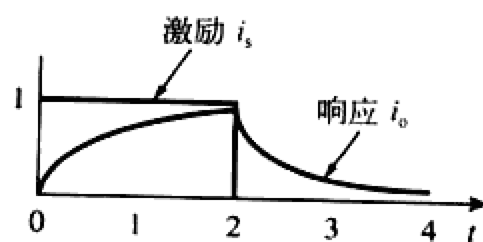
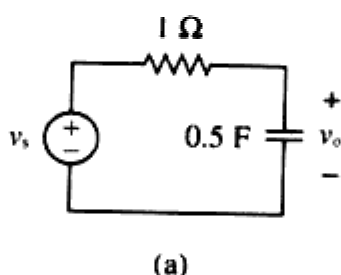


图 15-24 例题 15-14 中激励与响应的波形图

与式(15-14-6)的结果相同。因此，响应 $i_o(t)$与激励 $i_s(t)$的波形图如图 15-24 所示。

(6) 对结果是否满意？本题的求解过程令人满意，可以将其作为本题的答案。

练习题 15-14 试利用卷积求解如图 15-25a 所示电路对如图 15-25b 所示激励信号的响应 $v_o(t)$。



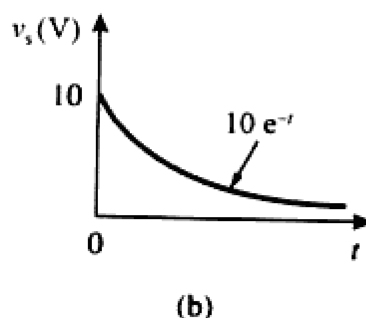


图 15-25 练习题 15-14 的电路原理图与激励信号波形图

答 $20(e^{-t}-e^{-2t})$ V。

15.6 拉普拉斯变换在微积分方程求解中的应用

拉普拉斯变换在线性微积分方程的求解中非常有用。利用拉普拉斯变换的微分性质与积分性质，对微积分方程中的各项进行变换，变换过程自动地将其初始条件考虑在内，然后在 s 域中求解所得到的代数方程，最后，再利用逆变换将解变换到时域，从而得到微分方程的时域解。下面举例说明这个过程。

例题 15-15 试利用拉普拉斯变换求解如下微分方程

$$\frac{d^2v(t)}{dt_2}+6\frac{dv(t)}{dt}+8v(t)=2u(t)$$

初始条件为 $v(0)=1$，$v'(0)=-2$。

解 对已知微分方程中的各项取拉普拉斯变换，得到

$$[s^2V(s)-sv(0)-v'(0)]+6[s\,V(s)-v(0)]+8\,V(s)=\frac{2}{s}$$

将初始条件 $v(0)=1$，$v'(0)=-2$ 代入后得到

$$s^2V(s)-s+2+6\,s\,V(s)-6+8\,V(s)=\frac{2}{s}$$

即

$$(s^2+6s+8)V(s)=s+4+\frac{2}{s}=\frac{s^2+4s+2}{s}$$

因此，

$$V(s)=\frac{s^2+4s+2}{s(s+2)(s+4)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+4}$$

其中，

$$A=sV(s)\big|_{s=0}=\frac{s^2+4s+2}{(s+2)(s+4)}\bigg|_{s=0}=\frac{2}{(2)(4)}=\frac{1}{4}$$

$$B=(s+2)V(s)\big|_{s=-2}=\frac{s^2+4s+2}{s(s+4)}\bigg|_{s=-2}=\frac{-2}{(-2)(2)}=\frac{1}{2}$$

$$C=(s+4)V(s)\big|_{s=-4}=\frac{s^2+4s+2}{s(s+2)}\bigg|_{s=-4}=\frac{2}{(-4)(-2)}=\frac{1}{4}$$

于是，

$$V(s)=\frac{\frac{1}{4}}{s}+\frac{\frac{1}{2}}{s+2}+\frac{\frac{1}{4}}{s+4}$$

取 $V(s)$的拉普拉斯逆变换，得到

$$v(t)=\frac{1}{4}(1+2e^{-2t}+e^{-4t})\,u(t)$$

练习题 15-15　试利用拉普拉斯变换求解如下微分方程

$$\frac{d^2v(t)}{dt_2}+4\frac{dv(t)}{dt}+4v(t)=e^{-t}$$

初始条件为 $v(0)=v'(0)=1$。

答　$(e^{-t}+2te^{-2t})\,u(t)$。

例题 15-16　试求如下微积分方程中的响应函数 $y(t)$

$$\frac{dy}{dt}+5y(t)+6\int_0^t y(\tau)d\tau=u(t),\qquad y(0)=2$$

解　对方程中的各项取拉普拉斯变换，得到

$$\left[sY(s)-y(0)\right]+5Y(s)+\frac{6}{s}Y(s)=\frac{1}{s}$$

将 $y(0)=2$ 代入，并在方程两端同乘以 s，有

$$Y(s)\,(s^2+5s+6)=1+2s$$

即

$$Y(s)=\frac{2s+1}{(s+2)(s+3)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+3}$$

其中，

$$A=(s+2)Y(s)\big|_{s=-2}=\left.\frac{2s+1}{s+3}\right|_{s=-2}=\frac{-3}{1}=-3$$

$$B=(s+3)Y(s)\big|_{s=-3}=\left.\frac{2s+1}{s+2}\right|_{s=-3}=\frac{-5}{1}=5$$

因此，

$$Y(s)=\frac{-3}{s+2}+\frac{5}{s+3}$$

取逆变换，可以得到

$$y(t)=(-3\mathrm{e}^{-2t}+5\mathrm{e}^{-3t})u(t)$$

练习题 15-16 试利用拉普拉斯变换求解如下微积分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+3y(t)+2\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau=2\mathrm{e}^{-3t},\qquad y(0)=0$$

答 $(-\mathrm{e}^{-t}+4\mathrm{e}^{-2t}-3\mathrm{e}^{-3t})u(t)$。

15.7 本章小结

(1) 拉普拉斯变换可以将用时域函数表示的信号转换到 s 域（即复频域）中进行分析，拉普拉斯变换的定义为

$$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)=\int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

(2) 拉普拉斯变换的性质列于表 15-1 中，常用基本函数的拉普拉斯变换列于表 15-2 中。

(3) 利用部分分式展开法，查找表 15-2 中的拉普拉斯变换对，均可以求出信号的拉普拉斯逆变换。由实数极点确定的是指数函数，而复数极点确定的则是阻尼正弦函数。

(4) 两个信号的卷积包括，其中一个信号的时间反转、平移、与另一个信号的点对点相乘，以及对该乘积的积分四个步骤。卷积积分将时间域中两个信号的卷积与二者拉普拉斯变换的乘积的逆变换联系在一起，即

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)]=f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\lambda)f_2(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

(5) 在时域中，网络的输出 $y(t)$ 等于冲激响应 $h(t)$ 与输入激励 $x(t)$ 的卷积

$$y(t)=h(t)*x(t)$$

卷积可以看作是反转－平移－相乘－时域面积的运算方法。

(6) 拉普拉斯变换可用于求解线性微积分方程。

复习题

15-1 任何一个函数 $f(t)$ 都存在拉普拉斯变换。

(a) 正确　(b) 错误

15-2 拉普拉斯变换 $H(s)$ 中的变量 s 称为：

(a) 复频率　(b) 传递函数

(c) 零点　(d) 极点

15-3 $u(t-2)$ 的拉普拉斯变换为：

(a) $\dfrac{1}{s+2}$　(b) $\dfrac{1}{s-2}$

(c) $\dfrac{\mathrm{e}^{2s}}{s}$　(d) $\dfrac{\mathrm{e}^{-2s}}{s}$

15-4 函数

$$F(s)=\frac{s+1}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$

的零点位于：

(a) -4　(b) -3　(c) -2　(d) -1

15-5 函数

$$F(s)=\frac{s+1}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$

的极点位于：

（a）-4 （b）-3 （c）-2 （d）-1

15-6 如果 $F(s)=1/(s+2)$，则 $f(t)$为：

（a）$e^{2t}u(t)$ （b）$e^{-2t}u(t)$

（c）$u(t-2)$ （d）$u(t+2)$

15-7 已知 $F(s)=e^{-2s}/(s+1)$，则 $f(t)$为：

（a）$e^{-2(t-1)}u(t-1)$ （b）$e^{-(t-2)}u(t-2)$

（c）$e^{-t}u(t-2)$ （d）$e^{-t}u(t+1)$

（e）$e^{-(t-2)}u(t)$

15-8 $f(t)$的拉普拉斯变换为：

$$F(s)=\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

则 $f(t)$ 的初值为：

（a）不存在 （b）∞ （c）0

（d）1 （e）$\frac{1}{6}$

15-9

$$\frac{s+2}{(s+2)^2+1}$$

的拉普拉斯逆变换为：

（a）$e^{-t}\cos 2t$ （b）$e^{-t}\sin 2t$

（c）$e^{-2t}\cos t$ （d）$e^{-2t}\sin 2t$

（e）上面哪个都不是

15-10 $u(t)*u(t)$的结果为：

（a）$u^2(t)$ （b）$tu(t)$

（c）$t^2u(t)$ （d）$\delta(t)$

答案 15-1b；15-2a；15-3d；15-4d；15-5a，b，c；15-6b；15-7b；15-8d；15-9c；15-10b

习题

15.2 节与 15.3 节

15-1 试求如下函数的拉普拉斯变换：

（a）$\cosh at$ （b）$\sinh at$

[提示：$\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$，$\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$]

15-2 试确定如下函数的拉普拉斯变换：

（a）$\cos(\omega t+\theta)$ （b）$\sin(\omega t+\theta)$

15-3 试确定如下各函数的拉普拉斯变换：

（a）$e^{-2t}\cos 3t\, u(t)$ （b）$e^{-2t}\sin 4t\, u(t)$

（c）$e^{-3t}\cosh 2t\, u(t)$ （d）$e^{-4t}\sinh t\, u(t)$

（e）$te^{-t}\sin 2t\, u(t)$

15-4 试求下列函数的拉普拉斯变换：

（a）$g(t)=6\cos(4t-1)$

（b）$f(t)=2t\,u(t)+5e^{-3(t-2)}u(t-2)$

15-5 试求下列各函数的拉普拉斯变换：

（a）$t^2\cos(2t+30°)\,u(t)$ （b）$3t^4e^{-2t}u(t)$

（c）$2t\,u(t)-4\frac{d}{dt}\delta(t)$ （d）$2e^{-(t-1)}u(t)$

（e）$5u(t/2)$ （f）$6e^{-t/3}u(t)$ （g）$\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)$

15-6 已知

$$f(t)=\begin{cases}2t, & 0<t<1\\ t, & 1<t<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

试求 $F(s)$。

15-7 试求下列信号的拉普拉斯变换：

（a）$f(t)=(2t+4)\,u(t)$

（b）$g(t)=(4+3e^{-2t})\,u(t)$

（c）$h(t)=(6\sin(3t)+8\cos(3t))\,u(t)$

（d）$x(t)=(e^{-2t}\cosh(4t))\,u(t)$

15-8 已知 $f(t)$为：

（a）$2t\,u(t-4)$ （b）$5\cos(t)\,\delta(t-2)$

（c）$e^{-t}u(t-\tau)$ （d）$\sin(2t)\,u(t-\tau)$

试确定拉普拉斯变换 $F(s)$。

15-9 试确定下列函数的拉普拉斯变换：

（a）$f(t)=(t-4)\,u(t-2)$

（b）$g(t)=2e^{-4t}u(t-1)$

（c）$h(t)=5\cos(2t-1)\,u(t)$

（d）$p(t)=6[u(t-2)-u(t-4)]$

15-10 试利用两种不同的方法求 $g(t)=\frac{d}{dt}(te^{-t}\cos t)$ 的拉普拉斯变换。

15-11 如果：

（a）$f(t)=6e^{-t}\cosh 2t$

（b）$f(t)=3te^{-2t}\sinh 4t$

（c）$f(t)=8e^{-3t}\cosh t\,u(t-2)$

试求 $F(s)$。

15-12 如果 $g(t)=e^{-2t}\cos 4t$，试求 $G(s)$。

15-13 试求下列函数的拉普拉斯变换：

（a）$t\cos t\,u(t-2)$

(b) $e^{-t}\, t \sin t\, u(t)$

(c) $\dfrac{\sin \beta t}{t} u(t)$

15-14 试求如图15-26所示信号的拉普拉斯变换。

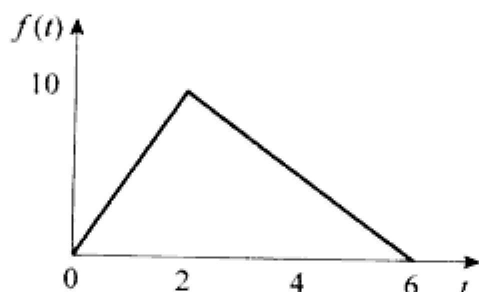


图 15-26 习题 15-14 的信号波形图

15-15 试确定如图15-27所示函数的拉普拉斯变换。

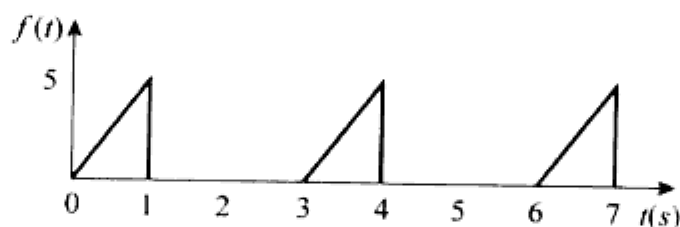


图 15-27 习题 15-15 的函数波形图

15-16 试确定如图15-28所示函数 $f(t)$的拉普拉斯变换。

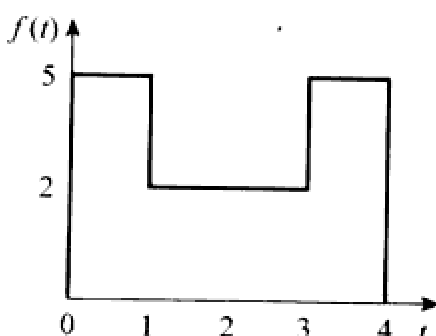


图 15-28 习题 15-16 的函数波形图

15-17 试确定如图15-29所示函数 $f(t)$的拉普拉斯变换。

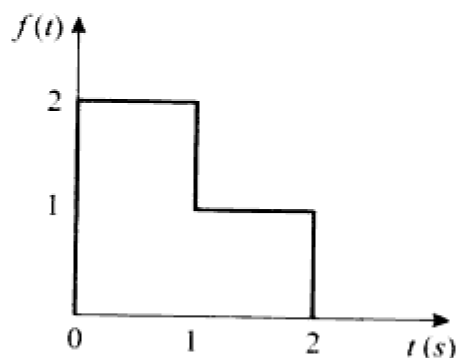
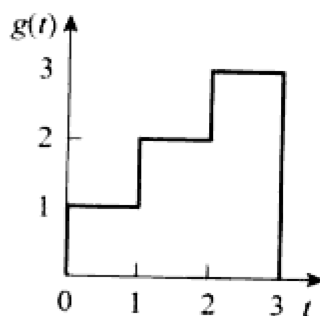


图 15-29 习题 15-17 的函数波形图

15-18 试确定如图15-30所示函数的拉普拉斯变换。



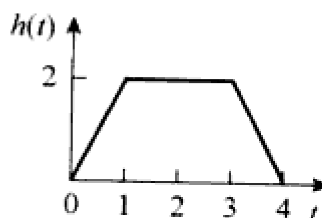


图 15-30 习题 15-18 的函数波形图

15-19 试计算如图15-31所示单位冲激串的拉普拉斯变换。

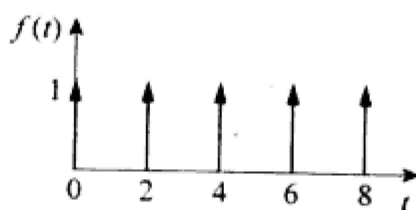


图 15-31 习题 15-19 的函数波形图

15-20 如图15-32所示周期函数，其一个周期的定义为：

$$g(t)=\begin{cases}\sin \pi t, & 0<t<1\\ 0, & 1<t<2\end{cases}$$

试求 $G(s)$。

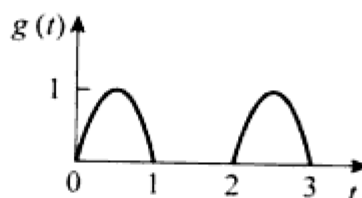


图 15-32 习题 15-20 的函数波形图

15-21 试确定如图15-33所示周期波形的拉普拉斯变换。

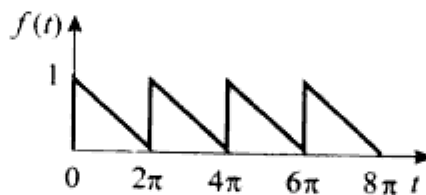


图 15-33 习题 15-21 的函数波形图

15-22 试求如图15-34所示两个函数的拉普拉斯变换。

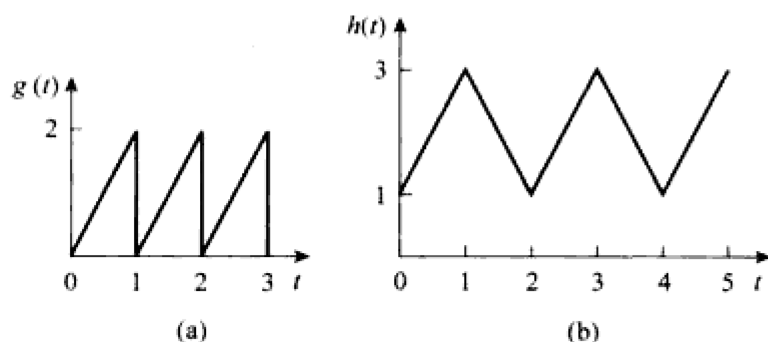


图 15-34　习题 15-22 的函数波形图

15-23　试确定如图15-35 所示两个周期函数的拉普拉斯变换。

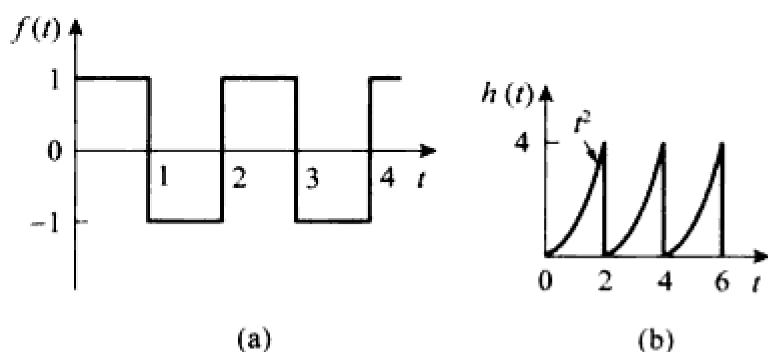


图 15-35　习题 15-23 的函数波形图

15-24　已知

$$F(s)\frac{s^2+10s+6}{s(s+1)^2(s+2)}$$

试计算 $f(0)$ 与 $f(\infty)$（如果它们存在）。

15-25　已知

$$F(s)\frac{5(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

(a) 试利用初值定理与终值定理，确定 $f(0)$ 与 $f(\infty)$；

(b) 试利用部分分式展开法求出 $f(t)$，并验证（a）中得到的答案。

15-26　如果

(a) $F(s)=\dfrac{s^2+3}{s^3+4s^2+6}$

(b) $F(s)=\dfrac{s^2-2s+1}{(s-2)(s^2+2s+4)}$

试确定 $f(t)$ 的初值与终值（如果它们存在）。

15.4 节

15-27　试确定下列各函数的拉普拉斯逆变换：

(a) $F(s)=\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{s+1}$　(b) $G(s)=\dfrac{3s+1}{s+4}$

(c) $H(s)=\dfrac{4}{(s+1)(s+3)}$

(d) $J(s)=\dfrac{12}{(s+2)^2(s+4)}$

15-28　试确定下列函数的拉普拉斯逆变换：

(a) $F(s)=\dfrac{20(s+2)}{s(s^2+6s+25)}$

(b) $P(s)=\dfrac{6s^2+36s+20}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

15-29　试确定如下函数的拉普拉斯逆变换：

$$V(s)=\frac{2s+26}{s(s^2+4s+13)}$$

15-30　试确定下列函数的拉普拉斯逆变换：

(a) $F_1(s)=\dfrac{6s^2+8s+3}{s(s^2+2s+5)}$

(b) $F_2(s)=\dfrac{s^2+5s+6}{(s+1)^2(s+4)}$

(c) $F_3(s)=\dfrac{10}{(s+1)(s^2+4s+8)}$

15-31　试求如下各 $F(s)$ 对应的 $f(t)$：

(a) $\dfrac{10s}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

(b) $\dfrac{2s^2+4s+1}{(s+1)(s+2)^3}$

(c) $\dfrac{s+1}{(s+2)(s^2+2s+5)}$

15-32　试确定下列各函数的拉普拉斯逆变换：

(a) $\dfrac{8(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)}$　(b) $\dfrac{s^2-2s+4}{(s+1)(s+2)^2}$

(c) $\dfrac{s^2+1}{(s+3)(s^2+4s+5)}$

15-33　试计算下列各函数的拉普拉斯逆变换：

(a) $\dfrac{6(s-1)}{s^4-1}$　(b) $\dfrac{s\mathrm{e}^{-\pi s}}{s^2+1}$　(c) $\dfrac{8}{s(s+1)^3}$

15-34　试确定下列拉普拉斯变换对应的时域函数：

(a) $F(s)=10+\dfrac{s^2+1}{s^2+4}$

(b) $G(s)=\dfrac{\mathrm{e}^{-s}+4\mathrm{e}^{-2s}}{s^2+6s+8}$

(c) $H(s)=\dfrac{(s+1)\mathrm{e}^{-2s}}{s(s+3)(s+4)}$

15-35 试确定下列各变换的函数 $f(t)$：

（a） $F(s)=\dfrac{(s+3)e^{-6s}}{(s+1)(s+2)}$

（b） $F(s)=\dfrac{4-e^{-2s}}{s^2+5s+4}$

（c） $F(s)=\dfrac{s\,e^{-s}}{(s+3)(s^2+4)}$

15-36 试确定下列函数的拉普拉斯逆变换：

（a） $X(s)=\dfrac{1}{s^2(s+2)(s+3)}$

（b） $Y(s)=\dfrac{1}{s(s+1)^2}$

（c） $Z(s)=\dfrac{1}{s(s+1)(s^2+6s+10)}$

15-37 试确定下列各函数的拉普拉斯逆变换：

（a） $H(s)=\dfrac{s+4}{s(s+2)}$

（b） $G(s)=\dfrac{s^2+4s+5}{(s+3)(s^2+2s+2)}$

（c） $F(s)=\dfrac{e^{-4s}}{s+2}$

（d） $D(s)=\dfrac{10s}{(s^2+1)(s^2+4)}$

15-38 如果：

（a） $F(s)=\dfrac{s^2+4s}{s^2+10s+26}$

（b） $F(s)=\dfrac{5s^2+7s+29}{s(s^2+4s+29)}$

试求函数 $f(t)$。

*15-39 如果：

（a） $F(s)=\dfrac{2s^3+4s^2+1}{(s^2+2s+17)(s^2+4s+20)}$

（b） $F(s)=\dfrac{s^2+4}{(s^2+9)(s^2+6s+3)}$

试确定函数 $f(t)$。

15-40 试证明：

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4s^2+7s+13}{(s+2)(s^2+2s+5)}\right]=$$

$$\left[\sqrt{2}\,e^{-t}\cos(2t+45^\circ)+3e^{-2t}\right]u(t)$$

15.5 节

*15-41 设 $x(t)$ 与 $y(t)$ 如图 15-36 所示，试求 $z(t)=x(t)*y(t)$。

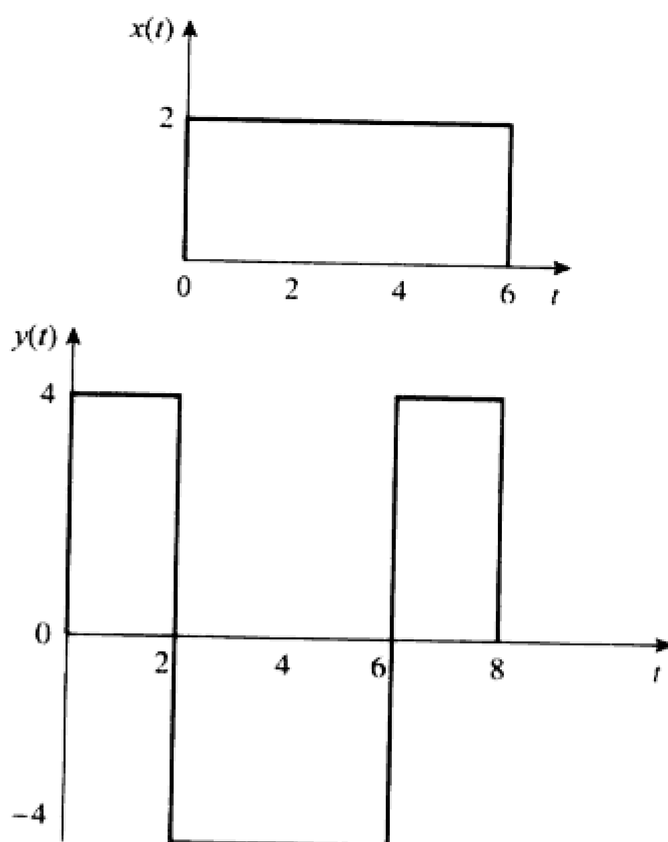


图 15-36 习题 15-41 的函数波形图

15-42 设 $f(t)=u(t)-u(t-2)$，试确定 $f(t)*f(t)$。

15-43 各组 $x(t)$ 与 $h(t)$ 如图 15-37 所示，试求 $y(t)=x(t)*h(t)$。

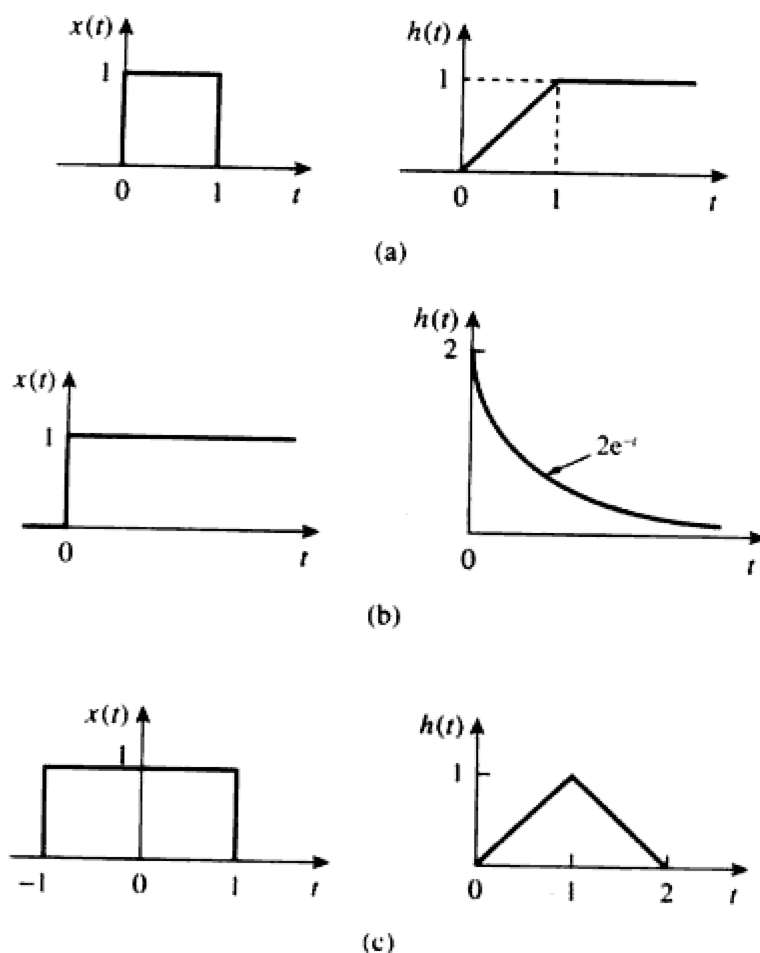


图 15-37 习题 15-43 的函数波形图

15-44 试确定如图 15-38 所示各组信号的卷积。

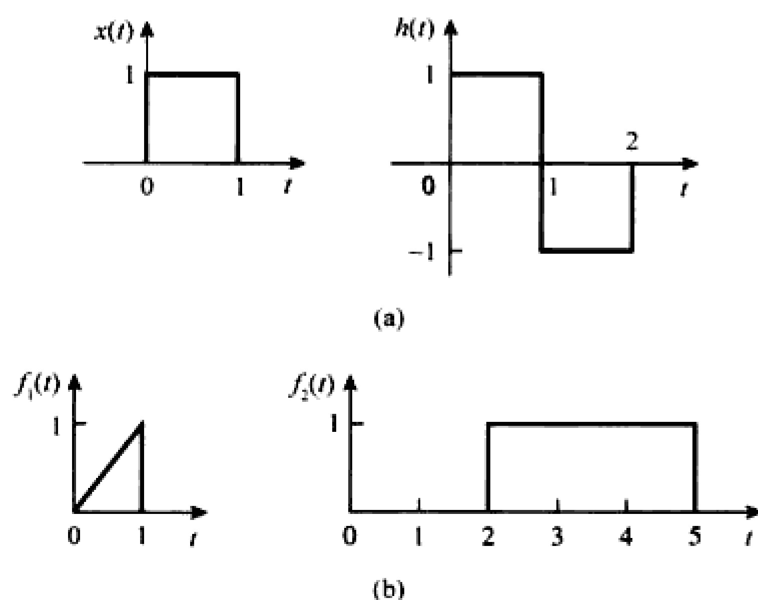


图 15-38 习题 15-44 的函数波形图

15-45 已知 $h(t)=4e^{2t}u(t)$，$x(t)=\delta(t)-2e^{2t}u(t)$，试求 $y(t)=x(t)*h(t)$。

15-46 已知函数：

$x(t)=2\delta(t)$，$y(t)=4u(t)$，$z(t)=e^{2t}u(t)$

试计算如下卷积：

(a) $x(t)*y(t)$ (b) $x(t)*z(t)$

(c) $y(t)*z(t)$ (d) $y(t)*[y(t)+z(t)]$

15-47 某系统的传递函数为：

$$H(s)=\frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

(a) 试求该系统的冲激响应；

(b) 如果输入为 $x(t)=u(t)$，试确定输出 $y(t)$。

15-48 如果：

(a) $$F(s)=\frac{4}{(s^2+2s+5)^2}$$

(b) $$F(s)=\frac{2s}{(s+1)(s^2+4)}$$

试利用卷积求解 $f(t)$。

*15-49 试利用卷积积分计算：

(a) $t*e^{at}u(t)$ (b) $\cos(t)*\cos(t)u(t)$

15.6 节

15-50 试利用拉普拉斯变换求解微分方程：

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2}+2\frac{dv(t)}{dt}+10v(t)=3\cos 2t$$

初始条件为 $v(0)=1$，$dv(0)/dt=-2$。

15-51 已知 $v(0)=2$，$dv(0)/dt=4$，试求：

$$\frac{d^2v}{dt^2}+5\frac{dv}{dt}+6v=10e^{-t}u(t)$$

15-52 如果

$$\frac{d^2i}{dt^2}+3\frac{di}{dt}+2i+\delta(t)=0$$

$$i(0)=0, i'(0)=3$$

试利用拉普拉斯变换求解 $i(t)$，$t>0$。

*15-53 试利用拉普拉斯变换求解下式中的 $x(t)$：

$$x(t)=\cos t+\int_0^t e^{\lambda-t}x(\lambda)d\lambda$$

15-54 试利用拉普拉斯变换求解如下微分方程 $(t>0)$：

$$\frac{d^2i}{dt^2}+4\frac{di}{dt}+5i=2e^{-2t}$$

初始条件 $i(0)=1$，$i'(0)=2$。

15-55 试在初始条件为零的条件下求解如下微分方程中的 $y(t)$：

$$\frac{d^3y}{dt^3}+6\frac{d^2y}{dt^2}+8\frac{dy}{dt}=e^{-t}\cos 2t$$

15-56 试求如下微积分方程中的 $v(t)$，已知 $v(0)=2$。

$$4\frac{dv}{dt}+12\int_{-\infty}^t v\,dt=0$$

15-57 试利用拉普拉斯变换求解如下微积分方程：

$$\frac{dy(t)}{dt}+9\int_0^t y(\tau)d\tau=\cos 2t, y(0)=1$$

15-58 已知：

$$\frac{dv}{dt}+2v+5\int_0^t v(\lambda)d\lambda=4u(t)$$

并且 $v(0)=-1$。试确定 $v(t)$，$t>0$。

15-59 试求如下微积分方程：

$$\frac{dy}{dt}+4y+3\int_0^t y\,dt=6e^{-2t}, y(0)=-1$$

15-60 试求如下微积分方程：

$$2\frac{dx}{dt}+5x+3\int_0^t x\,dt+4=\sin 4t, x(0)=1$$

第16章 拉普拉斯变换的应用

科学研究就是要观察其他人已经看到的现象，思考还无人思索的问题。

——Albert Szent Györgyi

提高技能，拓展职业生涯

提出问题

在三十余年的教学生涯中，我始终着力追求如何帮助学生学习。无论学生在课程学习上花费多少时间，对学生帮助最大的还是学会如何在课堂上提出问题。通过提问，学生即可在学习过程中发挥主动性，而不仅仅是信息的被动接受者。我认为这种积极主动的参与极大地促进了学生的学习过程，而这一过程可能就是造就现代工程师的一个最为重要的方面。实际上，提问就是科学的基础。正如查尔斯·P·斯坦梅茨所说："任何人都不会真正成为一个傻子，除非他停止提问。"



查尔斯·亚历山大摄影

提出问题看上去非常容易，人们一辈子不都在提问吗？但提问题的实质是以一种适当的方式提问，并且尽量从学习过程中获益需要一定的思考和准备。

我坚信可以有效利用的模型不止一种，这里可以和大家共享对我很有效的方法。要记住，最重要的事并不是需要你提出完美的问题，因为提问－回答的过程会使问题逐步明确，所以能够很容易地提炼出原始问题。我经常和学生说，非常欢迎大家在课堂上阅读他们提出的问题。

在提出问题时需要注意如下三点。首先，要准备好你要提出的问题，如果你和大多数学生一样，提问时感到害羞或者没有学会在课堂上提问，那么可以从课外记录的问题开始。其次，要选择在适当的时候提问，这一点自己把握即可。最后，在要求复述你所提出的问题的情况下，准备好用不同的方式解释问题。

需要说明的最后一点是：并非所有的教授都喜欢学生在课堂上提问。你必须发现哪些教授喜好课堂提问。祝你在提高作为工程师的最重要的技能时好运。

16.1 引言

前面已经介绍过拉普拉斯变换，接下来学习一些它的应用，切记拉普拉斯变换实际上是进行电路分析、综合与设计的最为有效的数学工具之一。在s域中研究电路与系统可以帮助我们理解电路与系统的实际功能。本章将深入研究s域中的相关电路问题，同时，简要介绍物理系统。相信读者已经学习了一些机械系统，而这些系统可以用与描述电路相同的微分方程来描述。实际上，这正是我们生活的物质世界的精彩之处，即可以利用同样的微分方程描述任意线性电路、系统与过程。这里一个关键的术语是线性（linear）。

所谓系统是指描述物理过程的输入与输出关系的数学模型。

将电路看作系统是完全可以的，历史上曾将电路与系统分开进行讨论，但本章在讨论电路与系统时实际上已经认识到电路就是一类电子系统。

应该记住的最重要的是，最后一章与本章介绍的所有知识对于任何线性系统都是适用的。在本书最后一章，我们将学习如何利用拉普拉斯变换求解线性微分方程与积分方程。本章将介绍s域中电路建模的概念，利用这些基本原理可以帮助我们求解任何线性电路。本章还将简要介绍如何利用状态变量分析多输入多输出系统，最后讨论拉普拉斯变换在网络稳定性分析与网络综合中的应用。

16.2 电路元件模型

掌握了求解信号的拉普拉斯变换及其逆变换的方法之后，就可以讨论如何利用拉普拉斯变换法分析电路的问题。利用拉普拉斯变换法分析电路包括三个步骤。

利用拉普拉斯变换法分析电路的步骤：

(1) 将电路从时域转换到s域。

(2) 利用已经学过的节点分析法、网孔分析法、电源变换原理、叠加原理以及其他电路分析方法求解电路。

(3) 对得到的s域解进行拉普拉斯逆变换，从而得到电路的时域解。

上述步骤中仅第一步是新的，本节将对此加以讨论。与相量分析法相同，对电路中的各部件进行拉普拉斯变换即可将一个电路从时域转换到频域或s域。

由第二个步骤可知，适用于直流电路的所有电路分析方法同样可以用到s域的电路分析中。

对于电阻器而言，时域中的电压－电流关系为：

$$v(t) = R\, i(t) \tag{16-1}$$

两边取拉普拉斯变换，得到：

$$\boxed{V(s) = R\, I(s)} \tag{16-2}$$

对于电感器而言，

$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \tag{16-3}$$

两边取拉普拉斯变换，得到：

$$V(s) = L[sI(s) - i(0^-)] = sLI(s) - L\, i(0^-) \tag{16-4}$$

即：

$$\boxed{I(s) = \frac{1}{sL}V(s) + \frac{i(0^-)}{s}} \tag{16-5}$$

电感器的s域等效电路如图16-1所示，图中将初始条件建模为一个电压源或电流源。

对于电容器而言：

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \tag{16-6}$$

变换到s域，得到：

$$I(s) = C[sV(s) - v(0^-)] = sCV(s) - Cv(0^-) \tag{16-7}$$

即：

$$\boxed{V(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{v(0^-)}{s}} \tag{16-8}$$

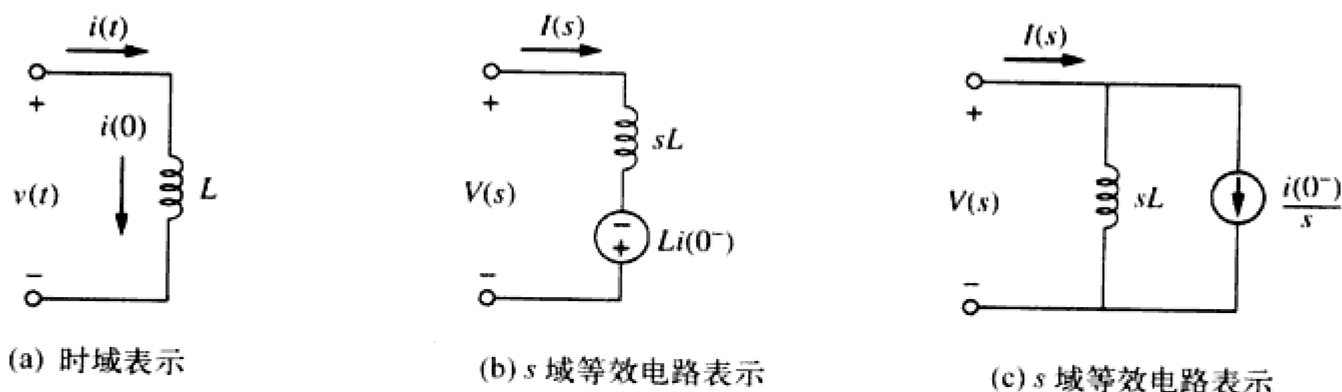


图 16-1 电感器的表示

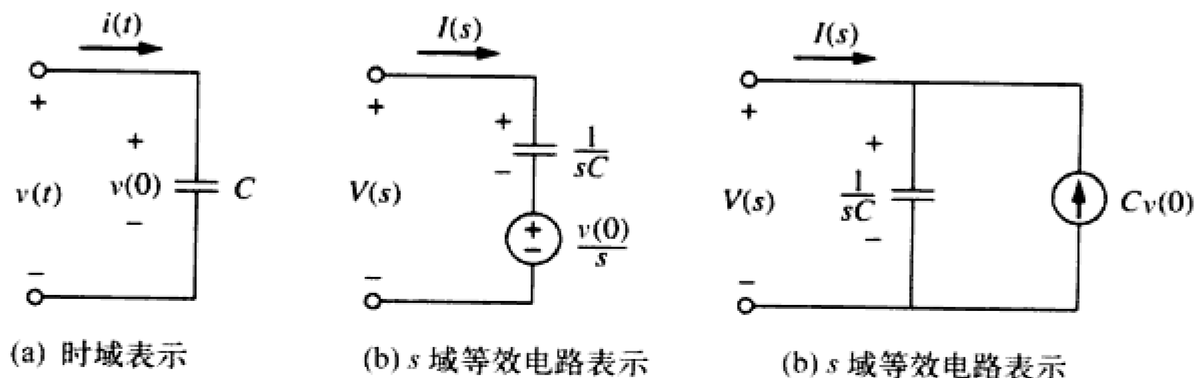


图 16-2 电感器的表示

电容器的s域等效电路如图16-2所示。得到s域等效电路后，就可以利用拉普拉斯变换求解第7章与第8章介绍过的一阶电路和二阶电路。由式(16-3)~式(16-8)可以看出，初始条件是变换中的一个组成部分，这是在电路分析中采用拉普拉斯变换的一个优点。采用拉普拉斯变换分析电路的另一个优点是可以得到电路网络的全解——瞬态响应与稳态响应，下面将通过例题16-2与例题16-3予以说明。另外，还可以观察到式(16-5)与式(16-8)的对偶性，证实了第8章（参见表8-1）介绍过的对偶对，即：L与C、$I(s)$与$V(s)$以及$v(0)$与$i(0)$均为对偶对。

在电路分析中利用拉普拉斯变换的简明之处在于在变换过程中可以自动地将初始条件包含在内，从而给出电路的全解（瞬态解与稳态解）。

如果假定电感器与电容器的初始条件为零，则上述方程简化为

$$\begin{aligned}&\text{电阻器：}V(s)=R\,I(s)\\&\text{电感器：}V(s)=sL\,I(s)\\&\text{电容器：}V(s)=\frac{1}{sC}I(s)\end{aligned}\tag{16-9}$$

它们的s域等效电路如图16-3所示。

在初始条件为零的情况下，将s域中的阻抗定义为电压的拉普拉斯变换与电流的拉普拉斯变换之比，即：

$$Z(s)=\frac{V(s)}{I(s)}\tag{16-10}$$

于是，三个元件的阻抗为：

$$\begin{aligned}&\text{电阻器：}Z(s)=R\\&\text{电感器：}Z(s)=sL\\&\text{电容器：}Z(s)=\frac{1}{sC}\end{aligned}\tag{16-11}$$

表16-1总结了上述关系。s域中的导纳定义为阻抗的倒数，即：

$$Y(s)=\frac{1}{Z(s)}=\frac{I(s)}{V(s)} \tag{16-12}$$

在电路分析中利用拉普拉斯变换可以使各种信号源，如冲激信号源、阶跃信号源、斜升信号源、指数信号源与正弦信号源等的应用更加方便。

表 16-1 s 域中元件的阻抗*

元 件	$Z(s)=V(s)/I(s)$
电阻器	R
电感器	sL
电容器	$1/sC$

*假定初始条件为零。

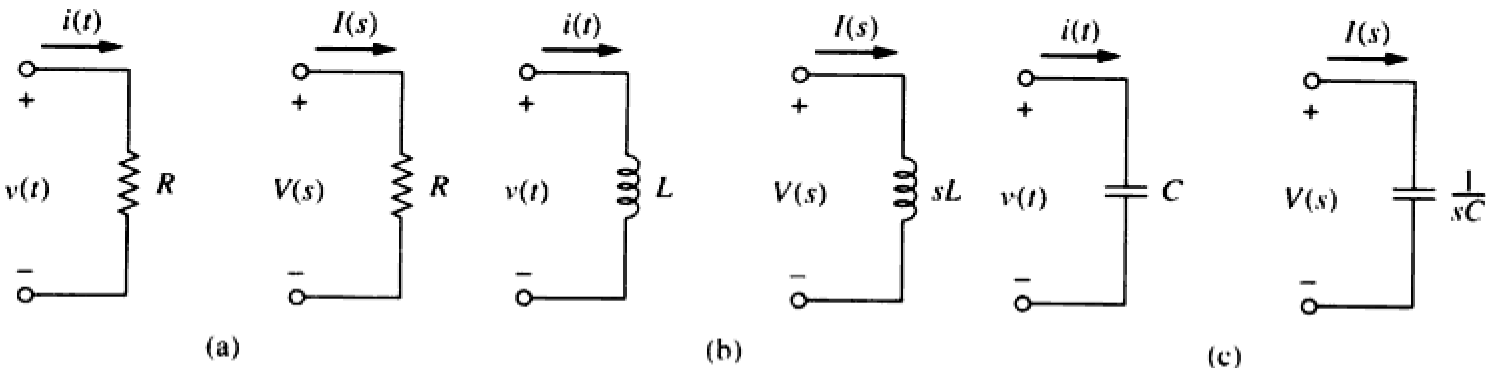


图 16-3 无源元件在初始条件为零时的时域表示与 s 域表示

如果$f(t)$的拉普拉斯变换为$F(s)$，则$af(t)$的拉普拉斯变换为$aF(s)$，利用这一线性性质即可很容易地推导出独立源与运算放大器的模型。由于可以将独立源处理为单个数值，所以其模型较为简单，独立源可以仅包含两个可控值，即一个常数乘以电压或电流，于是，

$$\mathcal{L}[av(t)]=aV(s) \tag{16-13}$$

$$\mathcal{L}[ai(t)]=aI(s) \tag{16-14}$$

理想运算放大器可以处理为一个电阻器，无论是实际运算放大器还是理想运算放大器，其功能就是将电压乘以一个常数。因此，仅需利用运算放大器的输入电压必须为零且输入电流必须为零的约束条件写出相关的方程。

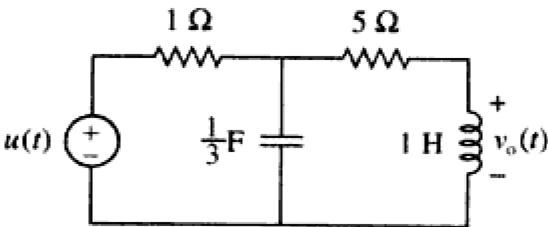


图 16-4 例题 16-1 的电路原理图

例题16-1 试求如图16-4所示电路中的$v_o(t)$，假定初始条件为零。

解 首先将电路从时域变换到s域：

$$u(t)\Rightarrow\frac{1}{s}$$

$$1\text{H}\Rightarrow sL=s$$

$$\frac{1}{3}\text{F}\Rightarrow\frac{1}{sC}=\frac{3}{s}$$

所得到的s域电路如图16-5所示。下面利用网孔电流法进行分析，对于网孔1，有：

$$\frac{1}{s}=\left(1+\frac{3}{s}\right)I_1-\frac{3}{s}I_2 \tag{16-1-1}$$

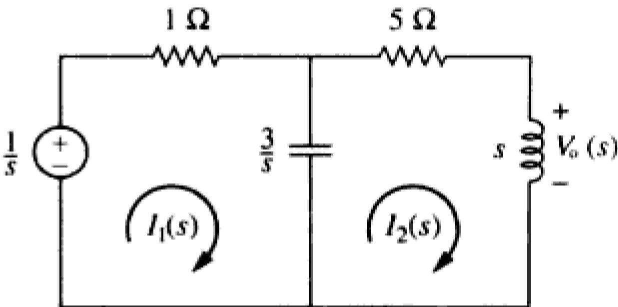


图 16-5 频域等效电路的网孔分析

对于网孔2，有：

$$0=-\frac{3}{s}I_1+\left(s+5+\frac{3}{s}\right)I_2$$

即：

$$I_1 = \frac{1}{3}(s^2 + 5s + 3)I_2 \tag{16-1-2}$$

将其代入式（16-1-1）可以得到：

$$\frac{1}{s} = \left(1 + \frac{3}{s}\right)\frac{1}{3}(s^2 + 5s + 3)I_2 - \frac{3}{s}I_2$$

两边同乘以$3s$，得到：

$$3 = (s^3 + 8s^2 + 18s)I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{3}{s^3 + 8s^2 + 18s}$$

$$V_o(s) = sI_2 = \frac{3}{s^2 + 8s + 18} = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{(s+4)^2 + (\sqrt{2})^2}$$

取逆变换即可得到：

$$v_o(t) = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-4t} \sin\sqrt{2}t \text{V}, \quad t \geqslant 0$$

练习题16-1 试确定如图16-6所示电路中的$v_o(t)$，假定初始条件为零。

答 $8(1 - e^{-2t} - 2te^{-2t})u(t)$ V。

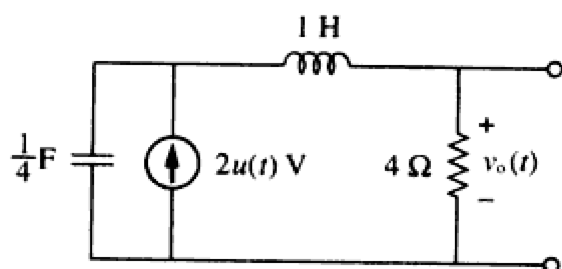


图 16-6 练习题 16-1 的电路原理图

例题16-2 试求如图16-7所示电路中的$v_o(t)$，假定$v_o(0) = 5$ V。

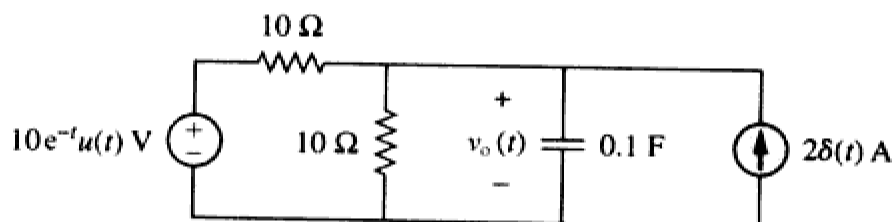


图 16-7 例题 16-2 的电路原理图

解 将电路转换到s域，如图16-8所示，电路的初始条件包含在电流源$C\,v_o(0) = 0.1(5) = 0.5$ A中（参见图16-2c）。利用节点电压法进行分析。对上面的节点，有：

$$\frac{10/(s+1) - V_o}{10} + 2 + 0.5 = \frac{V_o}{10} + \frac{V_o}{10/s}$$

即：

$$\frac{1}{s+1} + 2.5 = \frac{2V_o}{10} + \frac{sV_o}{10} = \frac{1}{10}V_o(s+2)$$

两边同乘以10，得到：

$$\frac{10}{s+1} + 25 = V_o(s+2)$$

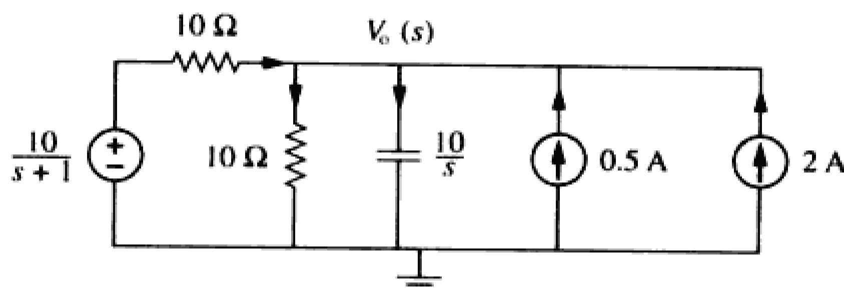


图 16-8 图 16-7 所示电路的等效电路的节点分析

即：

$$V_o = \frac{25s+35}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

其中，

$$A=(s+1)V_o(s)|_{s=-1} = \left.\frac{25s+35}{(s+2)}\right|_{s=-1} = \frac{10}{1} = 10$$

$$B=(s+2)V_o(s)|_{s=-2} = \left.\frac{25s+35}{(s+1)}\right|_{s=-2} = \frac{-15}{-1} = 15$$

因此，

$$V_o(s) = \frac{10}{s+1} + \frac{15}{s+2}$$

取拉普拉斯逆变换，可得：

$$v_o(t) = (10\,e^{-t} + 15\,e^{-2t})\,u(t)\ \text{V}$$

练习题16-2 试求如图16-9所示电路中的$v_o(t)$。注意，由于电压输入乘以$u(t)$，所以电压源在$t<0$时为短路，并且$i_L(0)=0$。

答 $\left(\frac{4}{5}e^{-2t} - \frac{2}{15}e^{-t/3}\right)u(t)\text{V}$。

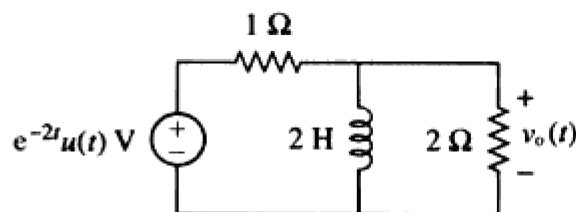


图 16-9 练习题 16-2 的电路原理图

例题16-3 在如图16-10a所示电路中，开关在$t=0$时刻，从位置a切换到位置b，试求$i(t)$，$t>0$。

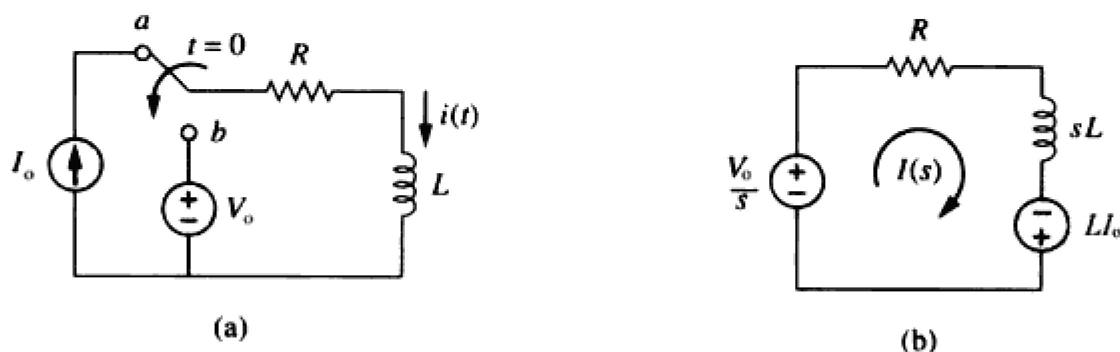


图 16-10 例题 16-3 的电路原理图

解 流过电感器的初始电流为$i(0)=I_o$。$t>0$时变换到s域的电路如图16-10b所示。初始条件包含在电压源$Li(0)=L\,I_o$中。利用网孔分析法，可以得到：

$$I(s)(R+sL) - LI_o - \frac{V_o}{s} = 0 \tag{16-3-1}$$

即：

$$I(s)=\frac{LI_o}{R+sL}+\frac{V_o}{s(R+sL)}=\frac{I_o}{s+R/L}+\frac{V_o/L}{s(s+R/L)} \tag{16-3-2}$$

式(16-3-2)右边第二项应用部分分式展开，可以得到：

$$I(s)=\frac{I_o}{s+R/L}+\frac{V_o/R}{s}-\frac{V_o/R}{(s+R/L)} \tag{16-3-3}$$

上式的拉普拉斯逆变换为：

$$i(t)=\left(I_o-\frac{V_o}{R}\right)e^{-t/\tau}+\frac{V_o}{R},\qquad t\geqslant 0 \tag{16-3-4}$$

其中，$\tau=R/L$。括号中的项为瞬态响态，第二项为稳态响应。换言之，终值为$i(\infty)=V_o/R$，对式(16-3-2)或式(16-3-3)应用终值定理即可求出该终值，即：

$$\lim_{s\to 0}sI(s)=\lim_{s\to 0}\left(\frac{sI_o}{s+R/L}+\frac{V_o/L}{s+R/L}\right)=\frac{V_o}{R} \tag{16-3-5}$$

式(16-3-4)也可以写成：

$$i(t)=I_o e^{-t/\tau}+\frac{V_o}{R}(1-e^{-t/\tau}),\qquad t\geqslant 0 \tag{16-3-6}$$

其中第一项为自然响应，而第二项为强迫响应。如果初始条件为$I_o=0$，则式(16-3-6)变为：

$$i(t)=\frac{V_o}{R}(1-e^{-t/\tau}),\qquad t\geqslant 0 \tag{16-3-7}$$

此即电路的阶跃响应，因为这是由初始能量为零的阶跃输入V_o引起的响应。

练习题16-3 如图16-11所示电路中开关长时间处于位置b，并在$t=0$时刻切换到位置a，试确定$v(t)$，$t>0$。

答 $v(t)=(V_o-I_oR)\,e^{-t/\tau}+I_oR$，$t>0$，其中$\tau=RC$。

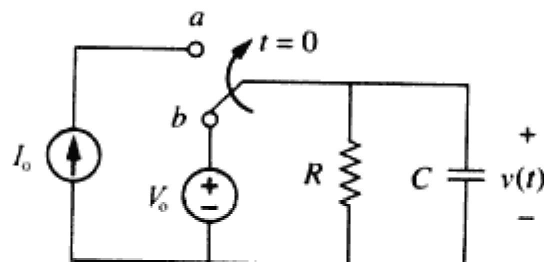


图 16-11 练习题 16-3 的电路原理图

16.3 电路分析

在s域中进行电路分析更为容易，仅需将时域中复杂的数学关系变换至s域，而在s域中（微分与积分）算子就变为简单的乘数s与$1/s$。这样就可以利用代数方法建立并求解电路方程，其中最令人振奋的是，关于直流电路的所有电路定理与关系在s域中是完全有效的。

应该记住的是，电容器与电感器的等效电路仅存在于s域中，不能反变换至时域。

例题16-4 在如图16-12a所示电路中，假定$v_s(t)=10\ u(t)$ V，并且在$t=0$时刻，流过电感器的电流为-1A，电容器两端的电压为$+5$V，试求电容器两端的电压值。

解 图16-12b所示电路为包括初始条件的s域电路，直接利用节点分析法即可求解该电路。由于V_1的值也是时域中电容器两端的电压值，是唯一的未知节点电压，所以只需要写出一个方程。

$$\frac{V_1-10/s}{10/3}+\frac{V_1-0}{5s}-\frac{i(0)}{s}+\frac{V_1-[v(0)/s]}{1/(0.1s)}=0 \tag{16-4-1}$$

即：

$$0.1\left(s+3+\frac{2}{s}\right)V_1=\frac{3}{s}+\frac{1}{s}+0.5 \tag{16-4-2}$$

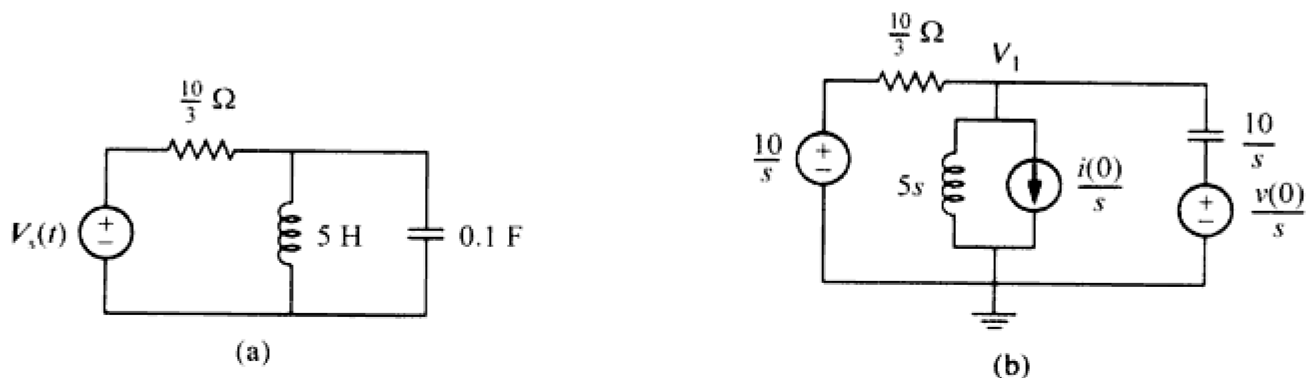


图 16-12 例题 16-4 的电路原理图

其中，$v(0)=5$ V，$i(0)=-1$ A。化简后可以得到：

$$(s^2+3s+2)V_1=40+5s$$

即：

$$V_1=\frac{40+5s}{(s+1)(s+2)}=\frac{35}{s+1}-\frac{30}{s+2} \tag{16-4-3}$$

取拉普拉斯逆变换得到：

$$v_1(t)=(35\mathrm{e}^{-t}-30\mathrm{e}^{-2t})u(t)\mathrm{V} \tag{16-4-4}$$

练习题16-4 在如图16-12所示电路中，初始条件保持不变，试求$t>0$时流过电感器的电流。

答 $i(t)=(3-7\mathrm{e}^{-t}+3\mathrm{e}^{-2t})\,u(t)$A。

例题16-5 在如图16-12所示电路中，初始条件与例题16-4相同，试利用叠加原理计算电容器两端的电压值。

解 由于s域等效电路中包括三个独立源，因此可以针对各独立源分别求解。图16-13给出了各独立源分别作用时的s域等效电路，于是本例转换为三个节点分析的问题。首先求解如图16-13a所示电路中电容器两端的电压。

$$\frac{V_1-10/s}{10/3}+\frac{V_1-0}{5s}-0+\frac{V_1-0}{1/(0.1s)}=0$$

即：

$$0.1\left(s+3+\frac{2}{s}\right)V_1=\frac{3}{s}$$

简化后可以得到：

$$(s^2+3s+2)V_1=30$$

$$V_1=\frac{30}{(s+1)(s+2)}=\frac{30}{s+1}-\frac{30}{s+2}$$

即：

$$v_1(t)=(30\mathrm{e}^{-t}-30\mathrm{e}^{-2t})u(t)\mathrm{V} \tag{16-5-1}$$

对于如图16-13b所示电路，有：

$$\frac{V_2-0}{10/3}+\frac{V_2-0}{5s}-\frac{1}{s}+\frac{V_2-0}{1/(0.1s)}=0$$

即：

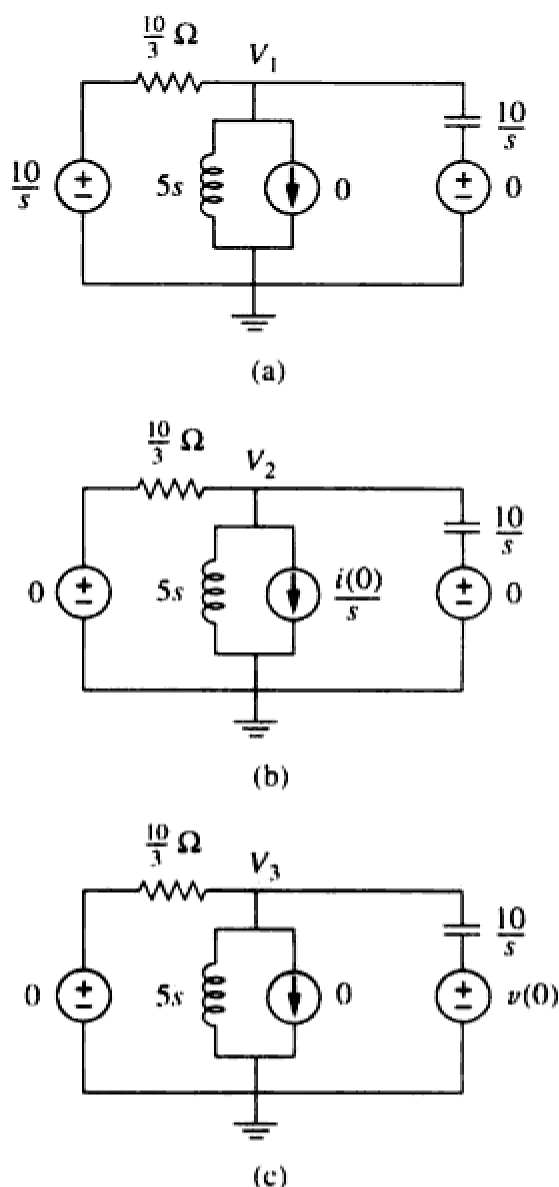


图16-13 例题16-5的电路原理图

$$0.1\left(s+3+\frac{2}{s}\right)V_2=\frac{1}{s}$$

由此可以得到：

$$V_2=\frac{10}{(s+1)(s+2)}=\frac{10}{s+1}-\frac{10}{s+2}$$

取拉普拉斯逆变换得到：

$$v_2(t)=(10e^{-t}-10e^{-2t})u(t)\text{V} \tag{16-5-2}$$

对于如图16-13c所示电路，有：

$$\frac{V_3-0}{10/3}+\frac{V_3-0}{5s}-0+\frac{V_3-5/s}{1/(0.1s)}=0$$

即：

$$0.1\left(s+3+\frac{2}{s}\right)V_3=0.5$$

$$V_3=\frac{5s}{(s+1)(s+2)}=\frac{-5}{s+1}+\frac{10}{s+2}$$

由此可以得到：

$$v_3(t)=(-5e^{-t}+10e^{-2t})u(t)\text{V} \tag{16-5-3}$$

下面需要做的就是将式（16-5-1）、式（16-5-2）与式（16-5-3）相加即可：

$$\begin{aligned}v(t)&=v_1(t)+v_2(t)+v_3(t)\\&=\left\{(30+10-5)e^{-t}+(-30+10-10)e^{-2t}\right\}u(t)\text{V}\end{aligned}$$

即：

$$v(t)=(35e^{-t}-30e^{-2t})u(t)\text{V}$$

与例题16-4的计算结果相一致。

练习题16-5 在如图16-12所示电路中，初始条件与例题16-4相同，试利用叠加原理计算$t>0$时流过电感器的电流。

答 $i(t)=(3-7e^{-t}+3e^{-2t})\,u(t)\text{A}$。

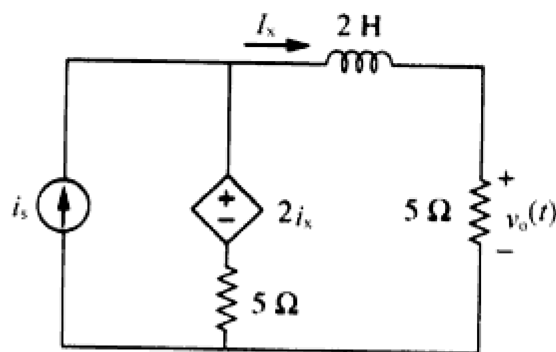


图 16-14 例题 16-6 的电路原理图

例题16-6 假定如图16-14所示电路在$t=0$时无初始储能，并且$i_s=10\,u(t)$ A。(a) 试利用戴维南定理确定$V_o(s)$；(b) 试利用初值定理与终值定理计算$v_o(0^+)$与$v_o(\infty)$；(c) 试确定$v_o(t)$。

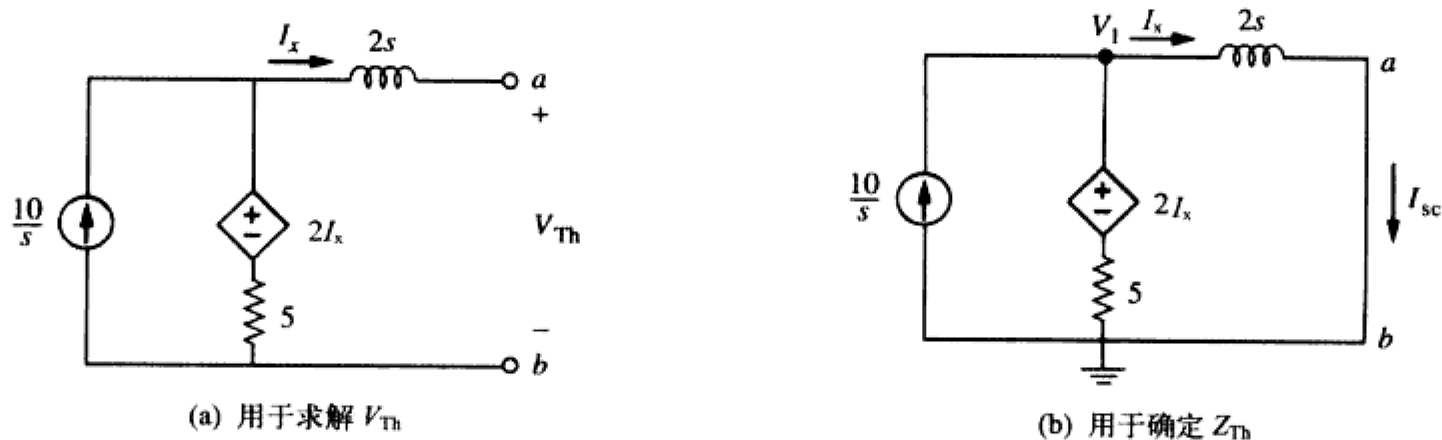
解 由于该电路中不存在初始储能，所以假定在$t=0$时刻电感器的初始电流与电容器的初始电压均为0。

(a) 为确定戴维南等效电路，需将5 Ω电阻器断路，之后求出V_{oc}（V_{Th}）与I_{sc}。为了求解V_{Th}，需利用如图16-15a所示的拉普拉斯变换后的电路，由于$I_x=0$，独立电压源不工作，因此，

$$V_{oc}=V_{Th}=5\left(\frac{10}{s}\right)=\frac{50}{s}$$

为了求解Z_{Th}，需考虑如图16-15b所示电路，首先求出图中的I_{sc}。利用节点分析法求出V_1后即可得到I_{sc}（$I_{sc}=I_x=V_1/2s$）。

$$-\frac{10}{s}+\frac{(V_1-2I_x)-0}{5}+\frac{V_1-0}{2s}=0$$



(a) 用于求解 V_{Th}　　(b) 用于确定 Z_{Th}

图 16-15　例题 16-6 的电路原理图

其中，

$$I_x = \frac{V_1}{2s}$$

由此可以得到：

$$V_1 = \frac{100}{2s+3}$$

因此，

$$I_{sc} = \frac{V_1}{2s} = \frac{100/(2s+3)}{2s} = \frac{50}{s(2s+3)}$$

并且，

$$Z_{Th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{50/s}{50/[s(2s+3)]} = 2s+3$$

已知电路在端口a—b处利用其戴维南等效电路取代后如图16-16所示。由图16-16可以得到：

图 16-16　图 16-14 所示电路的 s 域等效电路

$$V_o = \frac{5}{5+Z_{Th}} V_{Th} = \frac{5}{5+2s+3}\left(\frac{50}{s}\right) = \frac{250}{s(2s+8)} = \frac{125}{s(s+4)}$$

（b）利用初值定理可以求出：

$$v_o(0) = \lim_{s\to\infty} sV_o(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{125}{s+4} = \lim_{s\to\infty} \frac{125/s}{1+4/s} = \frac{0}{1} = 0$$

利用终值定理可以求出：

$$v_o(\infty) = \lim_{s\to 0} sV_o(s) = \lim_{s\to 0} \frac{125}{s+4} = \frac{125}{4} = 31.25\text{V}$$

（c）利用部分分式展开可以得到：

$$V_o = \frac{125}{s(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4}$$

$$A = sV_o(s)\big|_{s=0} = \left.\frac{125}{s+4}\right|_{s=0} = 31.25$$

$$B = (s+4)V_o(s)\big|_{s=-4} = \left.\frac{125}{s}\right|_{s=-4} = -31.25$$

$$V_o = \frac{31.25}{s} - \frac{31.25}{s+4}$$

取拉普拉斯逆变换得到：

$$v_o(t) = 31.25(1-e^{-4t})u(t)\text{V}$$

注意，（b）中得到的$v_o(0)$与$v_o(\infty)$的值验证了上述结果的正确性。

练习题16-6 如图16-17所示电路在$t=0$时刻的初始储能为0，并且假定$v_s=5\,u(t)$ V。（a）试利用戴维南定理计算$V_o(s)$；（b）试利用初值定理与终值定理计算$v_o(0)$与$v_o(\infty)$；（c）试确定$v_o(t)$。

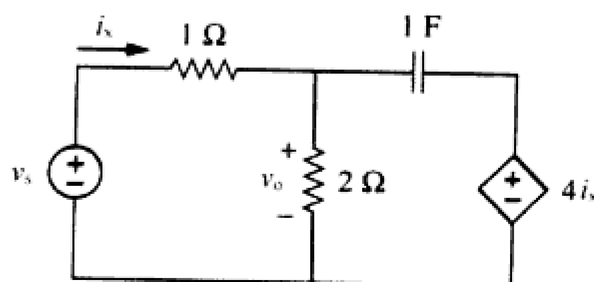


图 16-17 练习题 16-6 的电路原理图

答 （a）$V_o(s)=\dfrac{4(s+0.25)}{s(s+0.3)}$，

（b）4，3.333 V，（c）$(3.333+0.6667e^{-0.3t})\,u(t)$ V。

16.4 传递函数

传递函数（transfer function）是信号处理中一个非常重要的概念，它表示信号通过电路网络时是如何被处理的。传递函数是求解网络响应、确定（或设计）网络稳定性以及网络综合的一个有力工具。网络的传递函数描述了其输出相对于输入的行为特性，在初始储能为零的情况下，传递函数确定了s域中从输入到输出的传递关系。

对于电路网络而言，传递函数也称为网络函数（network function）。

传递函数$H(s)$是所有初始条件均为零的情况下，电路的输出响应$Y(s)$与输入激励$X(s)$之比。

因此，

$$\boxed{H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}} \tag{16-15}$$

传递函数的形式取决于输入与输出的定义。由于输入与输出可以是电路中任何位置的电流或电压，所以传递函数存在如下四种可能的形式：

$$H(s)=\text{电压增益}=\frac{V_o(s)}{V_i(s)} \tag{16-16a}$$

$$H(s)=\text{电流增益}=\frac{I_o(s)}{I_i(s)} \tag{16-16b}$$

$$H(s)=\text{阻抗}=\frac{V(s)}{I(s)} \tag{16-16c}$$

$$H(s)=\text{导纳}=\frac{I(s)}{V(s)} \tag{16-16d}$$

一些学者并不认为式(16-16c)与式(16-16d)是传递函数。

所以，一个电路可以有多种形式的传递函数。注意，式(16-16a)与式(16-16b)所示的$H(s)$是无量纲的。

式(16-16)中的传递函数可以用两种方法求得。第一种方法是假定任意一个方便的输入$X(s)$，利用任何一种电路分析方法（例如分流原理或分压原理、节点分析法或网孔分析法）求得输出$Y(s)$，之后即可得到二者之比$H(s)$。另一种方法是应用阶梯法（ladder method），即假定电路的输出为1 V或1 A，利用欧姆定律与基尔霍夫定律（这里仅采用KCL）确定输入，于是得到传递函数为1除以输入。当电路包含大量网孔或节点时，节点分析或网孔分析变得较为繁琐，此时利用第二种方法更为方便。第一种方法是假定输入求输出，而第二种方法则是假定输出求输入，两种方法所计算的$H(s)$均为输出与输入之比。这两种方法的基础是电路的线性性质，因为本书研究的仅是线性电路。例题16-8举例说明了这两种方法的应用。

式(16-15)假定$X(s)$与$Y(s)$均已知。而有些情况下已知的是$X(s)$与传递函数$H(s)$，此时可以求出$Y(s)$为：

$$Y(s)=H(s)\,X(s) \tag{16-17}$$

取其逆变换即可得到$y(t)$。在输入为单位冲激函数，$x(t)=\delta(t)$的特殊情况下，$X(s)=1$，此时：

$$Y(s)=H(s)\qquad 或\qquad y(t)=h(t) \tag{16-18}$$

其中，

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)] \tag{16-19}$$

$h(t)$表示电路的单位冲激响应（unit impulse response）——网络对单位冲激函数的时域响应。于是，式(16-19)给出了传递函数的一种新的解释：$H(s)$是网络单位冲激响应的拉普拉斯变换。一旦已知网络的单位冲激响应$h(t)$，即可利用式(16-17)确定网络对任意输入信号的s域响应，或者利用卷积积分（参见15.5节）确定网络的时域响应。

单位冲激响应是指输入为单位冲激函数时电路的输出响应。

例题16-7　某线性系统在输入为$x(t)=e^{-t}\,u(t)$时的输出为$y(t)=10\,e^{-t}\cos 4t\,u(t)$，试求该系统的传递函数及其冲激响应。

解　如果$x(t)=e^{-t}\,u(t)$，$y(t)=10\,e^{-t}\cos 4t\,u(t)$，则：

$$X(s)=\frac{1}{s+1}\quad 同时\quad Y(s)=\frac{10(s+1)}{(s+1)^2+4^2}$$

因此，

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{10(s+1)^2}{(s+1)^2+16}=\frac{10(s^2+2s+1)}{s^2+2s+17}$$

为了求出$h(t)$，需将$H(s)$写为：

$$H(s)=10-40\frac{4}{(s+1)^2+4^2}$$

由表15-2可以得到：

$$h(t)=10\delta(t)-40e^{-t}\sin 4t u(t)$$

练习题16-7　某线性系统的传递函数为：

$$H(s)=\frac{2s}{s+6}$$

试求输入为$e^{-3t}\,u(t)$时的输出$y(t)$及其冲激响应。

答　$-2\,e^{-3t}+4\,e^{-6t}$，$t\geqslant 0$，$2\delta(t)-12\,e^{-6t}\,u(t)$。

例题16-8　试确定如图16-18所示电路的传递函数$H(s)=V_o(s)/I_o(s)$。

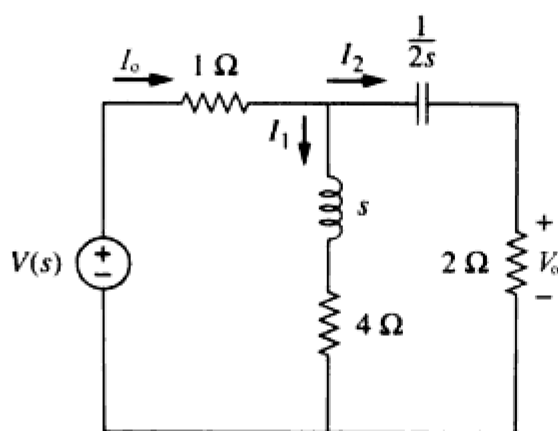


图16-18　例题16-8的电路原理图

解

方法1：由分流原理可以得到：

$$I_2=\frac{(s+4)I_o}{s+4+2+1/2s}$$

但是，

$$V_o=2I_2=\frac{2(s+4)I_o}{s+6+1/2s}$$

因此，

$$H(s)=\frac{V_o(s)}{I_o(s)}=\frac{4s(s+4)}{2s^2+12s+1}$$

方法2：利用阶梯法。令$V_o = 1$ V，根据欧姆定律，$I_2 = V_o/2 = 1/2$ A，于是，阻抗$(2 + 1/2s)$两端的电压为：

$$V_1 = I_2\left(2 + \frac{1}{2s}\right) = 1 + \frac{1}{4s} = \frac{4s+1}{4s}$$

该电压就与阻抗$(s+4)$两端的电压相同，所以：

$$I_1 = \frac{V_1}{s+4} = \frac{4s+1}{4s(s+4)}$$

对上面的节点应用KCL，可以得到：

$$I_o = I_1 + I_2 = \frac{4s+1}{4s(s+4)} + \frac{1}{2} = \frac{2s^2+12s+1}{4s(s+4)}$$

于是，

$$H(s) = \frac{V_o}{I_o} = \frac{1}{I_o} = \frac{4s(s+4)}{2s^2+12s+1}$$

与方法1的结果相同。

练习题16-8 试求如图16-18所示电路的传递函数$H(s) = I_1(s)/I_o(s)$。

答 $\dfrac{4s+1}{2s^2+12s+1}$。

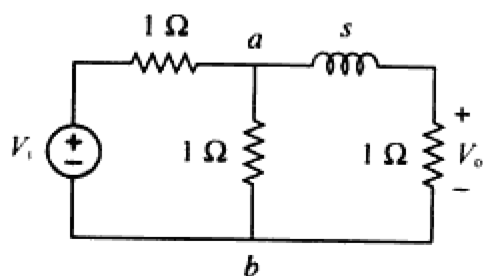


图 16-19 例题 16-9 的电路原理图

例题16-9 对于如图16-19所示的s域电路，试求：(a) 传递函数$H(s) = V_o/V_i$；(b) 冲激响应；(c) $v_i(t) = u(t)$ V时的响应；(d) $v_i(t) = 8\cos 2t$ V时的响应。

解 (a) 利用分压原理可以得到：

$$V_o = \frac{1}{s+1}V_{ab} \tag{16-9-1}$$

而

$$V_{ab} = \frac{1\|(s+1)}{1+1\|(s+1)}V_i = \frac{(s+1)/(s+2)}{1+(s+1)/(s+2)}V_i$$

即：

$$V_{ab} = \frac{s+1}{2s+3}V_i \tag{16-9-2}$$

将式(16-9-2)代入式(16-9-1)，可以得到：

$$V_o = \frac{V_i}{2s+3}$$

因此，传递函数为：

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{2s+3}$$

(b) 可以将$H(s)$写为：

$$H(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s+\frac{3}{2}}$$

其拉普拉斯逆变换即为所要求的冲激响应：

$$h(t)=\frac{1}{2}e^{-3t/2}u(t)$$

（c）当$v_i(t)=u(t)$时，$V_i(s)=1/s$，并且：

$$V_o(s)=H(s)V_i(s)=\frac{1}{2s\left(s+\frac{3}{2}\right)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+\frac{3}{2}}$$

其中，

$$A=sV_o(s)|_{s=0}=\left.\frac{1}{2(s+\frac{3}{2})}\right|_{s=0}=\frac{1}{3}$$

$$B=\left(s+\frac{3}{2}\right)V_o(s)\Big|_{s=-3/2}=\left.\frac{1}{2s}\right|_{s=-3/2}=-\frac{1}{3}$$

于是，当$v_i(t)=u(t)$时：

$$V_o(s)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{3}{2}}\right)$$

其拉普拉斯逆变换为：

$$v_o(t)=\frac{1}{3}(1-e^{-3t/2})u(t)\text{V}$$

（d）当$v_i(t)=8\cos 2t$时，$V_i(s)=\dfrac{8s}{s^2+4}$，并且：

$$V_o(s)=H(s)V_i(s)=\frac{4s}{(s+\frac{3}{2})(s^2+4)}$$
$$=\frac{A}{s+\frac{3}{2}}+\frac{Bs+C}{s^2+4} \tag{16-9-3}$$

其中，

$$A=\left(s+\frac{3}{2}\right)V_o(s)\Big|_{s=-3/2}=\left.\frac{4s}{s^2+4}\right|_{s=-3/2}=-\frac{24}{25}$$

为了求出B与C，将式（16-9-3）两边同乘以$(s+3/2)(s^2+4)$，得到：

$$4s=A\left(s^2+4\right)+B\left(s^2+\frac{3}{2}s\right)+C\left(s+\frac{3}{2}\right)$$

由对应幂次系数相等，可以得到

$$\text{常数项：}0=4A+\frac{3}{2}C \quad\Rightarrow\quad C=-\frac{8}{3}A$$

$$s\text{：}\quad 4=\frac{3}{2}B+C$$

$$s^2\text{：}\quad 0=A+B \quad\Rightarrow\quad B=-A$$

联立求解得到$A=-24/25$，$B=24/25$，$C=64/25$。于是，当输入为$v_i(t)=8\cos 2t$ V时，其输出为：

$$V_o(s)=\frac{-\frac{24}{25}}{s+\frac{3}{2}}+\frac{24}{25}\frac{s}{s^2+4}+\frac{32}{25}\frac{2}{s^2+4}$$

其逆变换为：

$$v_o(t)=\frac{24}{25}\left(-e^{-3t/2}+\cos 2t+\frac{4}{3}\sin 2t\right)u(t)\text{V}$$

练习题16-9 对如图16-20所示电路重做例题16-9中的四个问题。

答 (a) $2/(s+4)$，(b) $2e^{-4t}u(t)$，(c) $\frac{1}{2}(1-e^{-4t})u(t)$ V，

(d) $3.2(-e^{-4t}+\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t)u(t)$ V。

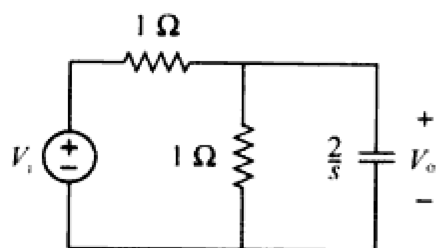


图 16-20 练习题 16-9 的电路原理图

16.5 状态变量

截至目前，本书所讨论的系统分析方法均是针对单输入与单输出系统的，但大量工程系统通常具有多个输入与多个输出，如图16-21所示。状态变量分析法是分析、理解这类高度复杂的系统的极其重要的方法，因此，状态变量模型比诸如传递函数等单输入—单输出模型更为通用。虽然利用一章来讲解也不能充分阐述状态变量分析法，更不要说一节的篇幅了，但本节仍要简明扼要地予以阐释。

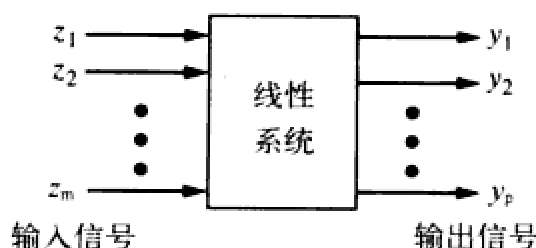


图 16-21 包括 m 个输入与 p 个输出的线性系统

在状态变量模型中，定义了一组描述系统内部特性的变量，这些变量称之为系统的状态变量(state variable)。当系统的当前状态与输入信号已知时，状态变量就是确定系统未来特性的变量。换句话说，状态变量就是仅利用代数方程即可确定其他所有系统参数的变量。

状态变量是指刻划系统状态特征的物理属性，而与系统如何达到该状态无关。

状态变量的常见实例如压力、体积与温度等。在电子电路中，状态变量为流过电感器的电流与电容器两端的电压，因为二者描述了系统的能量状态。

表示状态变量的标准化方法是将其表示为一组一阶微分方程：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{z} \tag{16-20}$$

其中，

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{bmatrix}=\text{表示}n\text{个状态矢量的状态矢量}$$

点（·）表示关于时间的一阶微分，即：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\\\vdots\\\dot{x}_n(t)\end{bmatrix}$$

并且，

$$z(t)=\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \end{bmatrix}=\text{表示}m\text{个输入的输入矢量}$$

$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$分别为$n\times n$与$n\times m$矩阵。除式(16-20)所示的状态方程外，还需要写出输出方程。完整的状态模型与状态空间为：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bz} \tag{16-21a}$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Cx}+\boldsymbol{Dz} \tag{16-21b}$$

其中，

$$\boldsymbol{y}(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}=\text{表示}p\text{个输出的输出矢量}$$

$\boldsymbol{C}$与$\boldsymbol{D}$分别为$p\times n$与$p\times m$矩阵。对于单输入－单输出的特殊情况，有$n=m=p=1$。

假定初始条件为零，则式(16-21a)取拉普拉斯变换即可求出系统的传递函数，从而得到：

$$s\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{AX}(s)+\boldsymbol{BZ}(s)\rightarrow(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{BZ}(s)$$

即：

$$\boldsymbol{X}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{BZ}(s) \tag{16-22}$$

其中，$\boldsymbol{I}$为单位矩阵。取式(16-21b)的拉普拉斯变换，可以得到：

$$\boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{CX}(s)+\boldsymbol{DZ}(s) \tag{16-23}$$

将式(16-22)代入式(16-23)，并除以$\boldsymbol{Z}(s)$即可得到传递函数为：

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{\boldsymbol{Y}(s)}{\boldsymbol{Z}(s)}=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D} \tag{16-24}$$

其中，

$\boldsymbol{A}$＝系统矩阵

$\boldsymbol{B}$＝输入耦合矩阵

$\boldsymbol{C}$＝输出矩阵

$\boldsymbol{D}$＝前馈矩阵

在绝大多数情况下，$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$，因此式（16-24）中$H(s)$的分子次数小于分母次数。于是，

$$\boxed{\boldsymbol{H}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}} \tag{16-25}$$

由于涉及到矩阵运算，故可以利用MATLAB求解传递函数。

应用状态变量分析法分析电路时，应遵循如下三个步骤。

应用状态变量分析法分析电路的三个步骤：

（1）选择流过电感器的电流i与电容器两端的电压v作为状态变量，同时确保二者符合无源符号规约。

（2）对电路应用KCL与KVL，从而得到用状态变量表示的电路变量（电压与电流），由此得到确定所有状态变量的充分必要条件，即一组一阶微分方程。

（3）确定输出方程并利用状态空间表示给出最终结果。

步骤（1）与步骤（3）通常很简单，主要任务在步骤（2），下面将通过例题予以说明。

例题16-10 试求如图16-22所示电路的状态空间表示，并确定当v_s为输入、i_x为输出时该电路的传递函数。图中$R=1\ \Omega$，$C=0.25$ F，$L=0.5$ H。

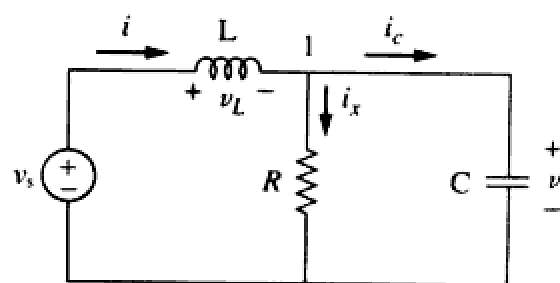


图 16-22 例题 16-10 的电路原理图

解 选择流过电感器的电流i与电容器两端的电压v作为状态变量，

$$v_L = L\frac{di}{dt} \qquad (16\text{-}10\text{-}1)$$

$$i_C = C\frac{dv}{dt} \qquad (16\text{-}10\text{-}2)$$

对节点1应用KCL，可以得到：

$$i = i_x + i_C \to C\frac{dv}{dt} = i - \frac{v}{R}$$

即：

$$\dot{v} = -\frac{v}{RC} + \frac{i}{C} \qquad (16\text{-}10\text{-}3)$$

因为R与C两端的电压相等，均为v。对外部环路应用KVL，可以得到：

$$v_s = v_L + v \to L\frac{di}{dt} = -v + v_s$$

$$\dot{i} = -\frac{v}{L} + \frac{v_s}{L} \qquad (16\text{-}10\text{-}4)$$

式(16-10-3）与式（16-10-4）即构成状态方程。如果将i_x看作输出，

$$i_x = \frac{v}{R} \qquad (16\text{-}10\text{-}5)$$

将式（16-10-3）、式（16-10-4）与式（16-10-5）写成标准形式，得到：

$$\begin{bmatrix}\dot{v}\\ \dot{i}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{-1}{RC} & \frac{1}{C}\\ \frac{-1}{L} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\ i\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}v_s \qquad (16\text{-}10\text{-}6a)$$

$$i_x = \begin{bmatrix}\frac{1}{R} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\ i\end{bmatrix} \qquad (16\text{-}10\text{-}6b)$$

如果$R=1$，$C=\frac{1}{4}$，$L=\frac{1}{2}$，则由式（16-10-6）可以得到如下矩阵：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}\frac{-1}{RC} & \frac{1}{C}\\ \frac{-1}{L} & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4 & 4\\ -2 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix}\frac{1}{R} & 0\end{bmatrix} = [1\ \ 0]$$

$$s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-4 & 4\\ -2 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}s+4 & -4\\ 2 & s\end{bmatrix}$$

取逆矩阵得到：

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{\boldsymbol{A}\text{的伴随矩阵}}{\boldsymbol{A}\text{的行列式}} = \frac{\begin{bmatrix}s & 4\\ -2 & s+4\end{bmatrix}}{s^2+4s+8}$$

于是，传递函数为：

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{[0\ 1]\begin{bmatrix} s & 4 \\ -2 & s+4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}{s^2+4s+8} = \frac{[1\ 0]\begin{bmatrix} 8 \\ 2s+8 \end{bmatrix}}{s^2+4s+8}$$

$$= \frac{8}{s^2+4s+8}$$

与对电路直接进行拉普拉斯变换得到的$H(s) = I_x(s)/V_s(s)$相同。状态变量分析法的真正优势就在于分析多输入与多输出系统。在本例中，输入只有一个v_x，输出也只有一个i_x。下一个例题将研究两输入与两输出系统。

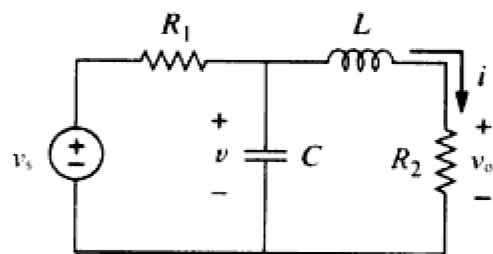


图 16-23 练习题 16-10 的电路原理图

练习题16-10 试确定如图16-23所示电路的状态变量模型，假定$R_1=1$，$R_2=2$，$C=0.5$，$L=0.2$，并确定传递函数。

答

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1C} & \frac{-1}{C} \\ \frac{1}{L} & \frac{-R_2}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1C} \\ 0 \end{bmatrix} v_s, \quad v_o = [0\ \ R_2]\begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix}$$

$$H(s) = \frac{20}{s^2+12s+30}$$

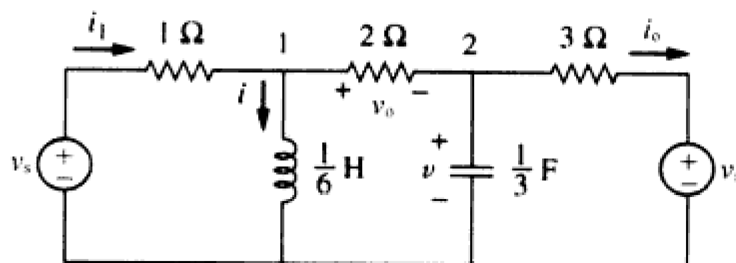


图 16-24 例题 16-11 的电路原理图

例题16-11 如图16-24所示电路可以看作是一个两输入－两输出系统，试确定状态变量模型，并求出该系统的传递函数。

解 本例中的两个输入为v_s与v_i，两个输出为v_o与i_o。同样，选择流过电感器的电流i与电容器两端的电压v作为状态变量。对左边回路应用KVL可以得到：

$$-v_s + i_1 + \frac{1}{6}\dot{i} = 0 \rightarrow \dot{i} = 6v_s - 6i_1 \tag{16-11-1}$$

需要消去其中的i_1，对包含v_s、1 Ω电阻器、2 Ω电阻器以及$\frac{1}{3}$ F电容器的回路应用KVL，可以得到：

$$v_s = i_1 + v_o + v \tag{16-11-2}$$

但是，在节点1处，由KCL得到：

$$i_1 = i + \frac{v_o}{2} \rightarrow v_o = 2(i_1 - i) \tag{16-11-3}$$

将其代入式(16-11-2)，有：

$$v_s = 3i_1 + v - 2i \rightarrow i_1 = \frac{2i - v + v_s}{3} \tag{16-11-4}$$

将其代入式(16-11-1)可以得到：

$$\dot{i} = 2v - 4i + 4v_s \tag{16-11-5}$$

于是得到一个状态方程。为了得到第二个状态方程，对节点2应用KCL，有：

$$\frac{v_o}{2} = \frac{1}{3}\dot{v} + i_o \rightarrow \dot{v} = \frac{3}{2}v_o - 3i_o \tag{16-11-6}$$

需要消去其中的v_o与i_o。由右边的回路显然可以得到：

$$i_o = \frac{v - v_i}{3} \tag{16-11-7}$$

将式(16-11-4)代入式(16-11-3)得到：

$$v_o = 2\left(\frac{2i - v + v_s}{3} - i\right) = -\frac{2}{3}(v + i - v_s) \tag{16-11-8}$$

将式(16-11-7)与式(16-11-8)代入式(16-11-6)即可得到第二个状态方程：

$$\dot{v} = -2v - i + v_s + v_i \tag{16-11-9}$$

两个输出方程即前面已经求出的式(16-11-7)与式(16-11-8)。将式(16-11-5)与式(16-11-7)～式(16-11-9)写为标准形式，就会得到该电路的状态模型，即：

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ v_i \end{bmatrix} \tag{16-11-10a}$$

$$\begin{bmatrix} v_o \\ i_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ v_i \end{bmatrix} \tag{16-11-10b}$$

练习题16-11 对于如图16-25所示的电子电路，试确定其状态模型。取v_o与i_o作为输出变量。

答

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_o \\ i_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

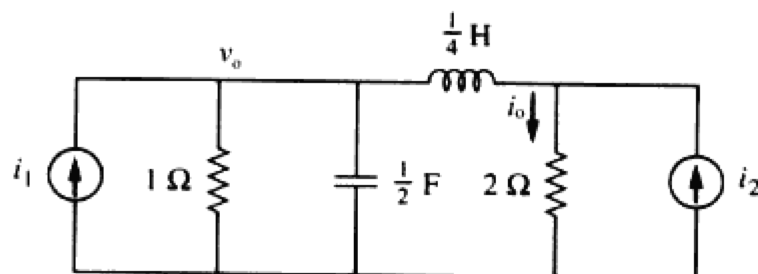


图 16-25 练习题 16-11 的电路原理图

例题16-12 假定某系统的输出为$y(t)$，输入为$z(t)$，描述输入－输出关系的微分方程如下所示：

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 5z(t) \tag{16-12-1}$$

试确定状态变量模型以及该系统的传递函数。

解 首先，选择状态变量。设$x_1 = y(t)$，于是：

$$\dot{x}_1 = \dot{y}(t) \tag{16-12-2}$$

设：

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}(t) \tag{16-12-3}$$

应该注意的是，我们要确定一个二阶系统，该系统的解中通常包含两个一阶项。

由于上述假设可知，$\dot{x}_2 = \ddot{y}(t)$，由式（16-12-1）即可求出$\dot{x}_2$的值：

$$\dot{x}_2 = \ddot{y}(t) = -2y(t) - 3\dot{y}(t) + 5z(t) = -2x_1 - 3x_2 + 5z(t) \tag{16-12-4}$$

由式(16-12-2)～式(16-12-4)可以写出如下矩阵方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} z(t) \tag{16-12-5}$$

$$y(t) = [1 \ \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{16-12-6}$$

下面确定传递函数。

$$sI - A = s\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\-2 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}s & -1\\2 & s+3\end{bmatrix}$$

其逆矩阵为：

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix}s+3 & 1\\-2 & s\end{bmatrix}}{s(s+3)+2}$$

于是，传递函数为：

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{(1\ \ 0)\begin{bmatrix}s+3 & 1\\-2 & s\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}}{s(s+3)+2} = \frac{(1\ \ 0)\begin{pmatrix}5\\5s\end{pmatrix}}{s(s+3)+2}$$

$$= \frac{5}{(s+1)(s+2)}$$

对式(16-12-1)中各项进行拉普拉斯变换即可验证上述结果。由于初始条件为零，所以得到：

$$[s^2+3s+2]Y(s) = 5Z(s) \rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{5}{s^2+3s+2}$$

与前面得到的结果相一致。

练习题16-12 试推导表示如下微分方程的一组状态变量：

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 6\frac{d^2y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} + 6y = z(t)$$

答

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-6 & -11 & -6\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \quad C = [1\quad 0\quad 0].$$

16.6 †应用

至此已经讨论了拉普拉斯变换三个方面的应用，一般的电路分析、传递函数的确定以及线性微积分方程的求解。拉普拉斯变换在电路分析、信号处理、控制系统等领域也有着广泛的应用，本节将讨论两个非常重要的应用：网络稳定性与网络综合。

16.6.1 网络稳定性

如果电路的冲激响应$h(t)$在$t \rightarrow \infty$时是有界的（即$h(t)$收敛到一个有限值），则称该电路是稳定的(stable)。反之，如果$h(t)$随着$t \rightarrow \infty$无限增大，则称电路是不稳定的（unstable)。于是，电路稳定的数学表达式为：

$$\lim_{t\rightarrow\infty} |h(t)| = \text{有限值} \tag{16-26}$$

因为传递函数$H(s)$是冲激响应$h(t)$的拉普拉斯变换，所以$H(s)$必须满足某种条件使得式（16-26）成立。由前面的学习可知，$H(s)$可以写为：

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \tag{16-27}$$

其中，由于$N(s)=0$的根使得$H(s)=0$，所以称之为$H(s)$的零点，由于$D(s)=0$的根使得$H(s)\rightarrow\infty$，因此称之为极点，$H(s)$的零点与极点通常分布于s平面上，如图16-26a所示。由式(15-47)与式(15-48)可知，$H(s)$还可以用其极点表示为：

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \tag{16-28}$$

由此可见，要使电路稳定，$H(s)$必须满足两个条件：第一，$N(s)$的幂次必须小于$D(s)$的幂次；否则，利用长除法会得到：

$$H(s)=k_ns^n+k_{n-1}s^{n-1}+\cdots+k_1s+k_0+\frac{R(s)}{D(s)} \tag{16-29}$$

其中，长除法的余式$R(s)$的幂次小于$D(s)$的幂次，此时式(16-29)中$H(s)$的逆变换不满足式(16-26)的稳定性条件。第二，式(16-27)中$H(s)$的所有极点（即$D(s)=0$的所有根）必须具有负实部，换言之，所有的极点必须位于左半s平面，如图16-26b所示。取式(16-27)中$H(s)$的拉普拉斯逆变换即可看出其中的原因。由于式(16-27)与式(15-48)类似，其部分分式展开与式(15-49)相似，因此$H(s)$的拉普拉斯逆变换与式(15-53)类似，于是，

$$h(t)=(k_1\,\mathrm{e}^{-p_1t}+k_2\,\mathrm{e}^{-p_2t}+\cdots+k_n\,\mathrm{e}^{-p_nt})u(t) \tag{16-30}$$

由上式可见，每个极点p_i必须为正（也就是说，极点$s=-p_i$位于左半s平面），才能使得各e^{-p_it}随着时间t的增加而减小。



图 16-26　s 复平面

如果电路传递函数$H(s)$的所有极点均位于左半s平面，则称该电路是稳定的。

因为不稳定电路的瞬态响应不会衰减到零，所以永远不能进入稳定状态。于是，稳态分析方法仅适用于稳定电路。

仅由无源元件（R、L和C）和独立源构成的电路不可能是不稳定的，因为不稳定意味着某些支路电流或电压随着电源置零而不确定地增大，而无源元件无法产生这种不确定的增大。无源电路或者是稳定的或者其极点的实部为零。为了证明这一结论，考虑如图16-27所示的RLC串联电路，其传递函数为：

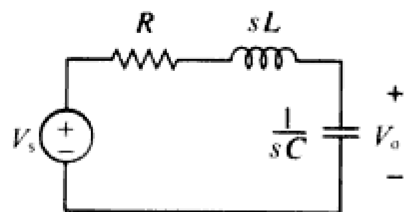


图 16-27　典型的 RLC 电路

$$H(s)=\frac{V_o}{V_s}=\frac{1/sC}{R+sL+1/sC}$$

即：

$$H(s)=\frac{1/L}{s^2+sR/L+1/LC} \tag{16-31}$$

注意，$D(s)=s^2+sR/L+1/LC=0$与RLC串联电路的特征方程式(8-8)相同，于是，该电路的极点位于：

$$p_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2} \tag{16-32}$$

其中，

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{LC}$$

因为R、L、$C>0$，所以两个极点均位于左半s平面，表明电路总是稳定的。然而，当$R=0$时，$\alpha=0$，电路变为不稳定的，虽然在理想情况下，这是可能的，但实际上并不会发生，因为R绝不会真正为零。

另一方面，有源电路或者包含受控源的无源电路都能提供能量，因此可能是不稳定的。实际上，振荡器就是不稳定电路的一个典型例子，其传递函数具有如下形式：

$$H(s) = \frac{N(s)}{s^2+\omega_0^2} = \frac{N(s)}{(s+j\omega_0)(s-j\omega_0)} \tag{16-33}$$

因此，振荡器的输出为正弦波。

例题16-13 试确定使得如图16-28所示电路稳定的k值。

解 对如图16-28所示电路中的一阶电路应用网孔分析法，可以得到：

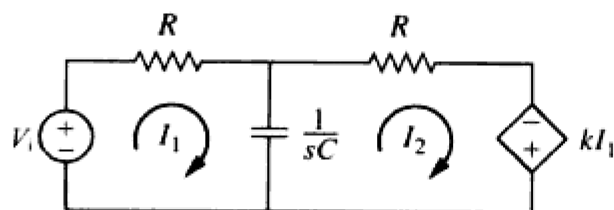


图 16-28 例题 16-13 的电路原理图

$$V_i = \left(R+\frac{1}{sC}\right)I_1 - \frac{I_2}{sC} \tag{16-13-1}$$

以及

$$0 = -kI_1 + \left(R+\frac{1}{sC}\right)I_2 - \frac{I_1}{sC}$$

即：

$$0 = -\left(k+\frac{1}{sC}\right)I_1 + \left(R+\frac{1}{sC}\right)I_2 \tag{16-13-2}$$

将式(16-13-1)与式(16-13-2)写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} V_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(R+\frac{1}{sC}\right) & -\frac{1}{sC} \\ -\left(k+\frac{1}{sC}\right) & \left(R+\frac{1}{sC}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

行列式为：

$$\Delta = \left(R+\frac{1}{sC}\right)^2 - \frac{k}{sC} - \frac{1}{s^2C^2} = \frac{sR^2C+2R-k}{sC} \tag{16-13-3}$$

由特征方程（$\Delta=0$）得到的单极点为：

$$p = \frac{k-2R}{R^2C}$$

当$k<2R$时，该极点为负值。因此，电路稳定的条件是$k<2R$，也就是说当$k>2R$时，该电路是不稳定的。

练习题16-13 β取何值时，如图16-29所示电路是稳定的。

答 $\beta > -1/R$。

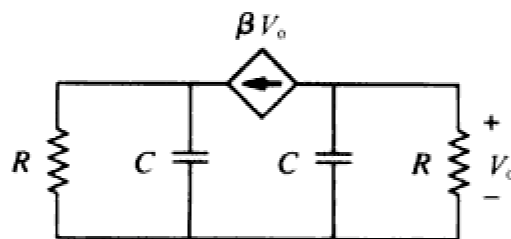


图 16-29 练习题 16-13 的电路原理图

例题16-14 某有源滤波器的传递函数为

$$H(s) = \frac{k}{s^2+s(4-k)+1}$$

试问k取何值时滤波器是稳定的。

解 作为一个二阶电路，$H(s)$可以写为：

$$H(s)=\frac{N(s)}{s^2+bs+c}$$

其中，$b=4-k$，$c=1$，$N(s)=k$，极点位于$p^2+bp+c=0$，即：

$$p_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

要使该滤波器电路稳定，其极点必须位于左半s平面，即要求$b>0$。

将上述结论用于已知的$H(s)$可知，当$4-k>0$，即$k<4$时，该滤波器是稳定的。

练习题16-14 某二阶有源电路的传递函数为：

$$H(s)=\frac{1}{s^2+s(10+\alpha)+25}$$

试求使该电路稳定的α的取值范围，当α取何值时，会引起该电路振荡。

答 $\alpha>-10$，$\alpha=-10$。

16.6.2 网络综合

网络综合可以看作是获得表示已知传递函数的电路网络的过程。s域中的网络综合要比时域中的网络综合更为容易。

在网络分析技术中，目标是求出已知网络的传递函数；而在网络综合技术中，方法则是相反的，即给定传递函数，要求出与其对应的适当电路网络。

网络综合是指确定表示给定传递函数的电路网络的过程。

需要注意的是，因为表示同一传递函数的电路可以有许多种，所以在网络综合中，答案可能有多个，也可能没有答案。但是，在网络分析中，结果只能有一个。

网络综合是一个极其重要的、令人振奋的工程领域，作为一名电路设计工程师，掌握如何分析传递函数，从而设计出它所表示的电路形式是非常重要的一笔财富。网络综合本身就是一门完整的课程，并且要求一定的工程经验，下面通过一些例题来激发读者学习的兴趣。

例题16-15 已知传递函数

$$H(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{10}{s^2+3s+10}$$

实现了如图16-30a所示电路的功能。(a) 如果$R=5\ \Omega$，试求L与C；(b) 如果$R=1\ \Omega$，试求L与C。

解 (1) **明确**问题。本例题要求解决的问题已阐述得清楚而全面。本例正是我们所说的网络综合问题：已知传递函数，要求综合出一个实现该传递函数的电路。然而，为了便于说明问题，我们给出一个可以实现给定传递函数的电路。

使得其中一个变量的取值不确定，本例中的这个变量为R，就会得到无穷多个问题的解答。对于这种具有不确定性的问题，必须通过一些附加假设，才能缩小解集的大小。

(2) **表述**对问题的理解。由输出电压与输入电压之比构成的传递函数为$10/(s^2+3s+10)$，图16-30给出的电路也应该能够实现所要求的传递函数，利用R的两个不同值5 Ω与1 Ω，即可计算出实现给定传递函数所需的L与C的值。

(3) 确定**可选**解。所有的解法都需要确定出图16-30所示电路的传递函数，之后与已知传递函数的各项进行匹配即可。计算过程中可以采用网孔分析法与节点分析法两种方法，但由于本例要求的

是电压之比，因此更适合采用节点分析法。

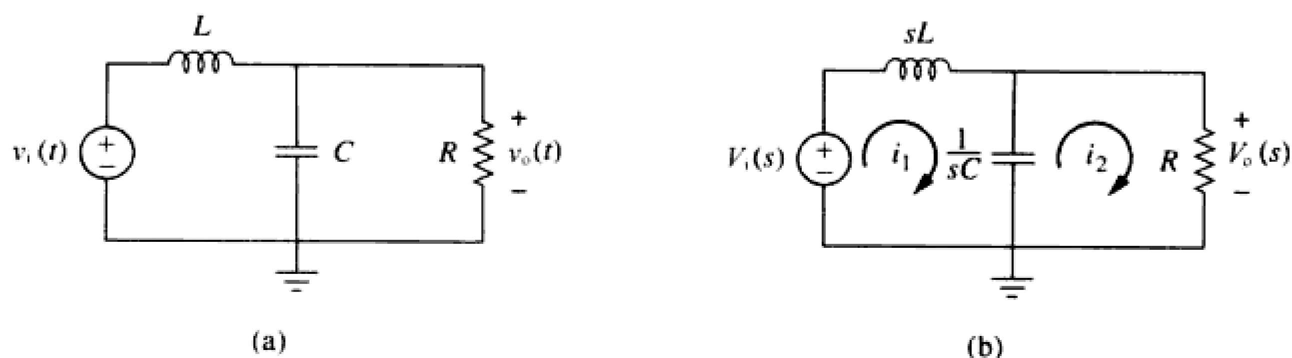


图 16-30　例题 16-15 的电路原理图

（4）**尝试**问题的解。利用节点分析法可以得到：

$$\frac{V_o(s)-V_i(s)}{sL}+\frac{V_o(s)-0}{1/(sC)}+\frac{V_o(s)-0}{R}=0$$

两边同乘以sLR，可得：

$$RV_o(s)-RV_i(s)+s^2RLCV_o(s)+sLV_o(s)=0$$

合并同类项后，有：

$$(s^2RLC+sL+R)V_o(s)=RV_i(s)$$

即：

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{1/(LC)}{s^2+[1/(RC)]s+1/(LC)}$$

比较两个传递函数即可得到包含三个未知数的两个方程：

$$LC=0.1 \qquad 即 \qquad L=\frac{0.1}{C}$$

以及

$$RC=\frac{1}{3} \qquad 即 \qquad C=\frac{1}{3R}$$

已知的约束方程为（a）$R=5\ \Omega$，（b）$R=1\ \Omega$，于是：

（a）$C=1/(3\times5)=$ **66.67 mF**，$L=$ **1.5 H**

（b）$C=1/(3\times1)=$ **333.3 mF**，$L=$ **300 mH**

（5）**评价**得到的结果。检验答案的方法有多种，利用网孔分析法求解传递函数似乎是最为简洁的方法，下面就采用这种方法验证答案。但是，应该指出的是，这种方法在数学上更为复杂，比上述综合过程中采用的节点分析法耗时更长。当然，也可以采用其他方法进行检验。假定输入信号$v_i(t)$为$v_i(t)=u(t)$ V，下面利用节点分析法或网孔分析法验证是否可以得到相同的答案。这里选择网孔分析法。

设$v_i(t)=u(t)$ V，即$V_i(s)=1/s$，由此得到：

$$V_o(s)=10/(s^3+3s^2+10s)$$

按照图16-30，由网孔分析法可以得到：

（a）对于网孔1，有

$$-(1/s)+1.5sI_1+[1/(0.066\,67s)](I_1-I_2)=0$$

即:

$$(1.5s^2+15)I_1-15I_2=1$$

对于回路2，有

$$(15/s)(I_2-I_1)+5I_2=0$$

即：

$$-15I_1+(5s+15)I_2=0 \quad 即 \quad I_1=(0.333\,3s+1)I_2$$

将其代入第一个方程可得

$$(0.5s^3+1.5s^2+5s+15)I_2-15I_2=1$$

即：

$$I_2=2/(s^3+3s^2+10s)$$

但是，

$$V_o(s)=5I_2=10/(s^3+3s^2+10s)$$

于是，答案得到验证。

（b）对于网孔1，有

$$-(1/s)+0.3sI_1+[1/(0.333\,3s)](I_1-I_2)=0$$

即：

$$(0.3s^2+3)I_1-3I_2=1$$

对于回路2，有

$$(3/s)(I_2-I_1)+I_2=0$$

即:

$$-3I_1+(s+3)I_2=0 \quad 即 \quad I_1=(0.333\,3s+1)I_2$$

将其代入第一个方程可得：

$$(0.099\,99s^3+0.3s^2+s+3)I_2-3I_2=1$$

即：

$$I_2=10/(s^3+3s^2+10s)$$

但是，

$$V_o(s)=1\times I_2=10/(s^3+3s^2+10s)$$

于是，答案得到验证。

（6）对结果是否满意？对于两种不同的情况，分别清楚地确定出L与C的取值，同时，对答案的正确性做了细致的检查。问题已完全解决，可以将其作为本题的答案。

练习题16-15 试利用如图16-31所示电路实现如下函数

$$G(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{4s}{s^2+4s+20}$$

选择$R=2\ \Omega$，试确定L与C的值。

答 0.5 H，0.1 F。

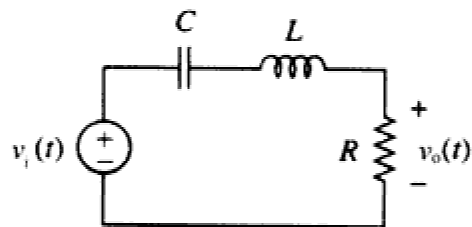


图 16-31 练习题 16-15 的电路原理图

例题16-16 试利用如图16-32所示的拓扑结构综合如下函数

$$T(s)=\frac{V_o(s)}{V_s(s)}=\frac{10^6}{s^2+100s+10^6}$$

解 对节点1与节点2分别应用节点分析法。对于节点1，有

$$(V_s-V_1)Y_1=(V_1-V_o)Y_2+(V_1-V_2)Y_3 \tag{16-16-1}$$

对于节点2，有

$$(V_1-V_2)Y_3=(V_2-0)Y_4 \tag{16-16-2}$$

而$V_2=V_o$，于是，式（16-16-1）变为

$$Y_1V_s=(Y_1+Y_2+Y_3)V_1-(Y_2+Y_3)V_o \tag{16-16-3}$$

式(16-16-2)变为

$$V_1 Y_3 = (Y_3 + Y_4) V_o$$

即

$$V_1 = \frac{1}{Y_3}(Y_3 + Y_4)V_o \tag{16-16-4}$$

将式(16-16-4)代入式(16-16-3)，可以得到

$$Y_1V_s = (Y_1 + Y_2 + Y_3)\frac{1}{Y_3}(Y_3 + Y_4)V_o - (Y_2 + Y_3)V_o$$

即：

$$Y_1 Y_3 V_s = [Y_1 Y_3 + Y_4(Y_1 + Y_2 + Y_3)] V_o$$

因此，

$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{Y_1Y_3}{Y_1Y_3 + Y_4(Y_1 + Y_2 + Y_3)} \tag{16-16-5}$$

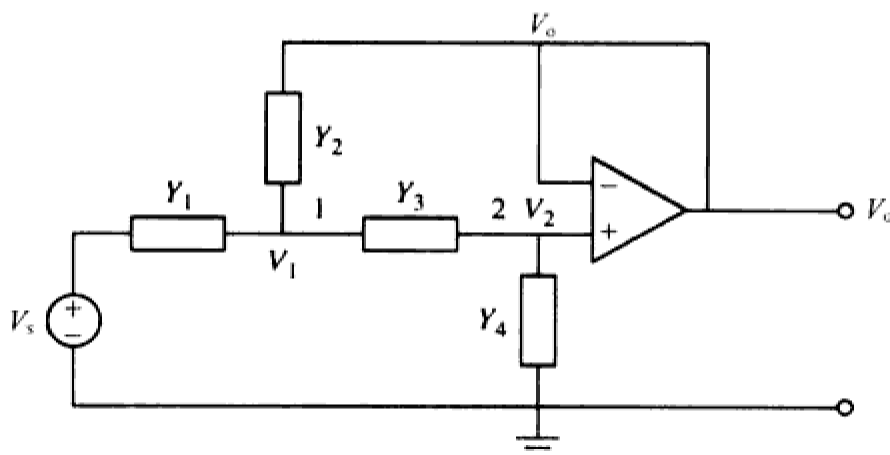


图 16-32 例题 16-16 的电路拓扑结构图

为了综合给定的传递函数$T(s)$，须将其与式(16-16-5)进行比较，由此可以注意到两点：(1) 由于$T(s)$的分子为常数，所以Y_1Y_3中一定不能包含s项；(2) 给定传递函数为二阶函数，表明综合出的电路中必须包含2个电容器。因此，可以确定Y_1、Y_3必须为电阻，而Y_2、Y_4必须为电容，于是选择：

$$Y_1 = \frac{1}{R_1}, \quad Y_2 = sC_1, \quad Y_3 = \frac{1}{R_2}, \quad Y_4 = sC_2 \tag{16-16-6}$$

将式（16-16-6）代入式（16-16-5），得到：

$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{1/(R_1R_2)}{1/(R_1R_2) + sC_2(1/R_1 + 1/R_2 + sC_1)}$$

$$= \frac{1/(R_1R_2C_1C_2)}{s^2 + s(R_1 + R_2)/(R_1R_2C_1) + 1/(R_1R_2C_1C_2)}$$

与给定的传递函数$T(s)$进行比较，可得：

$$\frac{1}{R_1R_2C_1C_2} = 10^6, \quad \frac{R_1 + R_2}{R_1R_2C_1} = 100$$

如果选择$R_1 = R_2 = 10\ \text{k}\Omega$，则有：

$$C_1 = \frac{R_1 + R_2}{100R_1R_2} = \frac{20\times10^3}{100\times100\times10^6} = 2\mu\text{F}$$

$$C_2 = \frac{10^{-6}}{R_1R_2C_1} = \frac{10^{-6}}{100\times10^6\times2\times10^{-6}} = 5\text{nF}$$

因此，利用如图16-33所示的电路即可实现给定的传递函数。

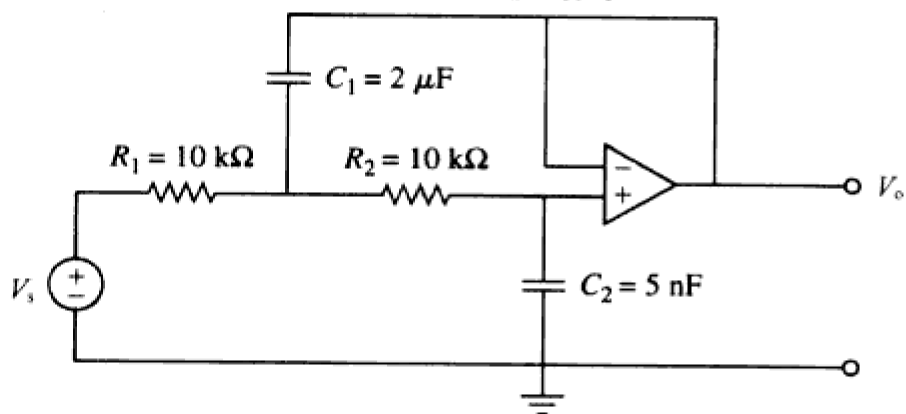


图 16-33　例题 16-16 的电路原理图

练习题16-16　试利用如图16-34所示的运算放大器电路综合如下函数：

$$\frac{V_o(s)}{V_{in}} = \frac{-2s}{s^2 + 6s + 10}$$

选择：

$$Y_1 = \frac{1}{R_1}, \quad Y_2 = sC_1, \quad Y_3 = sC_2, \quad Y_4 = \frac{1}{R_2}$$

并且令$R_1 = 1\ k\Omega$，试确定C_1，C_2与R_2的值。

答　0.1 mF，0.5 mF，2 kΩ。

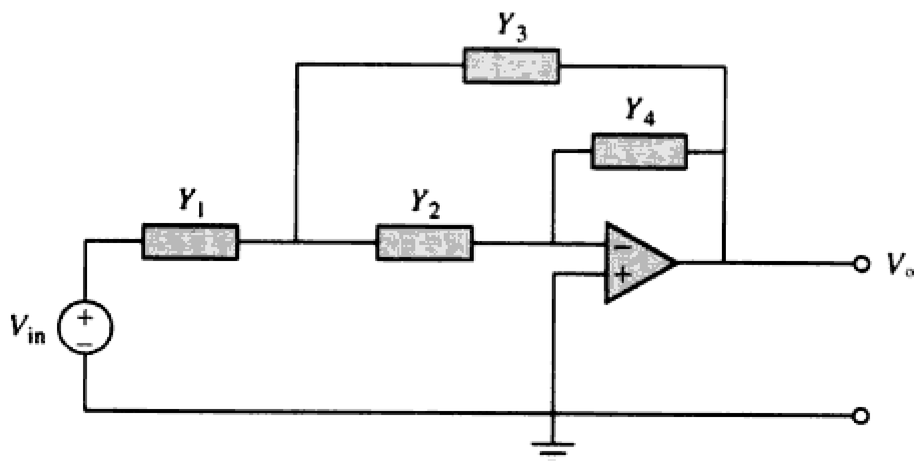


图 16-34　练习题 16-16 的电路原理图

16.7　本章小结

（1）拉普拉斯变换可以用于分析电路：将电路中各元件从时域变换到s域，利用任何电路分析方法求解电路之后，再利用拉普拉斯逆变换将结果从s域变换到时域。

（2）在s域中，电路元件可以利用其$t = 0$时刻的初始条件取代如下（注意，这里给出的是电压模型，但相应的电流模型作用相同）：

$$\text{电阻器：} v_R = Ri \quad \rightarrow \quad V_R = RI$$

$$\text{电感器：} v_L = L\frac{di}{dt} \quad \rightarrow \quad V_L = sLI - Li(0^-)$$

$$\text{电容器：} v_C = \int i\,dt \quad \rightarrow \quad V_C = \frac{1}{sC} - \frac{v(0^-)}{s}$$

（3）利用拉普拉斯变换分析电路时，可以得到电路的完全响应（即瞬态响应与稳态响应之和），因为变换过程中已经包含了初始条件。

（4）网络的传递函数$H(s)$为其冲激响应$h(t)$的拉普拉斯变换。

（5）在s域中，传递函数$H(s)$给出了输出响应$Y(s)$与输入激励$X(s)$之间的关系，即：$H(s)=Y(s)/X(s)$。

（6）状态变量模型是分析多输入多输出复杂系统的有力工具，状态变量分析是电路理论与控制工程中普遍采用的有效方法。系统的状态是为了确定系统在任意给定时刻的未来响应所必须的数量最少的一组变量（称为状态变量）。用状态变量表示的状态方程为：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{z}$$

输出方程为：

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{z}$$

（7）对于电子电路而言，首先选择电容器两端的电压与流过电感器的电流作为状态变量，之后再利用KCL与KVL确定状态方程。

（8）本章介绍的拉普拉斯变换的另外两个应用包括电路稳定性与网络综合。当电路传递函数的所有极点都位于左半s平面时，该电路则为稳定的。电路综合是指确定能够表示给定传递函数的适当的网络的过程，该过程的分析更适合在s域中进行。

复习题

16-1 电流为$i(t)$的电阻器两端的电压在s域中可以表示为$sRI(s)$。
(a) 正确 (b) 错误

16-2 输入电压为$v(t)$的RL串联电路的电流在s域中可以表示为：
(a) $V(s)\left[R+\dfrac{1}{sL}\right]$ (b) $V(s)(R+sL)$
(c) $\dfrac{V(s)}{R+1/sL}$ (d) $\dfrac{V(s)}{R+sL}$

16-3 10 F电容器的阻抗为：
(a) $10/s$ (b) $s/10$
(c) $1/10s$ (d) $10s$

16-4 通常可以在时域中得到电路的戴维南等效：
(a) 正确 (b) 错误

16-5 仅当所有初始条件为零时才可以定义传递函数：
(a) 正确 (b) 错误

16-6 如果某线性系统的输入为$\delta(t)$，输出为$e^{-2t}u(t)$，则该系统的传递函数为：
(a) $\dfrac{1}{s+2}$ (b) $\dfrac{1}{s-2}$
(c) $\dfrac{s}{s+2}$ (d) $\dfrac{s}{s-2}$
(e) 以上均不正确

16-7 如果某系统的传递函数为

$$H(s)=\frac{s^2+s+2}{s^3+4s^2+5s+1}$$

则该系统的输入为$X(s)=s^3+4s^2+5s+1$，输出为$Y(s)=s^2+s+2$。
(a) 正确 (b) 错误

16-8 某网络的传递函数为

$$H(s)=\frac{s+1}{(s-2)(s+3)}$$

则该网络是稳定的。
(a) 正确 (b) 错误

16-9 下列哪个方程称为状态方程？
(a) $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{z}$ (b) $\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x}+\mathbf{D}\mathbf{z}$
(c) $\mathbf{H}(s)=\mathbf{Y}(s)/\mathbf{Z}(s)$
(d) $\mathbf{H}(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$

16-10 描述某单输入单输出系统的状态模型为：

$$\dot{x}_1=2x_1-x_2+3z$$
$$\dot{x}_2=-4x_2-z$$
$$y=3x_1-2x_2+z$$

以下哪个矩阵是不正确的？
(a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & -4\end{bmatrix}$ (b) $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}$
(c) $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}3 & -2\end{bmatrix}$ (d) $\mathbf{D}=0$

答案 16-1 b；16-2 d；16-3 c；16-4 b；16-5 b；16-6 a；16-7 b；16-8 b；16-9 a；16-10 d。

习题

16.2 节和 16.3 节

16-1 试利用拉普拉斯变换确定如图16-35所示电路中的$i(t)$。

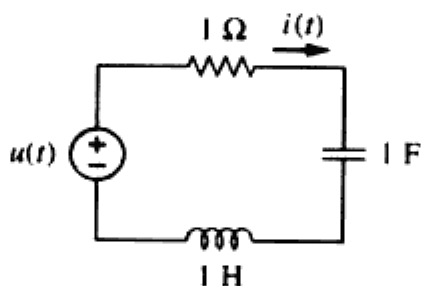


图 16-35 习题 16-1 的电路原理图

16-2 已知$v_s = 4u(t)$ V，试求如图16-36所示电路中的v_x。

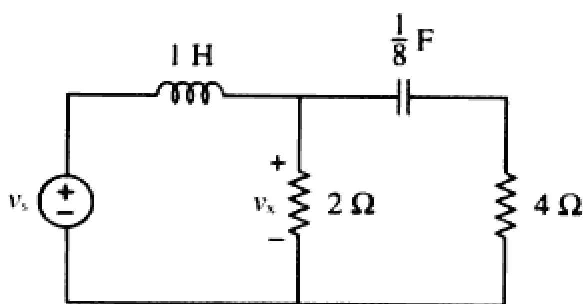


图 16-36 习题 16-2 的电路原理图

16-3 试求如图16-37所示电路中的$i(t)$，$t > 0$。假定$i_s = 4u(t) + 2\delta(t)$ mA（**提示**：利用叠加原理会有助于本题的求解）。

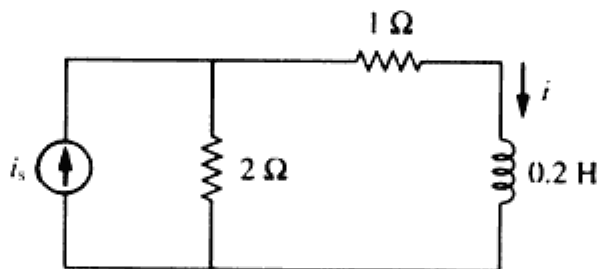


图 16-37 习题 16-3 的电路原理图

16-4 如图16-38所示电路中的电容器未进行初始充电，试求$v_o(t)$，$t > 0$。

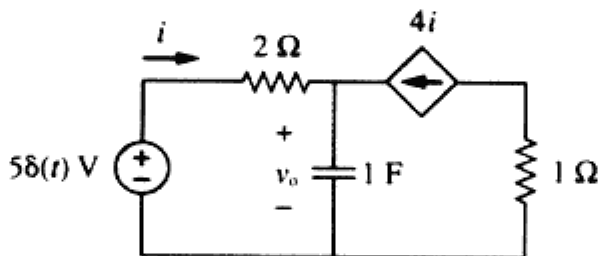


图 16-38 习题 16-4 的电路原理图

16-5 如果如图16-39所示电路中的$i_s(t) = e^{-2t}u(t)$ A，试求$i_o(t)$的值。

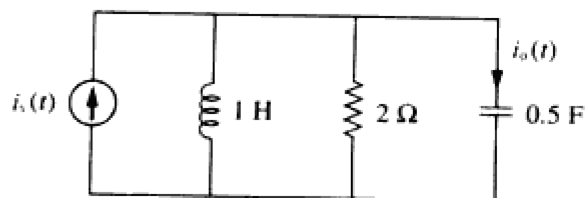


图 16-39 习题 16-5 的电路原理图

16-6 试求如图16-40所示电路中的$v(t)$，$t > 0$。假定$v_s = 20$ V。

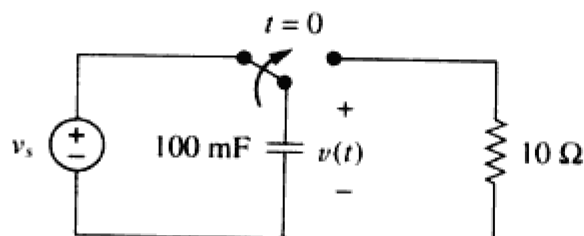


图 16-40 习题 16-6 的电路原理图

16-7 试求如图16-41所示电路中的$v_o(t)$，$t > 0$。

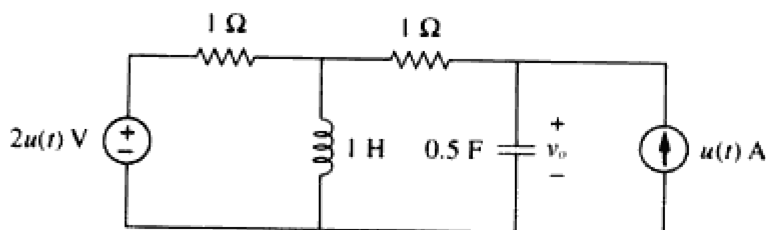


图 16-41 习题 16-7 的电路原理图

16-8 如果$v_o(0) = -1$ V，试确定如图16-42所示电路中的$v_o(t)$。

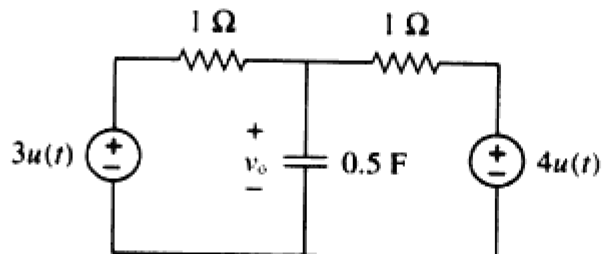


图 16-42 习题 16-8 的电路原理图

16-9 试求如图16-43所示各电路中的输入阻抗$Z_{in}(s)$。

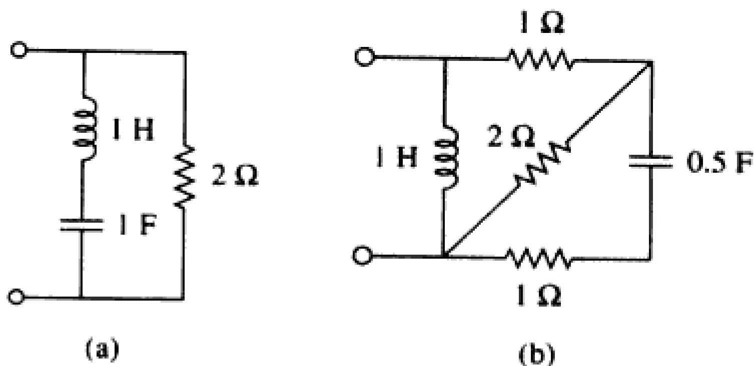


图 16-43 习题 16-9 的电路原理图

16-10 试利用戴维南定理确定如图16-44所示电路

中的$v_o(t)$，$t>0$。

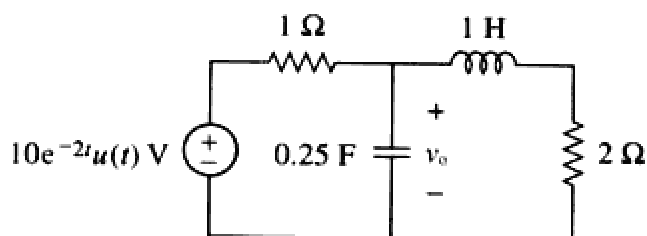


图 16-44 习题 16-10 的电路原理图

16-11 试求如图16-45所示电路中的网孔电流，得到s域的结果即可。

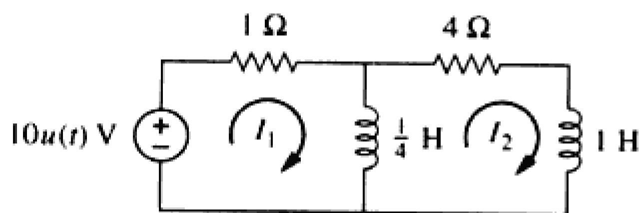


图 16-45 习题 16-11 的电路原理图

16-12 试求如图16-46所示电路中的$v_o(t)$。

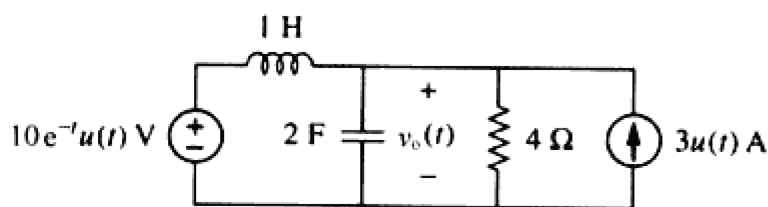


图 16-46 习题 16-12 的电路原理图

16-13 试确定如图16-47所示电路中的$i_o(t)$。

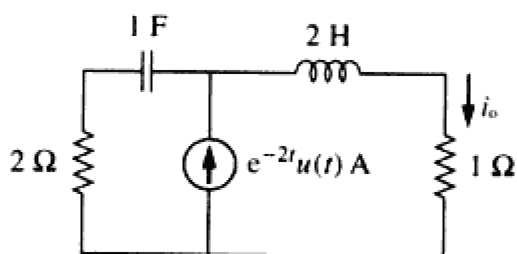


图 16-47 习题 16-13 的电路原理图

*16-14 试确定如图16-48所示网络中的$i_o(t)$。

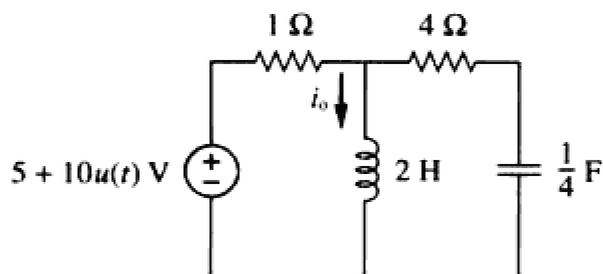


图 16-48 习题 16-14 的电路原理图

16-15 试求如图16-49所示电路中的$V_x(s)$。

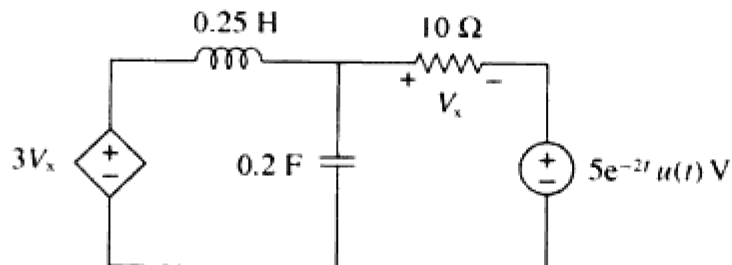


图 16-49 习题 16-15 的电路原理图

*16-16 试求如图16-50所示电路中的$i_o(t)$，$t>0$。

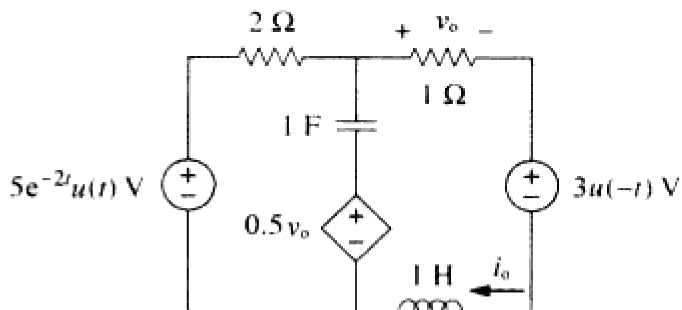


图 16-50 习题 16-16 的电路原理图

16-17 试计算如图16-51所示网络中的$i_o(t)$，$t>0$。

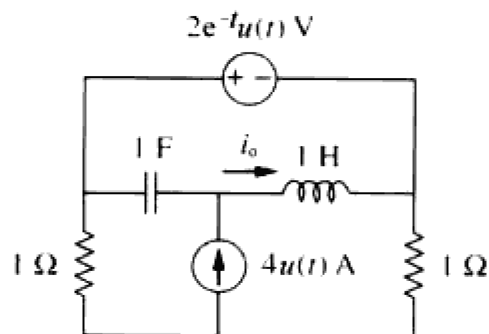
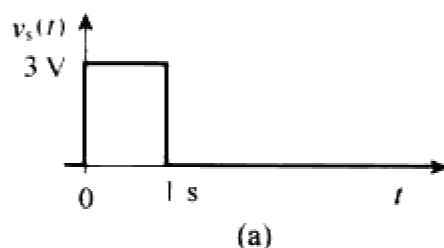
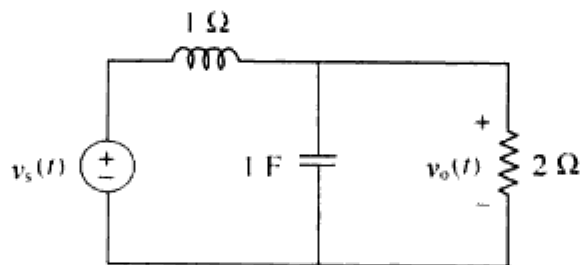


图 16-51 习题 16-17 的电路原理图

16-18 (a) 试求如图16-52a所示电压的拉普拉斯变换；(b) 试利用如图16-52b所示电路中的$v_s(t)$确定$v_o(t)$的值。



(a)



(b)

图 16-52 习题 16-18 的波形图与电路原理图

16-19 在如图16-53所示电路中，假定$i(0)=1$ A，$v_o(0)=2$ V，$v_s=4e^{-2t}u(t)$，试求$v_o(t)$，$t>0$。

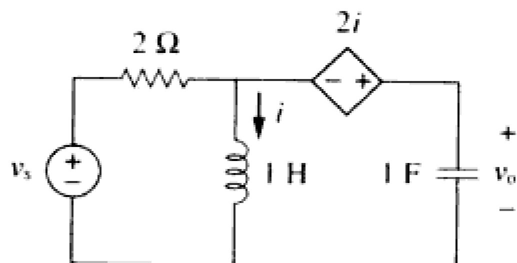


图 16-53 习题 16-19 的电路原理图

16-20 如果$v_x(0)=2$ V，$i(0)=1$ A，试求如图16-54所示电路中的$v_o(t)$。

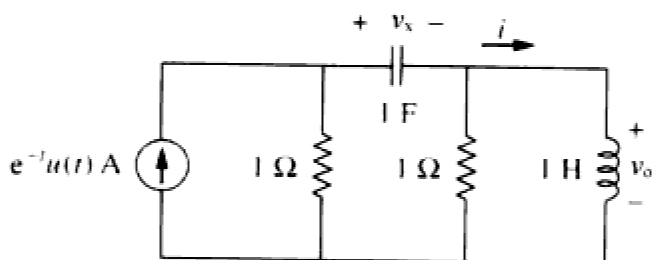


图 16-54 习题 16-20 的电路原理图

16-21 试利用拉普拉斯变换确定如图16-55所示电路中的$v_o(t)$。

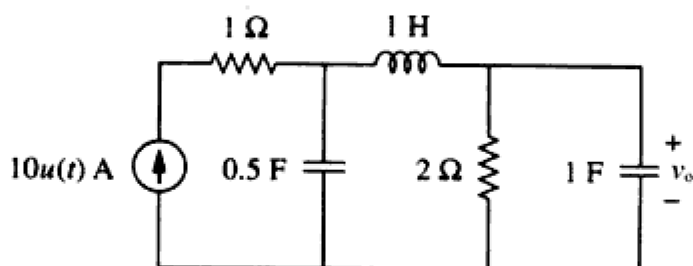


图 16-55 习题 16-21 的电路原理图

16-22 试利用拉普拉斯变换确定如图16-56所示电路中节点电压v_1与v_2。假定$i_s=4\,e^{-t}u(t)$ A并且所有初始条件均为零。

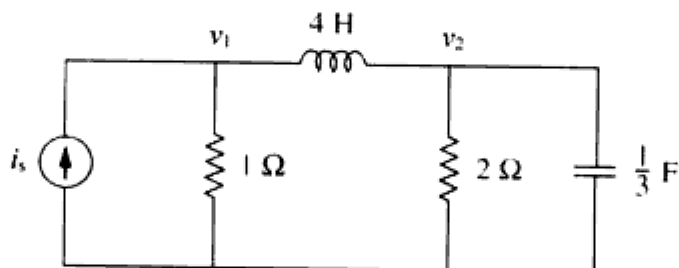


图 16-56 习题 16-22 的电路原理图

16-23 在如图16-57所示电路中，已知$v(0)=5$ V，$i(0)=-2$ A，试求$v(t)$与$i(t)$。

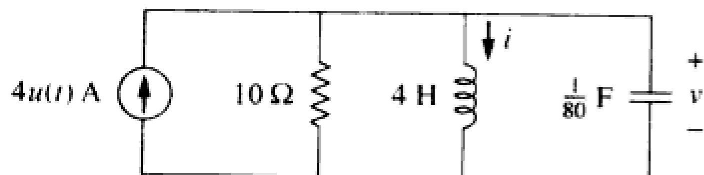


图 16-57 习题 16-23 的电路原理图

16-24 如图16-58所示电路中的开关在$t=0$时刻由位置1切换至位置2，试求$v(t)$，$t>0$。

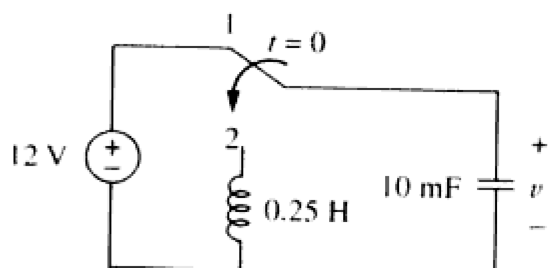


图 16-58 习题 16-24 的电路原理图

16-25 对于如图16-59所示RLC电路，当开关闭合时$v(0)=2$ V，试求全响应。

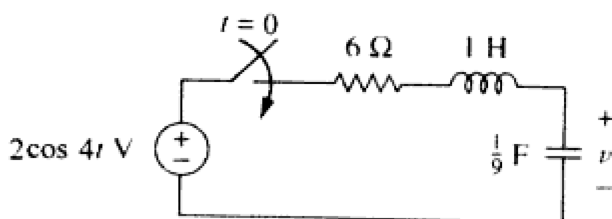


图 16-59 习题 16-25 的电路原理图

16-26 对于如图16-60所示的运算放大器电路，试求$v_o(t)$，$t>0$。假定$v_s=3\,e^{-5t}u(t)$ V。

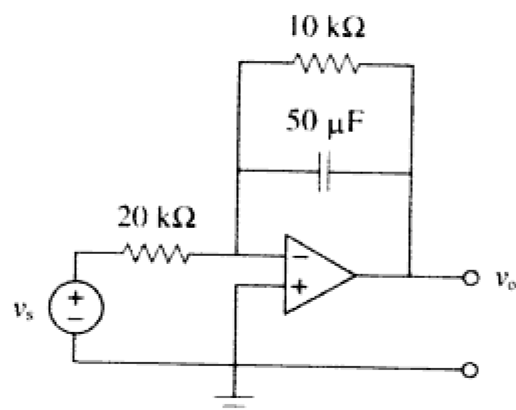


图 16-60 习题 16-26 的电路原理图

16-27 试求如图16-61所示电路中的$I_1(s)$与$I_2(s)$。

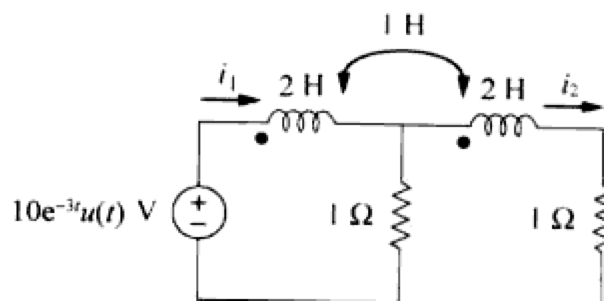


图 16-61 习题 16-27 的电路原理图

16-28 对于如图16-62所示电路，试求$v_o(t)$，$t>0$。

16-29 对于如图16-63所示的理想变压器电路，试求$i_o(t)$。

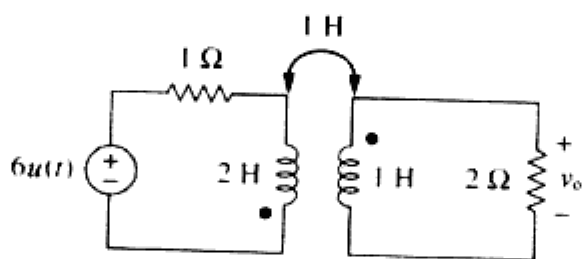


图 16-62 习题 16-28 的电路原理图

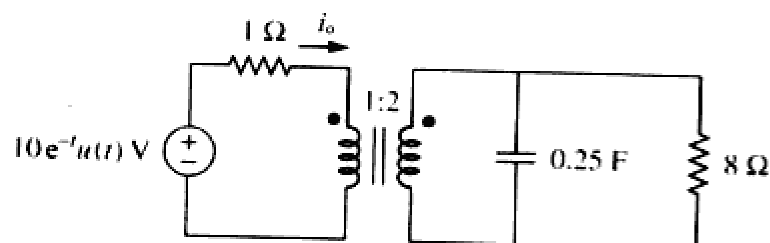


图 16-63 习题 16-29 的电路原理图

16.4 节

16-30 某系统的传递函数为

$$H(s)=\frac{s^2}{3s+1}$$

试求当系统输入为4 $e^{-t/3}\,u(t)$时的输出。

16-31 当某系统的输入为单位阶跃函数时，其响应函数为10 cos 2t $u(t)$，试确定该系统的传递函数。

16-32 已知某电路的传递函数为

$$H(s)=\frac{s+3}{s^2+4s+5}$$

如果

(a) 输入为单位阶跃函数；

(b) 输入为$6te^{-2t}\,u(t)$，

试求其输出。

16-33 在$t=0$时刻，单位阶跃信号作用于某系统，其响应为：

$$y(t)=[4+\frac{1}{2}e^{-3t}-e^{-2t}(2\cos 4t+3\sin 4t)]\,u(t)$$

该系统的传递函数是什么？

16-34 对于如图16-64所示电路，试求$H(s)=V_o(s)/V_s(s)$，假定初始条件为零。

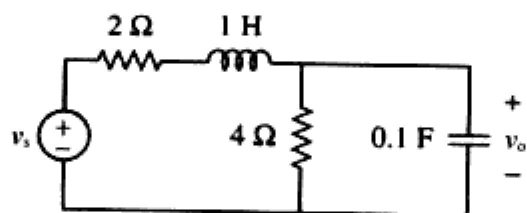


图 16-64 习题 16-34 的电路原理图

16-35 试确定如图16-65所示电路的传递函数$H(s)=V_o/V_s$。

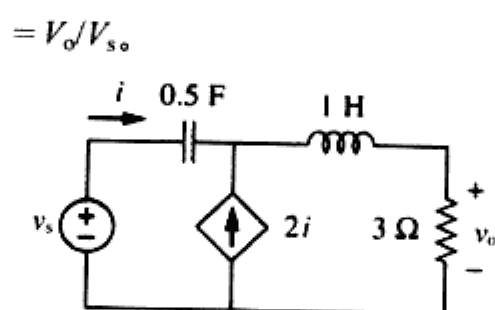


图 16-65 习题 16-35 的电路原理图

16-36 某电路的传递函数为：

$$H(s)=\frac{5}{s+1}-\frac{3}{s+2}+\frac{6}{s+4}$$

试求该电路的冲激响应。

16-37 对于如图16-66所示电路，试求：

(a) I_1/V_s， (b) I_2/V_x

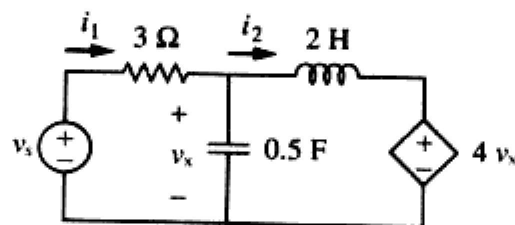


图 16-66 习题 16-37 的电路原理图

16-38 对于如图16-67所示网络，试求下列传递函数：

(a) $H_1(s)=V_o(s)/V_s(s)$

(b) $H_2(s)=V_o(s)/I_s(s)$

(c) $H_3(s)=I_o(s)/I_s(s)$

(d) $H_4(s)=I_o(s)/V_s(s)$

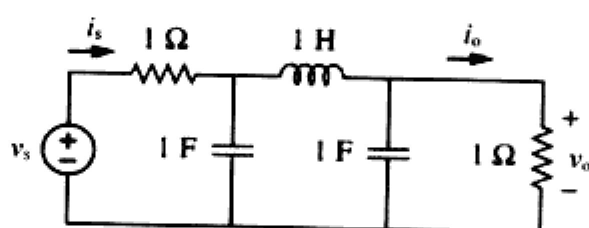


图 16-67 习题 16-38 的电路原理图

16-39 试计算如图16-68所示运算放大器电路的增益$H(s)=V_o/V_s$。

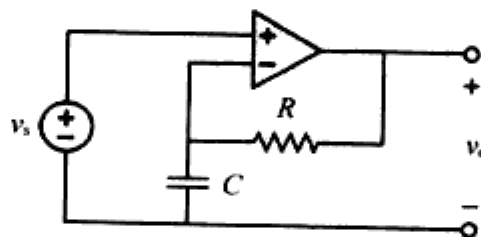


图 16-68 习题 16-39 的电路原理图

16-40 对于如图16-69所示的RL电路，试求：

(a) 该电路的冲激响应$h(t)$；

（b）该电路的单位阶跃响应。

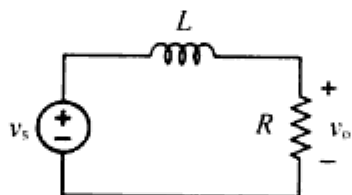


图 16-69　习题 16-40 的电路原理图

16-41　某RL并联电路中，$R=4\ \Omega$，$L=1\ \mathrm{H}$，该电路的输入为$i_s(t)=2\,\mathrm{e}^{-t}\,u(t)\ \mathrm{A}$，试求流过电感器的电流$i_L(t)$，$t>0$，假定$i_L(0)=-2\ \mathrm{A}$。

16-42　某电路的传递函数为：

$$H(s)=\frac{s+4}{(s+1)(s+2)^2}$$

试求冲激响应。

16.5 节

16-43　试推导习题16-1的状态方程。

16-44　试推导习题16-2的状态方程。

16-45　试推导如图16-70所示电路的状态方程。

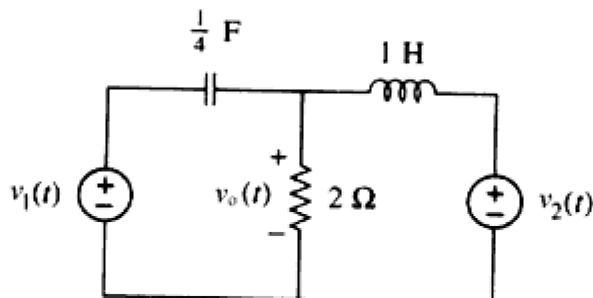


图 16-70　习题 16-45 的电路原理图

16-46　试推导如图16-71所示电路的状态方程。

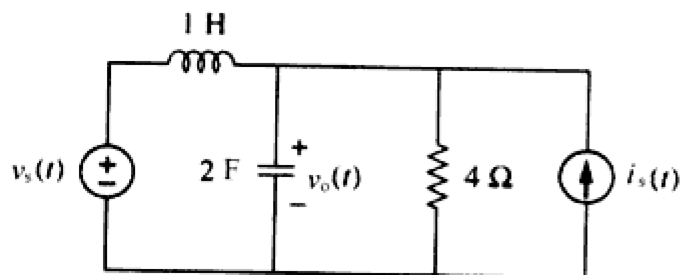


图 16-71　习题 16-46 的电路原理图

16-47　试推导如图16-72所示电路的状态方程。

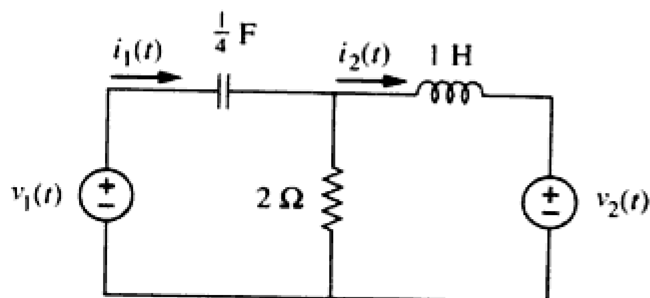


图 16-72　习题 16-47 的电路原理图

16-48　试推导如下微分方程的状态方程。

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{4\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}t}+3y(t)=z(t)$$

*16-49　试推导如下微分方程的状态方程。

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{5\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}t}+6y(t)=\frac{\mathrm{d}\,z(t)}{\mathrm{d}t}+z(t)$$

*16-50　试推导如下微分方程的状态方程。

$$\frac{\mathrm{d}^3 y(t)}{\mathrm{d}t^3}+\frac{6\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{11\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}t}+6y(t)=z(t)$$

*16-51　已知如下状态方程，试求$y(t)$。

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}-4 & 4\\ -2 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}u(t)$$

$$\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$$

*16-52　已知如下状态方程，试求$y_1(t)$与$y_2(t)$。

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 2 & -4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u(t)\\ 2u(t)\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 1 & -0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u(t)\\ 2u(t)\end{bmatrix}$$

16.6 节

16-53　试证明如图16-73所示的RLC并联电路是稳定的。

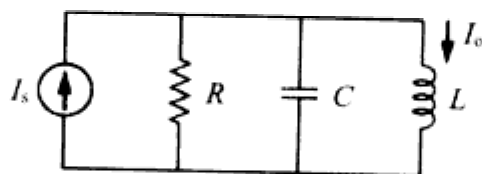


图 16-73　习题 16-53 的电路原理图

16-54　某系统由两个系统级联组成，如图16-74所示，已知该系统的冲激响应为：

$h_1(t)=3\,\mathrm{e}^{-t}\,u(t)$，　$h_2(t)=\mathrm{e}^{-4t}\,u(t)$

（a）试确定整个系统的冲激响应；

（b）试检验整个系统是否稳定。

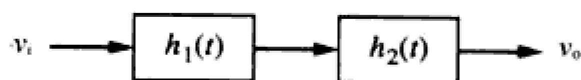


图 16-74　习题 16-54 的电路原理图

16-55　试确定如图16-75所示运算放大器电路是否稳定。

16-56　要求利用如图16-76所示电路实现如下传递函数：

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)}=\frac{2s}{s^2+2s+6}$$

选择$R=1\ \mathrm{k}\Omega$，试求L与C。

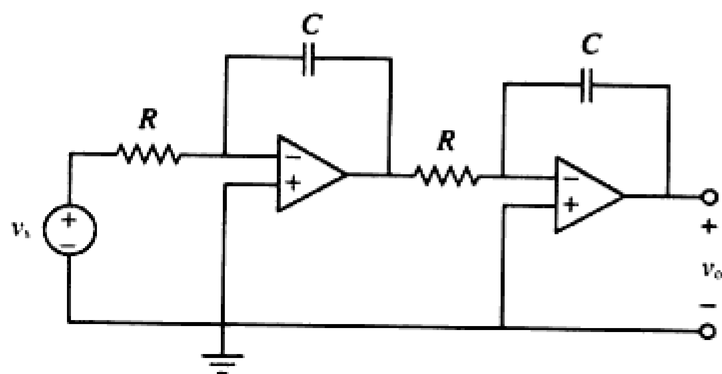


图 16-75　习题 16-55 的电路原理图

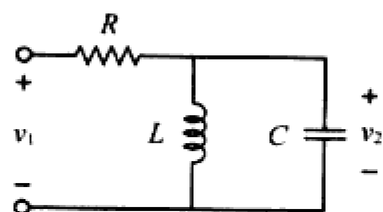


图 16-76　习题 16-56 的电路原理图

16-57　试利用如图16-77所示电路设计一个可以实现如下传递函数的运算放大器电路：

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=-\frac{s+1000}{2(s+4000)}$$

选择$C_1=10\ \mu\text{F}$，试确定R_1、R_2与C_2。

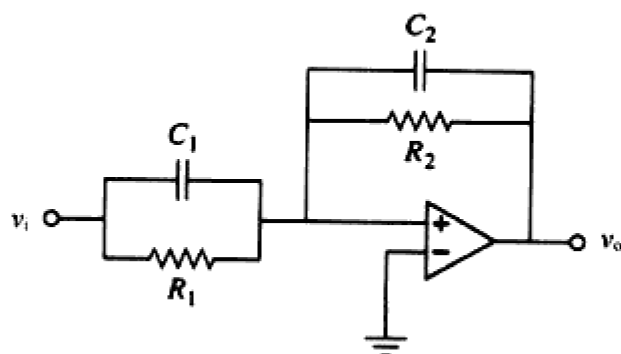


图 16-77　习题 16-57 的电路原理图

16-58　试利用如图16-78所示电路实现如下传递函数：

$$\frac{V_o(s)}{V_s(s)}=-\frac{s}{s+10}$$

令$Y_1=sC_1$，$Y_2=1/R_1$，$Y_3=sC_2$。选定$R_1=1\ \text{k}\Omega$，试确定C_1与C_2。

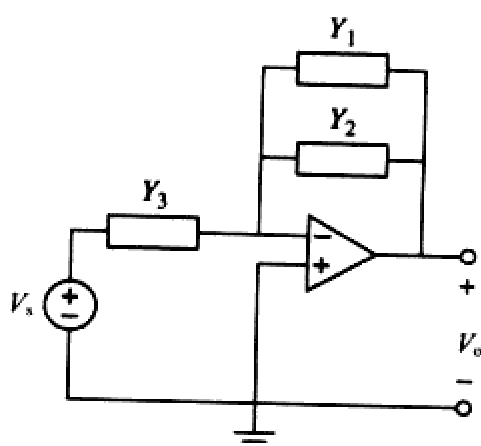


图 16-78　习题 16-58 的电路原理图

16-59　试利用如图16-79所示的拓扑结构综合如下传递函数：

$$\frac{V_o(s)}{V_{in}(s)}=\frac{10^6}{s^2+100s+10^6}$$

令$Y_1=1/R_1$，$Y_2=1/R_2$，$Y_3=sC_1$，$Y_4=sC_2$。选定$R_1=1\ \text{k}\Omega$，试确定C_1，C_2与R_2。

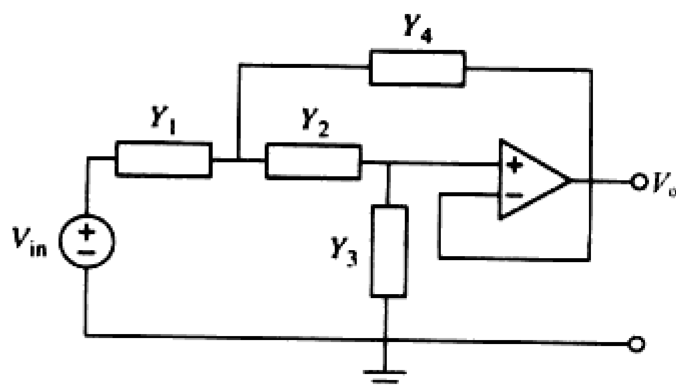


图 16-79　习题 16-59 的电路原理图

综合题

16-60　试确定如图16-80所示运算放大器电路的传递函数，要求其具有如下形式：

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{as}{s^2+bs+c}$$

其中a、b、c为常数，试确定这些常数的值。

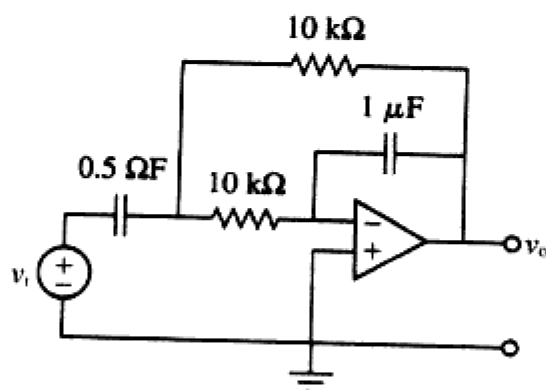


图 16-80　习题 16-60 的电路原理图

16-61 某电路网络的输入导纳为$Y(s)$，该导纳在$s=-3$处有一个极点，在$s=-1$处有一个零点，并且$Y(\infty)=0.25$ S。

(a) 试求$Y(s)$；

(b) 一个8 V的电池通过一个开关与该电路相连接，如果在$t=0$时刻，开关闭合，试利用拉普拉斯变换确定流过$Y(s)$的电流$i(t)$。

16-62 回转器是用于模拟电路中电感器的装置，回转器的基本电路如图16-81所示。试求$V_i(s)/I_o(s)$，并证明该回转器产生的电感量为$L=CR^2$。

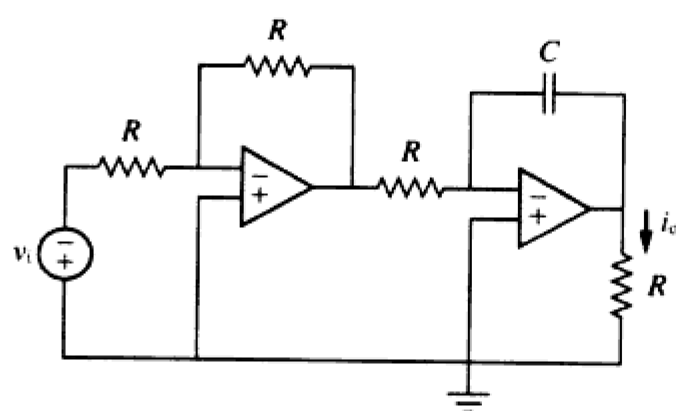


图 16-81 习题 16-62 的电路原理图

第17章 傅里叶级数

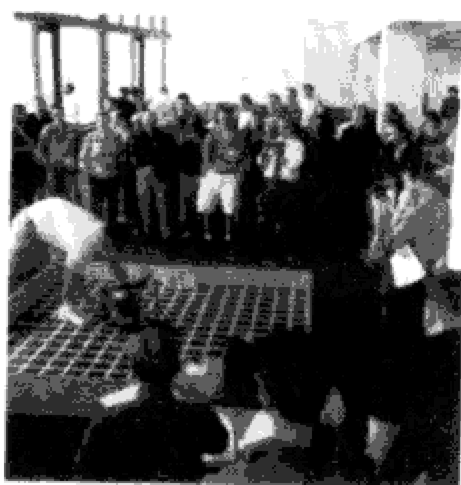
送给敌人最好的礼物是宽恕；送给对手最好的礼物是忍让；送给朋友最好的礼物是真心；送给孩子最好的礼物是好榜样；送给父亲最好的礼物是敬重；送给母亲最好的礼物是让她为你骄傲；送给自己最好的礼物是自重；送给所有人最好的礼物是仁慈。

——Arthur J. Balfour

提高技能，拓展职业生涯

ABET EC 2000 标准（3.j），“当代问题的知识”

工程师必须具有关于当代问题的知识。为了在21世纪从事一个真正有意义的职业，就必须具备关于当代问题的知识，特别是对自己的工作有直接影响的相关问题。获取这些知识最便捷的方式就是大量阅读——如报纸、杂志以及当代图书。作为一名注册ABET认证课程的学生，所选修的某些课程就是面向这一标准的。



查尔斯 · 亚历山大拍摄

ABET EC 2000标准（3.k），“利用工程实践中所需的方法、技能与现代工程工具的能力”

成功的工程师必须具备“利用工程实践中所需的方法、技能与现代工程工具的能力”，显然，这也是本书的主要目的。学会巧妙地使用当代“知识捕获集成设计环境（KCIDE，knowledge capturing integrated design environment）”中可以促进你工作的工具，对于提高工程师的基本素质是非常重要的。具备在当代KCIDE环境中工作的能力就必须彻底地理解与该环境有关的工具。

因此，成功的工程师必须及时掌握新的设计、分析和仿真工具。工程师也必须使用这些工具，直至熟练掌握；同时，工程师必须确保软件计算结果与实际情况相一致。可能绝大多数工程师在这一领域都会遇到最大的困难，因此，成功地使用这些工具就要求工程师不断地、反复地学习他所从事领域的基础知识。

历史人物



傅里叶（Jean Baptiste Joseph Fourier，1768—1830），法国数学家，首先提出了以他的名字命名的傅里叶级数与傅里叶变换。傅里叶的研究成果并未得到当时科学界的广泛认可，甚至连他的学术论文都无法发表。

傅里叶出生于法国的Auxerre，八岁时就成为孤儿，后来进入当地天主教开办的军事学院学习，在那里他展现出非凡的数学才能。与当时的许多人一样，傅里叶也投身到了法国革命的政治斗争中，并在18世纪90年代末期拿破仑的埃及远征军中发挥了重要的作用。正是由于他的政治活动，使他两次幸免于死。

17.1 引言

至此已经利用相当的篇幅介绍了正弦信号源电路的分析，本章将介绍激励源为周期、非正弦信

号的电路的分析方法。第9章已经介绍了周期信号的概念，同时指出正弦信号是最简单的，也是最有用的周期信号。本章将要介绍的傅里叶级数，是利用正弦信号表示周期函数的一种方法，一旦将激励源函数表示为正弦信号的形式，就可以利用相量方法来分析电路。

傅里叶级数是以傅里叶（1768—1830）的名字命名的，1822年，傅里叶提出任何实际的周期函数都可以表示为若干个正弦函数之和。将这种表示方法与叠加原理相结合，就可以利用相量分析方法求解电路对任意周期输入信号的响应函数。

本章首先介绍三角函数形式的傅里叶级数，接着介绍指数形式的傅里叶级数。之后，将傅里叶级数应用于电路分析中。最后，介绍傅里叶级数的两个实际应用——频谱分析仪与滤波器。

17.2 三角函数形式的傅里叶级数

在研究热流的过程中，傅里叶发现非正弦周期函数表示为无穷多个正弦函数之和。回顾前面学习的内容可知，周期函数是指每T秒重复一次的函数，换句话说，周期性函数$f(t)$满足：

$$\boxed{f(t)=f(t+nT)} \tag{17-1}$$

其中，n为整数，T为函数的周期。

根据*傅里叶定理*（Fourier theorem），任何一个角频率为ω_0的周期函数都可表示为无穷多个频率为ω_0整数倍的正弦函数与余弦函数之和。因此，$f(t)$可以表示为：

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + a_1\cos\omega_0 t + b_1\sin\omega_0 t + a_2\cos 2\omega_0 t \\ &\quad + b_2\sin 2\omega_0 t + a_3\cos 3\omega_0 t + b_3\sin 3\omega_0 t + \cdots \end{aligned} \tag{17-2}$$

即：

$$\boxed{f(t)=\underbrace{a_0}_{\text{dc}}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)}_{\text{ac}}} \tag{17-3}$$

其中，$\omega_0=2\pi/T$称为*基波频率*（fundamental frequency），单位为弧度每秒，$\sin n\omega_0 t$或$\cos n\omega_0 t$称为$f(t)$的n次谐波；如果n为奇数，则称其为奇次谐波，如果n为偶数，则称其为偶次谐波。式（17-3）称为$f(t)$的*三角函数形式的傅里叶级数*（trigonometric Fourier series）。常数a_n与b_n称为*傅里叶系数*（Fourier coefficients），系数a_0称为直流分量或$f(t)$的平均值（正弦信号的平均值为零）。系数a_n与b_n（$n\neq 0$）称为正弦交流分量的振幅。因此，

周期函数$f(t)$的傅里叶级数是指将$f(t)$分解为直流分量与由无穷多个正弦谐波组成的交流分量的表示形式。

谐波频率ω_n为基波频率ω_0的整数倍，即$\omega_n=n\omega_0$。

因为式(17-3)中的无穷级数可能收敛，也可能不收敛，所以利用傅里叶级数表示为式(17-3)形式的函数必须满足一定的条件，才能使傅里叶级数收敛。可以用收敛傅里叶级数表示的$f(t)$必须满足如下几个条件：

（1）$f(t)$处处为单值函数；

（2）$f(t)$在任一周期内仅包括有限个有限间断点（即第一类间断点）；

（3）$f(t)$在任一周期内仅包括有限个极大值和极小值；

（4）对任何t_0，积分$\int_{t_0}^{t_0+T}|f(t)|\mathrm{d}t<\infty$。

上述条件称之为*狄里赫利条件*（Dirichlet conditions）。狄里赫利条件虽然不是必要条件，但它是傅里叶级数存在的充分条件。

历史附注：虽然傅里叶于1822年公布了他的定理，但正是狄里赫利（P. G L Dirichlet，1805—

1859）于日后给出了傅里叶定理令人信服的证明。

傅里叶级数展开的一项主要任务是确定傅里叶系数a_0、a_n以及b_n。确定这些系数的过程称为傅里叶分析（Fourier analysis）。在傅里叶分析中，如下三角函数积分非常有帮助，对于任意整数m与n而言：

可以利用Mathcad或Maple等软件包来计算傅里叶系数。

$$\int_0^T \sin n\omega_0 t \mathrm{d}t = 0 \tag{17-4a}$$

$$\int_0^T \cos n\omega_0 t \mathrm{d}t = 0 \tag{17-4b}$$

$$\int_0^T \sin n\omega_0 t \cos m\omega_0 t \mathrm{d}t = 0 \tag{17-4c}$$

$$\int_0^T \sin n\omega_0 t \sin m\omega_0 t \mathrm{d}t = 0, (m \neq n) \tag{17-4d}$$

$$\int_0^T \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t \mathrm{d}t = 0, (m \neq n) \tag{17-4e}$$

$$\int_0^T \sin^2 n\omega_0 t \mathrm{d}t = \frac{T}{2} \tag{17-4f}$$

$$\int_0^T \cos^2 n\omega_0 t \mathrm{d}t = \frac{T}{2} \tag{17-4g}$$

下面利用上述等式计算傅里叶系数。

首先求a_0，在一个周期内对式(17-3)两边取积分，可以得到：

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t &= \int_0^T \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)\right]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T a_0 \mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^T a_n \cos n\omega_0 t \mathrm{d}t + \int_0^T b_n \sin n\omega_0 t \mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{17-5}$$

利用式(17-4a)与式(17-4b)可知，包含交流分量的两个积分为零，因此：

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T a_0 \mathrm{d}t = a_0 T$$

即：

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t} \tag{17-6}$$

表明a_0为函数$f(t)$的平均值。

a_n的计算：式（17-3）两边同乘以$\cos m\omega_0 t$，并在一个周期内积分，可以得到

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t)\cos m\omega_0 t \mathrm{d}t &= \int_0^T \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)\right]\cos m\omega_0 t \mathrm{d}t \\ &= \int_0^T a_0 \cos m\omega_0 t \mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^T a_n \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t \mathrm{d}t + \int_0^T b_n \sin n\omega_0 t \cos m\omega_0 t \mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{17-7}$$

由式(17-4b)可知，包含a_0的积分值为零，同样，由式(17-4c)可知，包含b_n的积分值也为零，根据式(17-4e)与式(17-4g)，包含a_n的积分项除$m=n$外，其值都为零，仅当$m=n$时，其积分值为$T/2$。因此，

$$\int_0^T f(t)\cos m\omega_0 t \mathrm{d}t = a_n \frac{T}{2}, \qquad m=n$$

即：

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\mathrm{d}t} \tag{17-8}$$

同理，式(17-3)两边同乘以$\sin m\omega_0 t$，并在一个周期内积分即可计算出b_n。其结果为

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\mathrm{d}t \tag{17-9}$$

由于$f(t)$为周期函数，所以利用$-T/2$到$T/2$或更一般地t_0到t_0+T取代上述积分的上、下限0到T，计算起来会更方便，所得到的结果是相同的。

式(17-3)的另一种表示形式为*振幅－相位*（amplitude-phase）形式。

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \tag{17-10}$$

利用式(9-11)与式(9-12)可以将式(17-3)与式(17-10)联系起来，或者对式(17-10)中的交流项应用三角恒等式：

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{17-11}$$

从而得到：

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\omega_0 t+\phi_n) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\phi_n)\cos n\omega_0 t - (A_n\sin\phi_n)\sin n\omega_0 t \tag{17-12}$$

由式(17-3)与式(17-12)级数展开中对应项系数相等可得：

$$a_n = A_n\cos\phi_n, b_n = -A_n\sin\phi_n \tag{17-13a}$$

即：

$$\boxed{A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},\quad \phi_n = -\tan^{-1}\frac{b_n}{a_n}} \tag{17-13b}$$

为了避免在确定ϕ_n时产生混淆，最好表示为如下复数形式：

$$A_n\angle\phi_n = a_n - \mathrm{j}b_n \tag{17-14}$$

在17.6节将会看到上述复数表示形式的方便之处。n次谐波的振幅A_n与$n\omega_0$的关系曲线称为$f(t)$的*振幅频谱*（amplitude spectrum）。n次谐波的相位ϕ_n与$n\omega_0$的关系曲线称为$f(t)$的*相位频谱*（phase spectrum）。幅度谱与相位谱共同构成了$f(t)$的*频率谱*（frequency spectrum）。

信号频率谱由其谐波的关于频率的幅频特性曲线和相频特性曲线组成。

从离散频率分量的角度讲，频谱也称为线谱（line frequency）。

因此，傅里叶分析也是确定周期信号频谱的一种数学工具，17.6节将更为详细地阐述信号的频谱。

在计算傅里叶系数a_0、a_n和b_n时，经常需要用到如下积分公式：

$$\int\cos at\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\sin at \tag{17-15a}$$

$$\int\sin at\mathrm{d}t = -\frac{1}{a}\cos at \tag{17-15b}$$

$$\int t\cos at\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2}\cos at + \frac{1}{a}t\sin at \tag{17-15c}$$

$$\int t\sin at\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2}\sin at - \frac{1}{a}t\cos at \tag{17-15d}$$

另外，还需要知道余弦函数、正弦函数以及指数函数在π的整数倍处的值，如表17-1所示，表中n为整数。

表 17-1 正弦、余弦、指数函数在π的整数倍处的值

函数	值	函数	值
$\cos 2n\pi$	1	$\sin 2n\pi$	0
$\cos n\pi$	$(-1)^n$	$\sin n\pi$	0
$\cos\frac{n\pi}{2}$	$\begin{cases}(-1)^{n/2}, & n=\text{偶数}\\ 0, & n=\text{奇数}\end{cases}$	$\sin\frac{n\pi}{2}$	$\begin{cases}(-1)^{(n-1)/2}, & n=\text{奇数}\\ 0, & n=\text{偶数}\end{cases}$
$e^{j2n\pi}$	1	$e^{jn\pi}$	$(-1)^n$
$e^{jn\pi/2}$	$\begin{cases}(-1)^{n/2}, & n=\text{偶数}\\ j(-1)^{(n-1)/2}, & n=\text{奇数}\end{cases}$		

例题17-1 试确定如图17-1所示波形的傅里叶级数，并求出其振幅频谱与相位频谱。

解 傅里叶级数的表达式如式(17-3)所示，即：

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t) \tag{17-1-1}$$

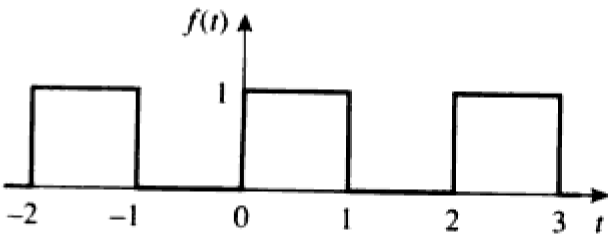


图 17-1 例题 17-1 的方波

本例的目的是利用式(17-6)、式(17-8)与式(17-9)来确定傅里叶系数a_0、a_n与b_n。

首先，将本例给出的波形表示为如下函数：

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<1\\ 0, & 1<t<2\end{cases} \tag{17-1-2}$$

并且，$f(t)=f(t+T)$。由于$T=2$，$\omega_0=2\pi/T=\pi$，因此，

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 1\mathrm{d}t+\int_0^2 0\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{2}t\Big|_0^1=\frac{1}{2} \tag{17-1-3}$$

利用式(17-8)与式(17-15a)，可以得到：

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{2}\left[\int_0^1 1\cos n\pi t\mathrm{d}t+\int_1^2 0\cos n\pi t\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{n\pi}\sin n\pi t\Big|_0^1=\frac{1}{n\pi}\sin n\pi=0\end{aligned} \tag{17-1-4}$$

由式(17-9)与式(17-15b)得到：

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{2}\left[\int_0^1 1\sin n\pi t\mathrm{d}t+\int_1^2 0\sin n\pi t\mathrm{d}t\right]\\&=-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi t\Big|_0^1\\&=-\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi-1),\quad \cos n\pi=(-1)^n\\&=\frac{1}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]=\begin{cases}\frac{2}{n\pi}, & n=\text{奇数}\\ 0, & n=\text{偶数}\end{cases}\end{aligned} \tag{17-1-5}$$

将式(17-1-3)～式(17-1-5)的傅里叶系数代入式(17-1-1)，即可得到傅里叶级数为：

$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin\pi t+\frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t+\frac{2}{5\pi}\sin 5\pi t+\cdots \tag{17-1-6}$$

由于$f(t)$中仅包含直流分量以及基波与奇次谐波的正弦分量，因此上述傅里叶级数可以写为：

$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\pi t,\quad n=2k-1 \tag{17-1-7}$$

手算方法确定傅里叶级数之和非常繁琐枯燥，可以利用计算机计算出各项并画出其和的曲线，如图17-2所示。

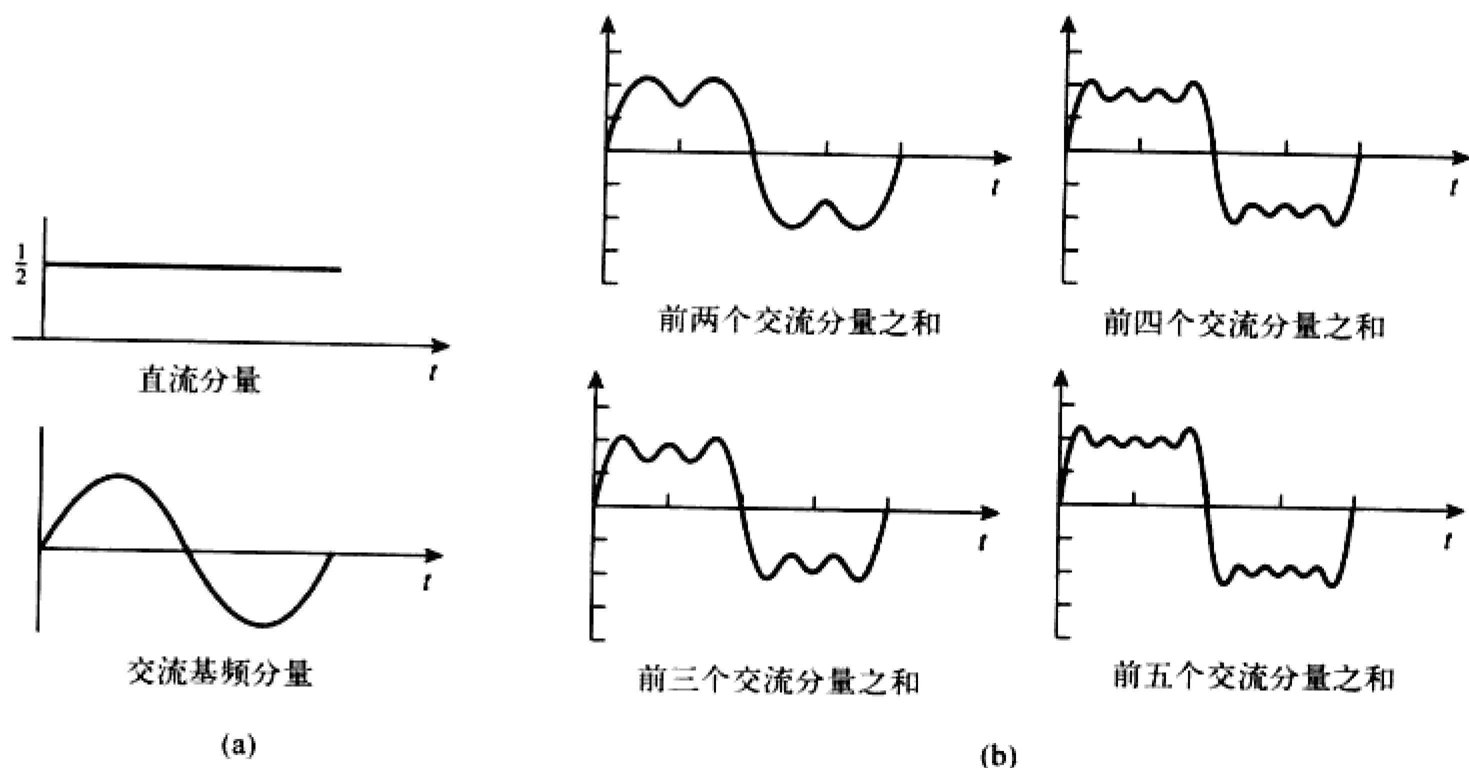


图 17-2 由傅里叶分量叠加近似方波的过程

各项逐个相加后的结果如图17-2所示，由图可以看出通过逐项叠加如何形成原始的方波信号。参与叠加的傅里叶分量愈多，其和就愈接近于原来的方波。然而，实际上式(17-1-6)或式(17-1-7)的级数求和项不可能是无限多项，仅可能是部分有限项（$n=1, 2, 3, \cdots, N$，其中N为有限数）之和。图17-3给出了当N较大时，一个周期的部分和（即截断级数）的波形图，由图可见，该部分和在$f(t)$的实际值上、下有所振荡，即在间断点（$x=0, 1, 2, \cdots$）的邻域中存在过冲和衰减振荡。实际上，无论用于近似$f(t)$的项数有多少，总会存在大小为峰值9%的过冲。这种现象称为吉伯斯现象（Gibbs phenomenon）。

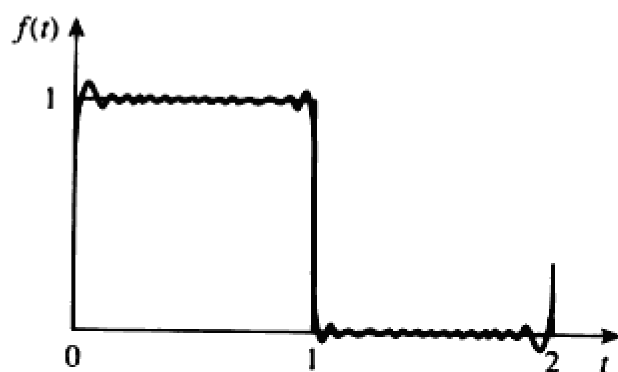


图 17-3 $N=11$ 的截断傅里叶级数波形图，吉布斯现象

历史附注：吉伯斯现象是以数学物理学家约西亚·威拉德·吉伯斯（Josiah Willard Gibbs）的名字命名，吉布斯首先于1899年观察到这一现象。

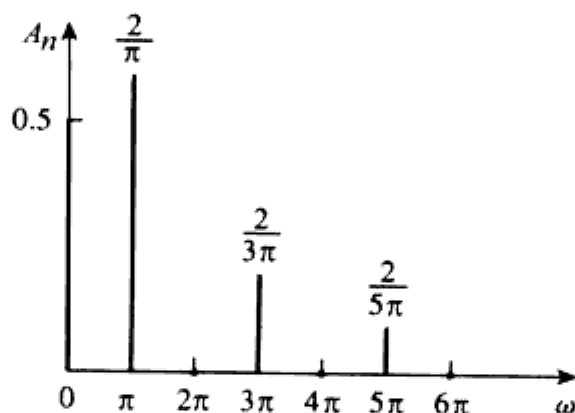
最后，确定如图17-1所示信号的振幅频谱与相位频谱。由于$a_n=0$，所以，

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}=|b_n|=\begin{cases}\dfrac{2}{n\pi}, & n=\text{奇数}\\ 0, & n=\text{偶数}\end{cases} \tag{17-1-8}$$

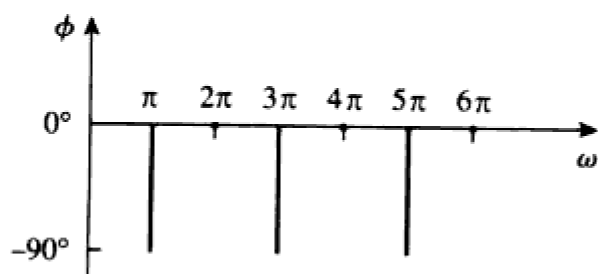
并且，

$$\phi_n = -\tan^{-1}\frac{b_n}{a_n} = \begin{cases} -90^\circ, & n = \text{奇数} \\ 0, & n = \text{偶数} \end{cases} \tag{17-1-9}$$

$n\omega_0 = n\pi$不同取值时的振幅频谱A_n与相位频谱ϕ_n如图17-4所示。由图示可看出，谐波的振幅随频率而快速衰减。



（a）振幅频谱



（b）相位频谱

图 17-4 例题 17-1 的函数频谱

练习题17-1 试求如图17-5所示方波的傅里叶级数，并画出其振幅频谱与相位频谱。

答 $f(t) = \dfrac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin n\pi t$，$n = 2k-1$，频谱如图17-6所示。

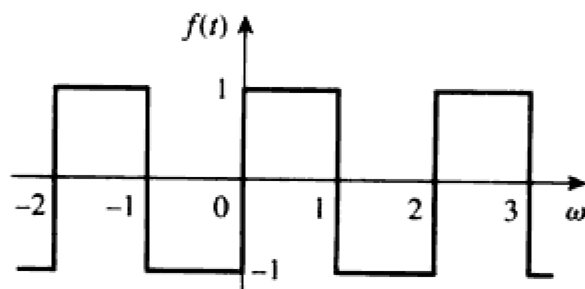
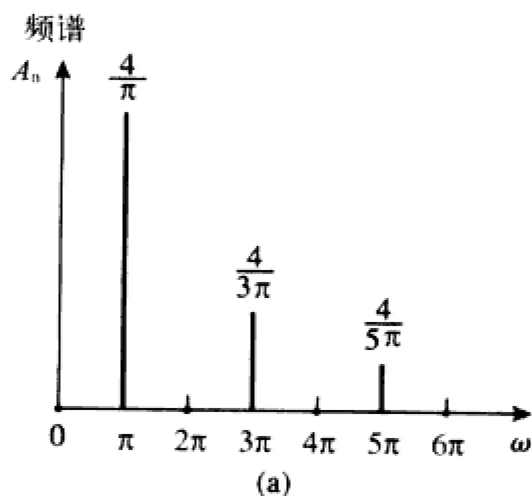
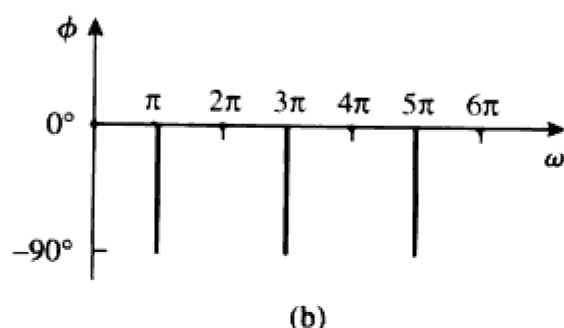


图 17-5 练习题 17-1 的波形图



(a)



(b)

图 17-6 练习题 17-1 中对应于图 17-5 所示函数的振幅频谱与相位频谱

例题17-2 试确定如图17-7所示周期函数的傅里叶级数，并画出其振幅频谱与相位频谱。

解 本例中的周期函数$f(t)$可以表示为

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

因为$T = 2$，$\omega_0 = 2\pi/T = \pi$，于是，

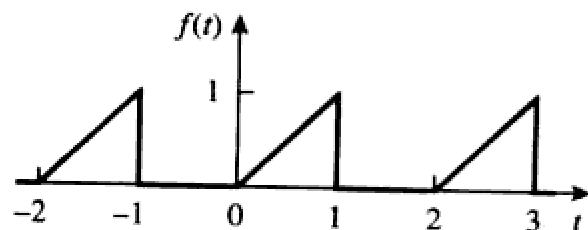


图 17-7 例题 17-2 的波形图

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 t\mathrm{d}t+\int_1^2 0\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{2}\frac{t^2}{2}\bigg|_0^1=\frac{1}{4} \tag{17-2-1}$$

计算a_n与b_n时，需利用式(17-15)所示的积分，有

$$\begin{aligned} a_n&=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\mathrm{d}t \\ &=\frac{2}{2}\left[\int_0^1 t\cos n\pi t\mathrm{d}t+\int_1^2 0\cos n\pi t\mathrm{d}t\right] \\ &=\left[\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi t+\frac{t}{n\pi}\sin n\pi t\right]\bigg|_0^1 \\ &=\frac{1}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)+0=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2} \end{aligned} \tag{17-2-2}$$

其中$\cos n\pi=(-1)^n$，同时，

$$\begin{aligned} b_n&=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\mathrm{d}t \\ &=\frac{2}{2}\left[\int_0^1 t\sin n\pi t\mathrm{d}t+\int_1^2 0\sin n\pi t\mathrm{d}t\right] \\ &=\left[\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi t-\frac{t}{n\pi}\cos n\pi t\right]\bigg|_0^1 \\ &=0-\frac{\cos n\pi}{n\pi}=\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \end{aligned} \tag{17-2-3}$$

将上述傅里叶系数代入式(17-3)得到：

$$f(t)=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\left[(-1)^n-1\right]}{(n\pi)^2}\cos n\pi t+\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi t\right]$$

下面确定振幅频谱与相位频谱，对于偶次谐波，可以看出$a_n=0$，$b_n=-1/n\pi$，于是

$$A_n\underline{/\phi_n}=a_n-\mathrm{j}b_n=0+\mathrm{j}\frac{1}{n\pi} \tag{17-2-4}$$

因此，

$$\begin{aligned} A_n&=|b_n|=\frac{1}{n\pi},\quad n=2,4\cdots \\ \phi_n&=90^\circ,\qquad n=2,4\cdots \end{aligned} \tag{17-2-5}$$

对于奇次谐波，有$a_n=-2/(n^2\pi^2)$，$b_n=1/(n\pi)$，因此，

$$A_n\underline{/\phi_n}=a_n-\mathrm{j}b_n=-\frac{2}{n^2\pi^2}-\mathrm{j}\frac{1}{n\pi} \tag{17-2-6}$$

即：

$$\begin{aligned} A_n&=\sqrt{a_n^2+b_n^2}=\sqrt{\frac{4}{n^4\pi^4}+\frac{1}{n^2\pi^2}} \\ &=\frac{1}{n^2\pi^2}\sqrt{4+n^2\pi^2},\quad n=1,3,\cdots \end{aligned} \tag{17-2-7}$$

由式(17-2-6)可以看出，ϕ位于第三象限，于是，

$$\phi_n=180^\circ+\tan^{-1}\frac{n\pi}{2},\quad n=1,3,\cdots \tag{17-2-8}$$

由式(17-2-5)、式(17-2-7)与式(17-2-8)可以画出不同谐波频率$n\omega_0=n\pi$时的振幅频谱与相位频谱，如图

17-8所示。

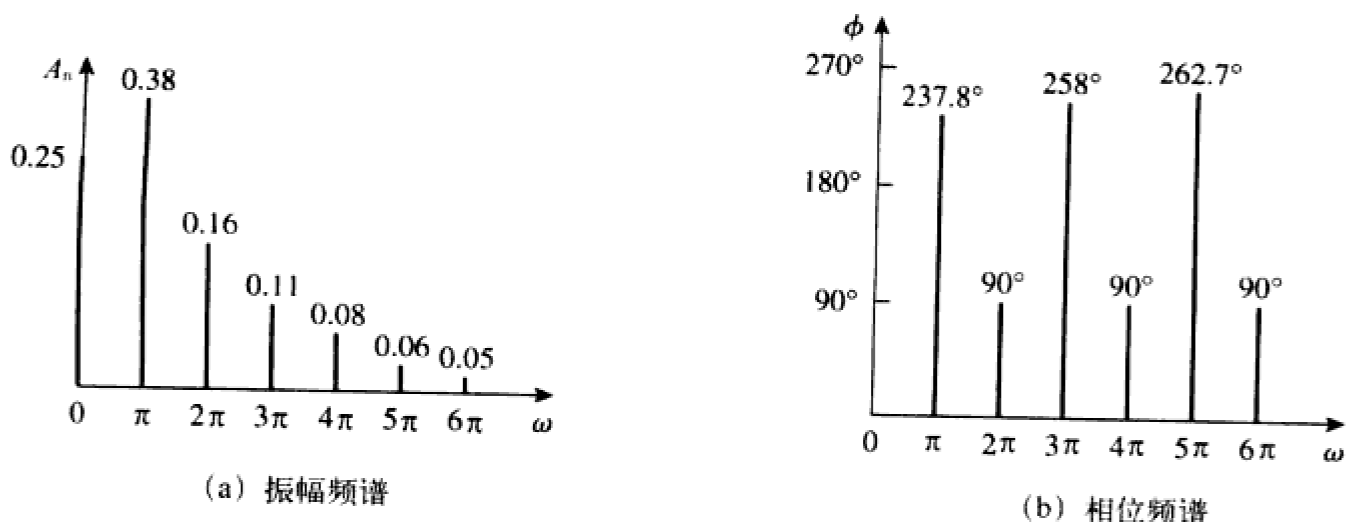


图 17-8 例题 17-2 的频谱图

练习题17-2 试确定如图17-9所示锯齿波的傅里叶级数。

答 $f(t)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin 2\pi nt$。

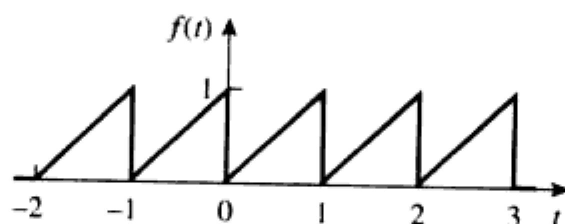


图 17-9 练习题 17-2 的波形图

17.3 对称周期函数的频谱分析

我们注意到，例题17-1中的傅里叶级数仅包含正弦项，那么是否存在一种方法能够预先知道某些傅里叶系数等于零，从而避免不必要的繁琐计算过程。事实表明，这种方法是存在的，其基础在于信号的对称性。本节讨论三种类型的对称性：(1) 偶对称；(2) 奇对称；(3) 半波对称。

17.3.1 偶对称周期函数的频谱

如果函数$f(t)$的波形关于纵轴对称，则称为$f(t)$偶函数，即：

$$\boxed{f(t)=f(-t)} \tag{17-16}$$

t^2、t^4以及cos t等均为偶函数的例子，图17-10给出了几个周期性偶函数的实例，可以看出，图中各函数均满足式(17-16)的条件。偶函数$f_e(t)$的一个主要性质是：

$$\int_{-T/2}^{T/2} f_e(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{T/2} f_e(t)\mathrm{d}t \tag{17-17}$$

其原因在于偶函数从$-T/2$到0的积分等于从0到$T/2$的积分。利用这个特性，可以得到偶函数的傅里叶系数为：

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\mathrm{d}t \\ a_n &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\mathrm{d}t \\ b_n &= 0 \end{aligned}} \tag{17-18}$$

由于$b_n=0$，式(17-3)就变为余弦傅里叶级数（Fourier cosine series）。从余弦函数本身为偶函数即可理解这一结论。同理，由于正弦函数为奇函数，所以偶函数展开中不包含正弦项。

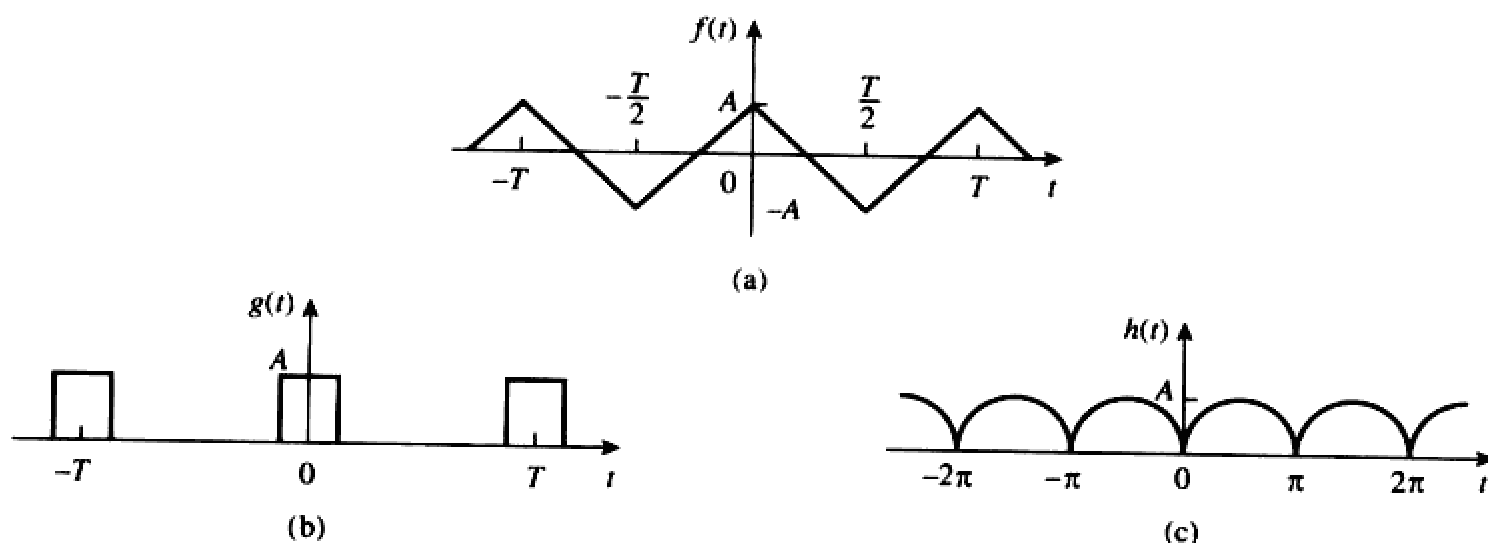


图 17-10 周期性偶函数的典型实例

式(17-18)的定量证明需在利用式(17-6)、式(17-8)与式(17-9)计算傅里叶系数时采用式(17-17)给出的偶函数的性质，在各种情况下，$-T/2 < t < T/2$的积分是比较方便的，因为该积分限关于原点是对称的。因此，

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{T/2} f(t)\mathrm{d}t\right] \tag{17-19}$$

对于$-T/2 < t < 0$区间的积分，进行积分变量替换，令$t = -x$，则有$\mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$，并且由于$f(t)$为偶函数，所以$f(t) = f(-t) = f(x)$，同时$t = -T/2$，$x = T/2$。于是，

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\left[\int_{T/2}^{0} f(x)(-\mathrm{d}x) + \int_{0}^{T/2} f(t)\mathrm{d}t\right] \\ &= \frac{1}{T}\left[\int_{0}^{T/2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{T/2} f(t)\mathrm{d}t\right] \end{aligned} \tag{17-20}$$

表明这辆个积分是相等的，因此，

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\mathrm{d}t \tag{17-21}$$

同理，由式(17-8)可得：

$$a_n = \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos n\omega_0 t\mathrm{d}t + \int_{0}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\mathrm{d}t\right] \tag{17-22}$$

利用与推导式(17-20)相同的变量替换，并且注意到$f(t)$与$\cos n\omega_0 t$均为偶函数，即$f(-t) = f(t)$，$\cos(-n\omega_0 t) = \cos n\omega_0 t$。于是，式(17-22)成为：

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\left[\int_{T/2}^{0} f(-x)\cos(-n\omega_0 x)(-\mathrm{d}x) + \int_{0}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\mathrm{d}t\right] \\ &= \frac{2}{T}\left[\int_{T/2}^{0} f(x)\cos(n\omega_0 x)(-\mathrm{d}x) + \int_{0}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\mathrm{d}t\right] \\ &= \frac{2}{T}\left[\int_{0}^{T/2} f(x)\cos(n\omega_0 x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\mathrm{d}t\right] \end{aligned} \tag{17-23a}$$

即：

$$a_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\mathrm{d}t \tag{17-23b}$$

计算b_n时，需利用式(17-9)：

$$b_n = \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} f(t)\sin n\omega_0 t\mathrm{d}t + \int_{0}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\mathrm{d}t\right] \tag{17-24}$$

采用同样的积分变量替换，并注意到$f(-t)=f(t)$，而$\sin(-n\omega_0 t)=-\sin n\omega_0 t$，于是，式(17-24)变为：

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\left[\int_{T/2}^{0} f(-x)\sin(-n\omega_0 x)(-\mathrm{d}x) + \int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\mathrm{d}t\right] \\ &= \frac{2}{T}\left[\int_{T/2}^{0} f(x)\sin n\omega_0 x\mathrm{d}x + \int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\mathrm{d}t\right] \\ &= \frac{2}{T}\left[-\int_0^{T/2} f(x)\sin(n\omega_0 x)\mathrm{d}x + \int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\mathrm{d}t\right] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{17-25}$$

从而证明了式(17-18)的正确性。

17.3.2　奇对称周期函数的频谱

如果函数$f(t)$的波形关于纵坐标轴是反对称的，则称$f(t)$为奇函数：

$$\boxed{f(-t)=-f(t)} \tag{17-26}$$

t、t^3以及$\sin t$等均为奇函数的例子，图17-11给出了一些周期性奇函数的例子。所有这些例子都满足式(17-26)的条件，奇函数$f_o(t)$的主要性质是：

$$\int_{-T/2}^{T/2} f_o(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{17-27}$$

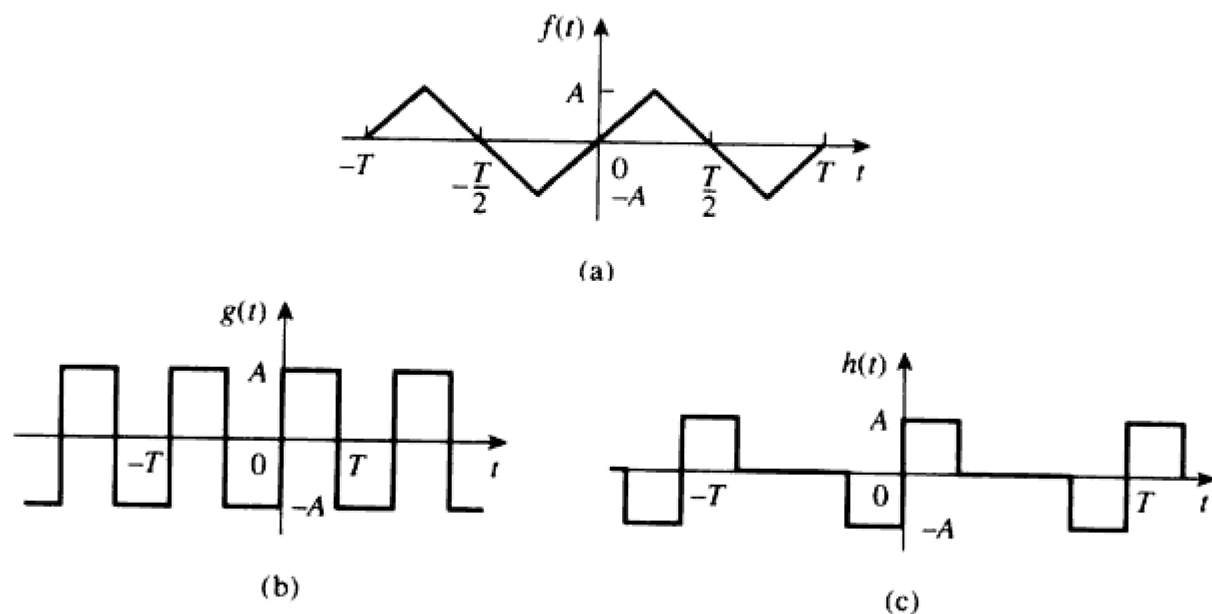


图 17-11　周期奇函数的典型例子

其原因在于从$-T/2$到0的积分值与从0到$T/2$的积分值互为相反数。利用这一性质可以得到奇函数的傅里叶系数为：

$$\boxed{\begin{aligned} &a_0=0, a_n=0 \\ &b_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\mathrm{d}t \end{aligned}} \tag{17-28}$$

奇函数的傅里叶级数称为正弦傅里叶级数（Fourier sine series）。由正弦函数本身为奇函数即可理解这一结论。同时应该注意到，奇函数的傅里叶级数展开式中不存在直流分量。

式(17-28)的定量证明与式(17-18)的证明过程相同，只是现在的$f(t)$为奇函数，即$f(-t)=f(t)$。注意到这个基本而简单的差别，容易得到，式(17-20)中的$a_0=0$，式(17-23a)中的$a_n=0$，式(17-24)中的b_n变为：

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\left[\int_{T/2}^{0} f(-x)\sin(-n\omega_0 x)(-\mathrm{d}x) + \int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\mathrm{d}t\right] \\ &= \frac{2}{T}\left[-\int_{T/2}^{0} f(x)\sin n\omega_0 x\mathrm{d}x + \int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\mathrm{d}t\right] \\ &= \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2} f(x)\sin(n\omega_0 x)\mathrm{d}x + \int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\mathrm{d}t\right] \\ b_n &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{17-29}$$

有趣的是，任何一个既非偶对称又非奇对称的周期函数$f(t)$，都可以分解为偶函数部分和奇函数部分。利用式(17-16)与式(17-26)给出的偶函数与奇函数性质，可以将$f(t)$写为：

$$f(t) = \underbrace{\frac{1}{2}[f(t)+f(-t)]}_{\text{偶}} + \underbrace{\frac{1}{2}[f(t)-f(-t)]}_{\text{奇}} = f_e(t) + f_o(t) \tag{17-30}$$

由此可见，$f_e(t) = \frac{1}{2}[f(t)+f(-t)]$满足式（17-16）所示的偶函数性质，而$f_o(t) = \frac{1}{2}[f(t)-f(-t)]$满足式(17-26)所示的奇函数性质。利用$f_e(t)$中仅包含直流项和余弦项，$f_o(t)$中仅包含正弦项的事实，将$f(t)$的傅里叶级数展开式进行分组：

$$f(t) = \underbrace{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t}_{\text{偶}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t}_{\text{奇}} = f_e(t) + f_o(t) \tag{17-31}$$

由式(17-31)容易看出，当$f(t)$为偶函数时，$b_n = 0$；当$f(t)$为奇函数时，$a_0 = 0 = a_n$。

另外，偶函数与奇函数还具有如下性质：

（1）两个偶函数的乘积仍为偶函数；

（2）两个奇函数的乘积为偶函数；

（3）一个偶函数与一个奇函数的乘积为奇函数；

（4）两个偶函数之和（或差）仍为偶函数；

（5）两个奇函数之和（或差）仍为奇函数；

（6）一个偶函数与一个奇函数之和（或差）既不是偶函数也不是奇函数。

上述各性质均可利用式(17-17)与式(17-26)予以证明。

17.3.3 半波对称周期函数的频谱

满足如下关系的函数$f(t)$称为半波（奇）对称的：

$$\boxed{f\left(t-\frac{T}{2}\right) = -f(t)} \tag{17-32}$$

即前半周为后半周的镜像。注意，函数$\cos n\omega_0 t$与$\sin n\omega_0 t$当n为奇数时满足式(17-32)，因此，当n为奇数时具有半波对称性。图17-12给出了半波对称函数的另外几个例子，图17-11a与图17-11b所示的函数也是半波对称的。注意，对于图中各函数，其一半周期是其相邻一半周期的反转。半波对称函数的傅里叶系数为：

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_n &= \begin{cases} \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\mathrm{d}t, & n\text{为奇数} \\ 0, & n\text{为偶数} \end{cases} \\ b_n &= \begin{cases} \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\mathrm{d}t, & n\text{为奇数} \\ 0, & n\text{为偶数} \end{cases} \end{aligned}} \tag{17-33}$$

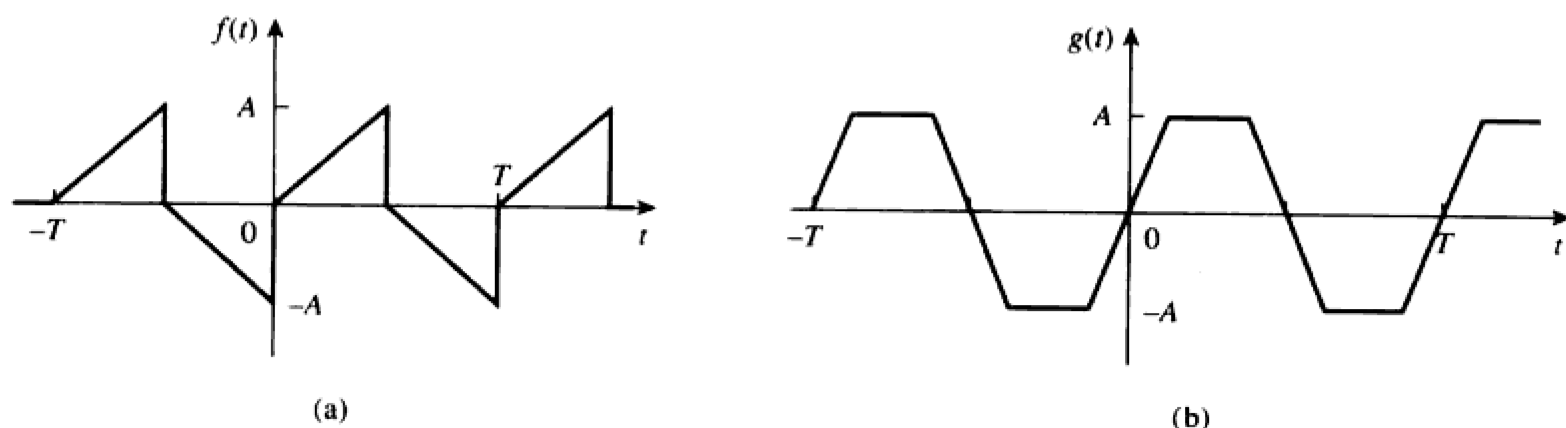


图 17-12　半波奇对称函数的典型例子

由此可见，半波对称函数的傅里叶级数中仅包含奇次谐波。

为了推导式(17-33)，需在按照式(17-6)、式(17-8)与式(17-9)计算傅里叶系数时，应用式(17-32)所示的半波对称函数的性质。于是，

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{0}f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{T/2}f(t)\mathrm{d}t\right] \tag{17-34}$$

对于 $-T/2<t<0$ 区间的积分，进行积分变量替换，令 $x=t+T/2$，则有 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$；当 $t=-T/2$ 时，$x=0$；当 $t=0$ 时，$x=T/2$。同时，按照式（17-32）有 $f(x-T/2)=-f(x)$，于是

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{T}\left[\int_{0}^{T/2}f\left(x-\frac{T}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{T/2}f(t)\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{T}\left[-\int_{0}^{T/2}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{T/2}f(t)\mathrm{d}t\right]=0\end{aligned} \tag{17-35}$$

从而证明了式(17-33)中的 a_0 表达式。同理，

$$a_n=\frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0}f(t)\cos n\omega_0t\mathrm{d}t+\int_{0}^{T/2}f(t)\cos n\omega_0t\mathrm{d}t\right] \tag{17-36}$$

利用与推导式(17-35)相同的积分变量替换，式(17-36)变为

$$\begin{aligned}a_n=\frac{2}{T}\Bigg[&\int_{0}^{T/2}f\left(x-\frac{T}{2}\right)\cos n\omega_0\left(x-\frac{T}{2}\right)\mathrm{d}x\\&+\int_{0}^{T/2}f(t)\cos n\omega_0t\mathrm{d}t\Bigg]\end{aligned} \tag{17-37}$$

由于 $f(x-T/2)=-f(x)$，并且

$$\begin{aligned}\cos n\omega_0\left(x-\frac{T}{2}\right)&=\cos(n\omega_0t-n\pi)\\&=\cos n\omega_0t\cos n\pi+\sin n\omega_0t\sin n\pi\\&=(-1)^n\cos n\omega_0t\end{aligned} \tag{17-38}$$

代入式(17-37)，可以得到：

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{T}\left[1-(-1)^n\right]\int_{0}^{T/2}f(t)\cos n\omega_0t\mathrm{d}t\\&=\begin{cases}\dfrac{4}{T}\displaystyle\int_{0}^{T/2}f(t)\cos n\omega_0t\mathrm{d}t, & n\text{为奇数}\\0, & n\text{为偶数}\end{cases}\end{aligned} \tag{17-39}$$

从而证明了式(17-33)中 a_n 的表达式。按照同样的方法，可以证明式(17-33)中 b_n 的表达式。

表17-2总结了上述各种对称性对傅里叶系数的影响。表17-3给出了一些常见周期函数的傅里叶级数。

表 17-2 函数的对称性对傅里叶系数的影响

对称性	a_0	a_n	b_n	说明
偶对称	$a_0 \neq 0$	$a_n \neq 0$	$b_n = 0$	对函数在 $T/2$ 内积分并乘以 2，得到系数
奇对称	$a_0 = 0$	$a_n = 0$	$b_n \neq 0$	对函数在 $T/2$ 内积分并乘以 2，得到系数
半波对称	$a_0 = 0$	$a_{2n} = 0$	$b_{2n} = 0$	对函数在 $T/2$ 内积分并乘以 2，得到系数
		$a_{2n+1} \neq 0$	$b_{2n-1} \neq 0$	

表 17-3 常见函数的傅里叶级数

函数	傅里叶级数
(1) 方波	$f(t)=\frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)\omega_0 t$
(2) 矩形脉冲序列	$f(t)=\frac{A\tau}{T}+\frac{2A}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\cos n\omega_0 t$
(3) 锯齿波	$f(t)=\frac{A}{2}-\frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\omega_0 t}{n}$
(4) 三角波	$f(t)=\frac{A}{2}-\frac{4A}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\omega_0 t$
(5) 半波整流正弦函数	$f(t)=\frac{A}{\pi}+\frac{A}{2}\sin\omega_0 t-\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2n\omega_0 t$
(6) 全波整流正弦函数	$f(t)=\frac{2A}{\pi}-\frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos n\omega_0 t$

例题17-3 试求如图17-13所示函数$f(t)$的傅里叶级数展开式。

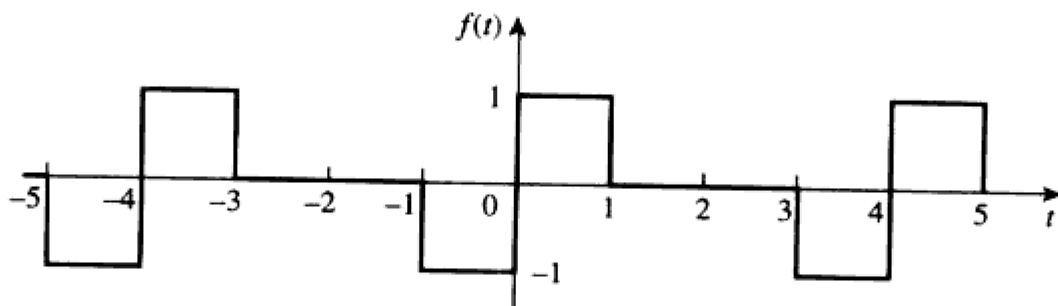


图 17-13 例题 17-3 的函数波形图

解 函数$f(t)$为奇函数，所以$a_0=0=a_n$，周期$T=4$，$\omega_0=2\pi/T=\pi/2$，于是：

$$b_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(t)\sin n\omega_0 t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{4}{T}\left[\int_0^1 1\sin\frac{n\pi}{2}t\mathrm{d}t+\int_1^2 0\sin\frac{n\pi}{2}t\mathrm{d}t\right]$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{2}\bigg|_0^1=\frac{2}{n\pi}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)$$

因此，

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin\frac{n\pi}{2}t$$

$f(t)$的傅里叶级数为正弦级数。

练习题17-3 试求如图17-14所示函数$f(t)$的傅里叶级数。

答 $f(t)=-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nt$，$n=2k-1$。

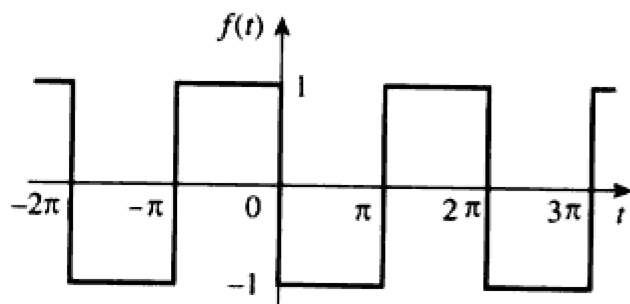


图 17-14 练习题 17-3 的函数波形图

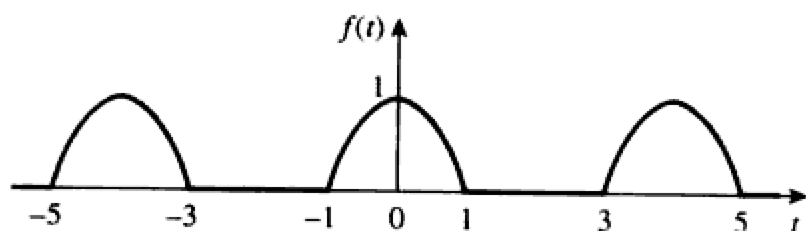


图 17-15 例题 17-4 的半波整流余弦函数波形图

例题17-4 试确定如图17-15所示半波整流余弦函数的傅里叶级数。

解 这是一个偶函数，因此$b_n=0$。同时，$T=4$，$\omega_0=2\pi/T=\pi/2$，在一个周期内，有：

$$f(t)=\begin{cases}0, & -2<t<-1\\ \cos\frac{\pi}{2}t, & -1<t<1\\ 0, & 1<t<2\end{cases}$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^{T/2}f(t)\mathrm{d}t=\frac{2}{4}\left[\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}t\mathrm{d}t+\int_1^2 0\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}t\bigg|_0^1=\frac{1}{\pi}$$

$$a_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(t)\cos n\omega_0 t\mathrm{d}t=\frac{4}{4}\left[\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}t\cos\frac{n\pi t}{2}\mathrm{d}t+0\right]$$

但是，由于$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$，则有

$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\cos\frac{\pi}{2}(n+1)t+\cos\frac{\pi}{2}(n-1)t\right]dt$$

当$n=1$时，

$$a_1=\frac{1}{2}\int_0^1[\cos\pi t+1]dt=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\pi t}{\pi}+t\right]\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

当$n>1$时，

$$a_n=\frac{1}{\pi(n+1)}\sin\frac{\pi}{2}(n+1)+\frac{1}{\pi(n-1)}\sin\frac{\pi}{2}(n-1)$$

当$n=$奇数（即$n=1$，3，5，…），$(n+1)$与$(n-1)$均为偶数时，则有

$$\sin\frac{\pi}{2}(n+1)=0=\sin\frac{\pi}{2}(n-1),\qquad n=\text{奇数}$$

当$n=$偶数（即$n=2$，4，6，…），$(n+1)$ 与$(n-1)$均为奇数时，则有

$$\sin\frac{\pi}{2}(n+1)=-\sin\frac{\pi}{2}(n-1)=\cos\frac{n\pi}{2}=(-1)^{n/2}\qquad n=\text{偶数}$$

因此，

$$a_n=\frac{(-1)^{n/2}}{\pi(n+1)}+\frac{-(-1)^{n/2}}{\pi(n-1)}=\frac{-2(-1)^{n/2}}{\pi(n^2-1)}\qquad n=\text{偶数}$$

于是，

$$f(t)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}t-\frac{2}{\pi}\sum_{n=\text{偶数}}^{\infty}\frac{(-1)^{n/2}}{(n^2-1)}\cos\frac{n\pi}{2}t$$

为了避免使用$n=2$，4，6，…，同时便于计算，可以利用$2k$取代n，其中$k=1$，2，3，…，从而得到：

$$f(t)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}t-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(4k^2-1)}\cos k\pi t$$

这是一个余弦傅里叶级数。

练习题17-4 试求如图17-16所示函数的傅里叶级数展开式。

答 $f(t)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nt$，$n=2k-1$。

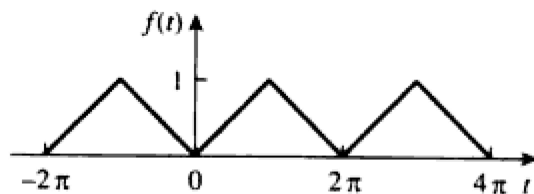


图 17-16 练习题 17-4 的函数波形图

例题17-5 试计算如图17-17所示函数的傅里叶级数。

解 如图17-17所示函数是一个半波奇对称函数，因此$a_0=0=a_n$，在半周期内该函数的表达式为：

$$f(t)=t,\quad -1<t<1$$

周期$T=4$，$\omega_0=2\pi/T=\pi/2$，因此：

$$b_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(t)\sin n\omega_0 t\,dt$$

计算中将$f(t)$的积分从0到2替换为从-1到1，会更方便，利用式(17-15d)可以得到：

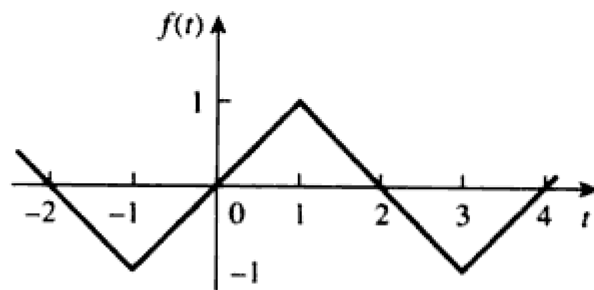


图 17-17 例题 17-5 的函数波形图

$$b_n = \frac{4}{4}\int_{-1}^{1} t\sin\frac{n\pi t}{2}\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin n\pi t/2}{n^2\pi^2/4} - \frac{t\cos n\pi t/2}{n\pi/2}\right]\Bigg|_{-1}^{1}$$
$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\sin\frac{n\pi}{2} - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] - \frac{2}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi}{2} - \cos\left(-\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$
$$= \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

因为$\sin(-x) = -\sin x$为奇函数，$\cos(-x) = \cos x$为偶函数。利用表17-1中$\sin n\pi/2$的恒等式，可以得到：

$$b_n = \frac{8}{n^2\pi^2}(-1)^{(n-1)/2},\quad n = 奇数 = 1,3,5\ldots$$

因此，

$$f(t) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{2}t$$

其中，b_n由上式给定。

练习题17-5 试确定如图17-12a所示函数的傅里叶级数，取$A=1$，$T=2\pi$。

答 $f(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{n^2\pi}\cos nt + \frac{1}{n}\sin nt\right)$，$n = 2k-1$。

17.4 傅里叶级数在电路分析中的应用

在工程实践中，许多电路的激励为非正弦周期函数，为了求解电路对非正弦周期激励的稳态响应，需要采用傅里叶级数、相量分析法以及叠加原理。分析过程通常包括四个步骤。

应用傅里叶级数求解电路的步骤：

(1) 将激励信号展开为傅里叶级数；

(2) 将电路从时域变换到频域；

(3) 求解级数中的直流分量响应与交流分量响应；

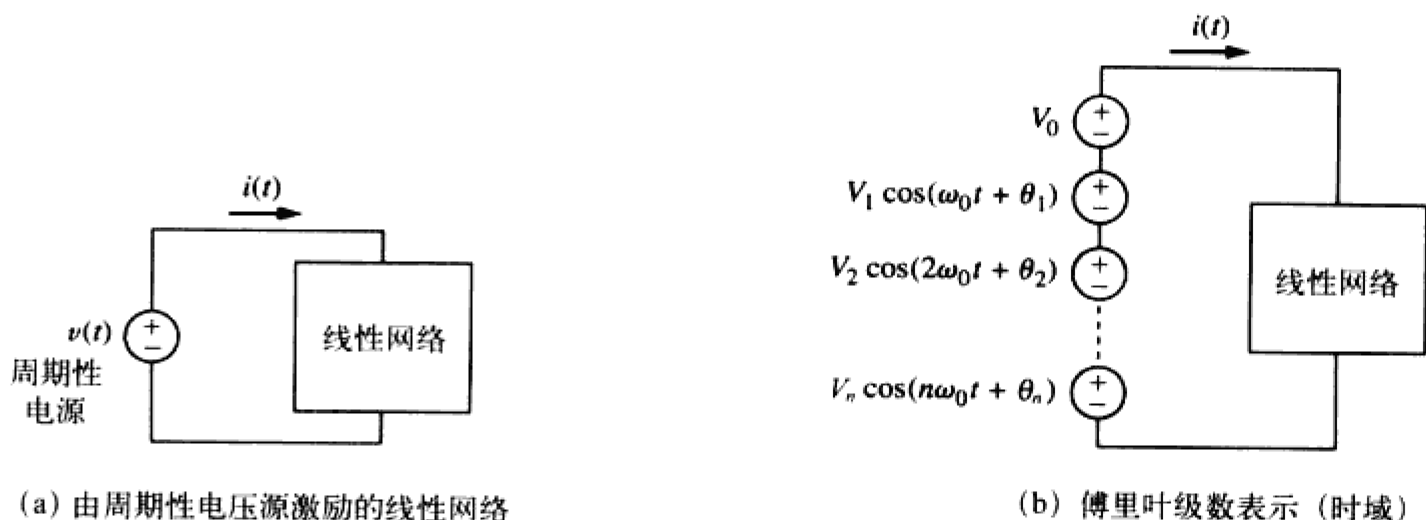
(4) 利用叠加原理将各直流响应与交流响应叠加起来。

第一步是确定电路激励的傅里叶级数展开式。例如，对于如图17-18a所示的周期性电压源，其傅里叶级数可以表示为：

$$v(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n\cos(n\omega_0 t + \theta_n) \tag{17-40}$$

（周期性电流源也可以表示为同样的形式）。式(17-40)表明，$v(t)$由两部分组成：直流分量V_0和各次谐波的交流分量$\mathbf{V}_n = V_n\underline{/\theta_n}$。这种傅里叶级数表示可以看作是一组串联的正弦电源，各电源均具有其各自的振幅和频率，如图17-18b所示。

第三步是求解电路对傅里叶级数中各项的响应。在频域中设置$n=0$或$\omega=0$，如图17-19a所示，或者在时域中，将所有电感器取代为短路，将所有电容器取代为开路，即可确定电路对直流分量的响应。应用本书第9章介绍的相量分析法可以确定电路对交流分量的响应，如图17-19b所示。电路网络可以利用其阻抗$\mathbf{Z}(n\omega_0)$或导纳$\mathbf{Y}(n\omega_0)$来表示。$\mathbf{Z}(n\omega_0)$是指用$n\omega_0$取代ω后电源端的输入阻抗，而$\mathbf{Y}(n\omega_0)$则是$\mathbf{Z}(n\omega_0)$的倒数。



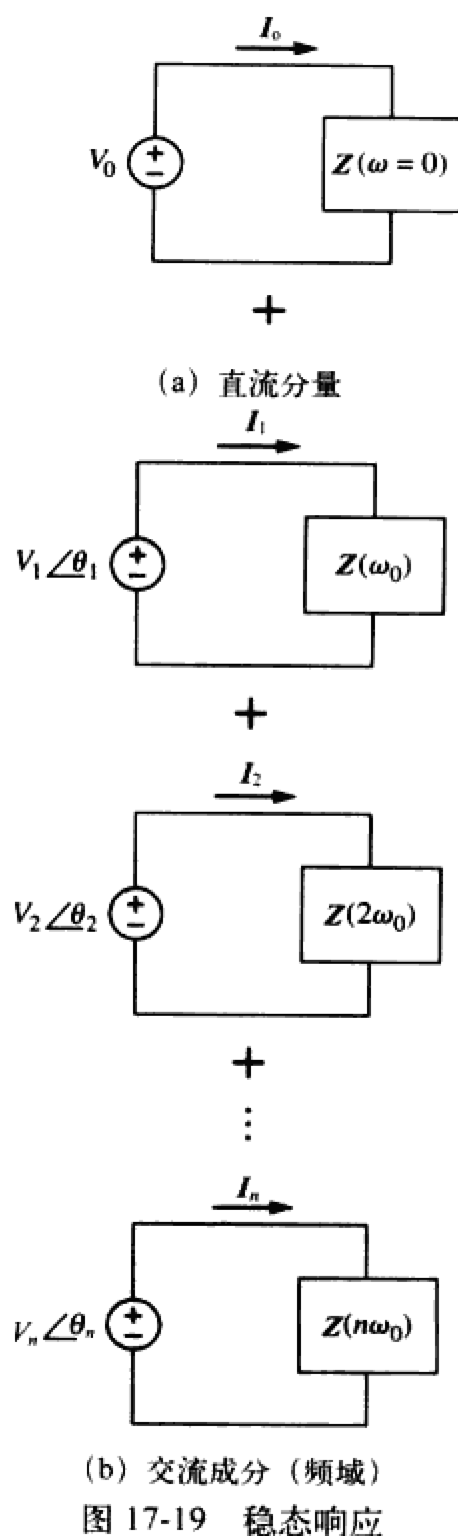
（a）由周期性电压源激励的线性网络　（b）傅里叶级数表示（时域）

图　17-18

最后，根据叠加原理，将所有单独求出的电路响应相加起来，对如图17-19所示的情况，有：

$$
\begin{aligned}
i(t) &= i_0(t)+i_1(t)+i_2(t)+\cdots \\
&= \boldsymbol{I}_0+\sum_{n=1}^{\infty}|\boldsymbol{I}_n|\cos(n\omega_0 t+\psi_n)
\end{aligned}
\tag{17-41}
$$

其中，已将频率为$n\omega_0$的各分量$\boldsymbol{I}_n$变换到时域，从而得到$i_n(t)$，ψ_n为$\boldsymbol{I}_n$的辐角。



（b）交流成分（频域）

图 17-19　稳态响应

例题17-6　设例题17-1中的函数$f(t)$为如图17-20所示电路中的电压源$v_s(t)$，试求该电路的响应$v_o(t)$。

解　由例题17-1可知：

$$v_s(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\pi t,\quad n=2k-1$$

其中，$\omega_n=n\omega_0=n\pi$ rad/s。用相量法与分压原理可以得到如图17-20所示电路的响应$\boldsymbol{V}_o$：

$$\boldsymbol{V}_o=\frac{\mathrm{j}\omega_n L}{R+\mathrm{j}\omega_n L}\boldsymbol{V}_s=\frac{\mathrm{j}2n\pi}{5+\mathrm{j}2n\pi}\boldsymbol{V}_s$$

对于直流分量（$\omega_n=0$或$n=0$），

$$\boldsymbol{V}_s=\frac{1}{2}\Rightarrow \boldsymbol{V}_o=0$$

由于电感器对直流相当于短路，所以得到上述结果。对于n次谐波而言，

$$\boldsymbol{V}_s=\frac{2}{n\pi}\angle{-90^\circ} \tag{17-6-1}$$

相应的电路响应为：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{V}_o &= \frac{2n\pi\angle 90^\circ}{\sqrt{25+4n^2\pi^2}\angle\tan^{-1}2n\pi/5}\left(\frac{2}{n\pi}\angle{-90^\circ}\right) \\
&= \frac{4\angle{-\tan^{-1}2n\pi/5}}{\sqrt{25+4n^2\pi^2}}
\end{aligned}
\tag{17-6-2}
$$

在时域中的电路响应为：

$$v_o(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\sqrt{25+4n^2\pi^2}}\cos\left(n\pi t-\tan^{-1}\frac{2n\pi}{5}\right),\quad n=2k-1$$

以上求和式中奇次谐波的前三项（$k=1$，2，3或$n=1$，3，5）为：

$v_o(t)=0.4981\cos(\pi t-51.49°)+0.2051\cos(3\pi t-75.14°)+0.1257\cos(5\pi t-80.96°)+\cdots$ V

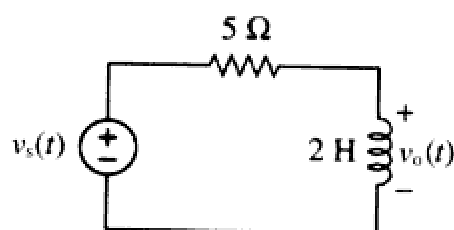


图 17-20　例题 17-6 的电路原理图

图17-21给出了输出电压$v_o(t)$的振幅频谱，而图17-4a给出的则是输入电压源$v_s(t)$的振幅频谱。可以看出，这两个频谱非常接近，为什么呢？如图17-20所示电路是一个转折频率为$\omega_c=R/L=2.5$ rad/s的高通滤波器，其ω_c小于信号的基波频率$\omega_0=\pi$ rad/s，直流分量不能通过该电路，一次谐波分量稍有衰减，而高次谐波分量则可以通过。实际上，由式(17-6-1)与式(17-6-2)可见，当n较大时，$\boldsymbol{V}_o$与$\boldsymbol{V}_s$基本相等，这就是高通滤波器的特征。

练习题17-6　如图17-22所示电路的电压源$v_s(t)$为如图17-9所示的锯齿波（参见练习题17-2），试求电路响应$v_o(t)$。

答　$v_o(t)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(2\pi nt-\tan^{-1}4n\pi\right)}{n\sqrt{1+16n^2\pi^2}}$ V。

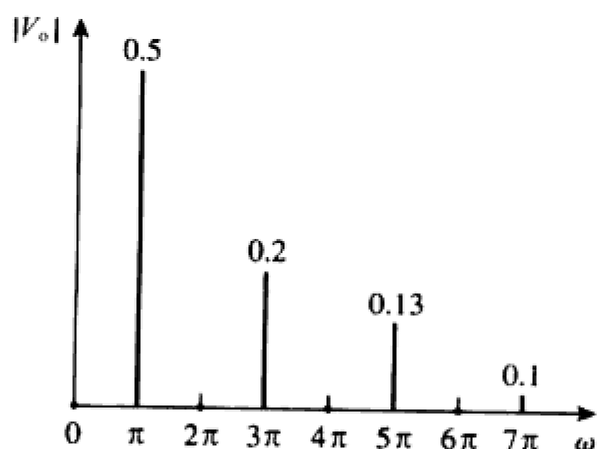


图 17-21　例题 17-6 的图：输出电压的振幅频谱

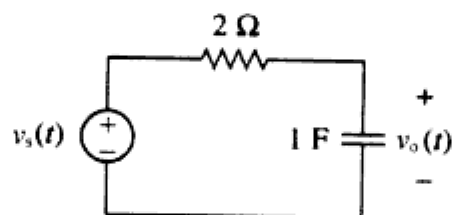


图 17-22　练习题 17-6 的电路原理图

例题17-7　试求如图17-23所示电路的响应$i_o(t)$，该电路输入电压$v(t)$的傅里叶级数展开式为：

$$v(t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{1+n^2}(\cos nt-n\sin nt)$$

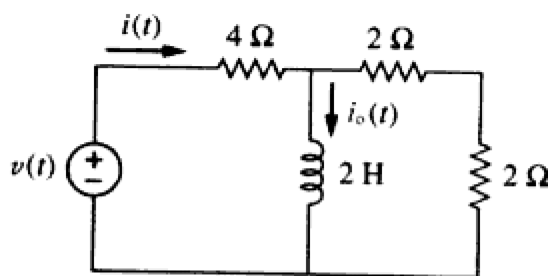


图 17-23　例题 17-7 的电路原理图

解　利用式（17-13）可以将输入电压$v(t)$表示为：

$$\begin{aligned}v(t)&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{\sqrt{1+n^2}}\cos(nt+\tan^{-1}n)\\&=1-1.414\cos(t+45°)+0.8944\cos(2t+63.45°)\\&\quad-0.6345\cos(3t+71.56°)-0.4851\cos(4t+78.7°)+\cdots\end{aligned}$$

由此可见，$\omega_0=1$，$\omega_n=n$ rad/s。在输入端的阻抗为：

$$\boldsymbol{Z}=4+\mathrm{j}\omega_n2\|4=4+\frac{\mathrm{j}\omega_n8}{4+\mathrm{j}\omega_n2}=\frac{8+\mathrm{j}\omega_n8}{2+\mathrm{j}\omega_n}$$

输入电流为：

$$\mathbf{I}=\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}}=\frac{2+\mathrm{j}\omega_n}{8+\mathrm{j}\omega_n 8}\mathbf{V}$$

其中，$\mathbf{V}$为电压源$v(t)$的相量形式。根据分流原理，有

$$\mathbf{I}_\mathrm{o}=\frac{4}{4+\mathrm{j}\omega_n 2}\mathbf{I}=\frac{\mathbf{V}}{4+\mathrm{j}\omega_n 4}$$

由于$\omega_n=n$，$\mathbf{I}_\mathrm{o}$可以表达为

$$\mathbf{I}_\mathrm{o}=\frac{\mathbf{V}}{4\sqrt{1+n^2}\,\angle\tan^{-1}n}$$

对于直流分量（$\omega_n=0$或$n=0$）而言：

$$\mathbf{V}=1\ \Rightarrow\ \mathbf{I}_\mathrm{o}=\frac{\mathbf{V}}{4}=\frac{1}{4}$$

对于n次谐波而言，

$$\mathbf{V}=\frac{2(-1)^n}{\sqrt{1+n^2}\,\angle\tan^{-1}n}$$

于是，

$$\mathbf{I}_\mathrm{o}=\frac{1}{4\sqrt{1+n^2}\,\angle\tan^{-1}n}\,\frac{2(-1)^n}{\sqrt{1+n^2}}\angle\tan^{-1}n=\frac{(-1)^n}{2(1+n^2)}$$

在时域中的表达式为：

$$i_\mathrm{o}(t)=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2(1+n^2)}\cos nt\,\mathrm{A}$$

练习题17-7 如果如图17-24所示电路的输入电压为：

$$v(t)=\frac{1}{3}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos nt-\frac{\pi}{n}\sin nt\right)\mathrm{V}$$

试求该电路的响应$i_\mathrm{o}(t)$。

答

$$\frac{1}{9}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{1+n^2\pi^2}}{n^2\pi^2\sqrt{9+4n^2}}\cos\left(nt-\tan^{-1}\frac{2n}{3}+\tan^{-1}n\pi\right)\mathrm{A}$$

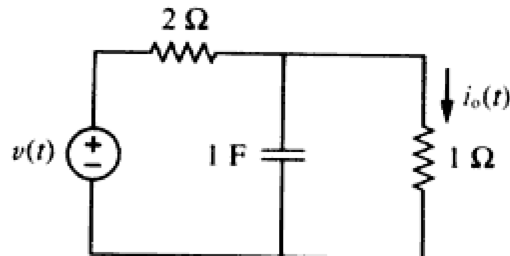


图 17-24 练习题 17-7 的电路原理图

17.5 平均功率与均方根值

第11章曾介绍过正弦信号的平均功率与均方根值等概念。为了求出电路在周期性激励下吸收的平均功率，可以将电压与电流写为振幅-相位的形式（参见式(17-10)）：

$$v(t)=V_\mathrm{dc}+\sum_{n=1}^{\infty}V_n\cos(n\omega_0 t-\theta_n) \qquad (17\text{-}42)$$

$$i(t)=I_\mathrm{dc}+\sum_{m=1}^{\infty}I_m\cos(m\omega_0 t-\phi_m) \qquad (17\text{-}43)$$

按照无源符号规约（如图17-25所示），平均功率为：

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T vi\,\mathrm{d}t \qquad (7\text{-}44)$$

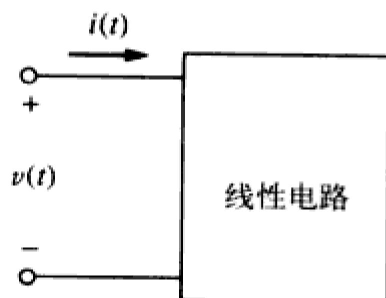


图 17-25 电压参考极性与电流参考方向

将式(17-42)与式(17-43)代入式(17-44)，得到：

$$\begin{aligned}P=&\frac{1}{T}\int_0^T V_{dc}I_{dc}\mathrm{d}t+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{I_mV_{dc}}{T}\int_0^T\cos(m\omega_0t-\phi_m)\mathrm{d}t\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_nI_{dc}}{T}\int_0^T\cos(n\omega_0t-\theta_n)\mathrm{d}t\\&+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_nI_m}{T}\int_0^T\cos(n\omega_0t-\theta_n)\cos(m\omega_0t-\phi_m)\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{7-45}$$

由于余弦函数在一个周期内的积分为零，所以上式第二、三两个积分项均为零。根据式(17-4e)，当$m\neq n$时，第四个积分项中的所有项均为零。计算第一个积分项，并在$m=n$时将式(17-4g)用于第四个积分项，可以得到：

$$\boxed{P=V_{dc}I_{dc}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}V_nI_n\cos(\theta_n-\phi_n)}\tag{17-46}$$

上式表明，在包含周期性电压与电流的平均功率计算中，总的平均功率等于各对应谐波电压与电流所产生的平均功率之和。

给定任一周期函数$f(t)$，其均方根值（即有效值）定义为

$$F_{rms}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\mathrm{d}t}\tag{17-47}$$

将式(17-10)给出的$f(t)$代入式(17-47)，并注意到$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，得到

$$\begin{aligned}F_{rms}^2&=\frac{1}{T}\int_0^T\left[a_0^2+2\sum_{n=1}^{\infty}a_0A_n\cos(n\omega_0t+\phi_n)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_nA_m\cos(n\omega_0t+\phi_n)\cos(m\omega_0t+\phi_m)\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{T}\int_0^T a_0^2\mathrm{d}t+2\sum_{n=1}^{\infty}a_0A_n\frac{1}{T}\int_0^T\cos(n\omega_0t+\phi_n)\mathrm{d}t\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_nA_m\frac{1}{T}\int_0^T\cos(n\omega_0t+\phi_n)\cos(m\omega_0t+\phi_m)\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{17-48}$$

式中采用不同的整数n与m来处理两个级数和的乘积。运用上述同样的推导过程，可以得到：

$$F_{rms}^2=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n^2$$

即

$$F_{rms}=\sqrt{a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n^2}\tag{17-49}$$

利用傅里叶系数a_n与b_n，式(17-49)可以写为

$$F_{rms}=\sqrt{a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)}\tag{17-50}$$

如果$f(t)$为流过电阻器R的电流，则电阻器消耗的功率为：

$$P=RF_{rms}^2\tag{17-51}$$

如果$f(t)$为电阻器R两端的电压，则电阻器消耗的功率为：

$$P=\frac{F_{rms}^2}{R}\tag{17-52}$$

选择1 Ω电阻器即可避免确定信号的属性。于是，1 Ω电阻器所消耗的功率为：

$$\boxed{P_{1\Omega}=F_{\mathrm{rms}}^2=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)} \tag{17-53}$$

该结果称为帕塞瓦尔定理（Parseval theorem）。可以注意到，式中a_0^2为直流分量的功率，而$\frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)$为n次谐波的交流功率。因此，帕塞瓦尔定理表明，任何周期信号的平均功率等于其直流分量的平均功率与各次谐波的平均功率之和。

历史附注：帕塞瓦尔定理是以法国数学家Mare-Antoine Parseval Deschemes（1755—1836）的名字命名的。

例题17-8 如果$i(t)=2+10\cos(t+10°)+6\cos(3t+35°)$A，试确定提供给如图17-26所示电路的平均功率。

解 该电路网络的输入阻抗为：

$$\boldsymbol{Z}=10\left\|\frac{1}{\mathrm{j}2\omega}\right.=\frac{10(1/\mathrm{j}2\omega)}{10+1/\mathrm{j}2\omega}=\frac{10}{1+\mathrm{j}20\omega}$$

所以，

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{IZ}=\frac{10\boldsymbol{I}}{\sqrt{1+400\omega^2}\angle\tan^{-1}20\omega}$$

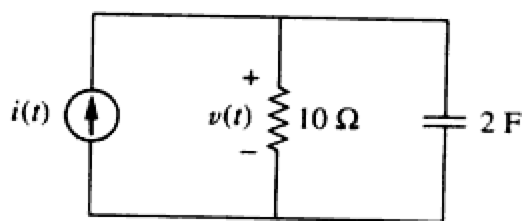


图 17-26 例题 17-8 的电路原理图

对于直流分量，$\omega=0$，则：

$$\boldsymbol{I}=2\text{ A}\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{V}=10(2)=20\text{ V}$$

这是因为电容器对直流相当于开路，2 A电流全部从电阻器流过。如果$\omega=1$ rad/s，则：

$$\boldsymbol{I}=10\angle10°\Rightarrow\boldsymbol{V}=\frac{10(10\angle10°)}{\sqrt{1+400}\angle\tan^{-1}20}=5\angle-77.14°$$

如果$\omega=3$ rad/s，则：

$$\boldsymbol{I}=6\angle35°\Rightarrow\boldsymbol{V}=\frac{10(6\angle35°)}{\sqrt{1+3600}\angle\tan^{-1}60}=1\angle-54.04°$$

因此，在时域中有：

$$v(t)=20+5\cos(t-77.14°)+1\cos(3t-54.04°)\text{ V}$$

应用式(17-46)即可确定提供给电路的平均功率为：

$$P=V_{\mathrm{dc}}I_{\mathrm{dc}}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}V_nI_n\cos(\theta_n-\phi_n)$$

将本例中的v和i与式(17-42)和式(17-43)相比较，即可确定θ_n与ϕ_n的符号，从而，

$$\begin{aligned}P&=20(2)+\frac{1}{2}(5)(10)\cos[77.14°-(-10°)]\\&\quad+\frac{1}{2}(1)(6)\cos[54.04°-(-35°)]\\&=40+1.247+0.05=41.5\text{W}\end{aligned}$$

另外，还可以求出电阻器消耗的平均功率为：

$$\begin{aligned}P&=\frac{V_{\mathrm{dc}}^2}{R}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|V_n|^2}{R}=\frac{20^2}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5^2}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1^2}{10}\\&=40+1.25+0.05=41.5\text{W}\end{aligned}$$

与电源提供的功率相等，这是因为电容器不吸收平均功率。

练习题17-8 某电路终端的电压与电流为：

$$v(t)=80+120\cos 120\pi t+60\cos(360\pi t-30°)$$
$$i(t)=5\cos(120\pi t-10°)+2\cos(360\pi t-60°)$$

试求该电路吸收的平均功率。

答 347.4 W。

例题17-9 试求例题17-7中电压均方根值的估计值。

解 由例题17-7可知，$v(t)$的表达式为：

$$v(t)=1-1.414\cos(t+45°)+0.8944\cos(2t+63.45°)-0.6345\cos(3t+71.56°)-0.4851\cos(4t+78.7°)+\cdots \text{V}$$

利用式(17-49)，可以求出：

$$V_{\text{rms}}=\sqrt{a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n^2}$$
$$=\sqrt{1^2+\frac{1}{2}\left[(-1.414)^2+(0.8944)^2+(-0.6345)^2+(-0.4851)^2+\cdots\right]}$$
$$=\sqrt{2.7186}=1.649\text{V}$$

因为所取的级数项不够多，所以上式仅是一个均方根的估计值。由傅里叶级数表示的实际函数为：

$$v(t)=\frac{\pi e^t}{\sinh\pi},\quad -\pi<t<\pi$$

且$v(t)=v(t+T)$。其精确的均方根值为1.776 V。

练习题17-9 试求如下周期电流$i(t)$的均方根值。

$$i(t)=8+30\cos 2t-20\sin 2t+15\cos 4t-10\sin 4t \text{ A}$$

答 29.61 A。

17.6 指数形式的傅里叶级数

式(17-3)所示傅里叶级数的一种紧凑的表达方式是将其写为指数形式，这就要求利用欧拉公式将正弦函数和余弦函数表示为指数形式：

$$\cos n\omega_0 t=\frac{1}{2}\left[e^{jn\omega_0 t}+e^{-jn\omega_0 t}\right] \tag{17-54a}$$

$$\sin n\omega_0 t=\frac{1}{2j}\left[e^{jn\omega_0 t}-e^{-jn\omega_0 t}\right] \tag{17-54b}$$

将式(17-54)代入式(17-3)，合并同类项后，得到：

$$f(t)=a_0+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n-jb_n)e^{jn\omega_0 t}+(a_n+jb_n)e^{-jn\omega_0 t}\right] \tag{17-55}$$

定义一个新系数c_n，使得：

$$c_0=a_0, c_n=\frac{(a_n-jb_n)}{2},\quad c_{-n}=c_n^*=\frac{(a_n+jb_n)}{2} \tag{17-56}$$

于是，$f(t)$变为：

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{jn\omega_0 t}+c_{-n}e^{-jn\omega_0 t}) \tag{17-57}$$

即：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t} \tag{17-58}$$

这就是$f(t)$的*复指数傅里叶级数*（complex or exponential Fourier series）表示。注意，这种指数形式比式(17-3)的正余弦形式更为简洁紧凑，虽然指数傅里叶级数的系数c_n可以利用式(17-56)由a_n与b_n确定，但也可以直接由$f(t)$确定：

$$c_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t \tag{17-59}$$

其中，$\omega_0=2\pi/T$。c_n的振幅和相位与$n\omega_0$的函数曲线分别称为$f(t)$的*复振幅频谱*（complex amplitude spectrum）和*复相位频谱*（complex phase spectrum），这两个频谱构成了$f(t)$的复频频谱。

周期函数$f(t)$的指数傅里叶级数通过正负谐波频率交流分量的振幅和相位角描述了$f(t)$的频谱。

三种形式傅里叶级数（正余弦形式、振幅相位形式、指数形式）系数之间的关系为：

$$A_n\underline{/\phi_n}=a_n-\mathrm{j}b_n=2c_n \tag{17-60}$$

或者，

$$c_n=|c_n|\underline{/\theta_n}=\frac{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}{2}\underline{/-\tan^{-1}b_n/a_n} \tag{17-61}$$

其中，$a_n>0$。注意，c_n的相位θ_n等于ϕ_n。

周期信号$f(t)$的均方根值利用傅里叶复系数c_n可以表示为：

$$\begin{aligned}F_{\mathrm{rms}}^2&=\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}\right]\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\left[\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t\right]\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nc_n^*=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2\end{aligned} \tag{17-62}$$

即：

$$F_{\mathrm{rms}}=\sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2} \tag{17-63}$$

式(17-62)可以写为：

$$F_{\mathrm{rms}}^2=|c_0|^2+2\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 \tag{17-64}$$

同样，1 Ω电阻消耗的功率为：

$$P_{1\Omega}=F_{\mathrm{rms}}^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 \tag{17-65}$$

此即帕塞瓦尔定理的又一种形式。信号$f(t)$的*功率谱*（power spectrum）是指$|c_n|^2$与$n\omega_0$的关系曲线。如果$f(t)$为电阻器R两端的电压，则电阻器吸收的平均功率为F_{rms}^2/R；如果$i(t)$为流过电阻器R的电流，则电阻器吸收的平均功率为F_{rms}^2R。

下面通过如图 17-27 所示的周期性脉冲串举例说明。目的是要确定该脉冲串的振幅频谱与相位频谱。脉冲串的周期为$T=10$，于是$\omega_0=2\pi/T=\pi/5$。利用式(17-59)可得：

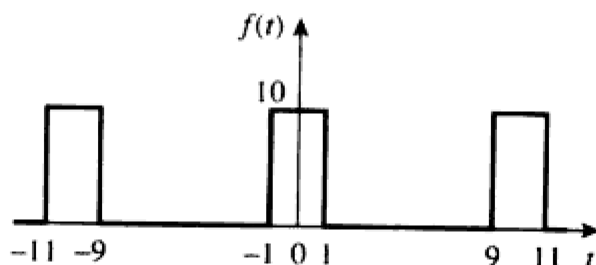


图 17-27　周期性脉冲串

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{10}\int_{-1}^{1} 10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{-\mathrm{j}n\omega_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{-\mathrm{j}n\omega_0}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0}) \\
&= \frac{2}{n\omega_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0}}{2\mathrm{j}} = 2\frac{\sin n\omega_0}{n\omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{\pi}{5} \\
&= 2\frac{\sin n\pi/5}{n\pi/5}
\end{aligned}
\tag{17-66}
$$

并且，

$$
f(t) = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin n\pi/5}{n\pi/5}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\pi t/5}
\tag{17-67}
$$

由式(17-66)可以注意到，c_n是2与一个形式为$\sin x/x$的函数的乘积，该函数称为sinc函数，即：

$$
\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}
\tag{17-68}
$$

sinc函数在通信理论中称为抽样函数（sampling function），是非常有用的。

sinc函数一些性质在这里是非常重要的。当自变量为零时，sinc函数的值等于单位1，即：

$$
\operatorname{sinc}(0) = 1
\tag{17-69}
$$

对式(17-68)应用罗必塔法则即可得到上述结果。当自变量为π的整数倍时，sinc的函数值等于0：

$$
\operatorname{sinc}(n\pi) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \cdots
\tag{17-70}
$$

另外，sinc函数是偶对称函数。利用这些性质，即可确定$f(t)$的振幅频谱和相位频谱。由式(17-66)可得其振幅为：

$$
|c_n| = 2\left|\frac{\sin n\pi/5}{n\pi/5}\right|
\tag{17-71}
$$

相位为：

$$
\theta_n = \begin{cases} 0^\circ, & \sin\dfrac{n\pi}{5} > 0 \\ 180^\circ, & \sin\dfrac{n\pi}{5} < 0 \end{cases}
\tag{17-72}
$$

图17-28给出了n从−10到10变化时，振幅$|c_n|$与n的函数关系曲线，其中$n=\omega/\omega_0$为归一化频率。图17-29给出了θ_n与n的函数关系曲线，振幅频谱与相位频谱均称为线谱，因为$|c_n|$与θ_n的值仅出现在频率的离散值处，相邻谱线之间的间隔为ω_0。同样，也可画出$|c_n|^2$与$n\omega_0$的关系曲线，即功率谱。我们注意到，振幅频谱的包络具有sinc函数的形式。

由输入、输出频谱可以看出电路对周期信号的作用。

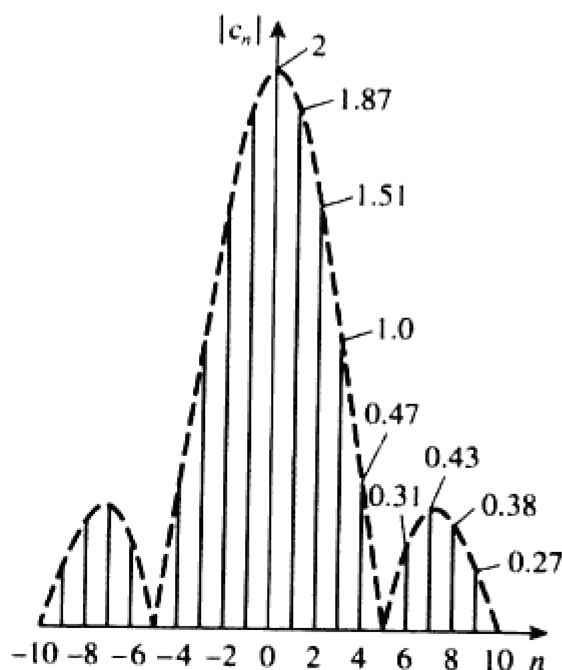


图 17-28 周期性脉冲串的振幅频谱

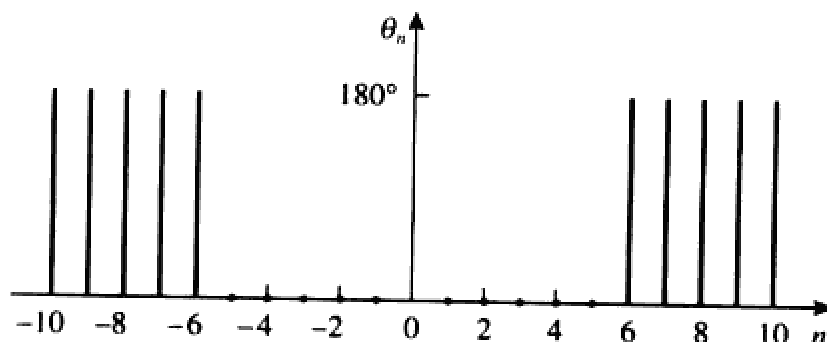


图 17-29 周期性脉冲串的相位频谱

例题17-10 试求周期函数$f(t)=\mathrm{e}^t$，$0<t<2\pi$且$f(t+2\pi)=f(t)$的指数傅里叶级数展开式。

解 由于$T=2\pi$，$\omega_0=2\pi/T=1$，所以，

$$c_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}nt}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-\mathrm{j}n}\mathrm{e}^{(1-\mathrm{j}n)t}\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{2\pi(1-\mathrm{j}n)}\left[\mathrm{e}^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n}-1\right]$$

而由欧拉公式可知：

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n}=\cos 2\pi n-\mathrm{j}\sin 2\pi n=1-\mathrm{j}0=1$$

因此，

$$c_n=\frac{1}{2\pi(1-\mathrm{j}n)}\left[\mathrm{e}^{2\pi}-1\right]=\frac{85}{1-\mathrm{j}n}$$

复数傅里叶级数为：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{85}{1-\mathrm{j}n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}nt}$$

下面绘制令$f(t)$的复数频谱图。如果令$c_n=|c_n|\underline{/\theta_n}$，则有：

$$|c_n|=\frac{85}{\sqrt{1+n^2}},\quad \theta_n=\tan^{-1}n$$

n取不同的正、负整数值即可得到c_n与$n\omega_0$的关系振幅频谱与相位频谱，如图17-30所示。

练习题17-10 试确定如图17-1所示函数的复数傅里叶级数。

答 $f(t)=\dfrac{1}{2}-\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0\\ n=\text{偶数}}}^{\infty}\dfrac{\mathrm{j}}{n\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\pi t}$

例题17-11 试求如图17-9所示锯齿波的复数傅里叶级数，并画出其振幅频谱与相位频谱。

解 由图17-9可知，$f(t)=t$，$0<t<1$，且$T=1$，则有$\omega_0=2\pi/T=2\pi$。

因此，

$$c_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{1}\int_0^1 t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2n\pi t}\mathrm{d}t \tag{17-11-1}$$

但是，

$$\int t e^{at} \mathrm{d}t = \frac{e^{at}}{a^2}(ax-1)+C$$

代入式(17-11-1)可得：

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{e^{-j2n\pi t}}{(-j2n\pi)^2}(-j2n\pi t-1)\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{e^{-j2n\pi}(-j2n\pi-1)+1}{-4n^2\pi^2} \end{aligned} \tag{17-11-2}$$

同样，

$$e^{-j2\pi n} = \cos 2\pi n - j\sin 2\pi n = 1 - j0 = 1$$

从而式(17-11-2)简化为：

$$c_n = \frac{-j2n\pi}{-4n^2\pi^2} = \frac{j}{2n\pi} \tag{17-11-3}$$

但上式并不包含$n=0$的情况，当$n=0$时，有：

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{1}\int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}\Bigg|_1^0 = 0.5 \tag{17-11-4}$$

因此，

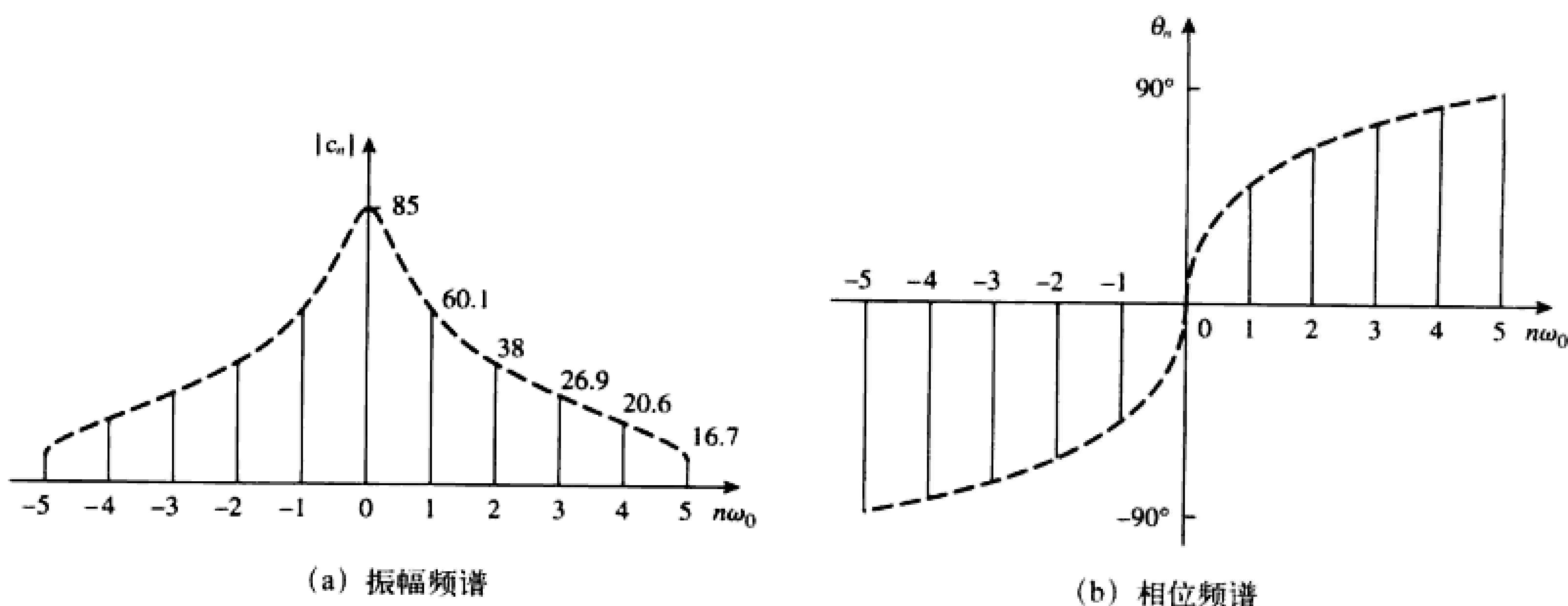


图 17-30　例题 17-10 中函数的复数频谱

$$f(t) = 0.5 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{j}{2n\pi} e^{j2n\pi t} \tag{17-11-5}$$

并且，

$$|c_n| = \begin{cases} \dfrac{1}{2|n|\pi}, & n\neq 0, \\ 0.5, & n=0, \quad \theta_n = 90^\circ,\ n\neq 0 \end{cases} \tag{17-11-6}$$

对于n的不同取值，绘制出$|c_n|$与θ_n的曲线，即可得到如图17-31所示的振幅频谱与相位频谱图。

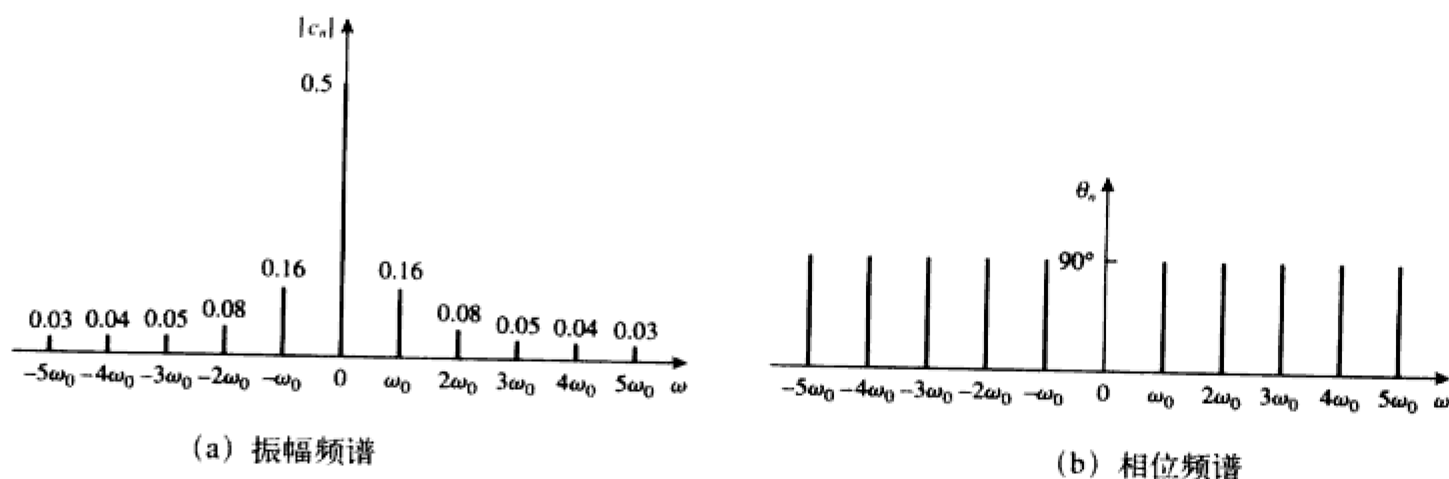


图 17-31 例题 17-11 的频谱图

练习题17-11 试确定如图17-17所示$f(t)$的复数傅里叶级数展开式，并画出振幅频谱与相位频谱。

答 $f(t) = -\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\mathrm{j}(-1)^n}{n\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\pi t}$，频谱图如图17-32所示。

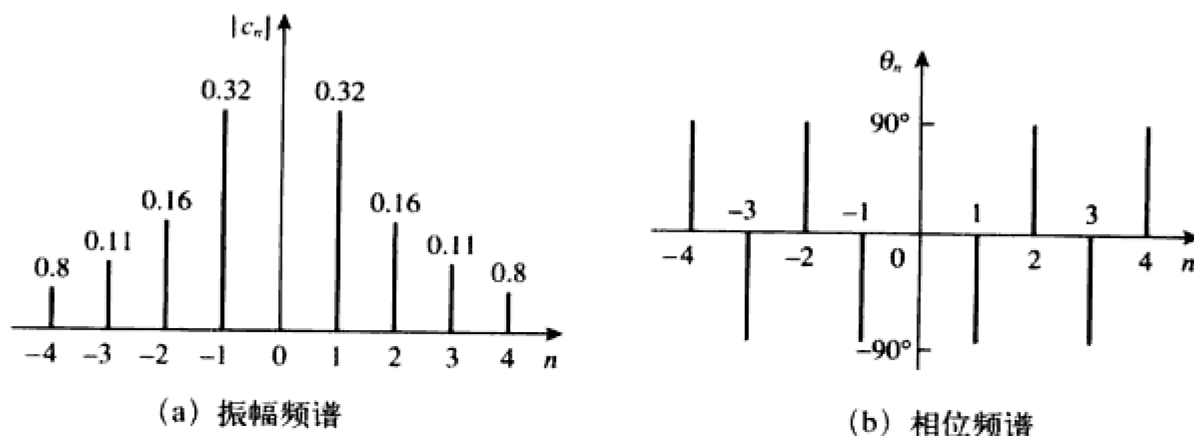


图 17-32 练习题 17-11 的频谱图

17.7 基于 PSpice 的傅里叶分析

利用PSpice软件包进行电路的瞬态分析时，通常可以实现傅里叶分析，所以进行傅里叶分析时必须运行瞬态分析。

对一个波形进行傅里叶分析时，需要画出一个输入为待分析波形，输出为其傅里叶分解的电路。如图17-33所示的由一个电流（或电压）源与一个1 Ω电阻器串联而成的电路，就是一个适于进行傅里叶分析的电路。输入波形为电压源$v_s(t)$时，可以用VPULSE表示脉冲电压，用VSIN表示正弦电压，并在其周期T内设置波形的属性。节点1的输出电压V(1)包含直流电平（a_0），以及前9个谐波（A_n）及其相应的相位（ψ_n），即：

$$v_o(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{9} A_n \sin(n\omega_0 t + \psi_n) \tag{17-73}$$



图 17-33 利用 PSpice 实现傅里叶分析

其中，

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},\ \psi_n = \phi_n - \frac{\pi}{2},\ \phi_n = \tan^{-1}\frac{b_n}{a_n} \tag{17-74}$$

由式(17-74)可以看出，PSpice输出是正弦函数及其辐角的形式，而不是式(17-10)所示的余弦函数及其辐角的形式。PSpice输出中还包括归一化傅里叶系数，各系数a_n除以基波振幅a_1就可以实现归一化，即归一化分量为a_n/a_1。相应的相位ψ_n减去基波的相位也可以实现归一化，即归一化相位为$\psi_n - \psi_1$。

Windows版本的PSpice可以提供两种类型的傅里叶分析：由PSpice程序执行的离散傅里叶变换（Discrete Fourier Transform，DFT）与由PSpice A/D程序执行的快速傅里叶变换（Fast Fourier Transform，FFT）。DFT是指数傅里叶级数的近似，而FFT则是DFT的一种快速数值算法。DFT与FFT的详尽讨论并不在本书的讨论范围之内。

17.7.1 离散傅里叶变换

PSpice程序执行离散傅里叶变换后，将所得到的谐波信息在输出文件中以表格形式给出。为了进行傅里叶分析，需选择Analysis/Setup/Transient，出现如图17-34所示的瞬态分析对话框。其中Print Step的值应该远小于周期T，Final Time可以设置为$6T$，Center Frequency为基波频率$f_0 = 1/T$，将待进行DFT的变量键入Output Vars 对话框中，如图17-34中的V(1)。除填写瞬态分析对话框外，还应选中Enable Fourier。这样，将傅里叶分析使能并保存电路原理图后，即可选择Analysis/Simalate运行PSpice程序。该程序执行谐波分解，得到瞬态分析结果的傅里叶分量，并将傅里叶分析结果送至输出文件，通过Analysis/Examine Output即可读取该输出文件。输出文件中默认包括直流分量和前9个谐波分量，当然，也可以在Number of harmonics对话框（参见图17-34）中规定更多的谐波分量。

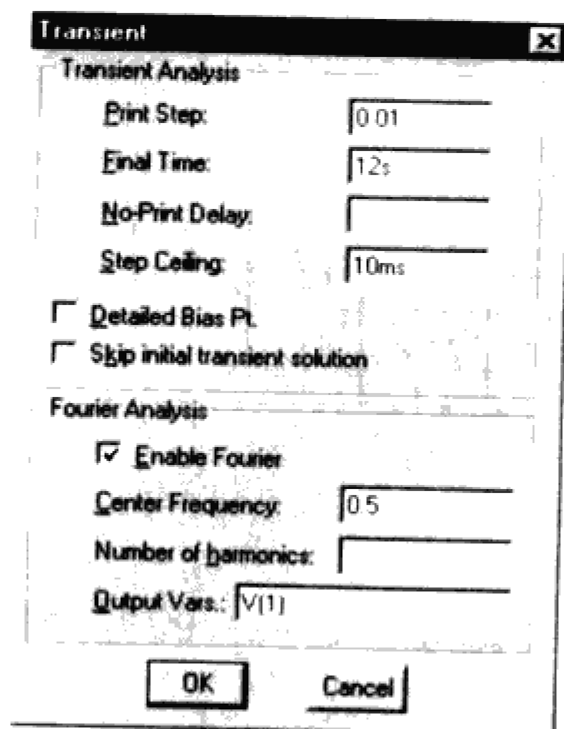


图 17-34 瞬态分析对话框

17.7.2 快速傅里叶变换

快速傅里叶变换由PSpice A/D程序执行，并将瞬态分析表达式的整个频谱显示为PSpice A/D曲线。如前所述，首先构造如图17-33b所示的电路原理图，并输入波形的属性，同时，还要在瞬态分析对话框中键入Print Step与Final Time的值。完成以上设置后，即可通过两种方式确定波形的FFT。

一种方法是在如图17-33b所示电路的节点1处插入一个电压标记，保存电路并选择Analysis/Simulate之后，V(1)的波形就会显示在PSpice A/D窗口中。双击PSpice A/D窗口中的FFT图标，就会将该波形自动地替换为其FFT波形。从FFT图形即可得到谐波信息。当FFT图形很密集时，可以在User Defined对话框中（参见图17-35）设定一个较小的数据范围。

确定V(1)的FFT的另一种方法则无须在原理图的节点1处插入电压标记，直接运行Analysis/Simulate后，PSpice A/D窗口中不会出现任何曲线，之后选择Trace/Add，并在Trace Command对话框中键入V(1)，再双击OK。下面选择Plot/X-Axis Settings调出如图17-35所示的X Axis Setting对话框，并选择Fourier/OK，就会显示出所选迹线的FFT。第二种方法对于确定电路中任何迹线的FFT是非常有用的。

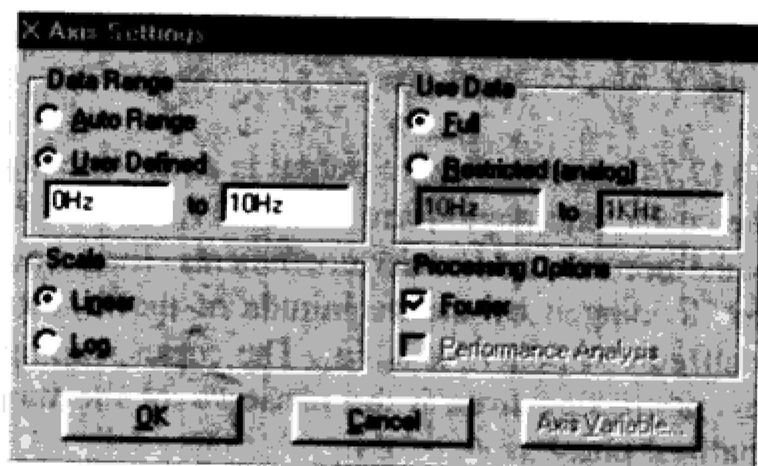


图 17-35　X 轴设置对话框

FFT分析方法的主要优点是它可以给出图形输出，但其缺点是某些谐波太小，以至于无法显示出来。

在DFT与FFT程序的运行中，均应在相当长的周期内运行模拟运算程序，并利用较小的Step Ceiling（在瞬态分析对话框中）值，这样才能保证结果的精度。瞬态分析对话框中的Final Time至少应为信号周期的5倍，这样才能使模拟运算达到稳定状态。

例题17-12　试利用PSpice确定如图17-1所示信号的傅里叶系数。

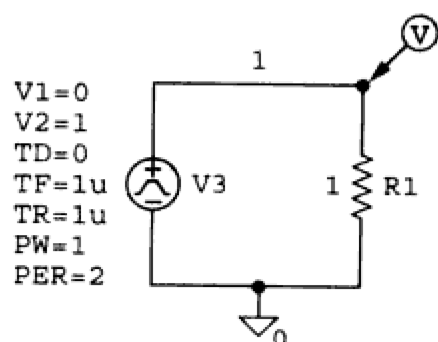


图 17-36　例题 17-12 的电路原理图

解　图17-36所示为确定傅里叶系数的电路原理图，根据图17-1所示信号，输入电压源VPULSE的属性如图17-36所示。下面利用DFT与FFT两种方法求解本例。

方法1：DFT方法(这种方法不需要图17-36中的电压标记)，由图17-1可知，$T=2$ s，从而，

$$f_0=\frac{1}{T}=\frac{1}{2}=0.5\ \text{Hz}$$

于是，在瞬态分析对话框中设置Final Time为$6T=12$ s，Print Step为0.01s，Step Ceiling为10 ms，Center Frequancy为0.5 Hz，并设定输出变量为V(1)（实际上，本例的设置如图17-34所示）。运行PSpice程序后，输出文件中包含如下结果：

FOURIER COEFFICIENTS OF TRANSIENT RESPONSE V(1)

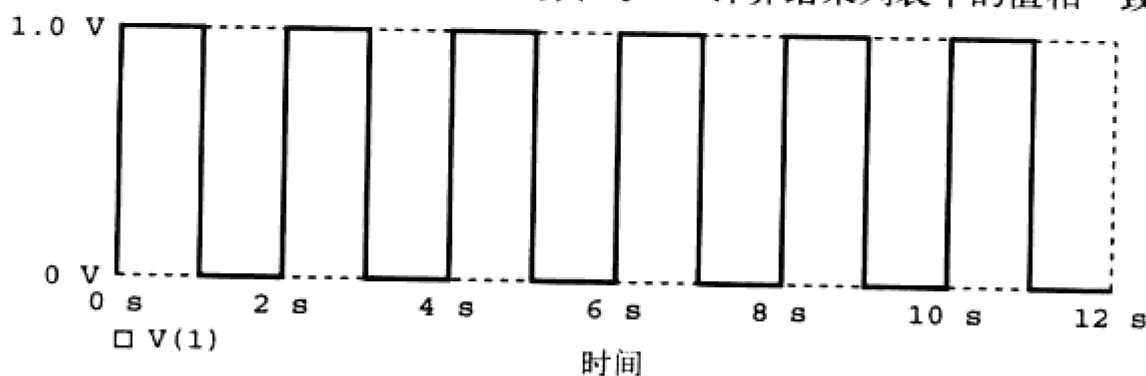
DC COMPONENT＝4.989950E－01

HARMONIC NO	FREQUENCY (HZ)	FOURIER COMPONENT	NORMALIZED COMPONENT	PHASE (DEG)	NORMALIZED PHASE(DEG)
1	5.000E－01	6.366E－01	1.000E＋00	－1.809E－01	0.000E＋00
2	1.000E＋00	2.012E－03	3.160E－03	－9.226E＋01	－9.208E＋01
3	1.500E＋00	2.122E－01	3.333E－01	－5.427E－01	－3.619E-01
4	2.000E＋00	2.016E－03	3.167E－03	－9.451E＋01	－9.433E＋01
5	2.500E＋00	1.273E－01	1.999E－01	－9.048E－01	－7.239E-01
6	3.000E＋00	2.024E－03	3.180E－03	－9.676E＋01	－9.658E＋01
7	3.500E＋00	9.088E－02	1.427E－01	－1.267E＋00	－1.086E＋00
8	4.000E＋00	2.035E－03	3.197E－03	－9.898E＋01	－9.880E＋01
9	4.500E＋00	7.065E－02	1.110E－01	－1.630E＋00	－1.449E＋00

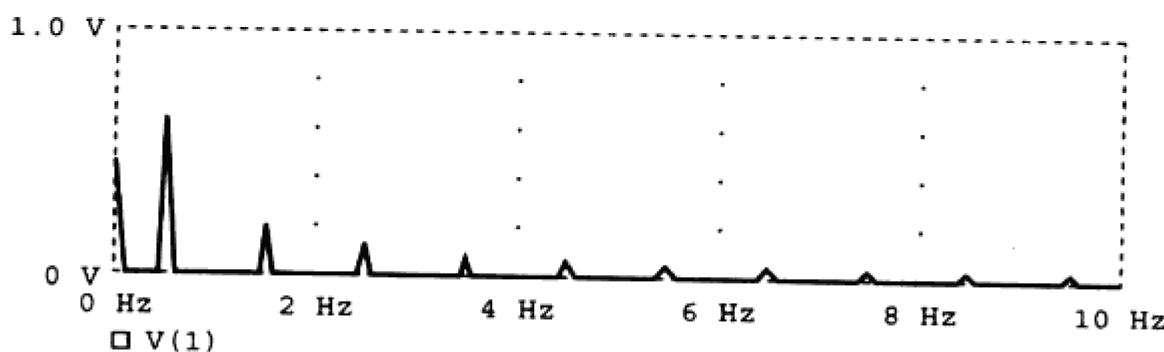
将上述结果与式(17-1-7)（参见例题17-1）进行比较或与图17-4所示频谱图进行比较，可见结果相当一致。由式(17-1-7)可知直流分量为0.5，而PSpice计算的结果为0.498 995。另外，该信号仅包含相位$\psi_n=-90°$的奇次谐波，虽然PSpice给出的信号包含偶次谐波，但偶次谐波的振幅均很小。

方法2：FFT方法，设置如图17-36所示的用电压标记，运行PSpice并确定V(1)，可以在PSpice A/D

窗口中得到如图17-37a所示的波形。在PSpice A/D窗口中菜单中双击FFT图标，并将X-Axis Settings设置为从0到10 Hz，即可得到V(1)的FFT，如图17-37b所示。该FFT频谱图中包含所选频率范围内的直流分量与谐波分量，注意，各谐波的振幅和频率与DFT计算结果列表中的值相一致。



(a) 图 17-1 的原始波形



(b) 该波形的 FFT

图　17-37

练习题17-12　试利用PSpice确定如图17-7所示函数的傅里叶系数。

答

FOURIER COEFFICIENTS OF TRANSIENT RESPONSE V(1)

DC COMPONENT = 4.950000E - 01

HARMONIC NO	FREQUENCY (HZ)	FOURIER COMPONENT	NORMALIZED COMPONENT	PHASE (DEG)	NORMALIZED PHASE(DEG)
1	1.000E+00	3.184E-01	1.000E+00	-1.782E+02	0.000E+00
2	2.000E+00	1.593E-01	5.002E-01	-1.764E+02	1.800E+00
3	3.000E+00	1.063E-01	3.338E-01	-1.746E+02	3.600E+00
4	4.000E+00	7.979E-02	2.506E-03	-1.728E+02	5.400E+00
5	5.000E+00	6.392E-01	2.008E-01	-1.710E+02	7.200E+00
6	6.000E+00	5.337E-02	1.676E-03	-1.692E+02	9.000E+00
7	7.000E+00	4.584E-02	1.440E-01	-1.674E+02	1.080E+01
8	8.000E+00	4.021E-02	1.263E-01	-1.656E+02	1.260E+01
9	9.000E+00	3.584E-02	1.126E-01	-1.638E+02	1.440E+01

例题 17-13　在如图17-38所示电路中，如果 $v_s = 12\sin(200\pi t)\, u(t)$ V，试求电流$i(t)$。

解　(1) **明确**问题。虽然本例题要求解决的问题表面看已阐述清楚，但仍然建议读者明确所要求解的是瞬态响应，而不是稳态响应，因为在后一种情况下，问题会变得非常容易。

(2) **表述**对问题的理解。本例要利用PSpice进行

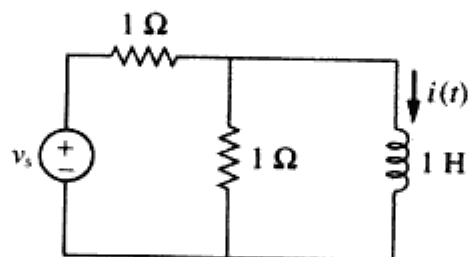


图 17-38　例题 17-13 的电路原理图

傅里叶分析，从而确定对于给定输入$v_s(t)$的响应$i(t)$。

（3）确定**可选**解。首先利用DFT进行初始分析，之后利用FFT进行验证。

（4）**尝试**问题的解。本例的电路原理图如图17-39所示。可以利用DFT方法确定$i(t)$的傅里叶系数。由于输入波形的周期为$T=1/100=10$ ms，所以在瞬态分析对话框中应选择Print Step为0.1 ms，Final Time为100 ms，Center Frequency为100 Hz，Number of harmonics为4，Output Vars为I(L1)。对电路进行模拟后，其输出文件的内容如下：

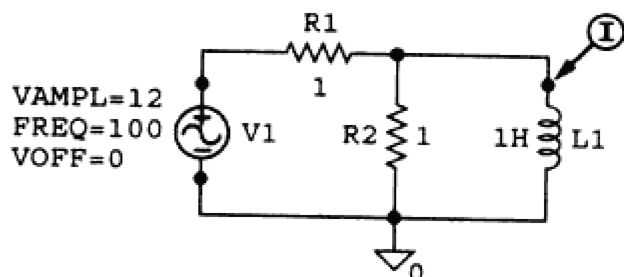


图17-39 图17-38所示电路的PSpice原理图

FOURIER COEFFICIENTS OF TRANSIENT RESPONSE I(VD)

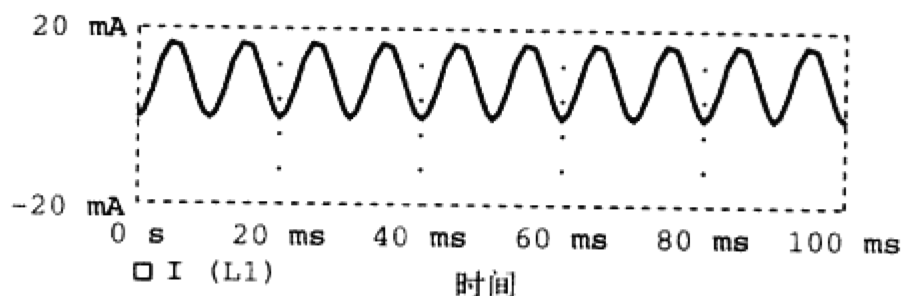
DC COMPONENT=8.583269E−03

HARMONIC NO	FREQUENCY (HZ)	FOURIER COMPONENT	NORMALIZED COMPONENT	PHASE (DEG)	NORMALIZED PHASE(DEG)
1	1.000E+02	8.730E−03	1.000E+00	−8.984E+01	0.000E+00
2	2.000E+02	1.017E−04	1.165E−02	−8.306E+01	6.783E+00
3	3.000E+02	6.811E−05	7.802E−03	−8.235E+01	7.490E+00
4	4.000E+02	4.403E−05	5.044E−03	−8.943E+01	4.054E+00

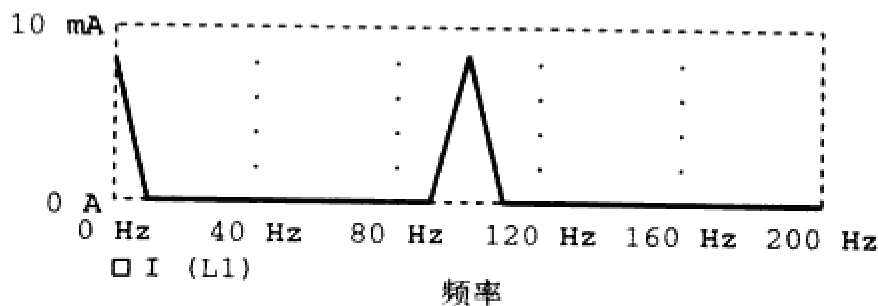
求出傅里叶系数之后，电流$i(t)$的傅里叶级数可以利用式(17-73)写出，即：

$$i(t)=8.5833+8.73\sin(2\pi\cdot 100\,t-89.84°)+0.1017\sin(2\pi\cdot 200\,t-83.06°)$$
$$+0.068\sin(2\pi\cdot 300\,t-82.35°)+\cdots\ \text{mA}$$

（5）**评价**得到的结果。还可以利用FFT方法验证上述结果的正确性，此时需在电感器的引脚1处插入电流标记，如图17-39所示。运行PSpice程序后，就会在PSpice A/D窗口中自动生成I(L1)的曲线，如图17-40a所示。双击FFT图标并设置X轴的范围从0到200 Hz，从而得到I(L1)的FFT，如图17-40b所示。从FFT频谱图中可以清楚地看到直流分量与基波分量，其他高次谐波均很小可以忽略不计。



（a）$i(t)$的波形图



（b）$i(t)$的FFT

图17-40 例题17-13的图形

得到的答案有意义吗？该电路实际的瞬态响应为$i(t)=(9.549\,e^{-0.5t}-9.549)\cos(200\pi t)\,u(t)$ mA，余弦波的周期为10 ms，而指数信号的时间常数为2000 ms（即2 s）。因此，由傅里叶分析得到的结果是一致的。

（6）对结果是否**满意**？显然，已经利用规定的方法成功地求解了本例，可以将所得到的结果作

为本题的答案。

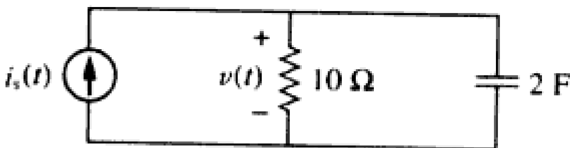


图 17-41 练习题 17-14 的电路原理图

练习题17-13 某振幅为4 A，频率为2 kHz的正弦电流源作用于如图17-41所示的电路上，试利用PSpice求出$v(t)$。

答 $v(t) = -150.72 + 145.5\ \sin(4\pi \cdot 10^3\ t + 90°) + \cdots\ \mu V$. 的傅里叶系数如下所示：

FOURIER COEFFICIENTS OF TRANSIENT RESPONSE V(R1: 1)

DC COMPONENT = −1.507169E−04

HARMONIC NO	FREQUENCY (HZ)	FOURIER COMPONENT	NORMALIZED COMPONENT	PHASE (DEG)	NORMALIZED PHASE(DEG)
1	2.000E+03	1.455E−04	1.000E+00	9.006E+01	0.000E+00
2	4.000E+03	1.851E−06	1.273E−02	9.597E+01	5.910E+00
3	6.000E+03	1.406E−06	9.662E−03	9.323E+01	3.167E+00
4	8.000E+03	1.010E−06	6.946E−02	8.077E+01	−9.292E+00

17.8 †应用

17.4节已经指出，傅里叶级数展开可以利用包含非正弦周期性激励的电路的交流分析中所采用的相量分析方法。傅里叶级数的实际应用非常广泛，特别在通信和信号处理领域。典型的应用包括频谱分析、滤波、检波整流与谐波失真等。本节将讨论其中两个应用，频谱分析仪与滤波器。

17.8.1 频谱分析仪

傅里叶级数给出了信号的谱频，信号频谱由各次谐波的振幅和相位与频率的关系组成，由傅里叶级数确定的信号$f(t)$的频谱有助于识别信号的相关特征，指出哪些频率成分对输出信号的波形起主要作用，哪些则不起作用。例如，可听到的声音包含的主要频率分量位于20 Hz到15 kHz的频率范围内，而可见光的频率范围则是10^5 GHz到10^6 GHz之间。表17-4列出了一些常见信号及其频率范围。如果周期信号的振幅频谱中仅包含有限多个傅里叶系数A_n或c_n，则称之为*带限*（band-limited）周期信号，其傅里叶级数为

$$f(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{jn\omega_0 t} = a_0 + \sum_{n=1}^{N} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \tag{17-75}$$

上式表示，如果ω_0已知，仅需要$(2N+1)$项（即a_0，A_1，A_2，…，A_N，ϕ_1，ϕ_2，…，ϕ_N）即可完全确定信号$f(t)$。于是，由这一结果可以得到*取样定理*（sampling theorem）：傅里叶级数中包含N个谐波的带限周期信号可以由其一个周期内$(2N+1)$个瞬时值唯一地确定。

表 17-4 典型信号的频率范围

信号	频率范围
可听到的声音	20 Hz ~ 15 kHz
调幅无线电	540 ~ 1600 kHz
短波无线电	3 ~ 36 MHz
视频信号（美国标准）	Dc 至 4.2 MHz
甚高频（VHF）电视，调频无线电	54 ~ 216 MHz
超高频（UHF）电视	470 ~ 806 MHz
蜂窝电话	824 ~ 891.5 MHz
微波	2.4 ~ 300 GHz
可见光	10^5 ~ 10^6 GHz
X 射线	10^8 ~ 10^9 GHz

频谱分析仪（spectrum analyzer）是一种用于显示信号各频率分量的幅度分布情况的仪器，即它可以显示出表示各频率处能量大小的各频率分量（谱线）的分布情况。

频谱分析仪与显示整个信号（所有分量）与时间关系的示波器是不同的，示波器是在时域中显示信号，而频谱分析仪则是在频域中显示信号。作为一种电路分析仪器，恐怕没有其他设备比频谱分析仪更有用。利用频谱分析仪可以进行噪声与杂波信号分析、相位检测、电磁干扰与滤波器测量、振动测量、雷达测量等。商用频谱分析仪具有各种不同的尺寸和形状，图17-42所示为一种典型的频谱分析仪。

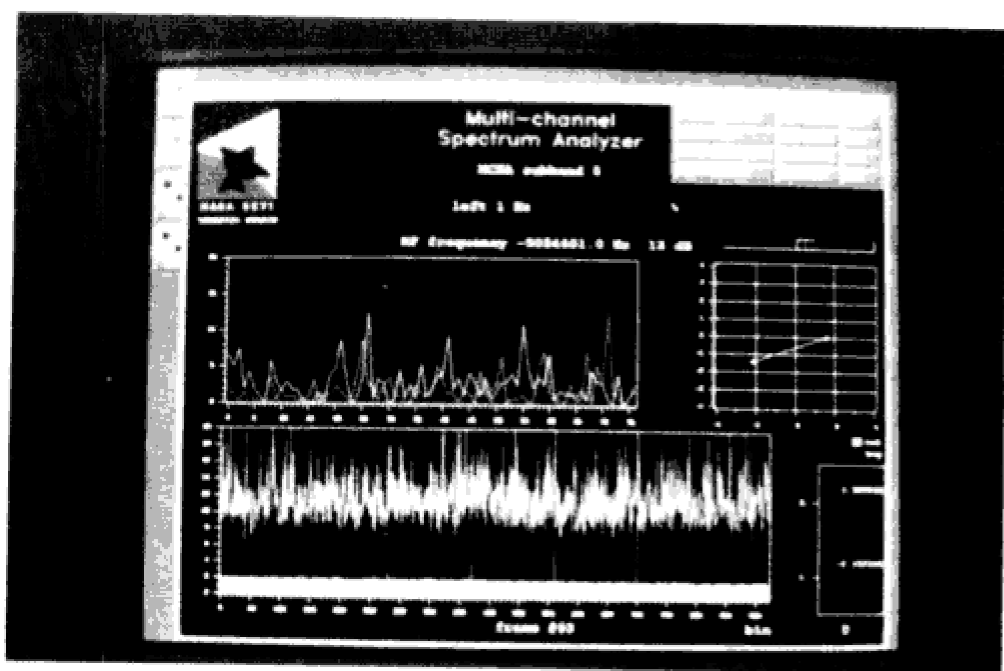


图 17-42 典型的频谱分析仪

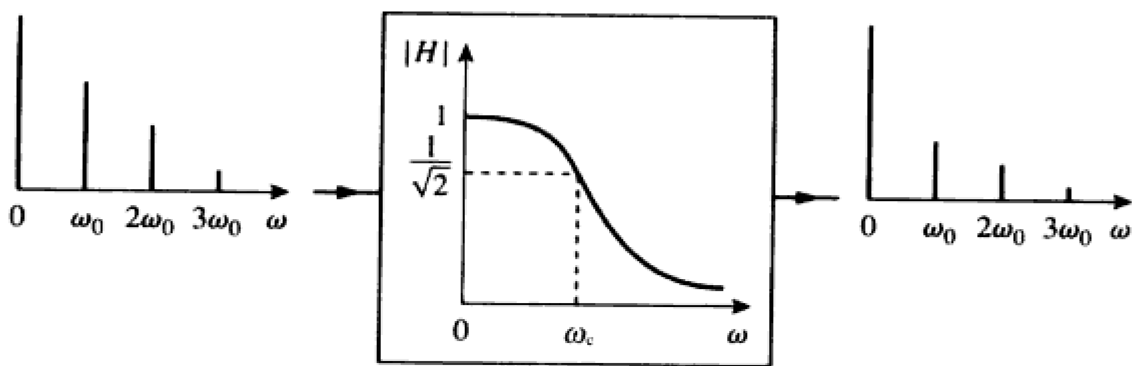
17.8.2 滤波器

滤波器是电子与通信系统中的一类重要元件，第14章已经全面介绍了无源滤波器与有源滤波器，本节将介绍如何设计用于提取输入信号的基波分量（或任意谐波分量）而滤除其他谐波的滤波器。不借助输入信号的傅里叶级数展开，就无法实现这一滤波过程。为了便于说明，讨论低通滤波器与带通滤波器两种情况，在例题17-6中，已经介绍了RL高通滤波器的情况。

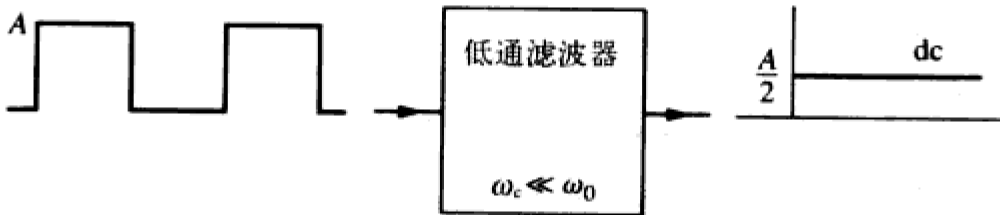
低通滤波器的输出取决于输入信号、滤波器的传递函数$H(\omega)$及其转折频率或半功率点频率ω_c。对于无源RC滤波器，我们知道$\omega_c = 1/RC$。低通滤波器允许直流分量和低频分量通过，而阻止高频分量通过，如图17-43a所示。如果使得ω_c足够大（即$\omega_c >> \omega_0$，例如使得C足够小），则可使大量谐波通过滤波器。如果使得ω_c足够小（即$\omega_c << \omega_0$），则将阻止所有交流分量，而仅允许直流分量通过，如图17-43b所示（参见如图17-2a所示的方波的傅里叶级数展开）。

同理，带通滤波器的输出取决于输入信号、滤波器的传递函数$H(\omega)$、滤波器带宽B及其中心频率ω_c。如图17-44a所示，带通滤波器允许以ω_c为中心的有限频带范围（$\omega_1 < \omega < \omega_2$）内的所有谐波分量通过，图中假定$\omega_0$、$2\omega_0$以及$3\omega_0$均位于带通频带范围内。如果滤波器具有很高的选择性（$B << \omega_0$），并且$\omega_c = \omega_0$，其中ω_0为输入信号的基波频率，则滤波器仅允许输入信号的基波分量（$n=1$）通过，而阻止其他所有高次谐波。于是，如果输入是一个方波，所得到的输出则是一个与方波基频相等的正弦波，如图17-44b所示（亦可参见图17-2a）。

本节利用ω_c表示带通滤波器的中心频率，而第14章则是用ω_0表示，这是为了避免与输入信号的基波频率ω_0相混淆。

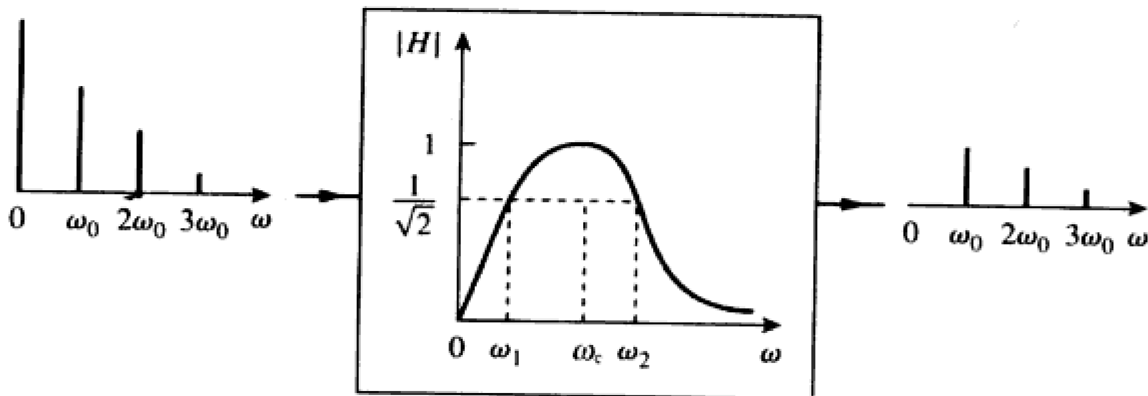


（a）低通滤波器的输入频谱与输出频谱

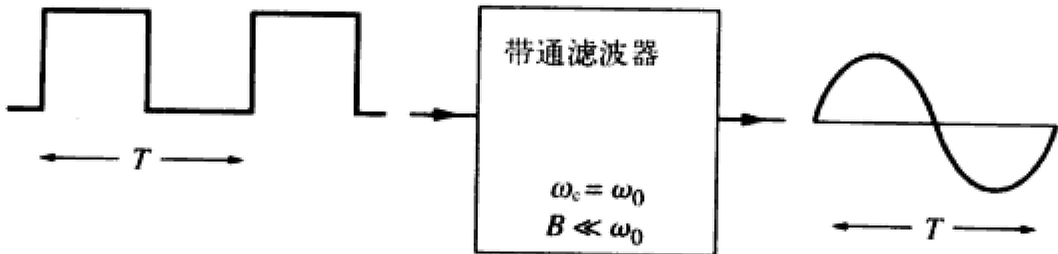


（b）当 $\omega_c << \omega_0$ 时，低通滤波器仅允许直流分量通过

图 17-43



（a）带通滤波器的输入频谱与输出频谱



（b）当 $B << \omega_0$ 时，带通滤波器仅允许基波分量通过

图 17-44

例题17-14 如果将如图17-45a所示的锯齿波作用于传递函数如图17-45b所示的理想低通滤波器，试确定其输出。

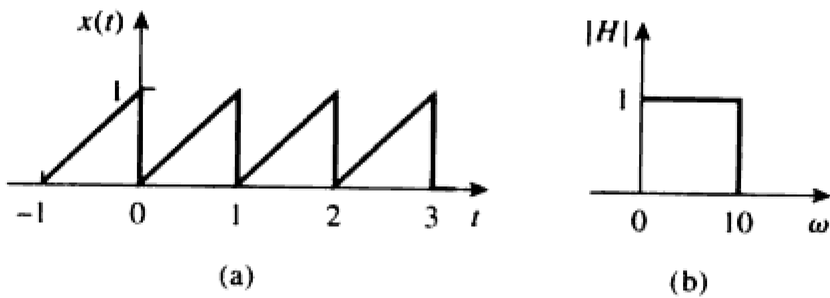


图 17-45 例题 17-14 的波形图

解 如图17-45a所示的输入信号与图17-9所示信号相同，由练习题17-2已知其傅里叶级数展开式为：

$$x(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sin\omega_0 t-\frac{1}{2\pi}\sin 2\omega_0 t-\frac{1}{3\pi}\sin 3\omega_0 t-\cdots$$

其中，周期$T=1$ s，基波频率$\omega_0=2\pi$ rad/s。由于滤波器的转折频率为$\omega_c=10$ rad/s，所以只有直流分量和$n\omega_0<10$的谐波分量可以通过。当$n=2$时，$n\omega_0=4\pi=12.566$ rad/s大于10 rad/s，这就是说，二次及更高次谐波均无法通过该滤波器。因此，仅直流分量与基波分量可以通过，于是，该滤波器的输出为：

$$y(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sin 2\pi t$$

练习题17-14 如果利用如图17-46所示的理想带通滤波器取代例题17-14中的低通滤波器，试重做例题17-14。

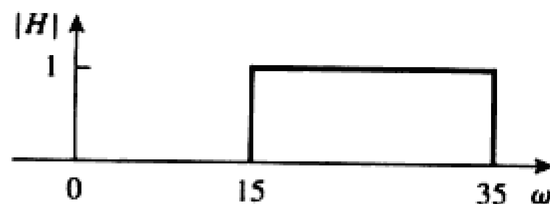


图 17-46 例题 17-14 的波形图

答 $y(t)=-\frac{1}{3\pi}\sin 3\omega_0 t-\frac{1}{4\pi}\sin 4\omega_0 t-\frac{1}{5\pi}\sin 5\omega_0 t$。

17.9 本章小结

（1）周期函数是指每隔T秒重复自身的函数，即$f(t\pm nT)=f(t)$，$n=1, 2, 3, \cdots$

（2）电子工程中所遇到的任何非正弦周期函数$f(t)$都可用傅里叶级数表达为正余弦函数之和：

$$f(t)\underbrace{a_0}_{\text{dc}}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)}_{\text{ac}}$$

其中，$\omega_0=2\pi/T$为基波频率，傅里叶级数将函数分解为直流分量a_0和由无穷多个正弦谐波成分构成的交流分量。傅里叶系数由以下各式确定：

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t,\quad a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\mathrm{d}t,$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\mathrm{d}t,$$

如果$f(t)$为偶函数，则$b_n=0$；如果$f(t)$为奇函数，则$a_0=0$且$a_n=0$；如果$f(t)$为半波对称函数，则对于n为偶数情况，有$a_0=a_n=b_n=0$。

（3）三角（或正弦－余弦）傅里叶级数的另一种表达式是振幅－相位形式：

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t+\phi_n)$$

其中，

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\quad \phi_n=-\tan^{-1}\frac{b_n}{a_n}$$

（4）当源函数为非正弦周期函数时，利用傅里叶级数分析电路时可以采用相量方法，即利用相量确定傅里叶级数中各谐波的响应，并将其转换到时域中逐个相加，从而得到电路的全响应。

（5）周期性电压与电流的平均功率为：

$$P=V_{dc}I_{dc}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}V_n I_n\cos(\theta_n-\phi_n)$$

换言之，总的平均功率等于各同次谐波电压与电流的平均功率之和。

（6）周期函数还可利用指数（或复数）傅里叶级数表示为：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

其中，

$$c_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$\omega_0=2\pi/T$。指数傅里叶级数通过正、负谐波频率处交流分量的振幅与相位描述了$f(t)$的频谱。因此，共有三种基本形式的傅里叶级数：三角函数形式、振幅－相位形式以及指数形式。

(7) 频谱（即线谱）是指A_n和ϕ_n或者$|c_n|$和θ_n随频率的变化曲线。

(8) 周期函数的均方根值为：

$$F_{rms}=\sqrt{a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n^2}$$

1 Ω电阻消耗的功率为：

$$P_{1\Omega}=F_{rms}^2=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

该关系称为帕塞瓦尔定理。

(9) 利用Pspice软件包可以在电路的瞬态分析中，实现该电路的傅里叶分析。

(10) 傅里叶级数可以用在频谱分析仪和滤波器中，频谱分析仪是一种用于显示输入信号离散傅里叶频谱的仪器，工程分析人员可以利用频谱分析仪确定信号分量的频率及相应的能量。因为傅里叶频谱为离散谱，所以可以设计滤波器有效地阻止期望频率范围以外的频率分量通过。

复习题

17-1 以下哪些表达式不是傅里叶级数：

(a) $t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^5}{5}$

(b) $5\sin t+3\sin 2t-2\sin 3t+\sin 4t$

(c) $\sin t-2\cos 3t+4\sin 4t+\cos 4t$

(d) $\sin t+3\sin 2.7t-\cos \pi t+2\tan \pi t$

(e) $1+e^{j\pi t}-\frac{e^{-j2\pi t}}{2}+\frac{e^{-j3\pi t}}{3}$

17-2 如果$f(t)=t$，$0<t<\pi$，且$f(t+n\pi)=f(t)$，则ω_0的值为：

(a) 1 (b) 2 (c) π (d) 2π

17-3 下列哪些函数是偶函数？

(a) $t+t^2$ (b) $t^2\cos t$ (c) e^{t^2}

(d) t^2+t^4 (e) $\sinh t$

17-4 下列哪些函数是奇函数？

(a) $\sin t+\cos t$ (b) $t\sin t$ (c) $t\ln t$

(d) $t^3\cos t$ (e) $\sinh t$

17-5 如果$f(t)=10+8\cos t+4\cos 3t+2\cos 5t+\cdots$，则其直流分量的幅度为：

(a) 10 (b) 8 (c) 4 (d) 2 (e) 0

17-6 如果$f(t)=10+8\cos t+4\cos 3t+2\cos 5t+\cdots$，则其6次谐波的角频率为：

(a) 12 (b) 11 (c) 9 (d) 6 (e) 1

17-7 如图17-14所示函数为半波对称函数？

(a) 正确 (b) 错误

17-8 $|c_n|$与$n\omega_0$的关系曲线称为：

(a) 复频率谱 (b) 复振幅频谱

(c) 复相位频谱

17-9 如果将周期性电压$2+6\sin \omega_0 t$作用在1 Ω电阻器，则与电阻器消耗的功率（单位为瓦特）最接近的整数为：

(a) 5 (b) 8 (c) 20 (d) 22 (e) 40

17-10 可以显示信号频谱的仪器称为：

(a) 示波器 (b) 频谱图

(c) 频谱分析仪 (d) 傅里叶频率计

答案 17-1 a，d；17-2 b；17-3 b，c，d；17-4 d，e；

17-5a；17-6 d；17-7 a；17-8 b；17-9 d；17-10c。

习题

17.2 节

17-1　判定以下各函数是否为周期函数，如果是周期函数，试确定其周期。

(a) $f(t)=\cos\pi t+2\cos 3\pi t+3\cos 5\pi t$

(b) $y(t)=\sin t+4\cos 2\pi t$

(c) $g(t)=\sin 3t\cos 4t$　　(d) $h(t)=\cos^2 t$

(e) $z(t)=4.2\sin(0.4\pi t+10°)+0.8\sin(0.6\pi t+50°)$

(f) $p(t)=10$　　(g) $q(t)=e^{-\pi t}$

17-2　某周期函数的三角傅里叶级数为：

ML $f(t)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\left(\cos t+\frac{1}{9}\cos 3t+\frac{1}{25}\cos 5t+\cdots\right)$

试利用MATLAB合成该周期函数的波形。

17-3　试确定如图17-47所示波形的傅里叶系数a_0、a_n与b_n，并画出其振幅频谱与相位频谱。

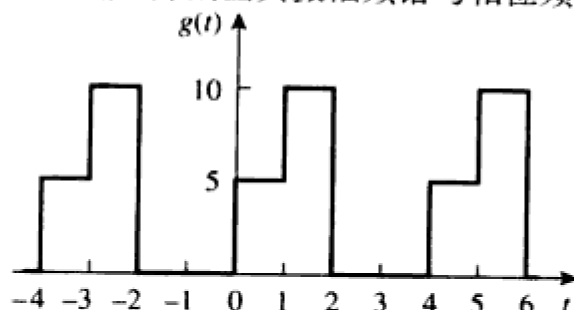


图 17-47　习题 17-3 的波形图

17-4　试求如图17-48所示反向锯齿波的傅里叶级数展开式，并绘制其振幅频谱与相位频谱。

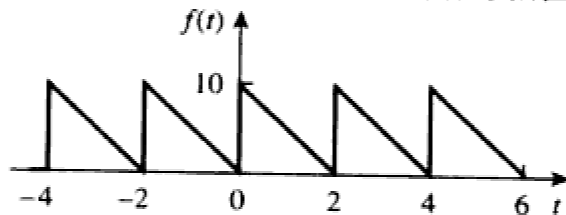


图 17-48　习题 17-4 与习题 17-66 的波形图

17-5　试确定如图17-49所示波形的傅里叶级数展开式。

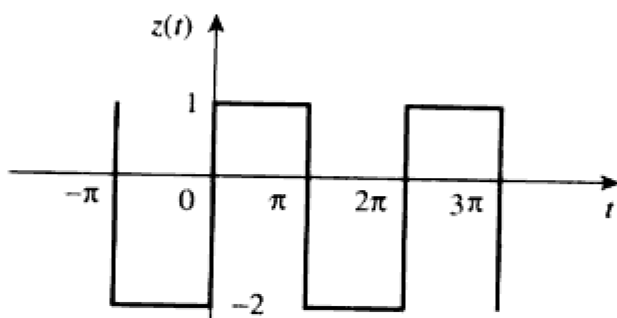


图 17-49　习题 17-5 的波形图

17-6　试确定如下信号的三角傅里叶级数：

$$f(t)=\begin{cases}5, & 0<t<\pi\\ 10, & \pi<t<2\pi\end{cases}\quad \text{同时}\quad f(t+2\pi)=f(t)$$

*17-7　试确定如图17-50所示周期函数的傅里叶级数。

ML

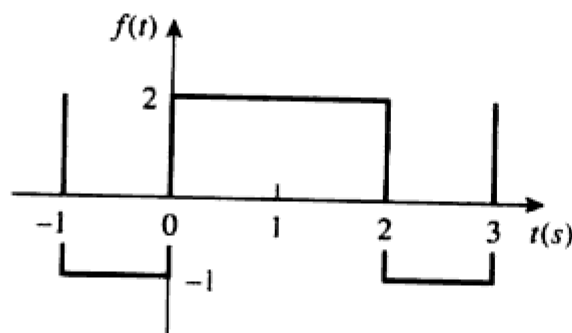


图 17-50　习题 17-7 的波形图

17-8　试确定如图17-51所示函数的指数傅里叶级数。

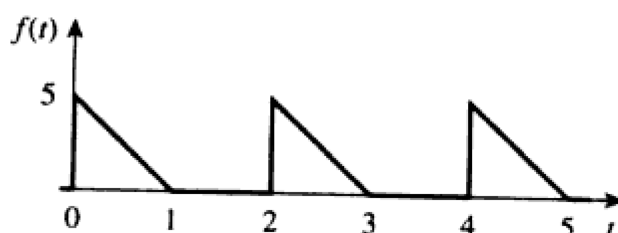


图 17-51　习题 17-8 的波形图

17-9　试确定如图17-52所示整流余弦波前三次谐波的傅里叶系数a_n与b_n。

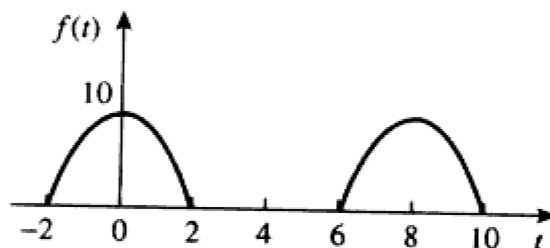


图 17-52　习题 17-9 的波形图

17-10　试确定如图17-53所示波形的指数傅里叶级数。

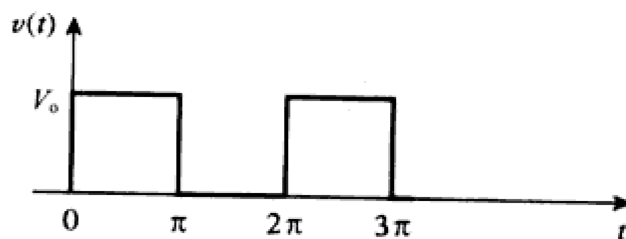


图 17-53　习题 17-10 的波形图

17-11　试确定如图17-54所示信号的指数傅里叶级数。

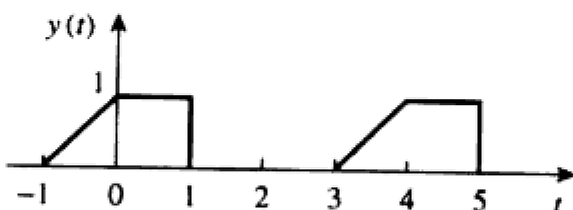


图 17-54　习题 17-11 的波形图

17-12　某电压源为周期性波形，其一个周期内的定义为

$$v(t) = t(2\pi - t)\ \text{V}, \qquad 0 < t < 2\pi$$

试求该电压的傅里叶级数。

17-13　某周期函数在一个周期内的定义为：

$$h(t) = \begin{cases} 10\sin t, & 0 < t < \pi \\ 20\sin(t-\pi), & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

试求$h(t)$的傅里叶级数。

17-14　试求如下傅里叶级数的正交（余弦与正弦）形式：

$$f(t) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n^3+1}\cos\left(2nt + \frac{n\pi}{4}\right)$$

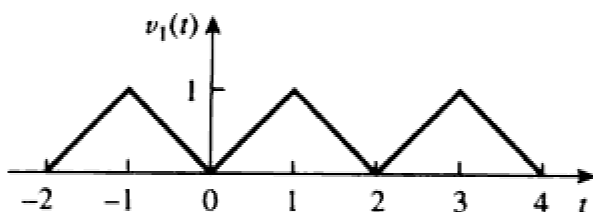
17-15　试将如下傅里叶级数表示为：(a) 余弦与辐角形式；(b) 正弦与辐角形式

$$f(t) = 10 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+1}\cos 10nt + \frac{1}{n^3}\sin 10nt$$

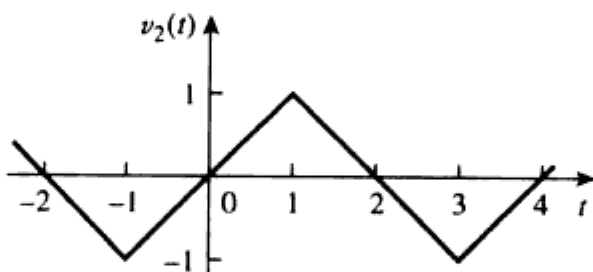
17-16　如图17-55a所示波形的傅里叶级数为：

$$v_1(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos \pi t + \frac{1}{9}\cos 3\pi t + \frac{1}{25}\cos 5\pi t + \cdots\right)\text{V}$$

试确定如图17-55b所示$v_2(t)$的傅里叶级数。



(a)



(b)

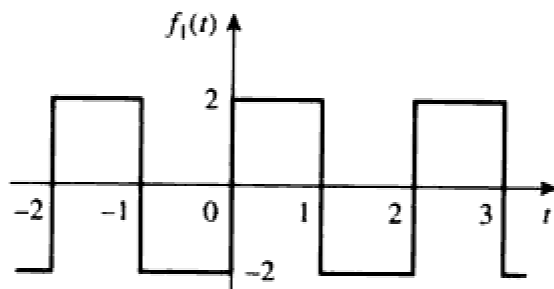
图 17-55　习题 17-16 与习题 17-69 的波形图

17.3 节

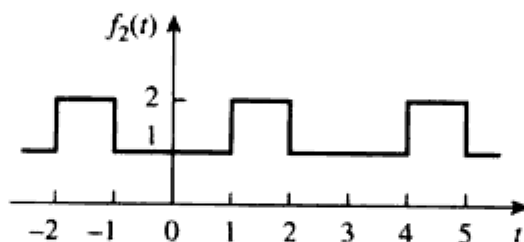
17-17　试确定下列函数的奇偶性。

(a) $1+t$　(b) t^2-1　(c) $\cos n\pi t \sin n\pi t$　(d) $\sin^2 \pi t$　(e) e^{-t}

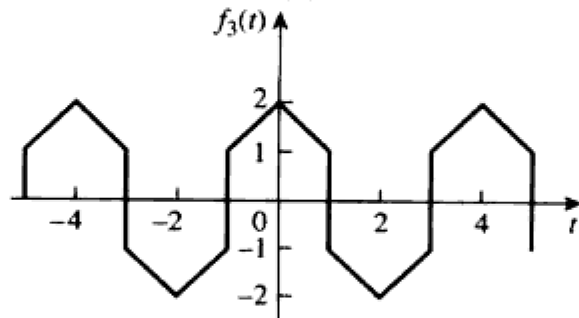
17-18　试确定如图17-56所示函数的基波频率，并指出其对称类型。



(a)



(b)



(c)

图 17-56　习题 17-18 与习题 17-63 的波形图

17-19　试确定如图17-57所示周期波形图的傅里叶级数。

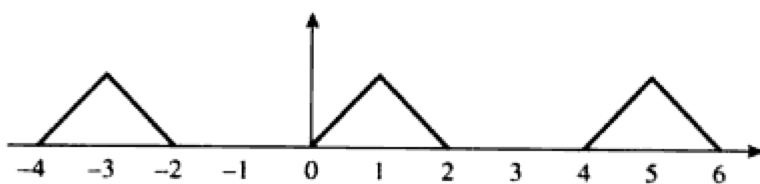


图 17-57　习题 17-19 的波形图

17-20 ML　试确定如图17-58所示信号的傅里叶级数，并利用前三个非零谐波计算$t=2$时的$f(t)$。

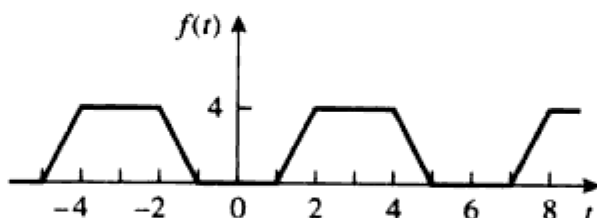


图 17-58　习题 17-20 与习题 17-67 的波形图

17-21 试确定如图17-59所示信号的三角傅里叶级数。

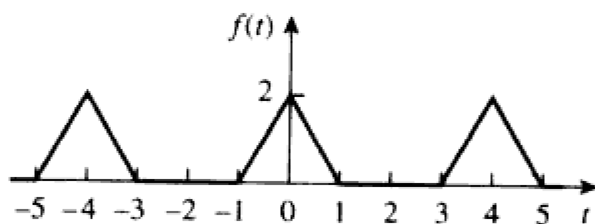


图 17-59 习题 17-21 的波形图

17-22 试计算如图17-60所示函数的傅里叶系数。

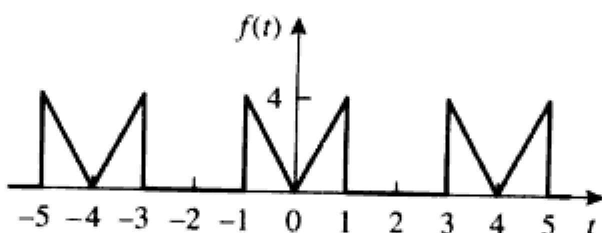


图17-60 习题17-22的波形图

17-23 试求如图17-61所示函数的傅里叶级数。

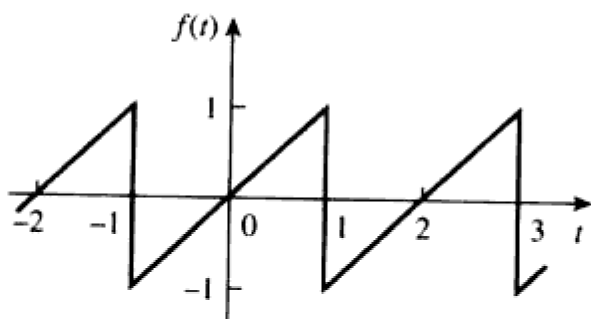


图 17-61 习题 17-23 的波形图

17-24 对于如图17-62所示的周期函数：

(a) 试求三角傅里叶级数中的系数a_2与b_2；

(b) 试计算$\omega_n = 10$ rad/s的$f(t)$分量的振幅与相位；

(c) 试利用前4个非零项估算$f(\pi/2)$；

(d) 试证明：

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$$

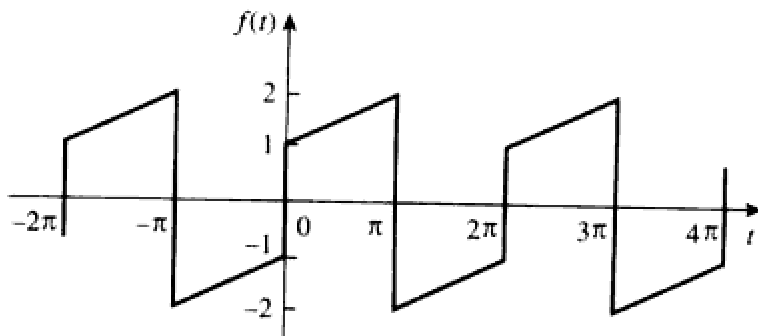


图 17-62 习题 17-24 与习题 17-60 的波形图

17-25 试确定如图17-63所示函数的傅里叶级数表达式。

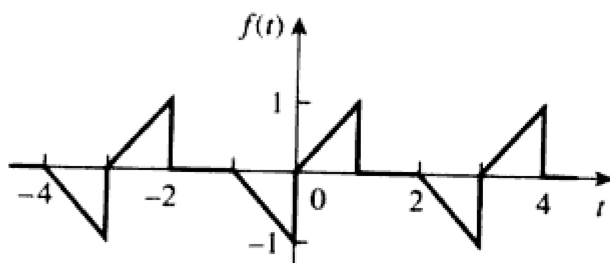


图 17-63 习题 17-25 的波形图

17-26 试确定如图17-64所示信号的傅里叶级数表达式。

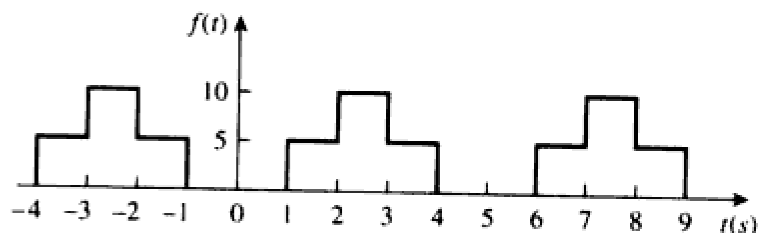


图 17-64 习题 17-26 的波形图

17-27 对于如图17-65所示波形：

(a) 试确定该波形的对称类型；

(b) 试计算a_3与b_3；

(c) 试利用前5个非零谐波确定均方根值。

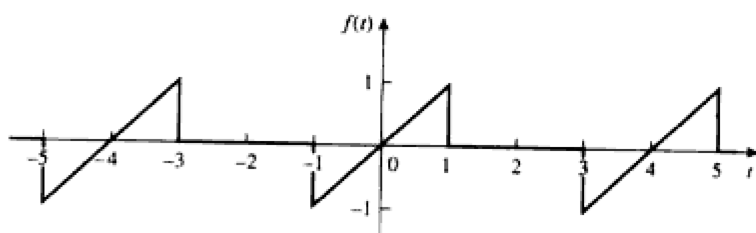


图 17-65 习题 17-27 的波形图

17-28 试确定如图17-66所示电压波形的三角傅里叶级数。

ML

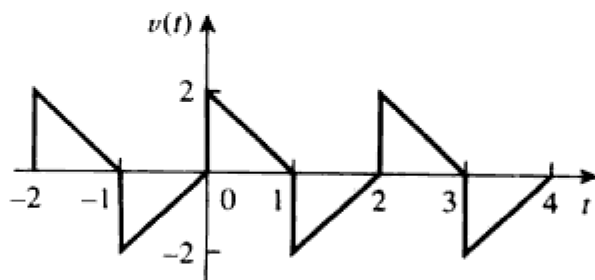


图 17-66 习题 17-28 的波形图

17-29 试确定如图17-67所示锯齿函数的傅里叶级数展开式。

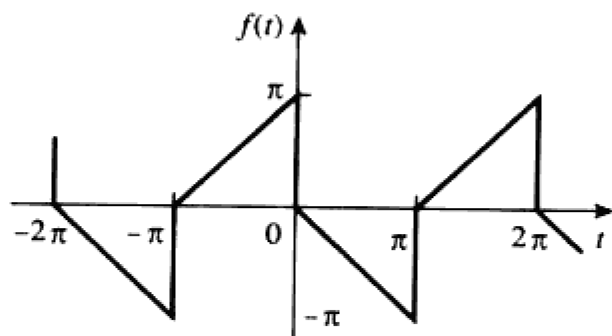


图 17-67 习题 17-29 的波形图

17-30 (a) 如果$f(t)$为偶函数，试证明：

$$c_n = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt$$

(b) 如果$f(t)$为奇函数，试证明：

$$c_n = -\frac{j2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt$$

17-31 设a_n与b_n为$f(t)$傅里叶级数的系数，ω_o为基波频率，$f(t)$进行时间尺度变换得到$h(t)=f(\alpha t)$，试利用$f(t)$的a_n、b_n与ω_o表示$h(t)$的a_n'、b_n'与ω_o'。

17.4 节

17-32 已知

$$i_s(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 3nt \text{ A}$$

试求如图17-68所示电路中的$i(t)$。

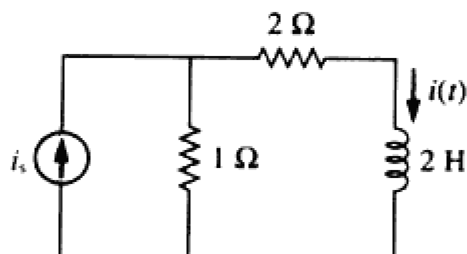


图 17-68 习题 17-32 的电路原理图

17-33 在如图17-69所示电路中，$v_s(t)$的傅里叶级数为：

$$v_s(t) = 3 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\pi t)$$

试求$v_o(t)$。

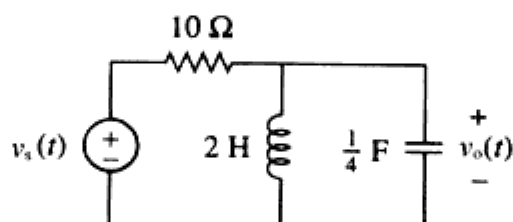


图 17-69 习题 17-33 的电路原理图

17-34 如果

$$v(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{n^2}\cos\left(nt + \frac{n\pi}{4}\right) \text{ V}$$

试确定如图17-70所示网络中的$v_o(t)$。

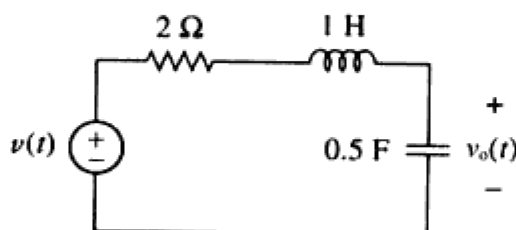


图 17-70 习题 17-34 的电路原理图

17-35 如果如图17-71所示电路中的v_s与如图17-56b所示函数$f_2(t)$相同，试确定$v_o(t)$的直流分量与前三个非零谐波分量。

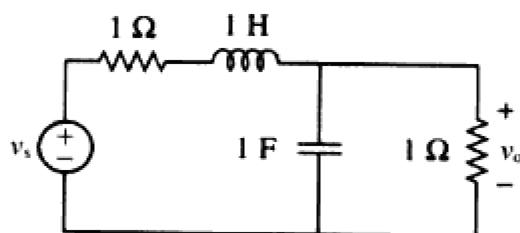
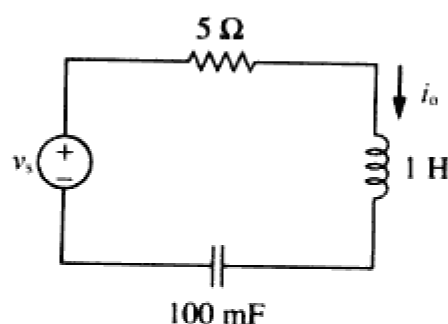


图 17-71 习题 17-35 的电路原理图

*17-36 试求如图17-72a所示电路中的响应i_o，其中$v_s(t)$如图17-72b所示。



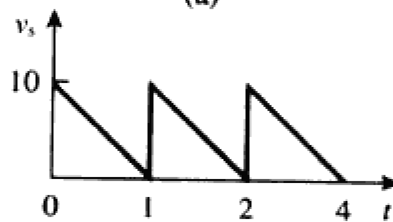
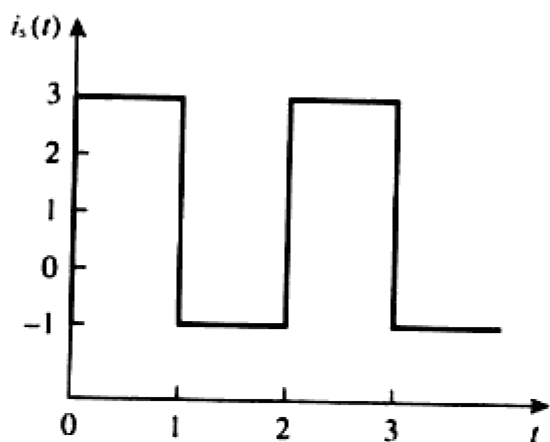
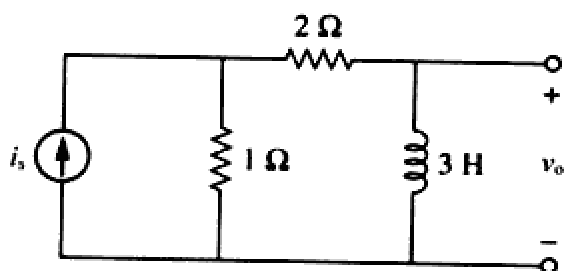


图 17-72 习题 17-36 的电路原理图与波形图

17-37 如果如图17-73a所示的周期性电流波形作用于如图17-73b所示电路上，试求v_o。



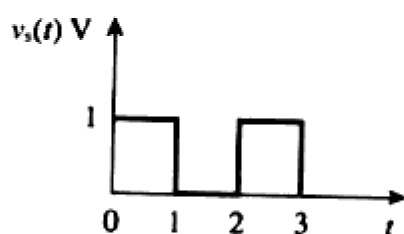
(a)



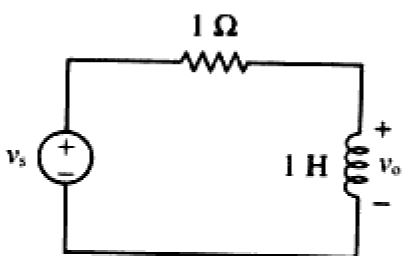
(b)

图 17-73 习题 17-37 的波形图与电路原理图

17-38 如果如图17-74a所示的方波作用于如图17-74b所示电路上，试求$v_o(t)$的傅里叶级数。



(a)



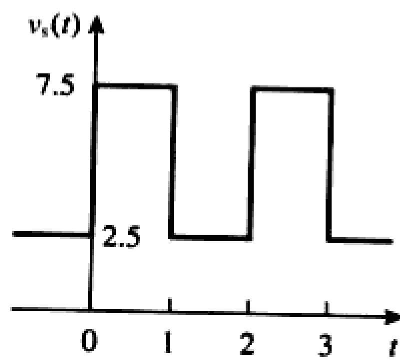
(b)

图 17-74 习题 17-38 的波形图与电路原理图

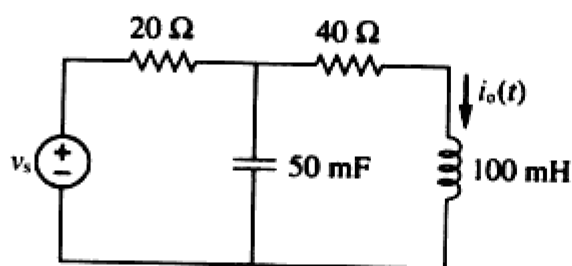
17-39 如果如图17-75a所示的周期性电压波形作用于如图17-75b所示电路上，试求$i_o(t)$。

*17-40 如图17-76a所示信号作用于如图17-76b所示电路上，试求$v_o(t)$。

17-41 如图17-77a所示的全波整流正弦电压作用于如图17-77b所示的低通滤波器，试确定该滤波器的输出电压$v_o(t)$。

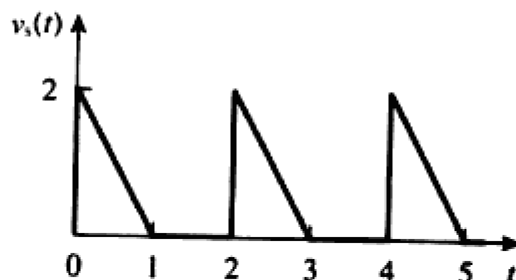


(a)

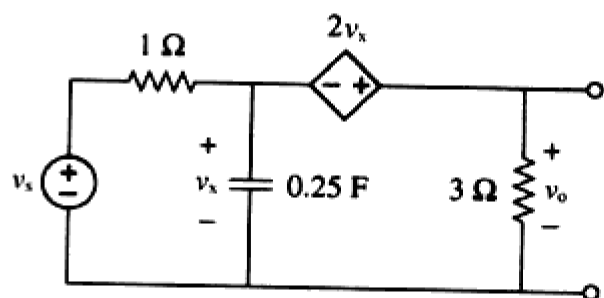


(b)

图 17-75 习题 17-39 的波形图与电路原理图

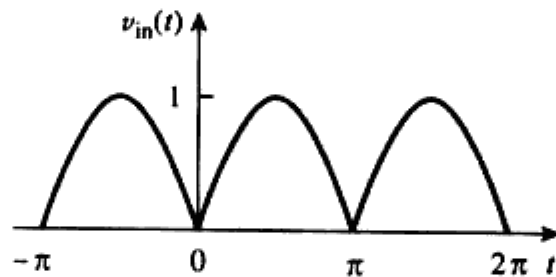


(a)



(b)

图 17-76 习题 17-40 的波形图与电路原理图



(a)

图 17-77 习题 17-41 的波形图与电路原理图

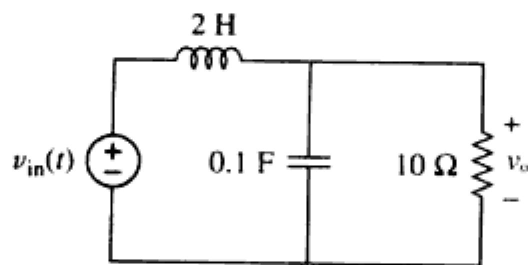
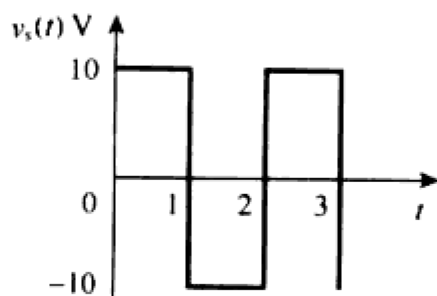


图 17-77 （续）

17-42 如图17-78a所示的方波作用于如图17-78b所示电路，试求$v_o(t)$的傅里叶级数。



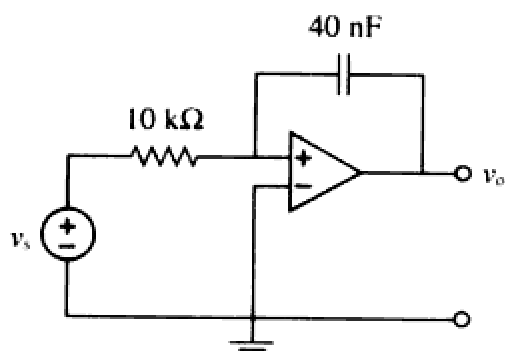


图 17-78 习题 17-42 的波形图与电路原理图

17.5 节

17-43 某电路两端的电压为：

$$v(t) = 30 + 20\cos(60\pi t + 45°) + 10\cos(60\pi t - 45°)\ \text{V}$$

如果流入高电位端的电流为：

$$i(t) = 6 + 4\cos(60\pi t + 10°) - 2\cos(120\pi t - 60°)\ \text{A}$$

试求：

（a）电压的均方根值；

（b）电流的均方根值；

（c）该电路吸收的平均功率。

17-44 某元件两端的电压与流过该元件的电流分别为：

$$v(t) = 30\cos(t + 25°) + 10\cos(2t + 35°) + 4\cos(3t - 10°)\ \text{V}$$

$$i(t) = 2\cos t + \cos(2t - 10°)\ \text{A}$$

（a）试求传递给该元件的平均功率；

（b）画出功率谱。

17-45 某RLC串联电路中，$R = 10\ \Omega$，$L = 2$ mH，$C = 40\ \mu$F，如果作用于该电路的电压为：

$$v(t) = 100\cos 1000t + 50\cos 2000t + 25\cos 3000t\ \text{V}$$

试确定电流的有效值以及电路吸收的平均功率。

17-46 ML 试利用MATLAB画出如下正弦信号，其中$0 < t < 5$：

（a）$5\cos 3t - 2\cos(3t - \pi/3)$；

（b）$8\sin(\pi t + \pi/4) + 10\cos(\pi t - \pi/8)$。

17-47 如图17-79所示的周期性电流波形作用于某2 kΩ电阻器两端，试求直流分量消耗的平均功率占总平均功率的百分比。

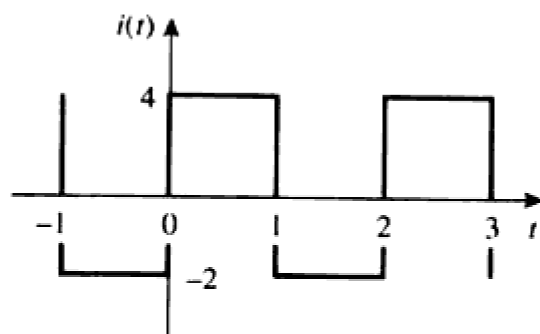


图 17-79 习题 17-47 的波形图

17-48 对于如图17-80所示电路，

$$i(t) = 20 + 16\cos(10t + 45°) + 12\cos(20t - 60°)\ \text{mA}$$

（a）试求$v(t)$；

（b）试计算电阻器消耗的平均功率。

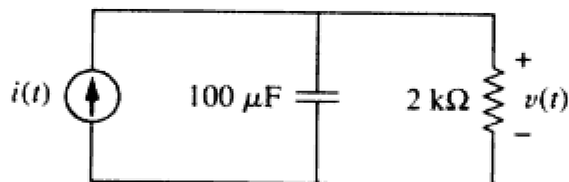


图 17-80 习题 17-48 的电路原理图

17-49 （a）试求习题17-5中周期性波形的均方根值；

（b）试利用习题17-5中傅里叶级数的前5个谐波项，确定该信号的有效值；

（c）试计算$z(t)$的估计均方根值的百分比误差，其中，

$$\%误差 = \left(\frac{估计}{精确} - 1\right) \times 100$$

17.6 节

17-50 如果$f(t) = t$，$-1 < t < 1$，并且对于所有整数n，

$f(t+2n)=f(t)$，试确定该信号的指数傅里叶级数。

17-51 已知周期函数：

$$f(t)=t^2,\ 0<t<T$$

试确定该信号在$T=2$时的指数傅里叶级数。

17-52 如果$f(t)=e^t$，$-\pi<t<\pi$，并且对于所有整数n，$f(t+2n\pi)=f(t)$，试计算该信号的复数傅里叶级数。

17-53 如果$f(t)=e^{-t}$，$0<t<1$，并且对于所有整数n，$f(t+n)=f(t)$，试求该信号的复数傅里叶级数。

17-54 试求如图17-81所示函数的指数傅里叶级数。

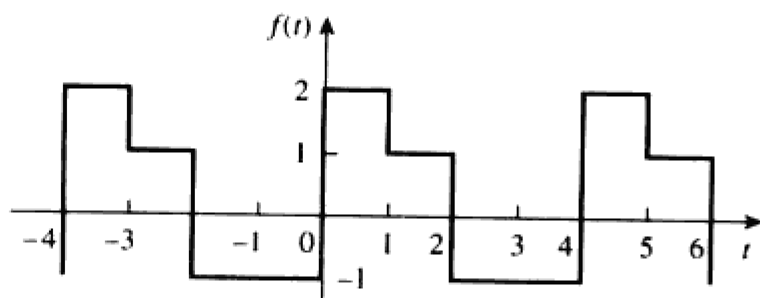


图 17-81 习题 17-54 的波形图

17-55 试确定如图17-82所示半波整流正弦电流的指数傅里叶级数展开式。

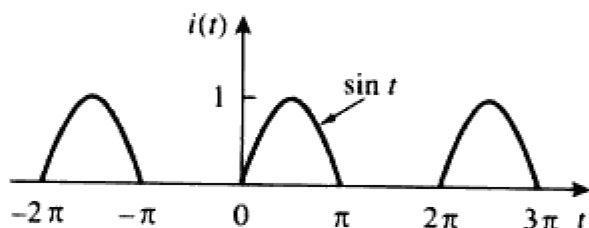


图 17-82 习题 17-55 的波形图

17-56 某周期函数的三角傅里叶级数表示为：

$$f(t)=10+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}\cos n\pi t+\frac{n}{n^2+1}\sin n\pi t\right)$$

试求$f(t)$的指数傅里叶级数表达式。

17-57 某函数的三角傅里叶级数表达式中的系数为：

$$b_n=0,\quad a_n=\frac{6}{n^3-2},\quad n=0,1,2\ldots$$

如果$\omega_n=50n$，试求该函数的指数傅里叶级数。

17-58 某函数的三角函数傅里叶级数表达式中的系数为：

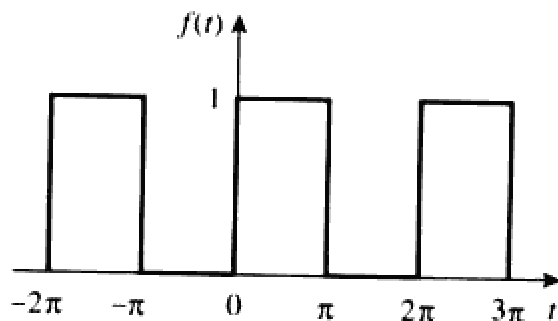
$$a_n=\frac{\pi}{4},\quad b_n=\frac{(-1)^n}{n},\quad a_n=\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}$$

试求该函数的指数傅里叶级数，取$T=2\pi$。

17-59 如图17-83a所示函数的复数傅里叶级数为：

$$f(t)=\frac{1}{2}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{je^{-j(2n+1)t}}{(2n+1)\pi}$$

试求如图17-83b所示函数$h(t)$的复数傅里叶级数。



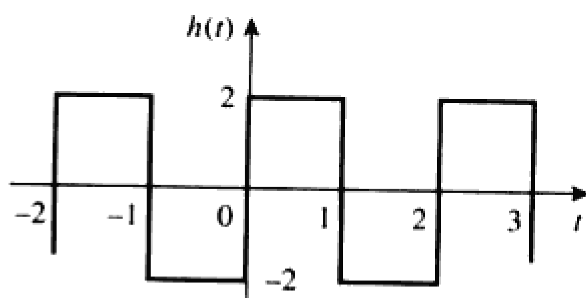


图 17-83 习题 17-59 的波形图

17-60 试确定如图17-62所示信号的复数傅里叶系数。

17-61 某函数傅里叶级数的频谱示于如图17-84所示。(a) 试确定其三角傅里叶级数；(b) 试计算该函数的均方根值。

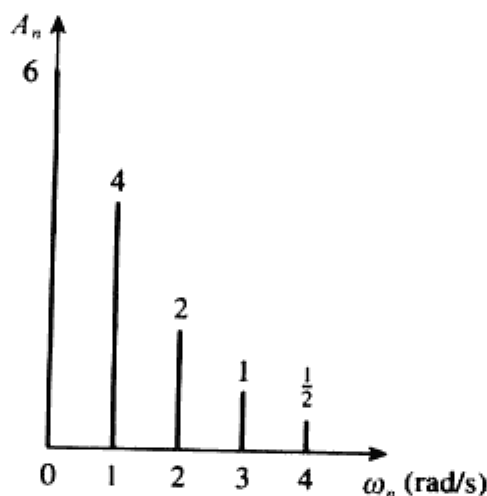


图 17-84 习题 17-61 的频谱图

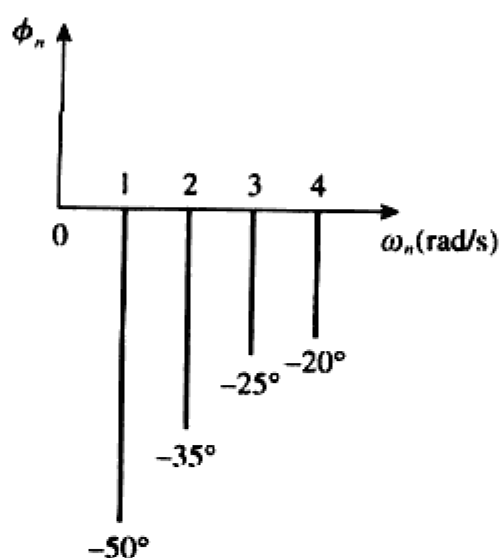
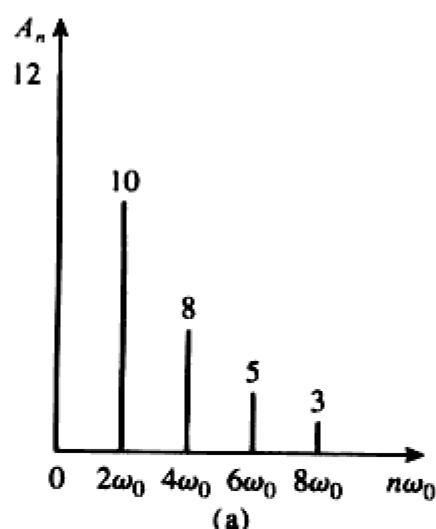


图 17-84 (续)

17-62 某截断傅里叶级数的振幅频谱与相位频谱如图17-85所示。

(a) 试求该周期信号的振幅—相位表达式，参见式(17-10)；

(b) 该电压是t的奇函数还是偶函数？



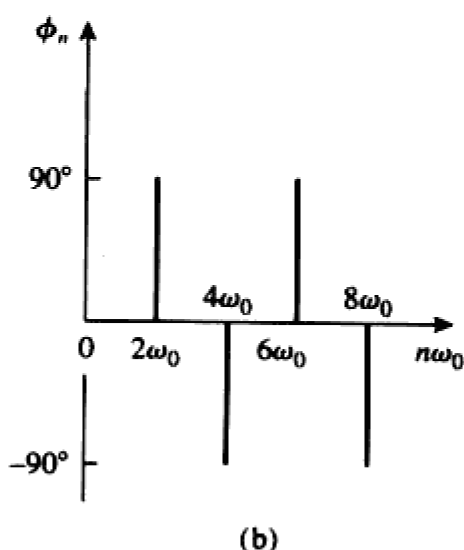


图 17-85 习题 17-62 的频谱图

17-63 试画出如图17-56b所示信号$f_2(t)$的振幅频谱，考虑前5项即可。

17-64 已知：

$$v(t)=\frac{10}{\pi}\left[1+\frac{1}{2}\cos 2\pi t+\frac{2}{3}\cos 4\pi t-\frac{2}{15}\cos 6\pi t+\cdots\right]$$

试画出$v(t)$的振幅频谱与相位频谱。

17-65 已知：

$$f(t)=\sum_{\substack{n=1\\ n=\text{奇数}}}^{\infty}\left(\frac{20}{n^2\pi^2}\cos 2nt-\frac{3}{n\pi}\sin 2nt\right)$$

画出该函数振幅频谱与相位频谱的前5项。

17.7 节



17-66 试利用PSpice确定如图17-48所示波形的傅里叶系数。

17-67 试利用PSpice计算如图17-58所示信号的傅里叶系数。

17-68 试利用PSpice确定习题17-7中信号的傅里叶分量。

17-69 试利用PSpice确定如图17-55a所示波形的傅里叶系数。

17-70 试利用PSpice重做习题17-40。

17-71 试利用PSpice求解习题17-39。

17.8 节

17-72 某医疗设备显示的信号可以用如图17-86所示波形近似，试求该信号的傅里叶级数表达式。

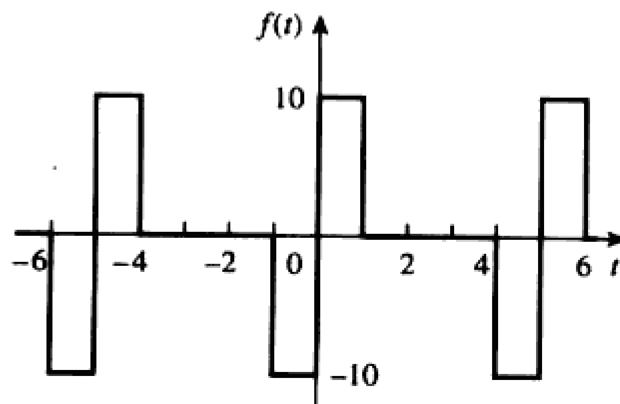


图 17-86 习题 17-72 的波形图

17-73 频谱分析仪指示某信号仅由三个分量组成：640 kHz时为2 V，644 kHz时为1 V，636 kHz时为1 V，如果将该信号作用于10 Ω电阻器上，该电阻器吸收的平均功率为多少？

17-74 某带限周期电流的傅里叶级数展开式中仅包含三个频率分量：直流、50 Hz与100 Hz，该电流可以表示为：

$$i(t)=4+6\sin 100\pi t+8\cos 100\pi t -3\sin 200\pi t-4\cos 200\pi t \text{ A}$$

(a) 试写出的$i(t)$振幅－相位表达式；

(b) 如果$i(t)$流过2 Ω电阻器，该电阻器消耗的平均功率为多少瓦？

17-75 试设计一个电阻$R=2$ kΩ的低通滤波器，该滤波器的输入为A＝1 V、T＝10 ms、τ＝1 ms的周期性矩形脉冲串（参见表17-3），选择C使得输出中的直流分量为基波分量的50倍。

e2d

17-76 某周期信号为：

$$v_s(t)=\begin{cases}10\,V, & 0<t<1\\ 0\,V, & 1<t<2\end{cases}$$

将其作用于如图17-87所示的高通滤波器，试确定使得输出信号$v_o(t)$的平均功率至少为输入信号平均功率的70%的R的值。

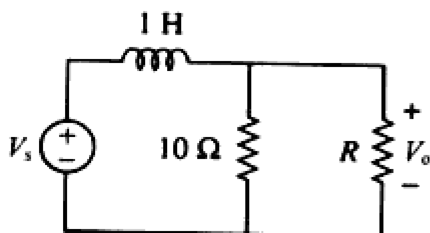


图 17-87　习题 17-76 的电路原理图

综合题

17-77 某器件两端的电压为：

$$v(t)=-2+10\cos 4t+8\cos 6t+6\cos 8t -5\sin 4t-3\sin 6t-\sin 8t \text{ V}$$

试求：(a) $v(t)$的周期；(b) $v(t)$的平均值；(c) $v(t)$的有效值。

17-78 某带限周期电压的傅里叶级数表达式中仅包含三个谐波，各谐波的均方根值为：基波40 V，三次谐波20 V，五次谐波10 V。

(a) 如果将该电压作用于5 Ω电阻器两端，试求该电阻器消耗的平均功率；

(b) 如果将一个直流分量加到该周期电压上，测量到的功率消耗增加了5%，试确定所增加的直流分量的值。

17-79 试编写程序，计算表17-3中$A=10$，$T=2$的方波的傅里叶系数（计算到10次谐波即可）。

17-80 试编写程序，计算如图17-82所示半波整流正弦电流的指数傅里叶级数，计算到10次谐波即可。

17-81 考虑表17-3中的全波整流正弦电流，假定该电流流过一个1 Ω电阻器。

(a) 试求该电阻器吸收的平均功率；

(b) 试确定c_n，$n=1, 2, 3, 4$；

(c) 直流分量的功率占总功率的百分比为多少？

(d) 二次谐波分量（$n=2$）的功率占总功率的百分比为多少？

17-82 某带限电压信号的复数傅里叶系数如下表所示，试计算该信号提供给4 Ω电阻器的平均功率。

$n\omega_0$	$\lvert c_n\rvert$	θ_n
0	10.0	0°
ω	8.5	15°
2ω	4.2	30°
3ω	2.1	45°
4ω	0.5	60°
5ω	0.2	75°

第18章　傅里叶变换

规划就是要做好今天的事，从而使明天更加美好，因为未来属于今天做出艰难决定的人。

——商业周刊

提高技能，拓展职业生涯

通信系统领域的职业生涯

通信系统利用电路分析的基本原理。通信系统的功能是将信息从信源（发射机）通过信道（传播媒质）传送到信宿（接收器）。通信工程师设计各种系统就是为了实现信息的发送与接收，所传递的信息可以是声音、数据或视频等。



我们生活在信息时代，新闻、天气、体育、购物、金融、商品目录以及其他各种信息都是通过通信系统提供给我们的。通信系统的一些典型实例包括：电话网络、蜂窝移动电话、无线电广播、有线电视、卫星电视、传真以及雷达等。另外，警察、消防部门、航空以及各种商业部门使用的移动无线电系统也是典型的通信系统。

通信领域是电子工程中发展最快的领域之一。近年来，通信与计算机技术的结合催生了大量数字数据通信网的出现，例如局域网、城域网、宽带综合服务数字网等。因特网（即信息高速公路）的出现使得教育界、商界等人士可以通过个人计算机向世界各地发送电子邮件，接入远程数据库、传递各种文件资料等。因特网对整个世界形成了巨大的冲击波，奇迹般地改变着人们经商、交际以及获取信息的方式，并且这种趋势还将持续下去。

通信工程师可以设计高质量的信息服务系统，包括产生、发送、接收信息信号的硬件装置。通信工程师可以在许多通信产业与部门中任职。越来越多的政府机构、学术部门和商业流通领域都需要更快、更准确的信息传递，为了满足这样的需求，通信工程师也呈现出高需求态势。因此，未来的世界是一个通信的世界，每位电子工程师都必须做好相应的准备。

18.1　引言

利用傅里叶级数可以将周期函数表示为正弦信号之和的形式，同时可以确定信号的频谱。本章介绍的傅里叶变换将频谱的概念扩展到非周期函数中。傅里叶变换假定非周期函数是周期为无穷大的周期函数，因此，傅里叶变换是一种与周期函数的傅里叶级数表达式类似的非周期函数的积分表达式。

傅里叶变换是一种与拉普拉斯变换类似的积分变换（integral transform），它将函数从时域变换到频域。傅里叶变换在通信系统、数字信号处理以及拉普拉斯变换不适用的场合都非常有用。拉普拉斯变换只能处理具有初始条件、在$t>0$时有输入的电路，但傅里叶变换既可以处理在$t>0$时有输入的电路，又可以处理在$t<0$时有输入的电路。

本章首先以傅里叶级数作为过渡，来定义傅里叶变换，接着给出傅里叶变换的一些性质之后，

将傅里叶变换应用于电路分析中，讨论帕塞瓦尔定理并对拉普拉斯变换与傅里叶变换进行比较。最后说明傅里叶变换在振幅调制与信号抽样中的应用。

18.2 傅里叶变换的定义

由前一章的学习可知，只要非正弦周期函数满足狄里赫利条件，就可以用傅里叶级数表示。如果函数不是周期性的，会出现什么情况呢？实际上，很多重要的非周期函数——例如单位阶跃函数或指数函数等都不能用傅里叶级数表示。通过本章的学习，我们会看到，即使函数不是周期性的，也可以通过傅里叶变换实现从时域到频域的变换。

假定要确定如图18-1a所示非周期函数$p(t)$的傅里叶变换。考虑如图18-1b所示的周期函数$f(t)$，该函数在一个周期内的形状与$p(t)$相同。如果令$f(t)$的周期$T \to \infty$，则相邻的脉冲均被移至无穷远处，所以仅剩下单个宽度为τ（即如图18-1a的非周期函数）的脉冲，因此，函数$f(t)$不再是周期信号。换言之，$f(t)=p(t)$，$T \to \infty$。下面讨论$A=10$，$\tau=0.2$（参见17.6节）时$f(t)$的频谱。图18-2给出了周期T的增大对频谱的影响。首先，可以看出，频谱的总体形状保持不变，而且包络第一个零点对应的频率同样保持不变。然而，频谱的振幅与相邻分量之间的间隔均随T的增大而减小，同时谐波数量随之增多。因此，在信号频率范围内，谐波振幅之和几乎保持不变。由于在一个频带范围内，各分量的总"强度"，即能量是保持不变的，所以，谐波振幅随着T的增大必须减小。由于$f=1/T$，当T增大时，f或ω减小，从而使得离散频谱最终成为连续频谱。

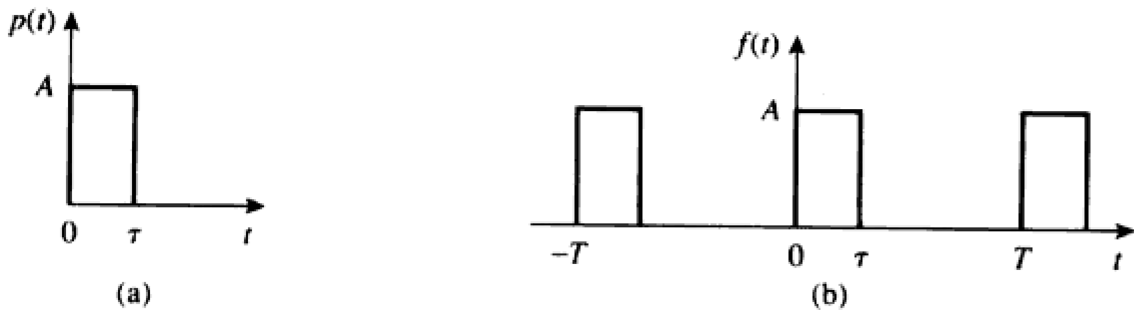


图 18-1 (a) 非周期函数 (b) T 增至无穷大，使得$f(t)$成为图 (a) 所示的非周期函数

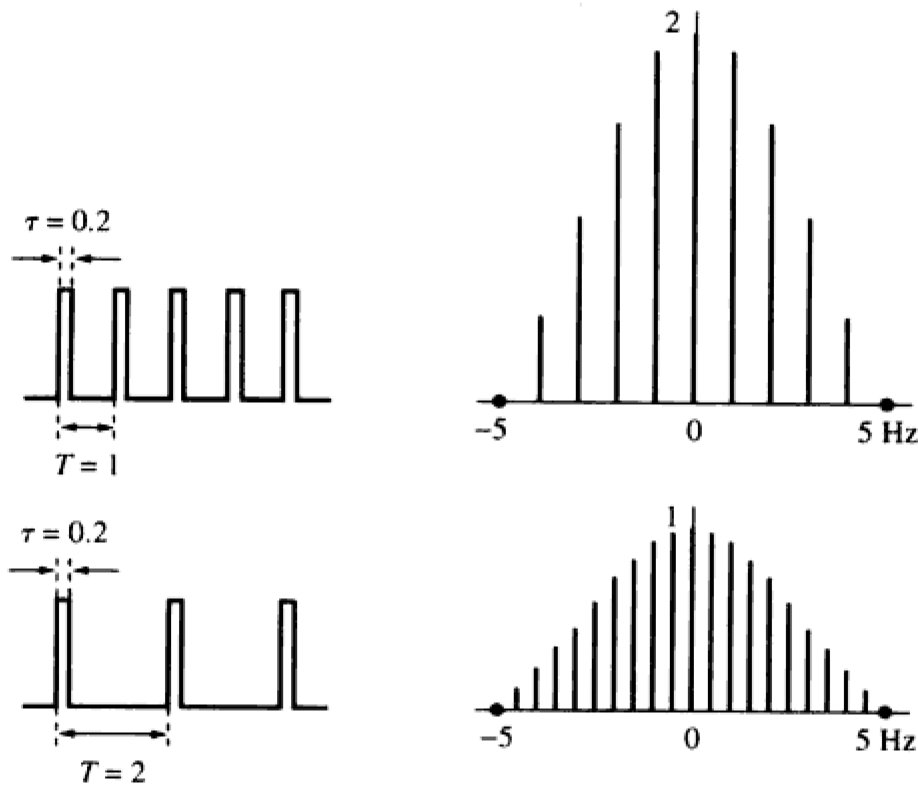


图 18-2 增大 T 对如图 18-1 所示周期脉冲序列频谱的影响

注：摘自L. Balmer的 *Signals and Systems: An Introduction*，伦敦: Prentice-Hall, 1991, p.229。

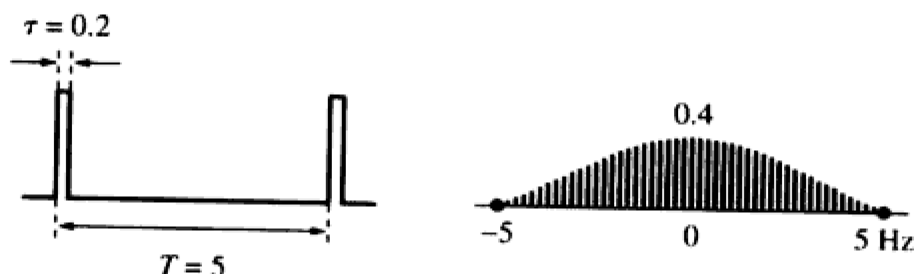


图 18-2 (续)

为了进一步理解非周期函数和与它对应的周期函数之间的关系，考虑式（17-58）所示的指数傅里叶级数，即：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \tag{18-1}$$

其中，

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \tag{18-2}$$

基波频率为：

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T} \tag{18-3}$$

相邻谐波频率之间的间隔为：

$$\Delta\omega=(n+1)\omega_0-n\omega_0=\omega_0=\frac{2\pi}{T} \tag{18-4}$$

将式(18-2)代入式(18-1)，得到：

$$\begin{aligned} f(t)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\right]e^{jn\omega_0 t}\\ &=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\right]e^{jn\omega_0 t}\\ &=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\right]\Delta\omega e^{jn\omega_0 t}\end{aligned} \tag{18-5}$$

令$T\to\infty$，求和变为积分，增量间隔$\Delta\omega$变为微分增量$d\omega$，离散谐波频率$n\omega_0$变为连续频率ω。因此，当$T\to\infty$时：

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}&\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\\ \Delta\omega&\Rightarrow d\omega\\ n\omega_0&\Rightarrow\omega\end{aligned} \tag{18-6}$$

于是，式(18-5)变为：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\right]e^{j\omega t}d\omega \tag{18-7}$$

上式中方括号内的项称为$f(t)$的傅里叶变换，表示为$F(\omega)$。于是，

$$\boxed{F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt} \tag{18-8}$$

其中，$\mathcal{F}$为傅里叶变换算子。显然，由式（18-8）可知：

傅里叶变换是指函数$f(t)$从时域到频域的积分变换。

有些学者采用$F(\mathrm{j}\omega)$取代$F(\omega)$来表示傅里叶变换。

一般而言，$F(\omega)$为复函数，其振幅称为振幅频谱，其相位称为相位频谱，从而$F(\omega)$称为频谱。

式(18-7)可以用$F(\omega)$来表示，得到傅里叶逆变换（inverse Fourier transform）为：

$$\boxed{f(t)=\mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega} \tag{18-9}$$

函数$f(t)$及其傅里叶变换$F(\omega)$构成傅里叶变换对：

$$f(t)\quad\Leftrightarrow\quad F(\omega) \tag{18-10}$$

由其中一者可以推出另一者。

如果式(18-8)的傅里叶积分收敛，则其傅里叶变换$F(\omega)$存在。$f(t)$存在傅里叶变换的充分但非必要条件是函数$f(t)$绝对可积：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|\mathrm{d}t<\infty \tag{18-11}$$

例如，单位斜升函数$t\,u(t)$就不存在傅里叶变换，因为该函数不满足上述条件。

为了避免傅里叶变换中出现复数运算，有时候在运算时，可以暂时利用s取代$\mathrm{j}\omega$，最后再用$\mathrm{j}\omega$取代结果中的s。

例题18-1 试求下列函数的傅里叶变换：(a) $\delta(t-t_0)$；(b) $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$；(c) $\cos\omega_0 t$。

解 (a) 该函数为冲激函数，其傅里叶变换为：

$$F(\omega)=\mathcal{F}\left[\delta(t-t_0)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0} \tag{18-1-1}$$

上述计算中应用了式(7-32)给出的冲激函数的筛选性质。对于$t_0=0$的特殊情况，有：

$$\mathcal{F}\left[\delta(t)\right]=1 \tag{18-1-2}$$

表明冲激函数频谱的振幅是一个常数，也就是说，在冲激函数的频谱中，所有频率的振幅均相同。

(b) 可以利用两种方法求$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$的傅里叶变换。如果令

$$F(\omega_0)=\delta(\omega-\omega_0)$$

则可以利用式(18-9)求出$f(t)$，即：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

利用冲激函数的筛选性质，可以得到：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$$

由于$F(\omega)$与$f(t)$构成傅里叶变换对，所以$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$与$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$也是一对傅里叶变换对，即：

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\right]=2\pi\delta(\omega-\omega_0) \tag{18-1-3}$$

另外，由式(18-1-2)可知：

$$\delta(t)=\mathcal{F}^{-1}[1]$$

利用式(18-9)所示的傅里叶逆变换公式，可以得到：

$$\delta(t)=\mathcal{F}^{-1}[1]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

即：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=2\pi\delta(t) \tag{18-1-4}$$

交换变量t与ω，得到：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega) \tag{18-1-5}$$

利用上述结果，可以得到已知函数的傅里叶变换为：

$$\mathcal{F}\left[e^{j\omega_0 t}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_0-\omega)} dt = 2\pi\delta(\omega_0 - \omega)$$

由于冲激函数为偶函数，即$\delta(\omega_0 - \omega) = \delta(\omega - \omega_0)$，因此，

$$\mathcal{F}\left[e^{j\omega_0 t}\right] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \tag{18-1-6}$$

改变ω_0的符号，则有：

$$\mathcal{F}\left[e^{-j\omega_0 t}\right] = 2\pi\delta(\omega + \omega_0) \tag{18-1-7}$$

同样，令$\omega_0 = 0$，可以得到：

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega) \tag{18-1-8}$$

（c）利用式(18-1-6)与式(18-1-7)的结果，可得：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\cos\omega_0 t\right] &= \mathcal{F}\left[\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[e^{j\omega_0 t}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[e^{-j\omega_0 t}\right] \\ &= \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)\end{aligned} \tag{18-1-9}$$

该余弦信号的傅里叶变换如图18-3所示。

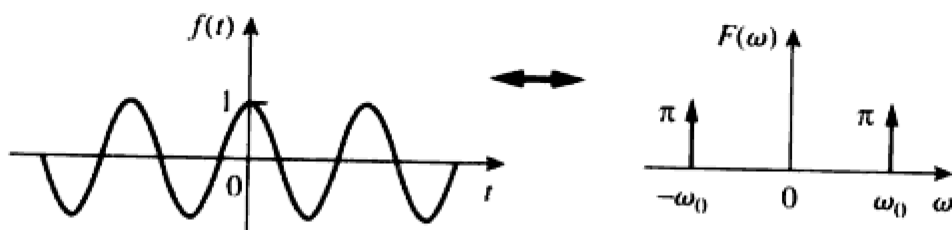


图 18-3 $f(t) = \cos\omega_0 t$ 的傅里叶变换

练习题18-1 试确定下列函数的傅里叶变换：（a）门函数$g(t) = u(t-1) - u(t-2)$；（b）$4\delta(t+2)$；（c）$\sin\omega_0 t$。

答 （a）$(e^{-j\omega} - e^{-j2\omega})/j\omega$；（b）$4\,e^{j2\omega}$；（c）$j\pi[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]$。

例题18-2 试推导如图18-4所示的宽度为τ，高度为A的单矩形脉冲的傅里叶变换。

解

$$\begin{aligned}F(\omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\omega t} dt = -\frac{A}{j\omega} e^{-j\omega t}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} \\ &= \frac{2A}{\omega}\left(\frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{2j}\right) \\ &= A\tau\frac{\sin\omega\tau/2}{\omega\tau/2} = A\tau\,\text{sinc}\frac{\omega\tau}{2}\end{aligned}$$

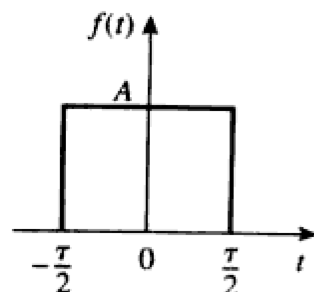


图 18-4 例题 18-2 的矩形脉冲

如果令$A = 0$，$\tau = 2$，如图17-27所示（参见17.6节），则有：

$$F(\omega) = 20\ \text{sinc}\ \omega$$

其振幅频谱如图18-5所示，将图18-5与图17-28所示的矩形脉冲频谱进行比较，可以看出，图17-28所

示的频谱为离散的，其包络与单矩形脉冲的傅里叶变换形状相同。

练习题18-2 试确定如图18-6所示函数的傅里叶变换。

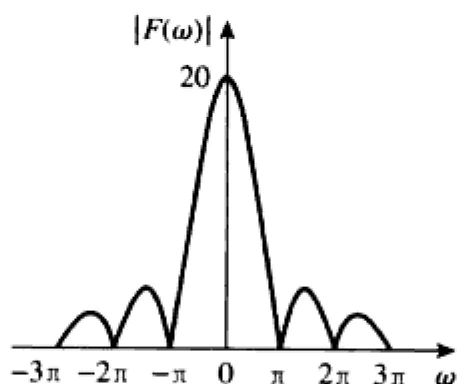


图 18-5 图 18-4 所示矩形脉冲的振幅频谱

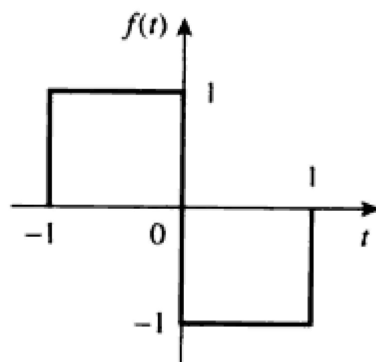


图 18-6 练习题 18-2 的波形图

答 $\dfrac{2(\cos\omega-1)}{\mathrm{j}\omega}$。

例题18-3 试确定如图18-7所示“开启（switched-on）”指数函数的傅里叶变换。

解 由图18-7可知：

$$f(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-at}, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

因此，

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(a+\mathrm{j}\omega)t}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{-1}{a+\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-(a+\mathrm{j}\omega)t}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{1}{a+\mathrm{j}\omega}\end{aligned}$$

练习题18-3 试确定如图18-8所示“闭合（switched-off）”指数函数的傅里叶变换。

答 $\dfrac{1}{a-\mathrm{j}\omega}$。

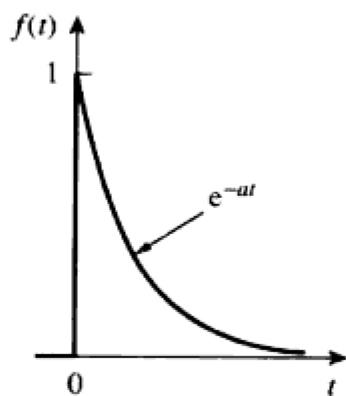


图18-7 例题18-3的波形图

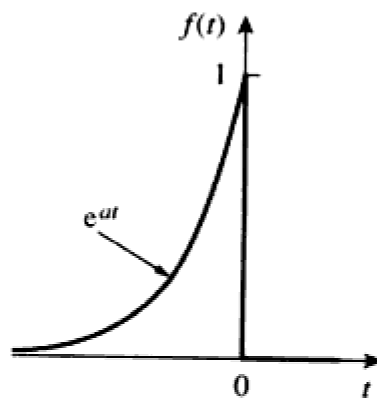


图18-8 练习题18-3的波形图

18.3 傅里叶变换的性质

本节介绍傅里叶变换的性质，利用这些性质可以由简单函数的傅里叶变换求出复杂函数的傅里叶变换。对于每个性质，都包含定义、推导以及举例说明等内容。

线性性质

如果$F_1(\omega)$与$F_2(\omega)$分别为$f_1(t)$与$f_2(t)$的傅里叶变换，则：

$$\boxed{\mathcal{F}\left[a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)\right]=a_1 F_1(\omega)+a_2 F_2(\omega)} \tag{18-12}$$

其中，a_1、a_2为常数。线性性质表明，若干函数线性组合的傅里叶变换等于各函数傅里叶变换的线性组合。式(18-12)所示线性性质的证明简单而直观，由定义可得：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)\right]&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty}a_1 f_1(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{\infty}a_2 f_2(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&=a_1 F_1(\omega)+a_2 F_2(\omega)\end{aligned} \tag{18-13}$$

例如，$\sin\omega_0 t=\dfrac{1}{2\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\right)$，利用线性性质，可以得到：

$$\begin{aligned}F\left[\sin\omega_0 t\right]&=\frac{1}{2\mathrm{j}}\left[\mathcal{F}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t})-\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t})\right]\\&=\frac{\pi}{\mathrm{j}}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]\\&=\mathrm{j}\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right]\end{aligned} \tag{18-14}$$

时间尺度性质

如果$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$，则有：

$$\boxed{\mathcal{F}\left[f(at)\right]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)} \tag{18-15}$$

其中，a为常数。式(18-15)表明，时域的扩展（$|a|>1$）对应于频域的压缩，或者反过来，时域的压缩（$|a|<1$）意味着频域的扩展。时间尺度性质可以证明如下：

$$\mathcal{F}\left[f(at)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}f(at)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \tag{18-16}$$

令$x=at$，则$\mathrm{d}x=a\mathrm{d}t$，于是：

$$\mathcal{F}\left[f(at)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega x/a}\frac{\mathrm{d}x}{a}=\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{18-17}$$

例如，对于例题18-2中的矩形脉冲$p(t)$，有：

$$\mathcal{F}\left[p(t)\right]=A\tau\,\mathrm{sinc}\frac{\omega\tau}{2} \tag{18-18a}$$

利用式(18-15)，可得：

$$\mathcal{F}\left[p(2t)\right]=\frac{A\tau}{2}\mathrm{sinc}\frac{\omega\tau}{4} \tag{18-18b}$$

画出$p(t)$与$p(2t)$，以及它们傅里叶变换的图形将有助于读者理解该性质。由于：

$$p(t)=\begin{cases}A, & -\dfrac{\tau}{2}<t<\dfrac{\tau}{2}\\0, & \text{其他}\end{cases} \tag{18-19a}$$

利用$2t$取代t，得到：

$$p(2t)=\begin{cases}A, & -\dfrac{\tau}{2}<2t<\dfrac{\tau}{2}\\0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}A, & -\dfrac{\tau}{4}<t<\dfrac{\tau}{4}\\0, & \text{其他}\end{cases} \tag{18-19b}$$

上式表明$p(2t)$在时间上被压缩了，如图18-9b所示。为了画出式(18-18)所示的$p(t)$与$p(2t)$ 的傅里叶变换，需利用sinc函数在自变量为$n\pi$时，函数值等于零的特性，其中n为整数。因此，对于式（18-18a）所示的$p(t)$的傅里叶变换而言，$\omega\tau/2=2\pi f\tau/2=n\pi \rightarrow f=n/\tau$，对于式(18-18b)所示的$p(2t)$的傅里叶变换而言，$\omega\tau/4=2\pi f\tau/4=n\pi \rightarrow f=2n/\tau$。这两个傅里叶变换如图18-9所示，表明时间的压缩对应于频率的扩展。从直觉上讲，也应该是这样的，因为在时间上压缩信号，意味着信号变化更快，从而导致更高频率分量的出现。

时移性质

如果$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$，则有：

$$\boxed{\mathcal{F}\left[f(t-t_0)\right]=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}F(\omega)} \tag{18-20}$$

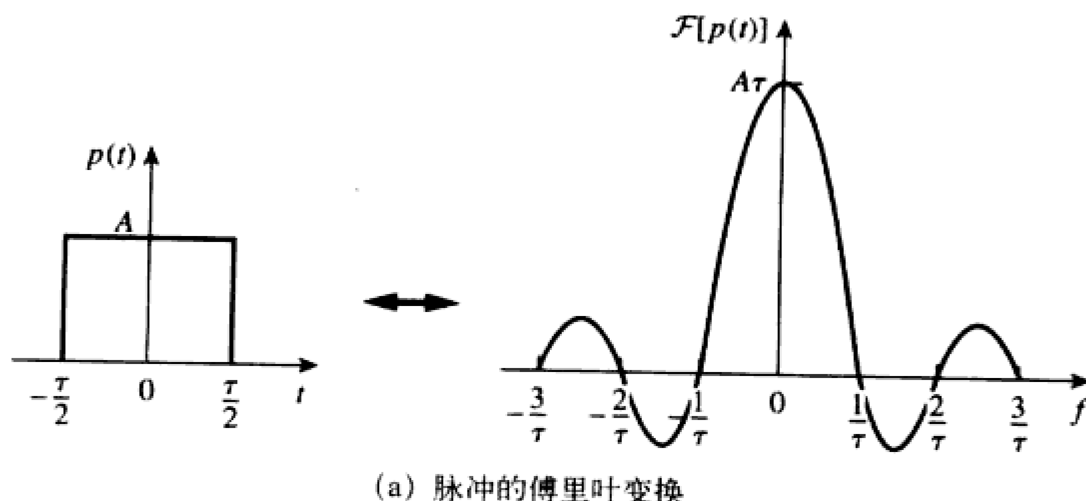
也就是说，时域中的时间延迟对应于频域中的相移。时移性质可以推导如下：

$$\mathcal{F}\left[f(t-t_0)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-t_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \tag{18-21}$$

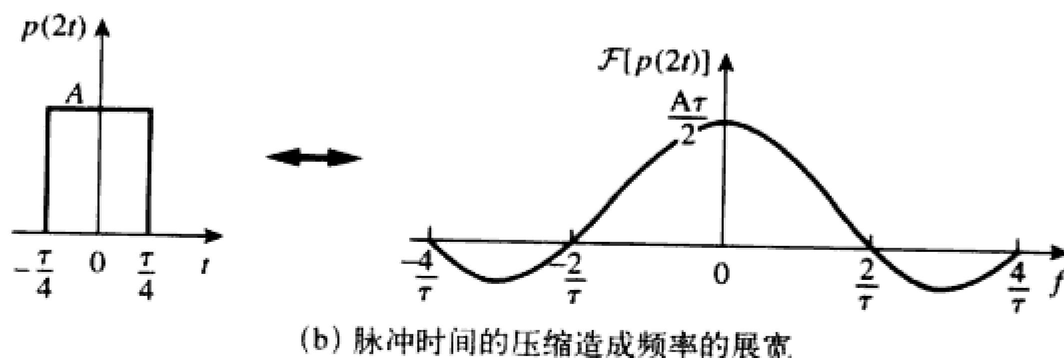
令$x=t-t_0$，则有$\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$，$t=x+t_0$，于是：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[f(t-t_0)\right]&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(x+t_0)}\mathrm{d}t\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega x}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}F(\omega)\end{aligned} \tag{18-22}$$

同理，$\mathcal{F}[f(t+t_0)]=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_0}F(\omega)$



(a) 脉冲的傅里叶变换



(b) 脉冲时间的压缩造成频率的展宽

图 18-9 时间尺度变换的效果

例如，由例题18-3得到：

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-at}u(t)\right]=\frac{1}{a+\mathrm{j}\omega} \tag{18-23}$$

于是，$f(t)=\mathrm{e}^{-(t-2)}u(t-2)$的傅里叶变换为：

$$F(\omega)=\mathcal{F}\left[e^{-(t-2)}u(t-2)\right]=\frac{e^{-j2\omega}}{1+j\omega} \tag{18-24}$$

频移性质（振幅调制）

如果$F(\omega)=\mathcal{F}\ [f(t)]$，则有：

$$\boxed{\mathcal{F}\left[f(t)e^{j\omega_0 t}\right]=F(\omega-\omega_0)} \tag{18-25}$$

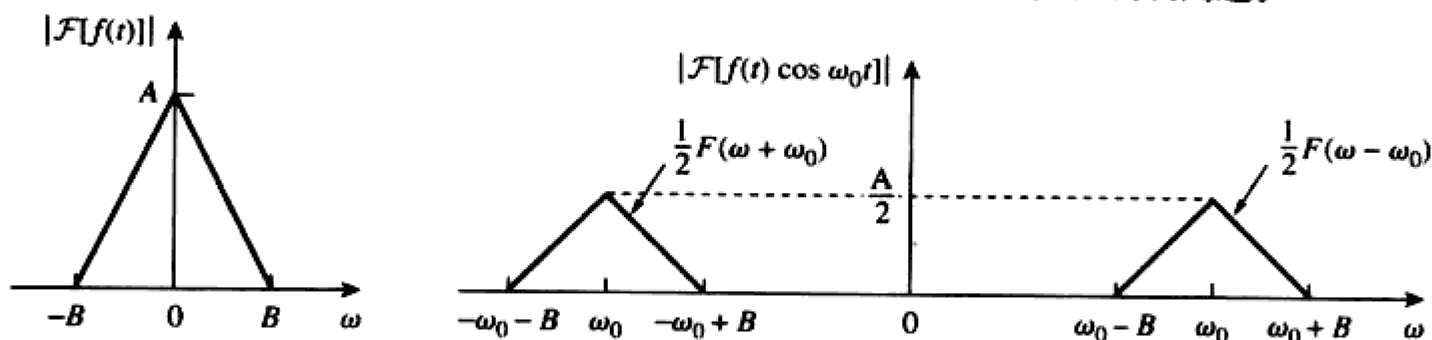
上式表明，频域中的频率平移对应于时间函数增加一个相移。由定义，可得：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[f(t)e^{j\omega_0 t}\right]&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt=F(\omega-\omega_0)\end{aligned} \tag{18-26}$$

例如：$\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}(\ e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t})$，利用式（18-25）的性质，有：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[f(t)\cos\omega_0 t\right]&=\frac{1}{2}\mathcal{F}\left[f(t)e^{-j\omega_0 t}\right]+\frac{1}{2}\mathcal{F}\left[f(t)e^{-j\omega_0 t}\right]\\&=\frac{1}{2}F(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}F(\omega+\omega_0)\end{aligned} \tag{18-27}$$

这是信号的频率分量发生平移的调制中的一个重要结论。例如，如果$f(t)$的振幅频谱如图18-10a所示，则$f(t)\cos\omega_0 t$的振幅频谱如图18-10b所示。18.7.1节将更加详细地讨论振幅调制问题。



（a）信号$f(t)$的振幅频谱　　（b）调制信号$f(t)\cos\omega_0 t$的振幅频谱

图　18-10

时域微分性质

如果$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$，则有：

$$\boxed{\mathcal{F}\left[f'(t)\right]=j\omega F(\omega)} \tag{18-28}$$

换言之，$f(t)$导数的傅里叶变换等于$f(t)$的傅里叶变换与$j\omega$的乘积。根据定义有：

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{18-29}$$

上式两边关于t求导数，得到：

$$f'(t)=\frac{j\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega=j\omega\mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)\right]$$

即：

$$\mathcal{F}\left[f'(t)\right]=j\omega F(\omega) \tag{18-30}$$

重复应用式(18-30)，可以得到：

$$\boxed{\mathcal{F}\left[f^{(n)}(t)\right]=(j\omega)^n F(\omega)} \tag{18-31}$$

例如，如果$f(t)=\mathrm{e}^{-at}$，则有：

$$f'(t)=-a\mathrm{e}^{-at}u(t)+\mathrm{e}^{-at}\delta(t)=-af(t)+\mathrm{e}^{-at}\delta(t) \tag{18-32}$$

上式取傅里叶变换，得到：

$$\mathrm{j}\omega F(\omega)=-aF(\omega)+1 \Rightarrow F(\omega)=\frac{1}{a+\mathrm{j}\omega} \tag{18-33}$$

该结果与例题18.3的结果相同。

时域积分性质

如果$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$，则有：

$$\boxed{\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{F(\omega)}{\mathrm{j}\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)} \tag{18-34}$$

也就是说，$f(t)$积分的傅里叶变换等于$f(t)$的傅里叶变换除以$\mathrm{j}\omega$再加上一个反映直流分量$F(0)$的冲激项。读者可能会问，“在求$f(t)$积分的傅里叶变换时，怎么知道$f(t)$的积分限是$[-\infty, t]$，而不是$[-\infty, \infty]$”。如果在区间$[-\infty, \infty]$求积分，则其结果不再是时间t的函数，而总是一个常数，当积分限为$[-\infty, t]$时，才能得到函数从过去到时刻t的积分，从而得到与t有关的结果，这样也才能取其傅里叶变换。

如果在式（18-8）中取$\omega=0$，则有：

$$F(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t \tag{18-35}$$

表明，当$f(t)$在所有时间的积分等于零时，直流分量就是零。式（18-34）所示时域积分性质的证明在稍后介绍卷积性质时给出。

例如，已知$\mathcal{F}[\delta(t)]=1$，冲激函数的积分为单位阶跃函数[参见式（7-39a）]，利用式（18-34）给出的性质，可以得到单位阶跃函数的傅里叶变换为：

$$\mathcal{F}[u(t)]=\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t}\delta(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\,\delta(\omega) \tag{18-36}$$

翻转性质

如果$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$，则有：

$$\boxed{\mathcal{F}[f(-t)]=F(-\omega)=F^*(\omega)} \tag{18-37}$$

其中，星号表示复共轭。该性质表明，$f(t)$关于时间轴的翻转对应于$F(\omega)$关于频率轴的翻转。翻转性质可以看作是式(18-15)所示时间尺度性质在$a=-1$时的一种特例。

例如，$1=u(t)+u(-t)$，因此，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[1]&=\mathcal{F}[(u)t]+\mathcal{F}[u(-t)]\\&=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)\\&-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(-\omega)\\&=2\pi\,\delta(\omega)\end{aligned}$$

对偶性

该性质可以表述为：如果$f(t)$的傅里叶变换为$F(\omega)$，那么$F(t)$的傅里叶变换为$2\pi f(-\omega)$。即：

$$\boxed{\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)\Rightarrow\mathcal{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega)} \tag{18-38}$$

上式表明傅里叶变换具有对称性质。对偶性的推导过程如下：

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

即：

$$2\pi f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{18-39}$$

利用$-t$取代t，可以得到：

$$2\pi f(-t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-j\omega t}d\omega$$

将t与ω互换后得到：

$$2\pi f(-\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{-j\omega t}dt=\mathcal{F}\left[F(t)\right] \tag{18-40}$$

由于$f(t)$是图18-7与图18-8两个信号之和，所以$F(\omega)$是例题18-3与练习题18-3两个结果之和。

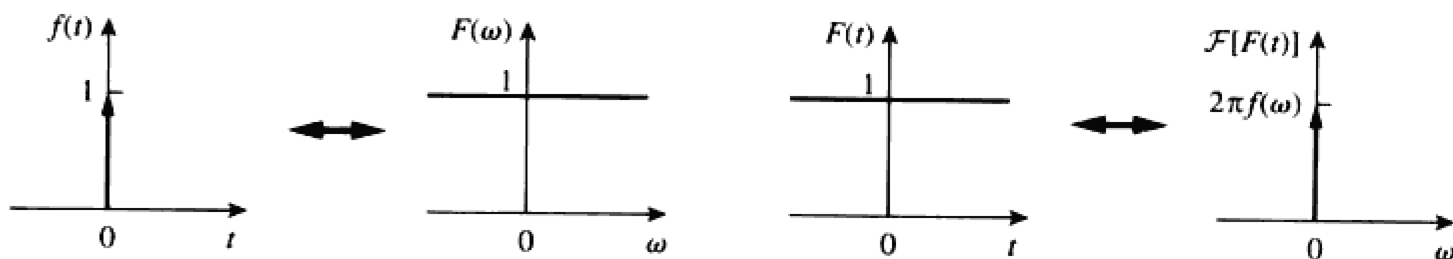
例如，如果$f(t)=e^{-|t|}$，则：

$$F(\omega)=\frac{2}{\omega^2+1} \tag{18-41}$$

根据对偶性质，可以得到$F(t)=2/(t^2+1)$的傅里叶变换为：

$$2\pi f(\omega)=2\pi e^{-|\omega|} \tag{18-42}$$

图18-11给出了对偶性的另一个例子。如果$f(t)=\delta(t)$，则$F(\omega)=1$，如图18-11a所示，于是，$F(t)=1$的傅里叶变换为$2\pi f(\omega)=2\pi\delta(\omega)$，如图18-11b所示。



(a) 冲激函数的傅里叶变换　　(b) 单位直流电平的傅里叶变换

图 18-11　傅里叶变换对偶性质的典型实例

卷积性质

由第15章的学习可知，如果$x(t)$是冲激响应函数为$h(t)$的电路的输入激励，那么该电路的输出响应$y(t)$可以由如下卷积积分确定：

$$y(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda \tag{18-43}$$

如果$X(\omega)$、$H(\omega)$与$Y(\omega)$分别为$x(t)$、$h(t)$与$y(t)$的傅里叶变换，那么，

$$\boxed{Y(\omega)=\mathcal{F}\left[h(t)*x(t)\right]=H(\omega)X(\omega)} \tag{18-44}$$

上式表明，时域中的卷积对应于频域中的乘积。

为了推导卷积性质，对式(18-43)两边取傅里叶变换，可以得到：

$$Y(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda\right]e^{-j\omega t}dt \tag{18-45}$$

改变积分次序，并提出与t无关的$h(\lambda)$项，有：

$$Y(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda)\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\lambda)e^{-j\omega t}dt\right]d\lambda$$

对于上式方括号内的积分，令$\tau=t-\lambda$，则有$t=\tau+\lambda$，$dt=d\tau$，于是，

$$\begin{aligned}Y(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda)\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-j\omega(\tau+\lambda)}d\tau\right]d\lambda\\&=\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda)e^{-j\omega\lambda}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=H(\omega)X(\omega)\end{aligned} \tag{18-46}$$

上述傅里叶变换的卷积性质扩展了前一章介绍的基于傅里叶级数的相量分析方法。

式(18-46)所示的重要关系是在线性系统分析中采用傅里叶变换的关键原因。

为了说明卷积性质，假定$h(t)$与$x(t)$为相同的矩形脉冲，如图18-12a与图18-12b所示。由例题18-2与图18-5已知，矩形脉冲的傅里叶变换为sinc函数，如图18-12c与图18-12d所示。按照卷积性质，两个sinc函数的乘积应该对应于时域中两个矩形脉冲的卷积。因此，如图18-12e所示的矩形脉冲的卷积与如图18-12f所示的sinc函数的乘积构成为一个傅里叶变换对。

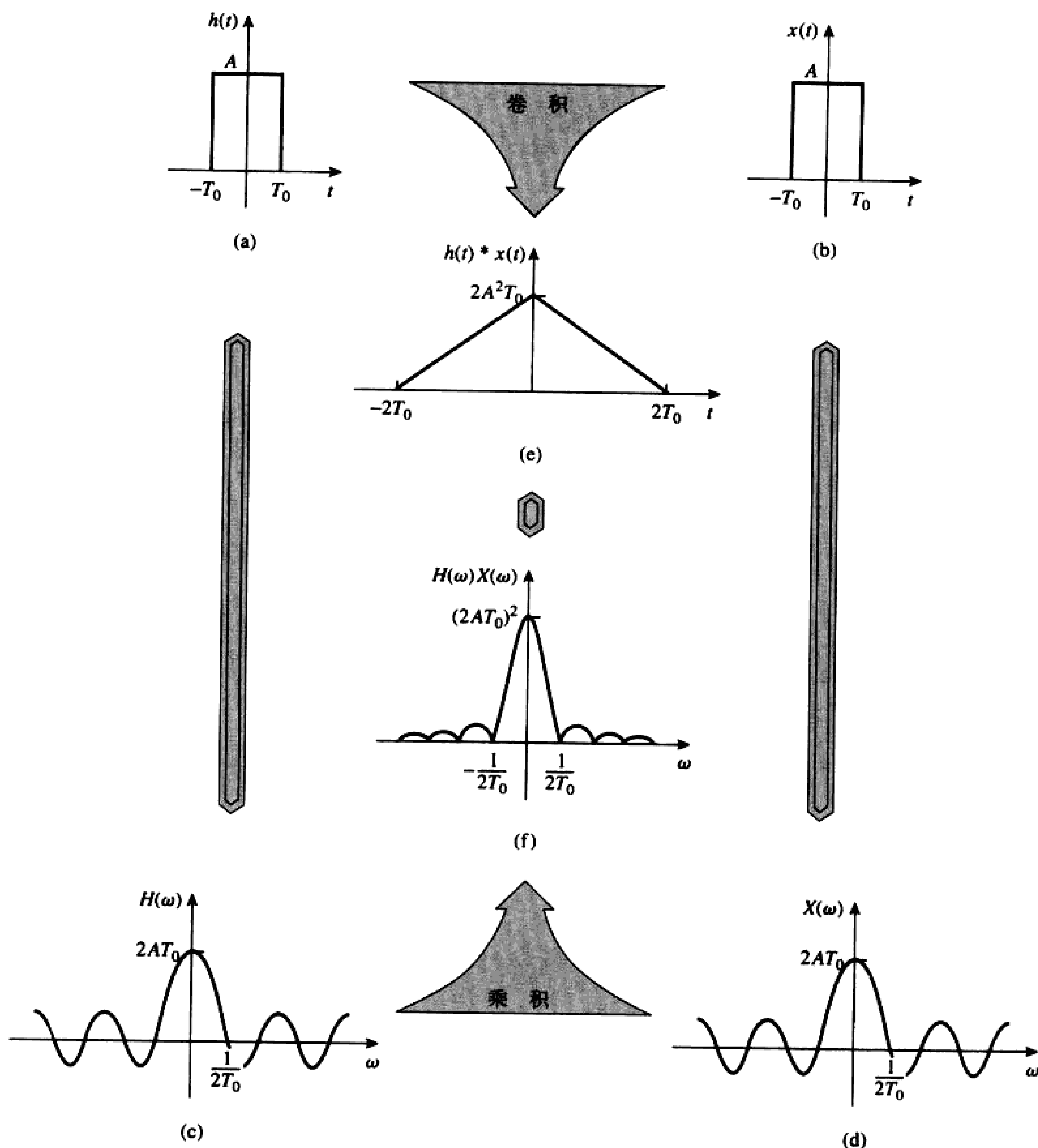


图 18-12 卷积性质的图解说明

注：摘自E.O.Brigham的*The Fast Fourier Transform* [Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1974], p.60。

根据对偶性质，如果时域中的卷积对应于频域中的乘积，那么时域中的乘积就应该对应于频域中的卷积。事实正是如此，因为如果$f(t)=f_1(t)f_2(t)$，则有：

$$F(\omega)=\mathcal{F}\left[f_1(t)f_2(t)\right]=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega) \tag{18-47}$$

即：

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\lambda)F_2(\omega-\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{18-48}$$

此即频域中的卷积。式(18-48)的证明可以很容易地由式(18-38)所示的对偶性质得到。

下面推导式(18-34)所示的傅里叶变换的时域积分性质。如果利用单位阶跃函数$u(t)$与$f(t)$分别取代式(18-43)中的$x(t)$与$h(t)$，则有：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)u(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda=f(t)*u(t) \tag{18-49}$$

按照阶跃函数的定义：

$$u(t-\lambda)=\begin{cases}1, & t-\lambda>0\\ 0, & t-\lambda>0\end{cases}$$

可以写为：

$$u(t-\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda<t\\ 0, & \lambda>t\end{cases}$$

将上式代入式(18-49)，使得积分限从$[-\infty,\ \infty]$变为$[-\infty,\ t]$。因此，式(18-49)变为：

$$\int_{-\infty}^{t}f(\lambda)\mathrm{d}\lambda=u(t)*f(t)$$

两边取傅里叶变换，可以得到：

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right]=U(\omega)F(\omega) \tag{18-50}$$

但由式(18-36)可知，单位阶跃函数的傅里叶变换为：

$$U(\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)$$

代入式(18-50)可以得到：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right]&=\left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)\right)F(\omega)\\&=\frac{F(\omega)}{\mathrm{j}\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)\end{aligned} \tag{18-51}$$

此即式(18-34)的时间积分性质。由式(18-51)可以看出，由于$\delta(\omega)$仅在$\omega=0$处非零，所以$F(\omega)\ \delta(\omega)=F(0)\delta(\omega)$。

表18-1列出了傅里叶变换的性质，表18-2列出了一些常用函数的傅里叶变换对。注意这两个表与表15-1以及表15-2的相似性。

表 18-1 傅里叶变换的性质

性 质	$f(t)$	$F(\omega)$
线性性质	$a_1f_1(t)+a_2f_2(t)$	$a_1F_1(\omega)+a_2F_2(\omega)$
尺度性质	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
时移性质	$f(t-a)$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega a}F(\omega)$

（续）

性　质	$f(t)$	$F(\omega)$
频移性质	$e^{j\omega_0 t}f(t)$	$F(\omega-\omega_0)$
调制性质	$\cos(\omega_0 t)f(t)$	$\frac{1}{2}[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)]$
时域微分性质	$\frac{df}{dt}$	$j\omega F(\omega)$
	$\frac{d^n f}{dt^n}$	$(j\omega)^n F(\omega)$
时域积分性质	$\int_{-\infty}^{t} f(t)dt$	$\frac{F(\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$
频率微分性质	$t^n f(t)$	$(j)^n \frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$
翻转性质	$f(-t)$	$F(-\omega)$或$F^*(\omega)$
对偶性质	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
时域卷积性质	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(\omega)F_2(\omega)$
频域卷积性质	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$

表 18-2　傅里叶变换对

$f(t)$	$F(\omega)$	$f(t)$	$F(\omega)$
$\delta(t)$	1	$t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n!}{(a+j\omega)^{n+1}}$
1	$2\pi\delta(\omega)$	$e^{-a\|t\|}$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$u(t+\tau)-u(t-\tau)$	$2\frac{\sin\omega\tau}{\omega}$	$\sin\omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$
$\|t\|$	$\frac{-2}{\omega^2}$	$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$	$e^{-at}\sin\omega_0 t\, u(t)$	$\frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a+j\omega}$	$e^{-at}\cos\omega_0 t\, u(t)$	$\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$
$e^{at}u(-t)$	$\frac{1}{a-j\omega}$		

例题18-4　试求如下函数的傅里叶变换：(a) 如图18-13所示的符号函数sgn(t)；(b) 双边指数函数$e^{-a|t|}$；(c) sinc函数$(\sin t)/t$。

解　(a) 可以采用三种方法确定符号函数傅里叶变换。

方法1：符号函数可以利用单位阶跃函数表示为：

$$\mathrm{sgn}(t)=f(t)=u(t)-u(-t)$$

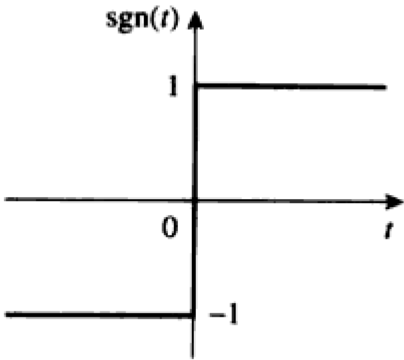


图 18-13　例题 18-4 的符号函数

由式(18-36)可知：

$$U(\omega)=\mathcal{F}\left[u(t)\right]=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$$

利用上式以及翻转性质，可以得到：

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{sgn}(t)\right]=U(\omega)-U(-\omega)$$

$$=\left(\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right)-\left(\pi\delta(-\omega)+\frac{1}{-\mathrm{j}\omega}\right)=\frac{2}{\mathrm{j}\omega}$$

方法2：由于$\delta(\omega)=\delta(-\omega)$，所以利用单位阶跃函数表示符号函数的另一种方法：

$$f(t)=\mathrm{sgn}(t)=-1+2\,u(t)$$

对上式中的各项取傅里叶变换，得到：

$$F(\omega)=-2\pi\delta(\omega)+2\left(\pi\delta(\omega)+\frac{2}{\mathrm{j}\omega}\right)=\frac{2}{\mathrm{j}\omega}$$

方法3：对如图18-13所示的符号函数取导数，可以得到：

$$f'(t)=2\,\delta(t)$$

两边取傅里叶变换：

$$\mathrm{j}\omega F(\omega)=2\Rightarrow F(\omega)=\frac{2}{\mathrm{j}\omega}$$

（b）双边指数函数可以表示为：

$$f(t)=\mathrm{e}^{-a|t|}=\mathrm{e}^{-at}u(t)+\mathrm{e}^{at}u(-t)=y(t)+y(-t)$$

其中，$y(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t)$，于是，$Y(\omega)=1/(a+\mathrm{j}\omega)$，应用翻转性质，可得：

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-a|t|}\right]=Y(\omega)+Y(-\omega)=\left(\frac{1}{a+\mathrm{j}\omega}+\frac{1}{a-\mathrm{j}\omega}\right)=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

（c）由例题18-2可知：

$$\mathcal{F}\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]=\tau\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}=\tau\,\mathrm{sinc}\frac{\omega\tau}{2}$$

设$\tau/2=1$，代入上式得到：

$$\mathcal{F}\left[u(t+1)-u(t-1)\right]=2\frac{\sin\omega}{\omega}$$

利用对偶性质，可得：

$$\mathcal{F}\left[2\frac{\sin t}{t}\right]=2\pi\left[U(\omega+1)-U(\omega-1)\right]$$

即：

$$\mathcal{F}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\pi\left[U(\omega+1)-U(\omega-1)\right]$$

练习题18-4 试确定如下函数的傅里叶变换：（a）门函数：$g(t)=u(t)-u(t-1)$；（b）$f(t)=t\,\mathrm{e}^{-2t}u(t)$；（c）锯齿脉冲$f(t)=10\,t\,[u(t)-u(t-2)]$。

答 （a）$(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})[\,\pi\,\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}]$；（b）$\frac{1}{(2+\mathrm{j}\omega)^2}$；（c）$\frac{10(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}-1)}{\omega^2}+\frac{20\mathrm{j}}{\omega}\;\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$。

例题18-5 试求如图18-14所示函数的傅里叶变换。

解 直接利用式(18-8)可以求出该函数的傅里叶变换，但利用傅里叶变换的微分性质求解更为容易。

图示函数可以表示为：

$$f(t)=\begin{cases}1+t, & -1<t<0\\ 1-t, & 0<t<1\end{cases}$$

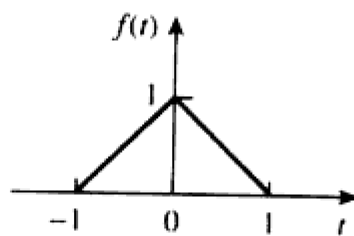


图 18-14 例题 18-5 的波形图

其一阶导数如图18-15a所示，可以表示为：

$$f'(t)=\begin{cases}1, & -1<t<0\\ -1, & 0<t<1\end{cases}$$

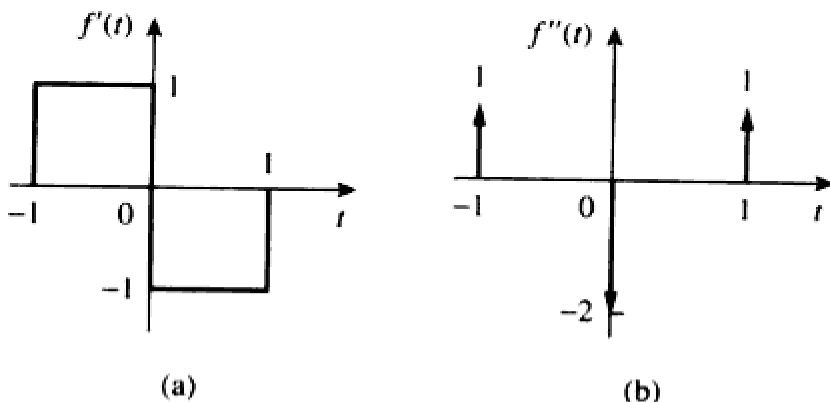


图 18-15 图 18-14 所示函数$f(t)$的一阶导数与二阶导数

其二阶导数如图18-15b所示，可以表示为：

$$f''(t)=\delta(t+1)-2\delta(t)+\delta(t-1)$$

两边取傅里叶变换，得到：

$$(\mathrm{j}\omega)^2F(\omega)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-2+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}=-2+2\cos\omega$$

于是，

$$F(\omega)=\frac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2}$$

练习题18-5 试确定如图18-16所示函数的傅里叶变换。

答 $(8\cos3\omega-4\cos4\omega-4\cos2\omega)/\omega^2$。

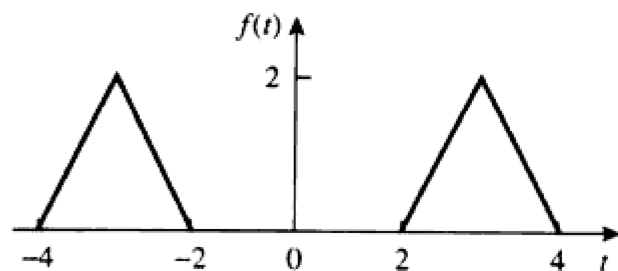


图 18-16 练习题 18-5 的波形图

例题18-6 试确定下列函数的傅里叶逆变换：

(a) $F(\omega)=\dfrac{10\mathrm{j}\omega+4}{(\mathrm{j}\omega)^2+6\mathrm{j}\omega+8}$ (b) $G(\omega)=\dfrac{\omega^2+21}{\omega^2+9}$

解 (a) 为了避免复数运算，可以暂时利用s取代 jω。利用部分分式展开可以得到：

$$F(s)=\frac{10s+4}{s^2+6s+8}=\frac{10s+4}{(s+4)(s+2)}=\frac{A}{s+4}+\frac{B}{s+2}$$

其中，

$$A=(s+4)F(s)\Big|_{s=-4}=\frac{10s+4}{(s+2)}\Big|_{s=-4}=\frac{-36}{-2}=18$$

$$B=(s+2)F(s)\Big|_{s=-2}=\frac{10s+4}{(s+4)}\Big|_{s=-2}=\frac{-16}{2}=-8$$

将$A=18$、$B=-8$代入$F(s)$，并将s替换为jω，可以得到：

$$F(\mathrm{j}\omega)=\frac{18}{\mathrm{j}\omega+4}+\frac{-8}{\mathrm{j}\omega+2}$$

查表18-2，可以确定其傅里叶逆变换为：

$$f(t) = (18\,\mathrm{e}^{-4t} - 8\,\mathrm{e}^{-2t})\,u(t)$$

（b）将$G(\omega)$简化为：

$$G(\omega) = \frac{\omega^2 + 21}{\omega^2 + 9} = 1 + \frac{12}{\omega^2 + 9}$$

查表18-2，可以得到其傅里叶逆变换为：

$$g(t) = \delta(t) + 2\,\mathrm{e}^{-3|t|}$$

练习题18-6 试求下列函数的傅里叶逆变换：

（a）$H(\omega) = \dfrac{6(3 + \mathrm{j}2\omega)}{(1 + \mathrm{j}\omega)(4 + \mathrm{j}\omega)(2 + \mathrm{j}\omega)}$　　（b）$Y(\omega) = \pi\,\delta(\omega) + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega} + \dfrac{2(1 + \mathrm{j}\omega)}{(1 + \mathrm{j}\omega)^2 + 16}$

答　（a）$h(t) = (2\,\mathrm{e}^{-t} + 3\,\mathrm{e}^{-2t} - 5\mathrm{e}^{-4t})\,u(t)$；（b）$y(t) = (1 + 2\,\mathrm{e}^{-t}\cos 4t)\,u(t)$。

18.4 傅里叶变换在电路分析中的应用

傅里叶变换将相量分析技术扩展到非周期函数的一般情况。因此，应用傅里叶变换分析非正弦激励电路的方法与利用相量技术分析正弦激励电路的方法完全相同。于是，欧姆定律仍然有效：

$$V(\omega) = Z(\omega)\,I(\omega) \tag{18-52}$$

其中，$V(\omega)$与$I(\omega)$分别为电压与电流的傅里叶变换，$Z(\omega)$为阻抗。电阻器、电感器以及电容器的阻抗表达式与相量分析中的一样，即：

$$\boxed{\begin{aligned} R &\Rightarrow R \\ L &\Rightarrow \mathrm{j}\omega L \\ C &\Rightarrow \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \end{aligned}} \tag{18-53}$$

只要将电路元件函数变换至频域，并取激励的傅里叶变换，就可以利用分压原理、电源转换、网孔分析法、节点电压法以及戴维南定理等电路分析方法求解电路的未知响应（电流或电压）。最后，取傅里叶逆变换即可得到时域中的响应函数。

虽然应用傅里叶变换方法可以得到$-\infty < t < \infty$时的响应，但是傅里叶分析并不能处理具有初始条件的电路。

传递函数定义为输出响应$Y(\omega)$与输入激励$X(\omega)$之比，即：

$$\boxed{H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}} \tag{18-54}$$

即：

$$Y(\omega) = H(\omega)\,X(\omega) \tag{18-55}$$

频域的输入－输出关系如图18-17所示，式(18-55)表明，如果已知电路的传递函数及其输入，则可以很方便地求得电路的输出，式(18-54)所示关系正是电路分析中利用傅里叶变换的主要原因。注意，如果$s = \mathrm{j}\omega$，则$H(\omega)$与$H(s)$相等。另外，如果输入为冲激函数（即$x(t) = \delta(t)$），则$X(\omega) = 1$，于是，响应为：

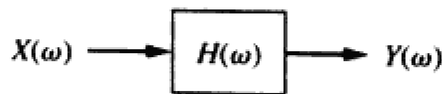


图 18-17　频域中电路的输入-输出关系

$$Y(\omega) = H(\omega) = \mathcal{F}[\,h(t)] \tag{18-56}$$

说明$H(\omega)$就是电路冲激响应$h(t)$的傅里叶变换。

例题18-7 试求如图18-18所示电路对于$v_i(t)=2e^{-3t}\,u(t)$的输出$v_o(t)$。

解 输入电压的傅里叶变换为：

$$V_i(\omega)=\frac{2}{3+j\omega}$$

图 18-18 例题 18-7 的电路原理图

由分压原理得到电路的传递函数为：

$$H(\omega)=\frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)}=\frac{1/j\omega}{2+1/j\omega}=\frac{1}{1+j2\omega}$$

于是，

$$V_o(\omega)=V_i(\omega)H(\omega)=\frac{2}{(3+j\omega)(1+j2\omega)}$$

即：

$$V_o(\omega)=\frac{1}{(3+j\omega)(0.5+j\omega)}$$

由部分分式展开可得：

$$V_o(\omega)=\frac{-0.4}{3+j\omega}+\frac{0.4}{0.5+j\omega}$$

取傅里叶逆变换，得到：

$$v_o(t)=0.4(e^{-0.5t}-e^{-3t})\,u(t)$$

练习题18-7 如果$v_i(t)=2\text{sgn}(t)=-2+4\,u(t)$，试确定如图18-19所示电路中的$v_o(t)$。

答 $-2+4(1-e^{-4t})\,u(t)$。

例题18-8 试利用傅里叶变换方法确定如图18-20所示电路对$i_s(t)=10\sin 2t$ A的输出$i_o(t)$。

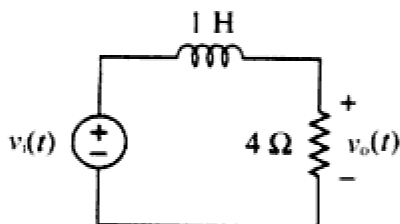


图 18-19 练习题 18-7 的电路原理图

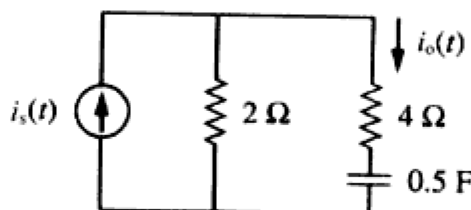


图 18-20 例题 18-8 的电路原理图

解 由分流原理，可以得到：

$$H(\omega)=\frac{I_o(\omega)}{I_s(\omega)}=\frac{2}{2+4+2/j\omega}=\frac{j\omega}{1+j\omega3}$$

如果$i_s(t)=10\sin 2t$，则有：

$$I_s(\omega)=j\pi10\left[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)\right]$$

于是，

$$I_o(\omega)=H(\omega)I_s(\omega)=\frac{10\pi\omega\left[\delta(\omega-2)-\delta(\omega+2)\right]}{1+j\omega3}$$

由表18-2无法得到$I_o(\omega)$的傅里叶逆变换，必须利用式（18-9）给出的傅里叶逆变换公式求取：

$$i_o(t)=\mathcal{F}^{-1}\left[I_o(\omega)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{10\pi\omega\left[\delta(\omega-2)-\delta(\omega+2)\right]}{1+j\omega3}e^{j\omega t}d\omega$$

利用冲激函数的筛选性质：

$$\delta(\omega-\omega_0)f(\omega)=f(\omega_0)$$

即：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0)f(\omega)\mathrm{d}\omega=f(\omega_0)$$

可以得到：

$$\begin{aligned}i_o(t)&=\frac{10\pi}{2\pi}\left[\frac{2}{1+\mathrm{j}6}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2t}-\frac{-2}{1-\mathrm{j}6}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2t}\right]\\&=10\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2t}}{6.082\mathrm{e}^{\mathrm{j}80.54^\circ}}+\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2t}}{6.082\mathrm{e}^{-\mathrm{j}80.54^\circ}}\right]\\&=1.644\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2t-80.54^\circ)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2t-80.54^\circ)}\right]\\&=3.288\cos(2t-80.54^\circ)\mathrm{A}\end{aligned}$$

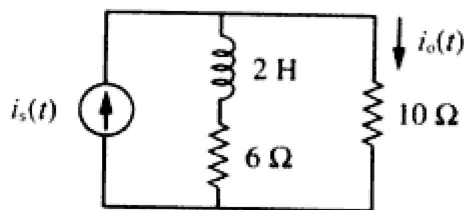


图 18-21 练习题 18-8 的电路原理图

练习题18-8 已知$i_s(t)=20\cos 4t$ A，试求如图18-21所示电路中的电流$i_o(t)$。

答 $11.8\cos(4t+26.57^\circ)$ A。

18.5 帕塞瓦尔定理

帕塞瓦尔定理是傅里叶变换的一种应用实例，它将信号携带的能量与其傅里叶变换联系在一起。如果$p(t)$为信号的功率，则信号携带的能量为：

$$W=\int_{-\infty}^{\infty}p(t)\mathrm{d}t \tag{18-57}$$

为了比较电流信号与电压信号的能量，利用1Ω电阻器作为能量计算的基准会更方便。对于1 Ω电阻器，$p(t)=v^2(t)=i^2(t)=f^2(t)$，其中$f(t)$可以代表电压或电流。于是，传递给1 Ω电阻器的能量为：

$$W_{1\Omega}=\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)\mathrm{d}t \tag{18-58}$$

帕塞瓦尔定理表明：在频域也可以计算出上述相同的能量：

$$W_{1\Omega}=\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega \tag{18-59}$$

帕塞瓦尔定理是指，信号$f(t)$传递给1 Ω电阻器的总能量等于$f(t)$平方曲线所覆盖的总面积，也等于$f(t)$傅里叶变换的振幅平方曲线所覆盖的总面积乘以1/2π。

帕塞瓦尔定理建立了信号能量及其傅里叶变换之间的联系，也就是提供了$F(\omega)$的物理意义，即$|F(\omega)|^2$是与对应于信号$f(t)$能量密度的一个度量（单位为焦耳/赫兹）。

实际上，有时也将$|F(\omega)|^2$称为信号$f(t)$的能量谱密度。

推导式(18-59)时，需利用式(18-58)并将其中一个$f(t)$ 用式(18-9)代入，得到：

$$W_{1\Omega}=\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}t \tag{18-60}$$

因为上述积分结果中不包含时间变量，所以可将上式中的$f(t)$移到方括号内的积分中，从而得到：

$$W_{1\Omega}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t \tag{18-61}$$

交换积分次序，可以得到：

$$W_{1\Omega}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(-\omega)t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)F(-\omega)\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)F^*(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{18-62}$$

但是，如果$z=x+\mathrm{j}y$，则有$zz^*=(x+\mathrm{j}y)(x-\mathrm{j}y)=x^2+y^2=|z|^2$，因此，

$$\boxed{W_{1\Omega}=\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega} \tag{18-63}$$

式（18-63）表明，信号所携带的能量既可以由时域中$f(t)$平方的积分求得，又可以由频域中$F(\omega)$平方的积分，再乘以$1/2\pi$求得。

由于$|F(\omega)|^2$为偶函数，因此仅需从0到∞积分，并将积分结果乘以2即可：

$$W_{1\Omega}=\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega \tag{18-64}$$

另外，还可计算出任一频带$\omega_1<\omega<\omega_2$内的信号能量，即：

$$W_{1\Omega}=\frac{1}{\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega \tag{18-65}$$

注意，本节介绍的帕塞瓦尔定理适用于非周期函数，周期函数的帕塞瓦尔定理已在17.5节与17.6节中介绍过。式（18-63）所示的帕塞瓦尔定理表明，非周期信号的能量分布在整个频谱范围内，而周期信号的能量则集中在各个谐波分量的频率处。

例题18-9 10 Ω电阻器两端的电压为$v(t)=5\mathrm{e}^{-3t}u(t)$ V，试求该电阻器消耗的总能量。

解 （1）**明确**问题。问题的定义已经阐述的非常清楚。

（2）**表述**对问题的理解。已知电阻器两端在所有时刻的电压，要求该电阻器消耗的能量。可以看出，零时刻之前的电压为零，因此，仅需考虑零时刻以后的情况。

（3）确定**可选**解。求解答案的方法有两种。第一种方法是在时域求解，这里采用第二种方法——傅里叶分析法求解。

（4）**尝试**问题的解。在时域中：

$$W_{10\Omega}=10\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)\mathrm{d}t=10\int_0^{\infty}25\mathrm{e}^{-6t}\mathrm{d}t$$
$$=250\left.\frac{\mathrm{e}^{-6t}}{-6}\right|_0^{\infty}=\frac{250}{6}=\mathbf{41.67J}$$

（5）**评价**得到的结果。在频域中：

$$F(\omega)=V(\omega)=\frac{5}{3+\mathrm{j}\omega}$$

所以，

$$|F(\omega)|^2=F(\omega)F(\omega)^*=\frac{25}{9+\omega^2}$$

于是，电阻器消耗的能量为：

$$W_{10\Omega}=\frac{10}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega=\frac{10}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{25}{9+\omega^2}\mathrm{d}\omega$$
$$=\frac{250}{\pi}\left.\left(\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{\omega}{3}\right)\right|_0^{\infty}=\frac{250}{\pi}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{250}{6}=\mathbf{41.67J}$$

（6）对结果是否满意？上述问题的求解是满意的，可以将所得到的结果作为本题的答案。

练习题18-9　（a）试在时域中计算1Ω电阻器从电流$i(t) = 10\,\mathrm{e}^{-2|t|}u(t)$ A吸收的总能量；（b）试在频域中重做（a）。

答　（a）50 J；（b）50 J。

例题18-10　如果电阻器两端的电压为$v(t) = \mathrm{e}^{-2t}u(t)$，试计算1 Ω电阻器在频带$0 < \omega < 10$rad/s内消耗的能量占总能量的百分比。

解　已知$f(t) = v(t) = \mathrm{e}^{-2t}u(t)$，则：

$$F(\omega) = \frac{1}{2+\mathrm{j}\omega} \Rightarrow |F(\omega)|^2 = \frac{1}{4+\omega^2}$$

该电阻器消耗的总能量为：

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{4+\omega^2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\omega}{2}\bigg|_0^{\infty}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} = 0.25\mathrm{J}$$

在$0 < \omega < 10$ rad/s频带内的能量为：

$$W = \frac{1}{\pi}\int_0^{10}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{10}\frac{\mathrm{d}\omega}{4+\omega^2} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}\tan^{1}\frac{\omega}{2}\bigg|_0^{10}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\tan^{-1}5 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{78.69^\circ}{180^\circ}\pi\right) = 0.218\mathrm{J}$$

占总能量的百分比为：

$$\frac{W}{W_{1\Omega}} = \frac{0.218}{0.25} = 87.4\%$$

练习题18-10　流过某2 Ω电阻器的电流为$i(t) = \mathrm{e}^{-t}u(t)$，试问频带$-4$rad/s $< \omega <$ 4rad/s内的能量占总能量的百分比是多少？

答　84.4%。

18.6　傅里叶变换与拉普拉斯变换之比较

利用一定的篇幅对傅里叶变换与拉普拉斯变换进行一下比较是很有价值的，二者具有如下相似之处与不同之处：

（1）第15章中定义的拉普拉斯变换为单边变换，因为其积分区间是$0 < t < \infty$。单边拉普拉斯变换仅适用于正时间函数，即$f(t)$，$t > 0$。傅里叶变换则适用于整个时间范围内有定义的函数。

（2）对于仅在正时刻非零的函数$f(t)$　（即$f(t) = 0$，$t < 0$），并且$\int_0^{\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$，则两个变换之间的关系为

$$F(\omega) = F(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega} \tag{18-66}$$

该式同时表明，傅里叶变换可以看作是拉普拉斯变换在$s = \mathrm{j}\omega$时的特例。由于$s = \sigma + \mathrm{j}\omega$，因此，式(18-66)说明拉普拉斯变换与整个$s$平面有关，而傅里叶变换仅限制在$\mathrm{j}\omega$轴上，参见图 15-1。

换句话说，如果$F(s)$的所有极点都位于左半s平面，则在拉普拉斯变换$F(s)$中只要用$\mathrm{j}\omega$取代s，就可以得到相应的傅里叶变换$F(\omega)$。注意：对于$u(t)$或$\cos atu(t)$这样的函数，上述结论不成立。

（3）拉普拉斯变换要比傅里叶变换适用的函数范围更广。例如，函数$tu(t)$存在拉普拉斯变换，

但不存在傅里叶变换。但是，某些物理不可实现的信号以及拉普拉斯变换不存在的信号，却存在傅里叶变换。

(4) 拉普拉斯变换更适用于包含初始条件的瞬态电路问题的分析，因为拉普拉斯变换可以包含初始条件，而傅里叶变换则不然，傅里叶变换特别适用于求解稳态电路问题。

(5) 与拉普拉斯变换相比，傅里叶变换有助于更全面地了解信号的频率特性。

将表15-1、表15-2与表18-1、表18-2进行比较，就可以观察到两个变换的某些相似之处与不同之处。

18.7 †应用

傅里叶变换除了用于电路分析以外，还被广泛用于光学、光谱学、声学、计算机科学以及电子工程等各种不同的应用领域。在电子工程领域，傅里叶变换被广泛应用于通信系统与信号处理中，此时频率响应与频谱是非常重要的。本节介绍两个简单应用，幅度调制（AM）与采样。

18.7.1 幅度调制

电磁辐射或通过大气空间的信息传输已经成为现代技术社会中不可或缺的组成部分。然而，空间传输仅在高频（20 kHz以上）时才是高效的、经济的。传输50 Hz～20 kHz低频段的智能信号，诸如语音、音乐等，是非常昂贵的，需要大量的功率设备和大型天线。发送低频音频信息的一种常用方法是发射一个称为*载波*（carrier）的高频信号，该载波以某种方式受到相应的音频信号的控制。可以控制载波的三个特征（幅度、频率或相位）来实现承载智能信号，称之为*调制信号*（modulating signal）。本节仅讨论载波幅度的控制，称为*幅度调制*（amplitude modulation）。

幅度调制（AM）是指载波的幅度受到调制信号控制的过程。

幅度调制通常用于商业广播频段以及商业电视的视频部分。

假定待发射的音频信息，例如话音或音乐（或一般的调制信号），可以表示为$m(t)=V_m\cos\omega_m t$，而高频载波可以表示为$c(t)=V_c\cos\omega_c t$，其中$\omega_c >> \omega_m$。那么，调幅信号$f(t)$可以表示为：

$$f(t)=V_c[1+m(t)]\cos\omega_c t \tag{18-67}$$

图18-22举例说明了调制信号$m(t)$、载波$c(t)$以及幅度调制信号$f(t)$的波形。利用式（18-27）的结果以及余弦函数的傅里叶变换（参见例题18-1或表18-1）可以确定调幅信号的频谱：

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\mathcal{F}[V_c\cos\omega_c t]+\mathcal{F}[V_c m(t)\cos\omega_c t]\\&=V_c\pi[\delta(\omega-\omega_c)+\delta(\omega+\omega_c)]\\&\quad+\frac{V_c}{2}[M(\omega-\omega_c)+M(\omega+\omega_c)]\end{aligned} \tag{18-68}$$

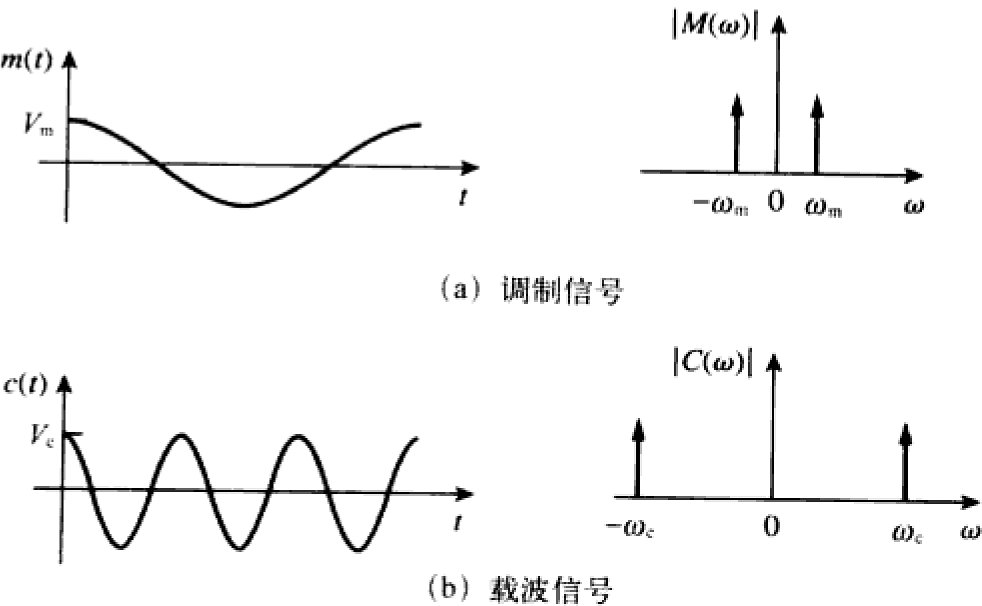
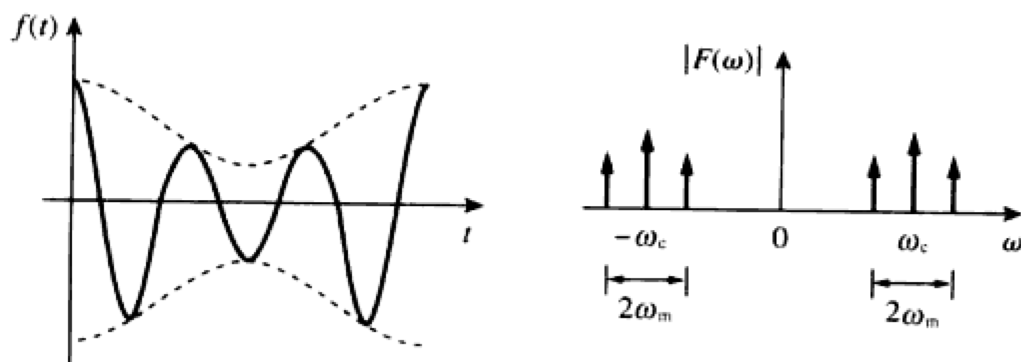


图 18-22 时域与频率表示



（c）调幅信号

图 18-22 （续）

其中，$M(\omega)$为调制信号$m(t)$的傅里叶变换。图18-23所示为调幅信号的频谱，由图18-23可见，调幅信号由载波和另外两个正弦波组成，频率为$\omega_c - \omega_m$的正弦波称为下边带（lower sideband），而频率为$\omega_c + \omega_m$的正弦波称为上边带（upper sideband）。

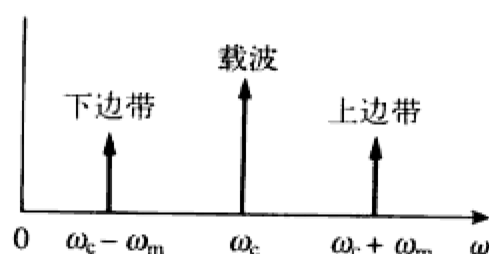
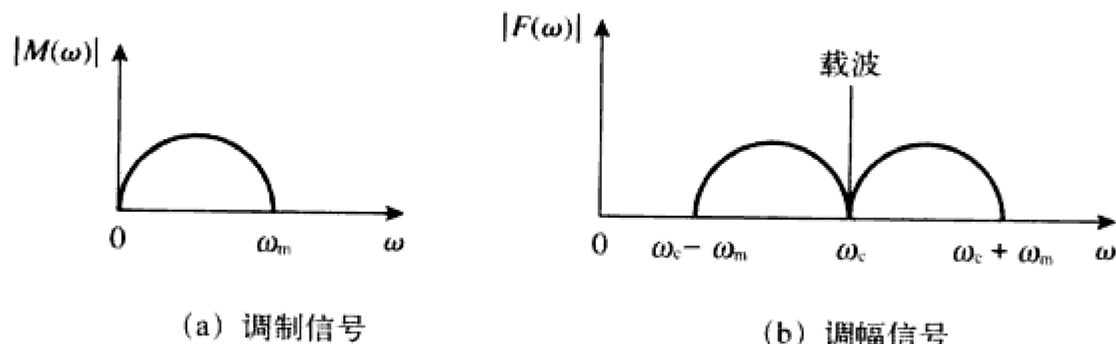


图 18-23 调幅信号的频谱

为了便于分析，上述推导假定调制信号为正弦波。实际上，$m(t)$为非正弦带限信号，其频谱位于0到$\omega_u = 2\pi f_u$之间（即信号具有频率上限）。对于调幅无线电信号而言，$f_u = 5$ kHz。如果调制信号的频谱如图18-24a所示，那么调幅信号的频谱如图18-24b所示。因此，为了避免出现任何干扰，调幅无线电台的载波频率间隔应大于10 kHz。



（a）调制信号 （b）调幅信号

图 18-24 频谱

在发射的接收端，通过*解调*（demodulation）过程将音频信息从调制载波中恢复出来。

例题18-11 某音乐信号包含15 Hz到30 kHz的频率分量，如果利用该信号对一个1.2 MHz的载波进行幅度调制，试求其上边带与下边带的频率范围。

解 下边带为载波频率与调制频率之差，其所包含的频率范围从

$$1\,200\,000 - 30\,000 \text{ Hz} = 1\,170\,000 \text{ Hz}$$

到

$$1\,200\,000 - 15 \text{ Hz} = 1\,199\,985 \text{ Hz}$$

上边带为载波频率与调制频率之和，其所包含的频率范围从

$$1\,200\,000 + 15 \text{ Hz} = 1\,200\,015 \text{ Hz}$$

到

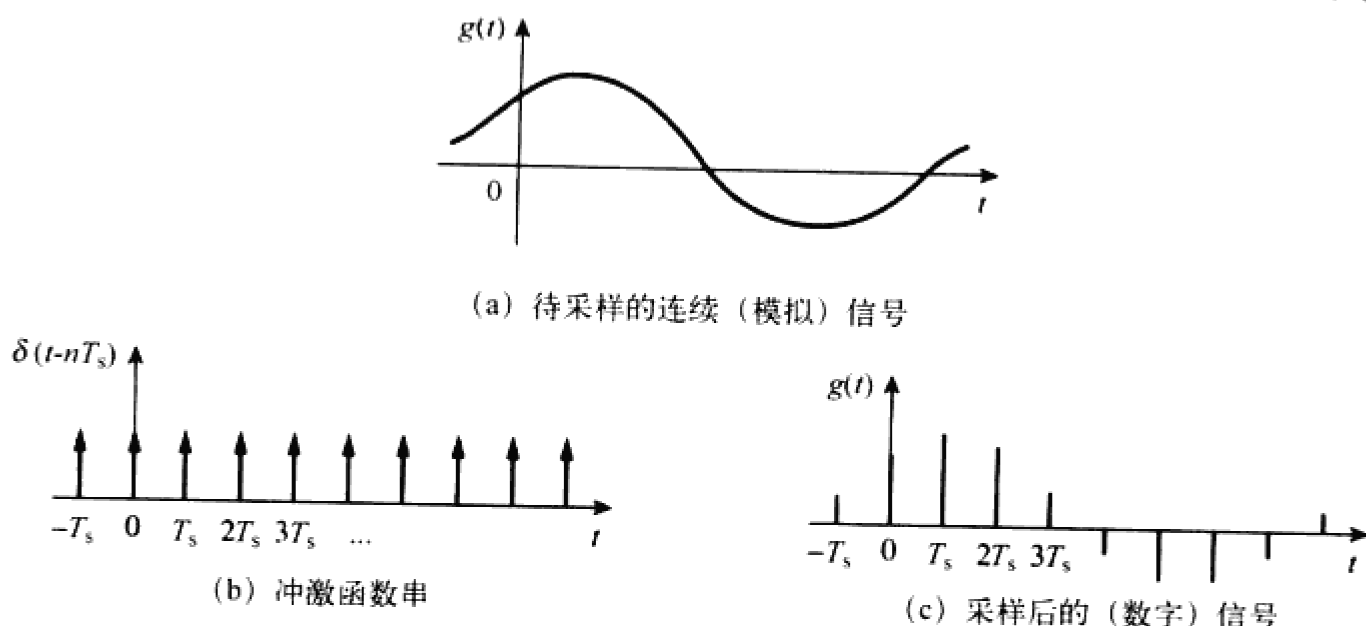
$$1\,200\,000 + 30\,000 \text{ Hz} = 1\,230\,000 \text{ Hz}$$

练习题18-11 如果某2 MHz载波被一个4 kHz智能信号所调制，试确定所得到的调幅信号的三个分量的频率。

答 2 004 000 Hz，2 000 000 Hz，1 996 000 Hz。

18.7.2 采样

在模拟系统中，信号是进行整体处理的。然而，在现代数字系统中，仅需对信号样本进行处理。这正是17.8.1节介绍的采样定理的结果。利用脉冲串或者冲激串即可实现采样，本节讨论采用冲激采样。



(a) 待采样的连续（模拟）信号

(b) 冲激函数串

(c) 采样后的（数字）信号

图 18-25

考虑如图18-25a所示的连续信号$g(t)$，该信号可以与如图18-25b所示的冲激函数串$\delta(t-nT_s)$相乘，其中T_s为采样间隔（sampling interval），$f_s=1/T_s$为采样频率（sampling frequency）或采样速率（sampling rate）。于是，采样信号$g_s(t)$可以表示为：

$$g_s(t)=g(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}g(nT_s)\delta(t-nT_s) \tag{18-69}$$

其傅里叶变换为：

$$G_s(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}g(nT_s)\mathcal{F}\left[\delta(t-nT_s)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}g(nT_s)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega T_s} \tag{18-70}$$

可以证明：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}g(nT_s)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega T_s}=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}G(\omega+n\omega_s) \tag{18-71}$$

其中，$\omega_s=2\pi/T_s$。因此，式（18-70）变为：

$$G_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}G(\omega+n\omega_s) \tag{18-72}$$

上式表明，采样信号的傅里叶变换$G_s(\omega)$等于速率为$1/T_s$的原始信号傅里叶变换的**平移之和**。

为了确保原始信号的最佳恢复，采样间隔应该为多少呢？这一采样的基本问题可以用采样定理的等效原理来解释：

某频率分量不高于W Hz的带限信号可以由以不低于$2W$ Hz的采样频率对信号进行采样得到的样本完全恢复。

换言之，对于带宽为W Hz的信号，如果采样频率不低于调制信号的最高频率的2倍，则不会出现信息的损失或重叠。于是，

$$\frac{1}{T_s}=f_s\geqslant 2W \tag{18-73}$$

采样频率$f_s=2$ W称为奈奎斯特频率（Nyquist frequency）或速率，而$1/f_s$则称为奈奎斯特间隔（Nyquist interval）。

例题18-12 某截止频率为5 kHz的电话信号，以高于最低允许速率60%的频率被采样，试求采样速率。

解 最小的采样速率即奈奎斯特速率 $= 2W = 2 \times 5 = 10$ kHz，
因此，

$$f_s = 1.60 \times 2W = 16 \text{ kHz}$$

练习题18-12 某带宽为12.5 kHz的音频信号被数字化为8 bit样本，试问保证完全恢复信号的最大采样间隔为多少？

答 40 μs。

18.8 本章小结

（1）傅里叶变换将非周期性函数$f(t)$转换为变换$F(\omega)$：

$$F(\omega) = \mathcal{F}\left[f(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

（2）$F(\omega)$的傅里叶逆变换为：

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

（3）傅里叶变换的重要性质以及常用变换对分别总结于表18-1与表18-2中。

（4）利用傅里叶变换方法分析电路的步骤包括：求出激励源的傅里叶变换，将电路元件变换至频域，求解未知响应，最后利用傅里叶逆变换将电路响应变换至时域。

（5）如果$H(\omega)$为网络的传递函数，则$H(\omega)$为电路冲激响应的傅里叶变换，即：

$$H(\omega) = \mathcal{F}\left[\, h(t) \,\right]$$

网络的输出$V_o(\omega)$可以由其输入$V_i(\omega)$通过如下关系确定：

$$V_o(\omega) = H(\omega)\, V_i(\omega)$$

（6）帕塞瓦尔定理给出了函数$f(t)$及其傅里叶变换之间的能量关系，1 Ω电阻消耗的能量为：

$$W_{1\Omega}\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(\omega)\right|^2\mathrm{d}\omega$$

该定理对于在时域或频域中计算信号携带的能量是非常有用的。

（7）傅里叶变换的典型应用包括振幅调制（AM）与信号采样。对于振幅调制而言，根据傅里叶变换的调制性质可以推导出确定调幅波边带的一种方法。对于信号采样应用而言，如果采样频率不低于奈奎斯特速率，则（数字化传输所需的）采样过程不会导致任何信息损失。

复习题

18-1 下列函数中哪个不存在傅里叶变换？

（a）$e^t u(-t)$ （b）$t\,e^{-3t}u(t)$

（c）$1/t$ （d）$|t|u(t)$

18-2 e^{j2t}的傅里叶变换为：

（a）$\dfrac{1}{2+j\omega}$ （b）$\dfrac{1}{-2+j\omega}$

（c）$2\pi\,\delta(\omega-2)$ （d）$2\pi\delta(\omega+2)$

18-3 $\dfrac{e^{-j\omega}}{2+j\omega}$ 的傅里叶的逆变换为：

（a）e^{-2t} （b）$e^{-2t}u(t-1)$

（c）$e^{-2(t-1)}$ （d）$e^{-2(t-1)}u(t-1)$

18-4 $\delta(\omega)$的傅里叶的逆变换为：

（a）$\delta(t)$ （b）$u(t)$

（c）1 （d）$1/2\pi$

18-5 $j\omega$的傅里叶的逆变换是：

（a）$\delta'(t)$ （b）$u'(t)$

（c）$1/t$ （d）未定义

18-6 积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{10\delta(\omega)}{4+\omega^2}\mathrm{d}\omega$ 的计算结果为：

(a) 0　(b) 2

(c) 2.5　(d) ∞

18-7　积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{10\delta(\omega-1)}{4+\omega^2}d\omega$ 的计算结果为：

(a) 0　(b) 2

(c) 2.5　(d) ∞

18-8　流过无初始充电的1F电容器的电流为$\delta(t)$，则该电容器两端的电压为：

(a) $u(t)$　(b) $-1/2+u(t)$

(c) $e^{-t}u(t)$　(d) $\delta(t)$

18-9　流过某1H电感器的电流为单位阶跃电流，则该电感器两端的电压为：

(a) $u(t)$　(b) $\text{sgn}(t)$

(c) $e^{-t}u(t)$　(d) $\delta(t)$

18-10　帕塞瓦尔定理仅适用于非周期性函数。

(a) 正确　(b) 错误

答案　18-1 c；18-2 c；18-3 d；18-4 d；18-5 a；18-6 c；18-7b；18-8 a；18-9 d；18-10b。

习题

†18.2 节与 18.3 节

18-1　试确定如图18-26所示函数的傅里叶变换。
ML

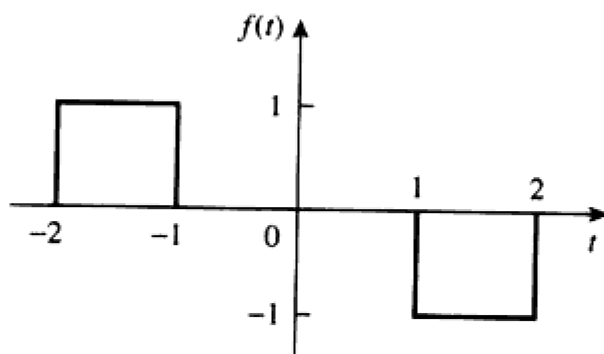


图 18-26　习题 18-1 的波形图

18-2　试求如图18-27所示三角脉冲的傅里叶变换。
ML

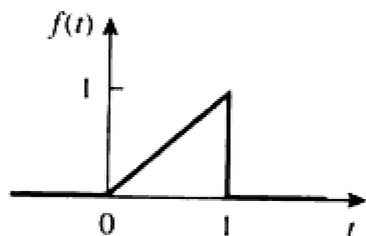


图 18-27　习题 18-2 的波形图

18-3　试计算如图18-28所示信号的傅里叶变换。
ML

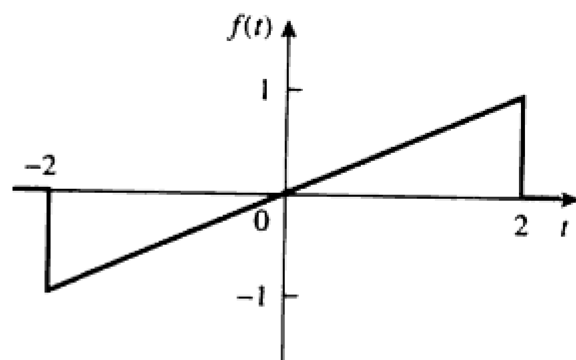


图 18-28　习题 18-3 的波形图

18-4　试求如图18-29所示波形的傅里叶变换。
ML

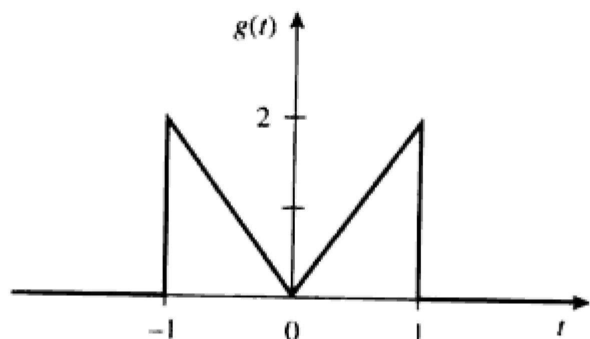


图 18-29　习题 18-4 的波形图

18-5　试确定如图18-30所示信号的傅里叶变换。
ML

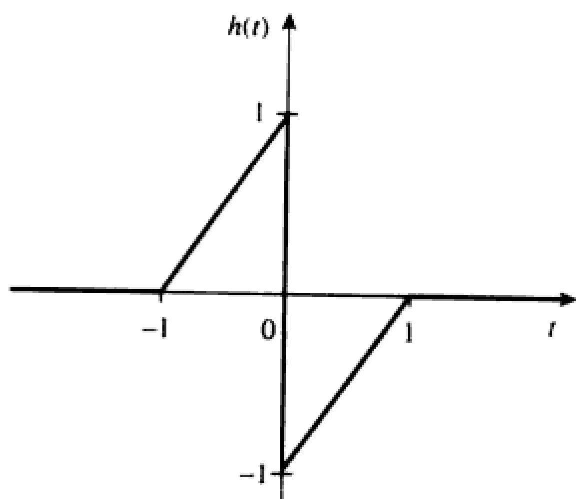


图 18-30　习题 18-5 的波形图

18-6　试求如图18-31所示两个函数的傅里叶变换。
ML

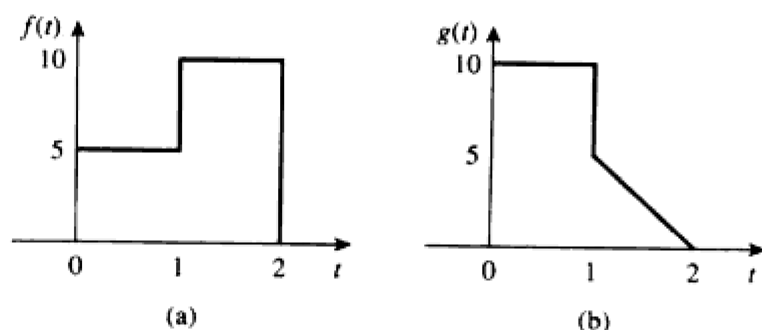


图 18-31　习题 18-6 的波形图

18-7　试求如图18-32所示信号的傅里叶变换。
ML

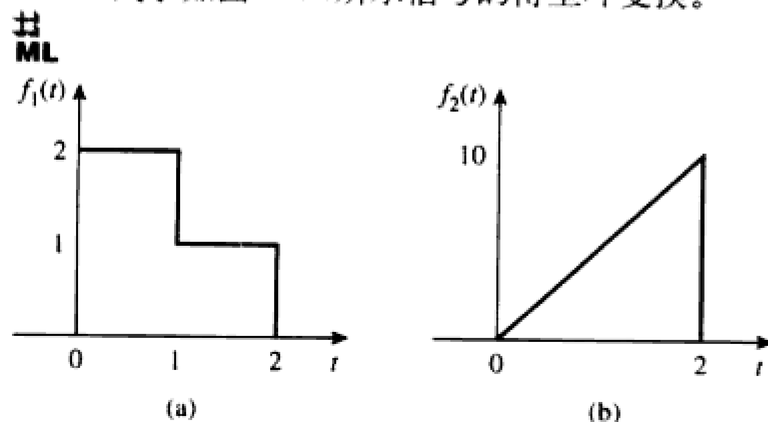


图 18-32　习题 18-7 的波形图

18-8　试确定如图18-33所示信号的傅里叶变换。
ML

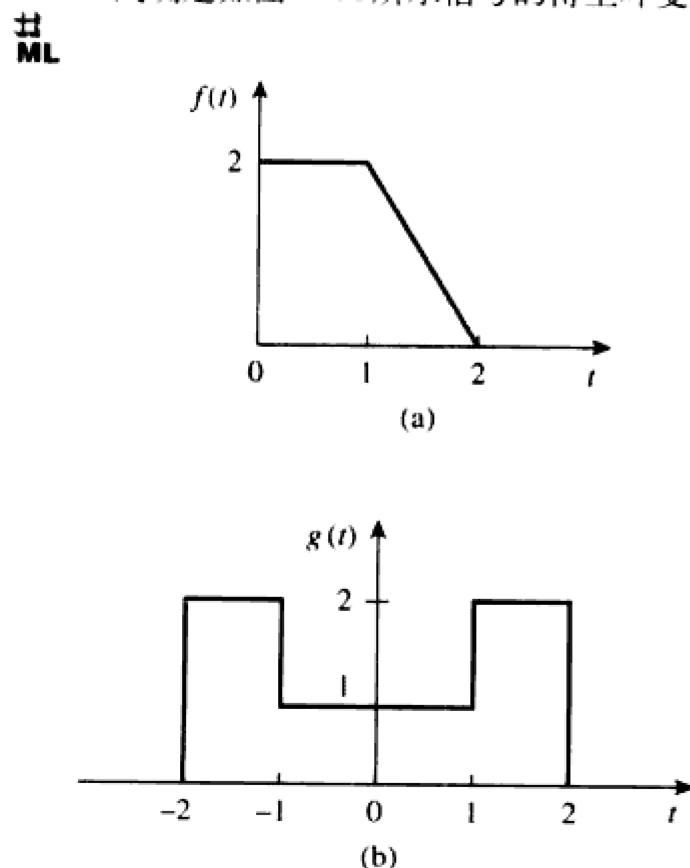
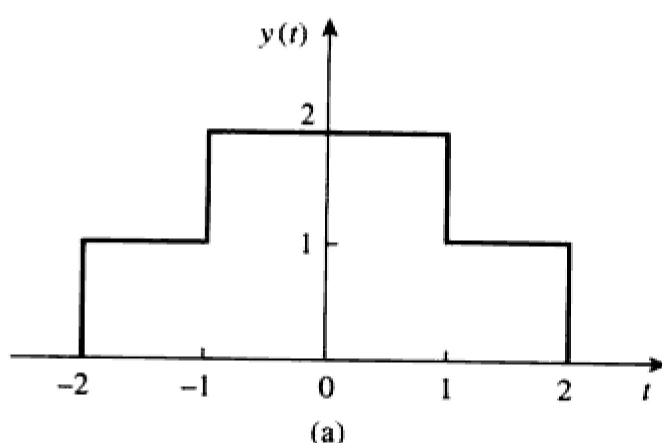


图 18-33　习题 18-8 的波形图

18-9　试确定如图18-34所示信号的傅里叶变换。
ML



z(t)
0
1
t
−2
(b)

图 18-34　习题 18-9 的波形图

18-10　试确定如图18-35所示信号的傅里叶变换。
ML

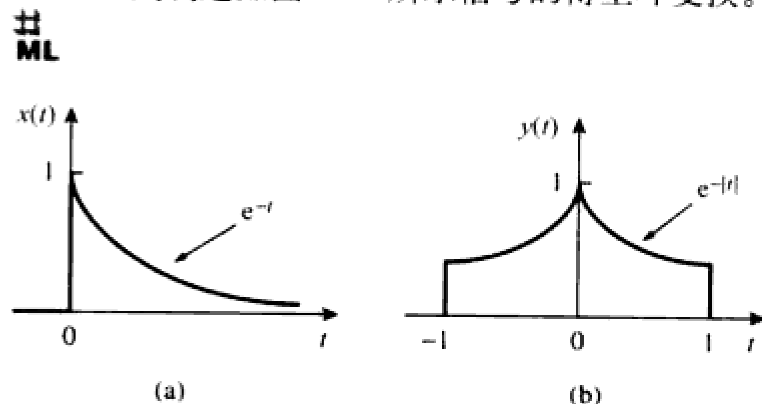


图 18-35　习题 18-10 的波形图

18-11　试求如图18-36所示“正弦波脉冲”的傅里叶变换。
ML

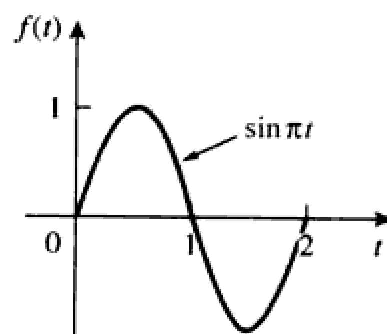


图 18-36　习题 18-11 的波形图

18-12　试求下列信号的傅里叶变换：

(a) $f_1(t)=\mathrm{e}^{-3t}\sin(10t)u(t)$

(b) $f_2(t)=\mathrm{e}^{-4t}\cos(10t)u(t)$

18-13　试求下列信号的傅里叶变换：

(a) $f(t)=\cos(at-\pi/3)$，$-\infty<t<\infty$

(b) $g(t)=u(t+1)\sin\pi t$，$-\infty<t<\infty$

(c) $h(t)=(1+A\sin at)\cos bt$，$-\infty<t<\infty$，其中A，a，b为常数

(d) $i(t)=1-t$，$0<t<4$

18-14　试求下列函数的傅里叶变换：

(a) $f(t)=\mathrm{e}^{-t}\cos(3t+\pi)u(t)$

(b) $g(t)=\sin\pi t\,[u(t+1)-u(t-1)]$

(c) $h(t)=\mathrm{e}^{-2t}\cos\pi t\,u(t-1)$

(d) $p(t)=\mathrm{e}^{-2t}\sin4t\,u(-t)$

(e) $q(t)=4\,\mathrm{sgn}(t-2)+3\delta(t)-2\,u(t-2)$

18-15　试求下列函数的傅里叶变换：

(a) $f(t)=\delta(t+3)-\delta(t-3)$

(b) $f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}2\,\delta(t-2)\,\mathrm{d}t$

(c) $f(t)=\delta(3t)-\delta'(2t)$

*18-16　试确定下列函数的傅里叶变换：

(a) $f(t)=4/t^2$　(b) $g(t)=8/(4+t^2)$

18-17　试求下列函数的傅里叶变换：

(a) $\cos2t\,u(t)$　(b) $\sin 10\,t\,u(t)$

18-18　已知$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$，试利用傅里叶变换的定义证明如下结论：

(a) $\mathcal{F}[f(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}F(\omega)$

(b) $\mathcal{F}\left[\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right]=\mathrm{j}\omega F(\omega)$

(c) $\mathcal{F}[f(-t)]=F(-\omega)$

(d) $\mathcal{F}[tf(t)]=\mathrm{j}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\omega)$

18-19　试求$f(t)=\cos2\pi t\,[u(t)-u(t-1)]$的傅里叶变换。

18-20 ML　(a) 试证明具有指数傅里叶级数的周期信号：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

的傅里叶变换为：

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\,\delta(\omega-n\omega_0)$$

其中，$\omega_0=2\pi/T$。

(b) 试求如图18-37所示信号的傅里叶变换：

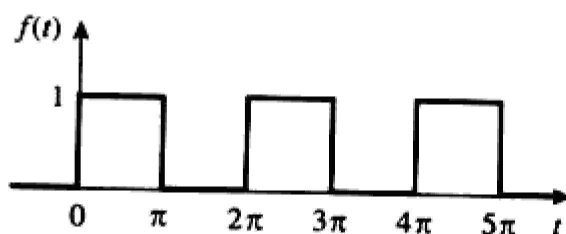


图 18-37　习题 18-20（b）的波形图

18-21　试证明：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin a\omega}{a\omega}\right)^2\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{a}$$

（提示：可以利用如下公式。）

$$\mathcal{F}[u(t+a)-u(t-a)]=2a\left(\frac{\sin a\omega}{a\omega}\right)$$

18-22　试证明：如果$F(\omega)$为$f(t)$的傅里叶变换，则：

$$\mathcal{F}[f(t)\sin\omega_0 t]=\frac{\mathrm{j}}{2}[F(\omega+\omega_0)-F(\omega-\omega_0)]$$

18-23　如果$f(t)$的傅里叶变换为：

$$F(\omega)=\frac{10}{(2+\mathrm{j}\omega)(5+\mathrm{j}\omega)}$$

试确定下列函数的傅里叶变换：

(a) $f(-3t)$　(b) $f(2t-1)$　(c) $f(t)\cos 2t$

(d) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$　(e) $\int_{-\infty}^{t}f(t)\,\mathrm{d}t$

18-24　已知$\mathcal{F}[f(t)]=(\mathrm{j}/\omega)(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}-1)$，试求下列函数的傅里叶变换：

(a) $x(t)=f(t)+3$　(b) $y(t)=f(t-2)$

(c) $h(t)=f'(t)$

(d) $g(t)=4f(\frac{2}{3}t)+10f(\frac{5}{3}t)$

18-25　试确定下列信号的傅里叶逆变换：

(a) $G(\omega)=\dfrac{5}{\mathrm{j}\omega-2}$　(b) $H(\omega)=\dfrac{12}{\omega^2+4}$

(c) $X(\omega)=\dfrac{10}{(\mathrm{j}\omega-1)(\mathrm{j}\omega-2)}$

18-26　试确定下列信号的傅里叶逆变换：

(a) $F(\omega)=\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}}{1+\mathrm{j}\omega}$　(b) $H(\omega)=\dfrac{1}{(\mathrm{j}\omega+4)^2}$

(c) $G(\omega)=2\,u(\omega+1)-2\,u(\omega-1)$

18-27　试求下列函数的傅里叶逆变换：

(a) $F(\omega)=\dfrac{100}{\mathrm{j}\omega(\mathrm{j}\omega+10)}$

(b) $G(\omega)=\dfrac{10j\omega}{(-j\omega+2)(j\omega+3)}$

(c) $H(\omega)=\dfrac{60}{-\omega^2+j40\omega+1300}$

(d) $Y(\omega)=\dfrac{\delta(\omega)}{(j\omega+1)(j\omega+2)}$

18-28 试求下列函数的傅里叶逆变换：

(a) $\dfrac{\pi\,\delta(\omega)}{(5+j\omega)(2+j\omega)}$ (b) $\dfrac{10\delta(\omega+2)}{j\omega(j\omega+1)}$

(c) $\dfrac{20\delta(\omega-1)}{(2+j\omega)(3+j\omega)}$

(d) $\dfrac{5\pi\delta(\omega)}{5+j\omega}+\dfrac{5}{j\omega(5+j\omega)}$

*18-29 试求下列函数的傅里叶逆变换：

(a) $F(\omega)=4\,\delta(\omega+3)+\delta(\omega)+4\,\delta(\omega-3)$

(b) $G(\omega)=4\,u(\omega+2)-4\,u(\omega-2)$

(c) $H(\omega)=6\cos 2\omega$

18-30 对于输入为$x(t)$输出为$y(t)$的线性系统，试求以下几种情况下的冲激响应：

(a) $x(t)=e^{-at}u(t)$，$y(t)=u(t)-u(-t)$

(b) $x(t)=e^{-t}u(t)$，$y(t)=e^{-2t}u(t)$

(c) $x(t)=\delta(t)$，$y(t)=e^{-at}\sin btu(t)$

18-31 已知输出为$y(t)$冲激响应为$h(t)$的线性系统，试求以下几种情况下相应的输入$x(t)$：

(a) $y(t)=te^{-at}u(t)$，$h(t)=e^{-at}u(t)$

(b) $y(t)=u(t+1)-u(t-1)$，$h(t)=\delta(t)$

(c) $y(t)=e^{-at}u(t)$，$h(t)=\mathrm{sgn}(t)$

*18-32 试确定下列傅里叶变换所对应的函数：

(a) $F_1(\omega)=\dfrac{e^{j\omega}}{-j\omega+1}$

(b) $F_2(\omega)=2e^{|\omega|}$

(c) $F_3(\omega)=\dfrac{1}{(1+\omega^2)^2}$

(d) $F_4(\omega)=\dfrac{\delta(\omega)}{1+j2\omega}$

*18-33 如果

(a) $F(\omega)=2\sin\pi\omega[u(\omega+1)-u(\omega-1)]$

(b) $F(\omega)=\dfrac{1}{\omega}(\sin 2\omega-\sin\omega)+\dfrac{j}{\omega}(\cos 2\omega-\cos\omega)$

试求$f(t)$。

18-34 试确定傅里叶变换如图18-38所示的信号$f(t)$（提示：利用对偶性质）。

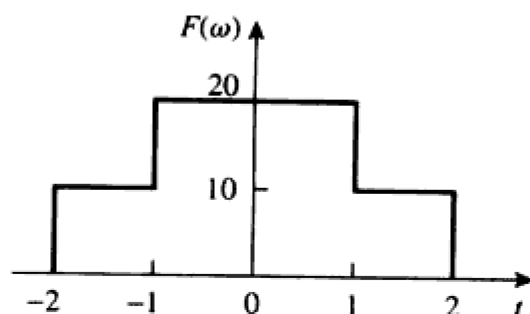


图 18-38 习题 18-34 的波形图

18-35 某信号$f(t)$的傅里叶变换为：

$$F(\omega)=\frac{1}{2+j\omega}$$

试确定下列信号的傅里叶变换：

(a) $x(t)=f(3t-1)$ (b) $y(t)=f(t)\cos 5t$

(c) $z(t)=\dfrac{d}{dt}f(t)$ (d) $h(t)=f(t)*f(t)$

(e) $i(t)=tf(t)$

18.4 节

18-36 某电路的传递函数为：

$$H(\omega)=\frac{2}{j\omega+2}$$

如果该电路的输入信号为$v_s(t)=e^{-4t}u(t)$ V，试求输出信号。假定所有的初始条件均为零。

18-37 试求如图18-39所示电路的传递函数$I_o(\omega)/I_s(\omega)$。

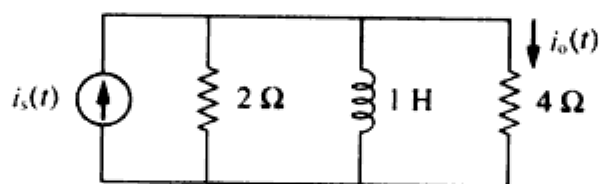


图 18-39 习题 18-37 的电路原理图

18-38 假定$v_s(t)=u(t)$ V，$t>0$，试利用傅里叶变换确定如图18-40所示电路中的$i(t)$。

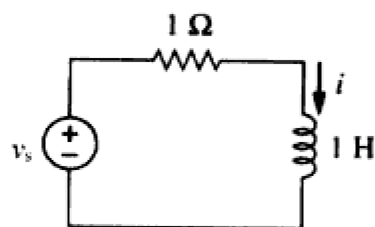
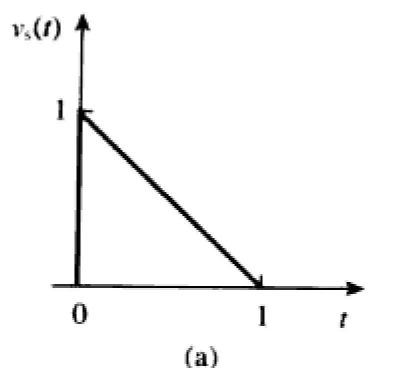


图 18-40 习题 18-38 的电路原理图

18-39 已知如图18-41所示电路及其激励，试确定$i(t)$的傅里叶变换。



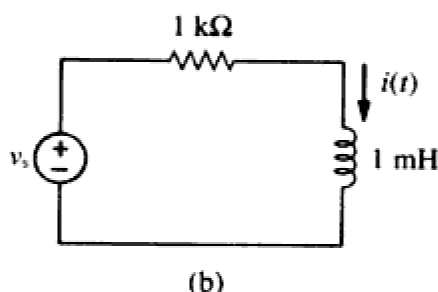


图 18-41 习题 18-39 的波形图与电路原理图

18-40 已知如图18-42a所示的电压源，试确定如图18-42b所示的电路中的电流$i(t)$。

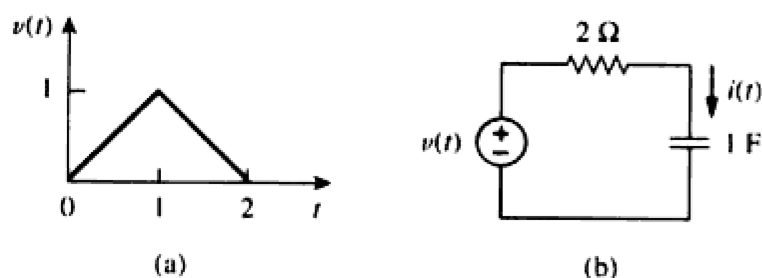


图 18-42 习题 18-40 的波形图与电路原理图

18-41 试确定如图18-43所示电路中$v(t)$的傅里叶变换。

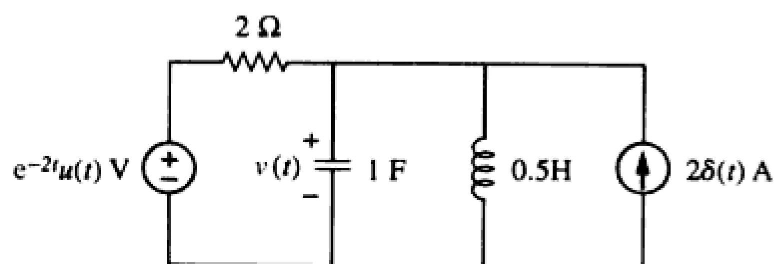


图 18-43 习题 18-41 的电路原理图

18-42 试确定如图18-44所示电路中的电流$i_o(t)$：

(a) 如果$i(t) = \text{sgn}(t)$ A，

(b) 如果$i(t) = 4[u(t) - u(t-1)]$ A。

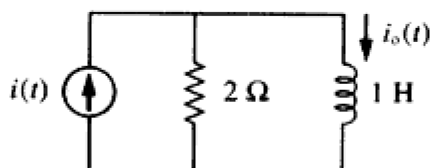


图 18-44 习题 18-42 的电路原理图

18-43 试求如图18-45所示电路中的$v_o(t)$，其中$i_s = 5\,e^{-t}\,u(t)$ A。

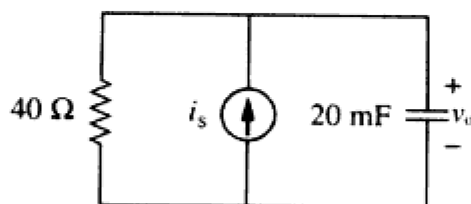


图 18-45 习题 18-43 的电路原理图

18-44 如果如图18-46a所示矩形脉冲作用于如图18-46b所示电路中，试求$t = 1$ s时的v_o。

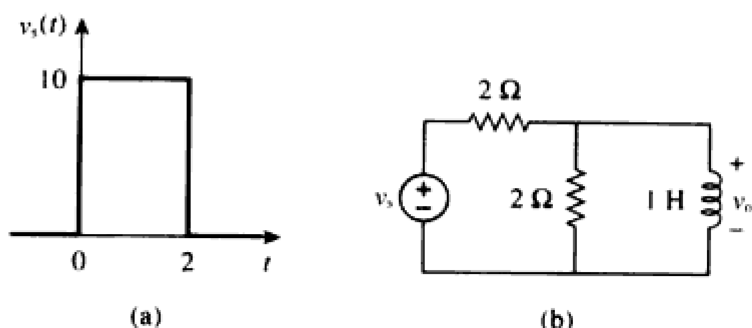


图 18-46 习题 18-44 的波形图与电路原理图

18-45 如果$v_s(t) = 10\,e^{-2t}\,u(t)$，试利用傅里叶变换确定如图18-47所示电路中的$i(t)$。

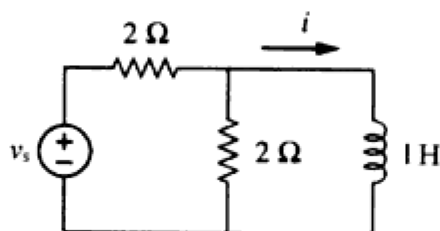


图 18-47 习题 18-45 的电路原理图

18-46 试确定如图18-48所示电路中$i_o(t)$的傅里叶变换。

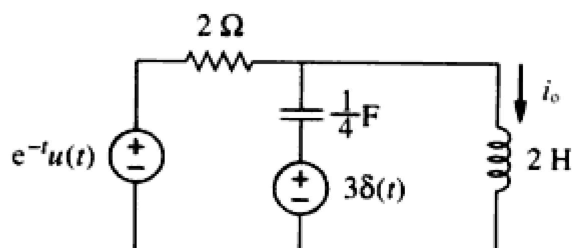


图 18-48 习题 18-46 的电路原理图

18-47 试求如图18-49所示电路中的电压$v_o(t)$。假定$i_s(t) = 8\,e^{-t}\,u(t)$ A。

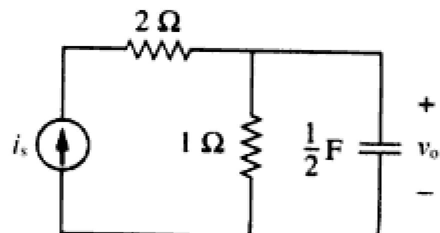


图 18-49 习题 18-47 的电路原理图

18-48　试求如图18-50所示运算放大器电路中的$i_o(t)$。

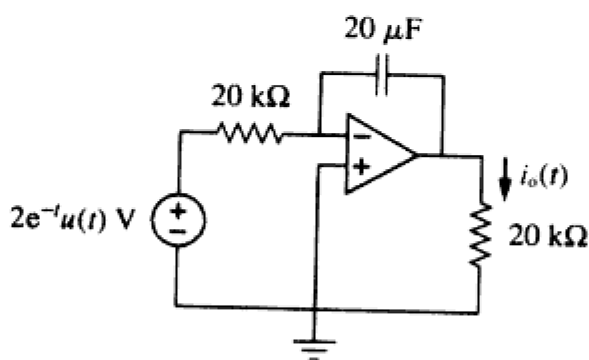


图 18-50　习题 18-48 的电路原理图

18-49　试利用傅里叶变换方法确定如图18-51所示电路中的$v_o(t)$。

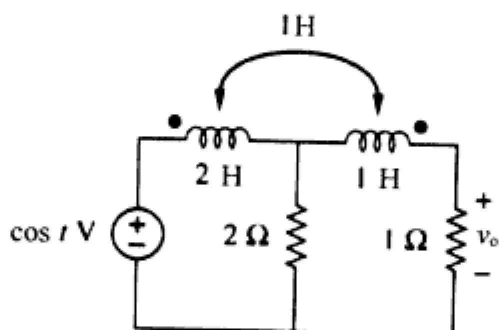


图 18-51　习题 18-49 的电路原理图

18-50　试确定如图18-52所示变压器电路中的$v_o(t)$。

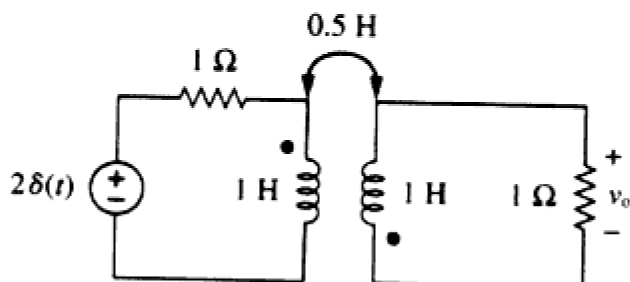


图 18-52　习题 18-50 的电路原理图

18-51　试求如图18-53所示电路中电阻器消耗的能量。

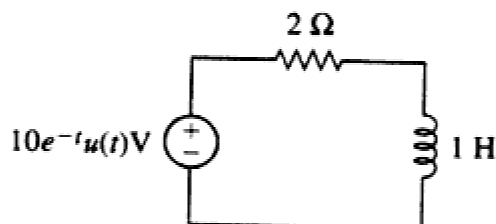


图 18-53　习题 18-51 的电路原理图

18.5 节

18-52　如果$F(\omega)=\dfrac{1}{3+j\omega}$，试求$J=\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt$。

18-53　如果$f(t)=e^{-2|t|}$，试求$J=\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega$。

18-54　已知信号$f(t)=4e^{-t}u(t)$，$f(t)$中的总能量为多少？

18-55　假定$f(t)=5\,e^{-(t-2)}u(t)$，试求$F(\omega)$并由此确定$f(t)$中的总能量。

18-56　某1 Ω电阻器两端的电压为$v(t)=te^{-2t}u(t)$ V，

(a) 该电阻器吸收的总能量为多少？

(b) 在频带$-2\leqslant\omega\leqslant2$ 内吸收的能量占总能量的比例为多少？

18-57　假定$i(t)=2\,e^{t}u(-t)$A，试求$i(t)$携带的总能量，并确定在-5rad/s < ω < 5 rad/s频率范围内1 Ω电阻器吸收能量的百分比。

18.6 节

18-58　某调幅信号为：

e2d

$$f(t)=10(1+4\cos 200\pi t)\cos \pi\times10^4 t$$

试确定下列各项：

(a) 载波频率；(b) 下边带频率；(c) 上边带频率。

18-59　对于如图18-54所示线性系统，当输入为$v_i(t)=2\,\delta(t)$ V时，输出为$v_o(t)=10\,e^{-2t}-6\,e^{-4t}$ V。试求当输入为$v_i(t)=4\,e^{-t}u(t)$ V时的输出。

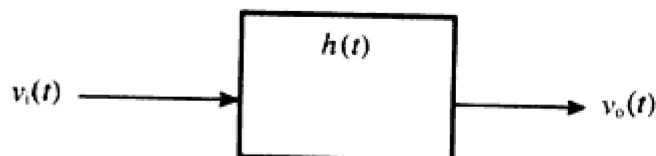


图 18-54　习题 18-59 的线性系统

18-60　某带限信号的傅里叶级数可以表示为

e2d

$$i_s(t)=10+8\cos(2\pi t+30^\circ)+5\cos(4\pi t-150^\circ)\text{ mA}$$

如果该信号作用于如图18-55所示电路，试求$v(t)$。

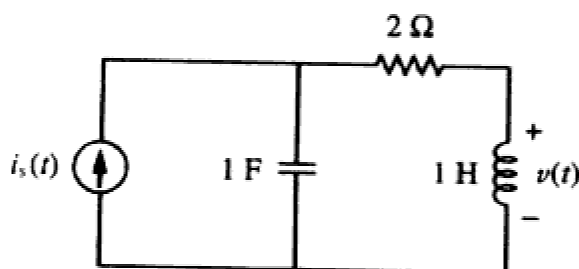


图 18-55　习题 18-60 的电路原理图

18-61　在某系统中，输入信号$x(t)$受到$m(t)=2+\cos\omega_0 t$的幅度调制，响应为$y(t)=x(t)\,m(t)$，试利用$X(\omega)$表示$Y(\omega)$。

18-62 位于频带0.4 kHz～3.5 kHz的某话音信号对10 MHz的载波进行振幅调制，试确定下边带与上边带的频率范围。

18-63 e2d 试计算某地区AM广播频段（540kHz～1 600 kHz）内所允许的无相互干扰的电台数量。

18-64 e2d 对于FM广播频段（88 MHz～108 MHz），重做上题，假定载频间隔为200 kHz。

18-65 话音信号的最高频率分量为3.4 kHz，该话音信号采样器的奈奎斯特频率为多少？

18-66 e2d 某电视信号的带宽限制在4.5 MHz，如果在远处利用采样点重建该信号，试问所允许的最大采样间隔为多少？

*18-67 已知信号$g(t)=\text{sinc}(200\pi t)$，试求该信号的奈奎斯特速率与奈奎斯特间隔。

综合题

18-68 如果某滤波器输入端的电压信号为$v(t)=50e^{-|t|}$ V，试问在1 rad/s < ω < 5 rad/s频率范围内，1 Ω电阻器消耗能量占总能量的百分比为多少？

18-69 某傅里叶变换为：

$$F(\omega)=\frac{20}{4+j\omega}$$

的信号通过一个截止频率为2 rad/s的滤波器（即$0<\omega<2$）。试问输出信号中包含输入信号百分之多少的能量？

第19章 双口网络

人们必须牢记——时间的价值、持之以恒的成功、孜孜工作的乐趣、简单朴素的尊严、个人品德的魅力、善良的力量、榜样的影响力、忠于职守的高尚、经济节俭的智慧、宽容忍耐的美德、才干的增长以及创新的喜悦。

——Bulletin

拓展职业生涯

教育事业

大约三分之二的工程师在企业中工作，还有一些工程师在学术、教育机构工作，帮助学生为其今后的工程职业做好充分的准备，打下良好的基础。你正在学习的电路分析课程就是这一准备过程中一个非常重要的组成部分。如果你喜爱教学，可以考虑将来成为一名工程学教育工作者。



詹姆斯·沃森拍摄

工程领域的教授通常从事处于前沿的课题研究，为本科生与研究生授课，并且为其所在的专业学会或协会提供服务。他们应该对其擅长的领域有创新贡献，因此，这就必然要求他们具备电子工程学科宽广的基础理论，同时掌握与外界进行学术交流的必备技能。

如果你乐意做研究工作，或在工程前沿领域工作，或对技术进步有所贡献、有所发明，或从事咨询、教学方面的工作，那么可以考虑选择工程教育作为你的职业。最佳的起步方式是与教授进行交谈，领略他们的丰富经历并从中受益。

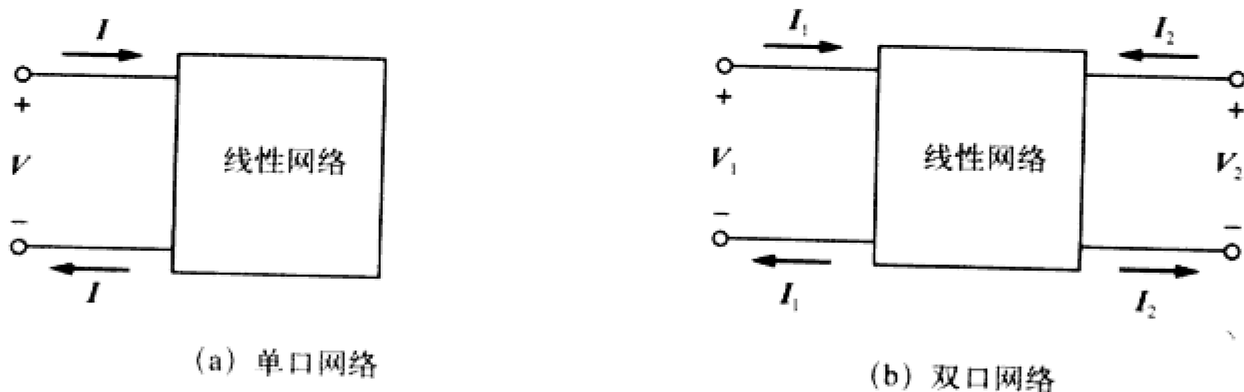
要想成功地成为一名工程领域的教授，那么在本科学习阶段打下坚实的数学和物理学基础至关重要。如果你在求解课后习题的过程中遇到困难，首先要想办法弥补你在数学和物理学基础知识方面的不足之处。

目前，绝大多数大学都要求工程领域的教授具有博士学位，有些大学还要求教授积极参与科学研究，并在有声誉的学术刊物上发表论文。因为电子工程学科发展迅速，已经成为一个多学科交叉的领域，所以要为今后的工程教育职业做好充分的准备，就必须接收尽可能广泛的教育。毫无疑问，工程教育是一个有丰厚回报的职业，每当教授们看到自己的学生毕业，成为各行各业的领军人物，并为人类社会的发展做出重大贡献时，他们都会感到无以言表的满足和充实。

19.1 引言

电流流入或流出电路网络所通过的一对端子（terminal）称为一个端口（port）。双端子器件或元件（例如电阻器、电容器以及电感器）可以构成一个单口（one-port）网络。截至目前我们所接触的绝大多数电路均为双端子电路，即单口电路，如图19-1a所示。前面已经介绍了一对端子两端的电压或流过一对端子的电流，例如电阻器、电容器、电感器两端的电压或流过它们的电流。另外，前面章节中也研究了包括运算放大器、晶体管以及变压器在内的四端子（four-terminal）电路，即双口（two-port）电路，如图19-1b所示。一般来说，一个网络可以包含n个端口，端口是电路网

络的接入通道，由一对端子构成；电流流入一个端子，并从另一个端子流出，因而流入端口的净电流等于零。



（a）单口网络　　（b）双口网络

图 19-1

本章主要介绍双口网络（简称双口）的有关问题。

双口网络是指具有输入端口与输出端口两个不同端口的电子网络。

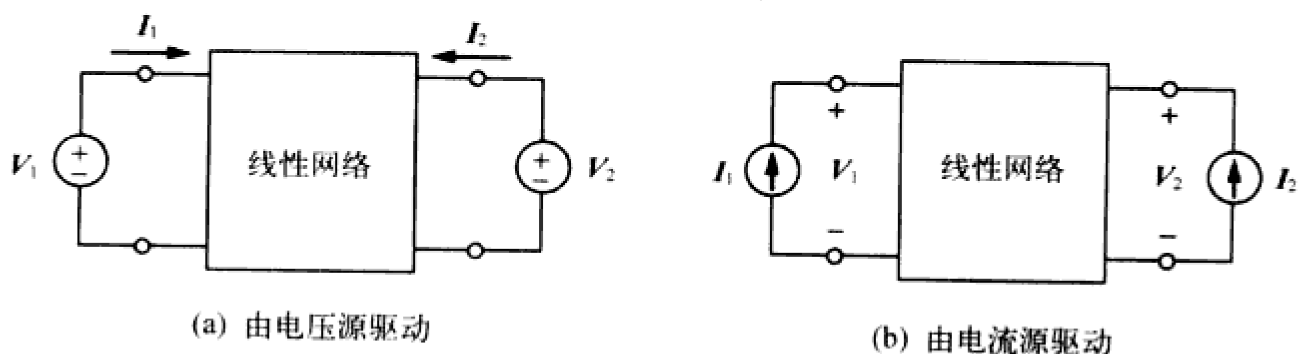
因此，双口网络具有两对端子作为电路的接入通道。如图19-1b所示，流入一对端子中一个端子的电流会从该对端子中的另一个端子流出。诸如晶体管等三端子器件可以配置成一个双口网络。

学习双口网络的原因有两个。首先，这类网络在通信、控制系统、电力系统以及电子学中是非常有用的。例如，在电子学中双口网络可以作为晶体管的模型，从而使得这类电路的级联设计变得更为方便。其次，在大型网络的应用中，知道双口网络的参数，就可以将其处理为一个“黑匣子”，无需关注其内部结构。

刻划双口网络的特征就是要确定如图19-1b所示的端子变量$\boldsymbol{V}_1$、$\boldsymbol{V}_2$、$\boldsymbol{I}_1$以及$\boldsymbol{I}_2$之间的关系，这四个变量中有两个是独立的。描述电压与电流之间关系的一些项称为**参数**（parameter）。本章的目的是推导出六组这样的参数，并给出这些参数之间的关系以及如何实现双口网络的串联、并联或级联。对于运算放大器而言，仅关注电路的端口特性。另外，本章假定双口电路中不包含独立电源。本章最后运用所介绍的概念完成晶体管电路的分析以及阶梯网络的综合。

19.2 阻抗参数

阻抗参数与导纳参数通常用在滤波器综合中，在阻抗匹配网络以及电力配送网络的设计与分析中也十分有用。本节介绍阻抗参数，下一节介绍导纳参数。



(a) 由电压源驱动　　(b) 由电流源驱动

图 19-2　线性双口网络

双口网络可以是电压源驱动的，如图19-2a所示，也可以是电流源驱动的，如图19-2b所示。由图19-2a或图19-2b可见，端子电压与端子电流之间的关系可以表示为：

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{V}_1 &= z_{11}\boldsymbol{I}_1 + z_{12}\boldsymbol{I}_2\\ \boldsymbol{V}_2 &= z_{21}\boldsymbol{I}_1 + z_{22}\boldsymbol{I}_2\end{aligned}} \tag{19-1}$$

或者利用矩阵表示为：

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [z] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{19-2}$$

其中，z 称为**阻抗参数**（impedance parameter），或者简称为z参数（z parameter），其单位为欧姆。

提示：四个变量（V_1、V_2、I_1与I_2）中，仅有两个是独立的，另外两个可以由式(19-1)求得。

令$I_1=0$（输入端口开路）或者$I_2=0$（输出端口开路）即可计算出各参数的值，于是：

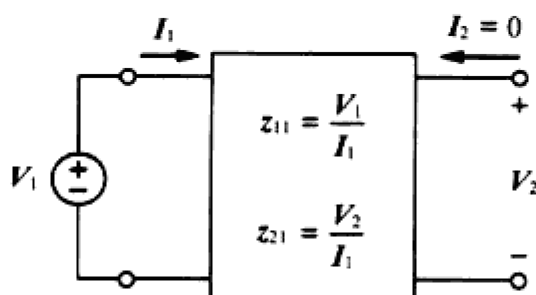
$$z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0}, \quad z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0}$$
$$z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}, \quad z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} \tag{19-3}$$

由于z参数是由输入端口或输出端口开路确定的，所以也称之为**开路阻抗参数**（open-circuit impedance parameter）。

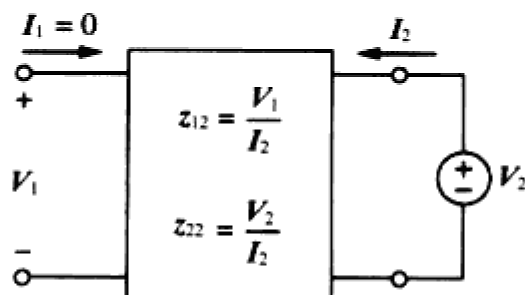
$$\begin{aligned} z_{11} &= \text{开路输入阻抗} \\ z_{12} &= \text{由端口1到端口2的开路转移阻抗} \\ z_{21} &= \text{由端口2到端口1的开路转移阻抗} \\ z_{22} &= \text{开路输出阻抗} \end{aligned} \tag{19-4}$$

根据式(19-3)，在端口2开路的情况下，在端口1处连接电压源V_1（或电流源I_1），并求出I_1与V_2，如图19-3a所示，即可确定z_{11}与z_{21}，于是得到：

$$z_{11} = \frac{V_1}{I_1}, \quad z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \tag{19-5}$$



(a) 求z_{11}与z_{21}



(b) 求z_{12}与z_{22}

图 19-3 z 参数的确定

类似地，在端口1开路的情况下，在端口2处连接电压源V_2（或电流源I_2），并求出I_2与V_1，如图19-3b所示，即可确定z_{12}与z_{22}，于是得到：

$$z_{12} = \frac{V_1}{I_2}, \quad z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \tag{19-6}$$

上述过程提供了一种计算或测量z参数的方法。

z_{11}与z_{22}有时也称为**策动点阻抗**（driving-point impedance），而z_{12}与z_{21}称为**转移阻抗**（transfer impedance）。驱动点阻抗是指二端子（即单口）器件的输入阻抗。因此，z_{11}为输出端口开路时的输入策动点阻抗，而z_{22}为输入端口开路时的输出策动点阻抗。

当$z_{11}=z_{22}$时，则称该双口网络为**对称的**（symmetrical）。这意味着网络关于某中心线呈镜像对称性，也就是说，该中心线将网络划分为相同的两部分。

当双口网络为线性网络且不包含受控源时，如果转移阻抗相等（即$z_{12}=z_{21}$），则称该双口网络为**互易**（reciprocal）网络。对于互易网络而言，如果网络的激励点与响应点互相交换，其转移阻抗保持不变。如图19-4所示，如果将图中的一个端口处的理想电压源与另一个端口处的理想电流表互换位置后，电流表的读数保持不变，则该双口网络就是互易网络。根据式(19-1)，对于如图19-4a所示

接法的互易网络，可以得到$V = z_{12}I$，对于如图19-4b所示接法的互易网络，则可得到$V = z_{21}I$，这样的结果仅当$z_{12} = z_{21}$时才成立。任何全部由电阻器、电容器与电感器构成双端网络必为互易网络。互易双口网络可以用如图19-5a所示的T形电路来等效，对于非互易双口网络而言，更通用的等效电路如图19-5b所示，注意，该等效电路可以由式(19-1)直接得出。

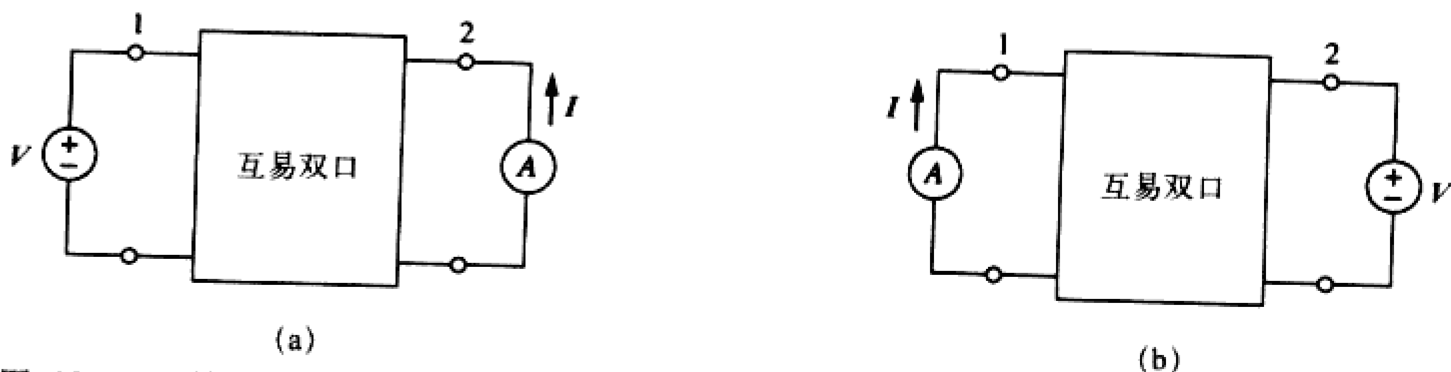


图 19-4 互易双口网络中一个端口处的电压源与另一个端口处的理想电流表互换位置后，电流表读数完全相同

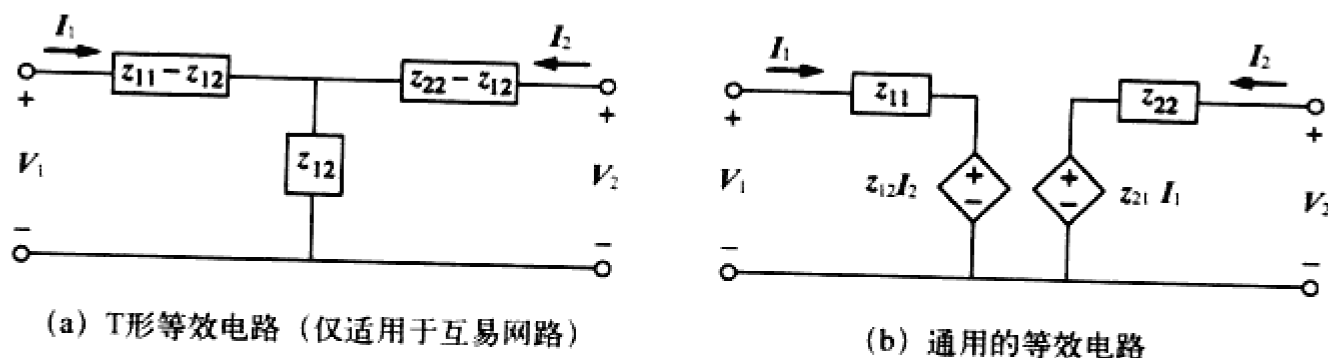


图 19-5

应该指出，某些双口网络是不存在z参数的，因为这类网络不能由式(19-1)描述。例如，对于如图19-6所示的理想变压器，其双口网络的定义方程为：

$$V_1 = \frac{1}{n}V_2, I_1 = -nI_2 \tag{19-7}$$

由此可见，不可能像式(19-1)那样利用电流表示电压，反之亦然。因此，理想变压器不存在z参数，然而，正如19.4节将要介绍的，它确实存在混合参数。

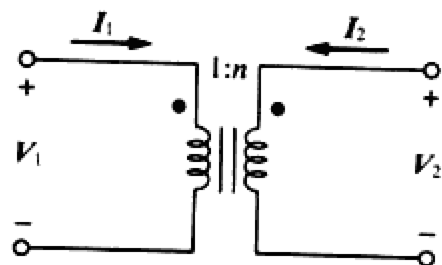


图 19-6 理想变压器不存在 z 参数

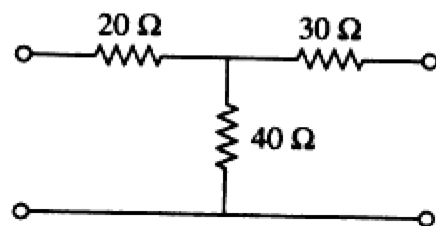


图 19-7 例题 19-1 的电路原理图

例题19-1 试确定如图19-7所示电路的z参数。

解

方法1：为了确定z_{11}与z_{21}，须在输入端口处施加一个电压源V_1，并保持输出端口开路，如图19-8a所示。于是：

$$z_{11} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{(20+40)I_1}{I_1} = 60\Omega$$

即z_{11}为端口1处的输入阻抗。

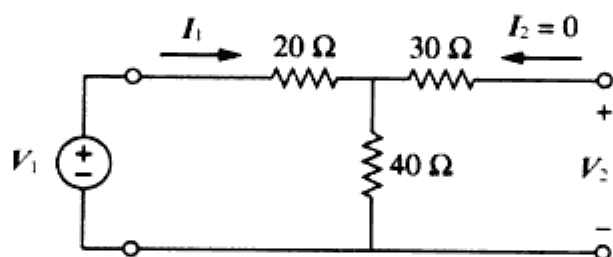
$$z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = \frac{40I_1}{I_1} = 40\Omega$$

为了确定z_{12}与z_{22}，须在输出端口处施加一个电压源V_2，并保持输入端口开路，如图19-8b所示。于是：

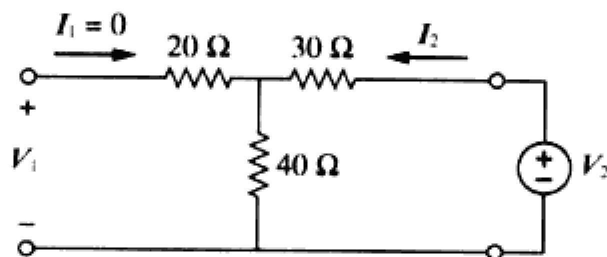
$$z_{12} = \frac{V_1}{I_2} = \frac{40I_2}{I_2} = 40\Omega,\ z_{22} = \frac{V_2}{I_2} = \frac{(30+40)I_2}{I_2} = 70\Omega$$

因此，

$$[z]=\begin{bmatrix}60\Omega & 40\Omega\\ 40\Omega & 70\Omega\end{bmatrix}$$



（a）求解z_{11}与z_{21}



（b）求解z_{12}与z_{22}

图 19-8 例题 19-1 的电路原理图

方法2：由于已知电路中不存在受控源，所以$z_{12}=z_{21}$，并且可以利用如图19-5a所示的T形电路。将图19-7与图19-5a相比较，可以得到：

$$z_{12}=40\ \Omega=z_{21}$$
$$z_{11}-z_{12}=20 \quad\Rightarrow\quad z_{11}=20+z_{12}=60\ \Omega$$
$$z_{22}-z_{12}=30 \quad\Rightarrow\quad z_{22}=30+z_{12}=70\ \Omega$$

练习题19-1 试求如图19-9所示双口网络的z参数。

答 $z_{11}=14\ \Omega$，$z_{12}=z_{21}=z_{22}=6\ \Omega$。

例题19-2 试求如图19-10所示电路中的I_1与I_2。

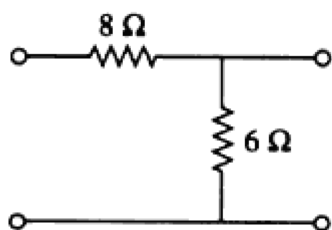


图 19-9 练习题 19-1 的电路原理图

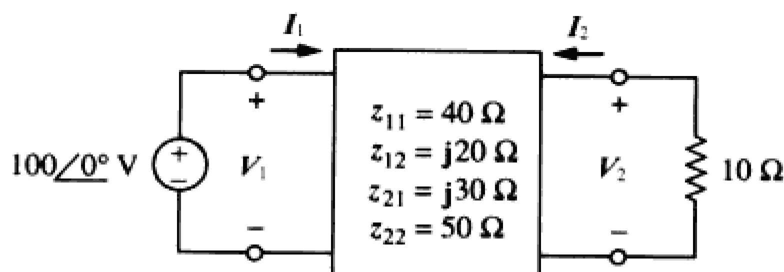


图 19-10 例题 19-2 的电路原理图

解 该网络不是互易网络，可以利用如图19-5b所示的等效电路计算，也可以直接利用式(19-1)计算。将已知的z参数代入式(19-1)可以得到：

$$V_1=40\,I_1+\mathrm{j}20\,I_2 \tag{19-2-1}$$
$$V_2=\mathrm{j}30\,I_1+50\,I_2 \tag{19-2-2}$$

因为要求的是电流I_1与I_2，所以将如下电压：

$$V_1=100\underline{/0^\circ},\quad V_2=-10I_2$$

代入式(19-2-1)与式(19-2-2)，可以得到：

$$100=40\,I_1+\mathrm{j}20\,I_2 \tag{19-2-3}$$

$$-10\ I_2=j30\ I_1+50\ I_2 \quad\Rightarrow\quad I_1=\mathrm{j}2\ I_2 \quad (19\text{-}2\text{-}4)$$

将式(19-2-4)代入式(19-2-3)，得到：

$$100=\mathrm{j}80I_2+\mathrm{j}20I_2\Rightarrow I_2=\frac{100}{\mathrm{j}100}=-\mathrm{j}$$

由式(19-2-4)可得，$I_1=\mathrm{j}2(-\mathrm{j})=2$。因此，

$$I_1=2\underline{/0^\circ}\mathrm{A},\quad I_2=1\underline{/-90^\circ}\mathrm{A}$$

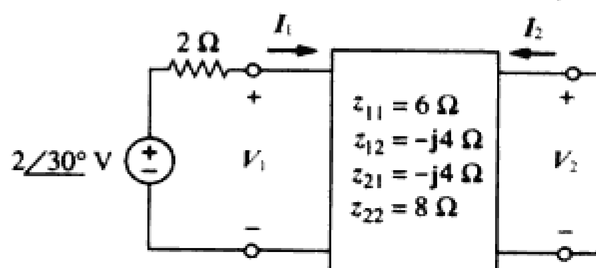


图 19-11 练习题 19-2 的电路原理图

练习题19-2 试计算如图19-11所示双口网络中的I_1

与$\boldsymbol{I}_2$。

答 $200\angle 30°$ mA, $100\angle 120°$ mA 。

19.3 导纳参数

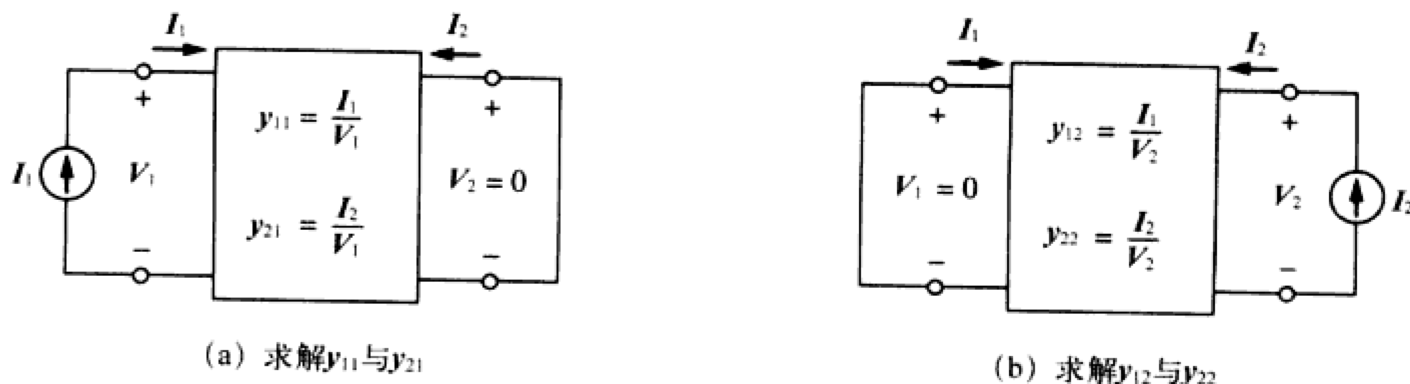
通过前一节的学习可知，某些双口网络可能不存在阻抗参数，因此需要采用另一种方法描述这类网络。利用网络的端子电压表示端子电流可以得到另一组网络参数。对于如图19-12a或图19-12b所示电路，端子电流可以利用端子电压表示为：

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{I}_1 &= \boldsymbol{y}_{11}\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{y}_{12}\boldsymbol{V}_2 \\ \boldsymbol{I}_2 &= \boldsymbol{y}_{21}\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{y}_{22}\boldsymbol{V}_2 \end{aligned}} \tag{19-8}$$

其矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 \\ \boldsymbol{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_{11} & \boldsymbol{y}_{12} \\ \boldsymbol{y}_{21} & \boldsymbol{y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1 \\ \boldsymbol{V}_2 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{y}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1 \\ \boldsymbol{V}_2 \end{bmatrix} \tag{19-9}$$

其中，$\boldsymbol{y}$称为*导纳参数*（admittance parameter）（或简称为y参数），其单位为西门子。



（a）求解$\boldsymbol{y}_{11}$与$\boldsymbol{y}_{21}$　（b）求解$\boldsymbol{y}_{12}$与$\boldsymbol{y}_{22}$

图 19-12　y 参数的确定

令$\boldsymbol{V}_1=0$（输入端口短路）或$\boldsymbol{V}_2=0$（输出端口短路）即可确定导纳参数的值，于是：

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{y}_{11} &= \frac{\boldsymbol{I}_1}{\boldsymbol{V}_1}\bigg|_{\boldsymbol{V}_2=0}, \quad \boldsymbol{y}_{12} = \frac{\boldsymbol{I}_1}{\boldsymbol{V}_2}\bigg|_{\boldsymbol{V}_1=0} \\ \boldsymbol{y}_{21} &= \frac{\boldsymbol{I}_2}{\boldsymbol{V}_1}\bigg|_{\boldsymbol{V}_2=0}, \quad \boldsymbol{y}_{22} = \frac{\boldsymbol{I}_2}{\boldsymbol{V}_2}\bigg|_{\boldsymbol{V}_1=0} \end{aligned}} \tag{19-10}$$

由于y参数可以由输入端口短路或输出端口短路求得，所以也称之为*短路导纳参数*（short-circuit admittance parameter）。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_{11} &= \text{短路输入导纳} \\ \boldsymbol{y}_{12} &= \text{由端口 2 到端口 1 的短路转移导纳} \\ \boldsymbol{y}_{21} &= \text{由端口1到端口2的短路转移导纳} \\ \boldsymbol{y}_{22} &= \text{短路输出导纳} \end{aligned} \tag{19-11}$$

由式(19-10)可知，在如图19-12a所示的端口1连接电流源$\boldsymbol{I}_1$，端口2短路的情况下，求出$\boldsymbol{V}_1$与$\boldsymbol{I}_2$，即可确定$\boldsymbol{y}_{11}$与$\boldsymbol{y}_{21}$：

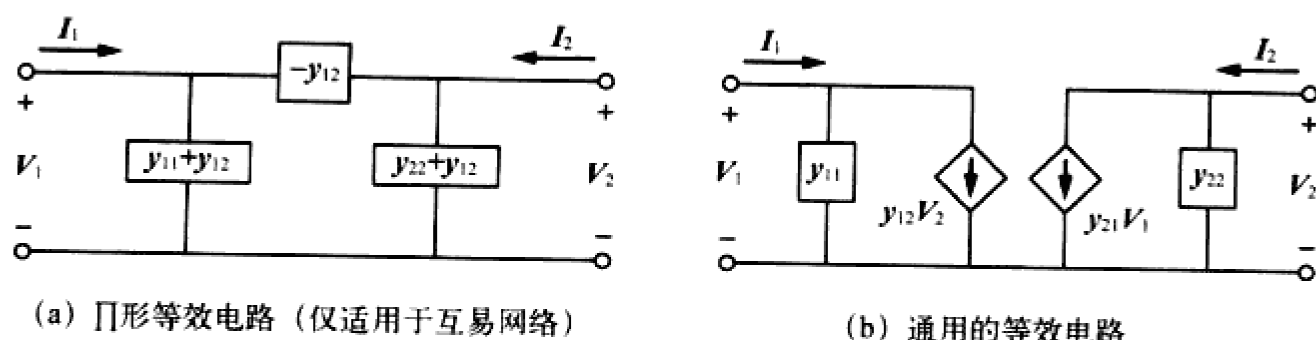
$$\boldsymbol{y}_{11} = \frac{\boldsymbol{I}_1}{\boldsymbol{V}_1}, \quad \boldsymbol{y}_{21} = \frac{\boldsymbol{I}_2}{\boldsymbol{V}_1} \tag{19-12}$$

类似地，在如图19-12b所示的端口2连接电流源$\boldsymbol{I}_2$，端口1短路的情况下，求出$\boldsymbol{I}_1$与$\boldsymbol{V}_2$，即可确定$\boldsymbol{y}_{12}$和$\boldsymbol{y}_{22}$：

$$y_{12}=\frac{I_1}{V_2},\quad y_{22}=\frac{I_2}{V_2} \tag{19-13}$$

上述过程提供了一种计算或测量y参数的方法。阻抗参数与导纳参数统称为导抗（immittance）参数。

对于不包含受控源的线性双口网络而言，其转移导纳是相等的（即$y_{12}=y_{21}$），其证明方法与z参数的证明方法相同。互易网络（$y_{12}=y_{21}$）可以建模为如图19-13a所示的∏形等效电路。对于非互易网络，更为通用的等效网络如图19-13b所示。



（a）∏形等效电路（仅适用于互易网络）（b）通用的等效电路

图 19-13

例题19-3 试确定如图19-14所示∏网络的y参数。

解

方法1：为了确定y_{11}与y_{21}，需将输出端口短路，并在输入端口处连接一个电流源I_1，如图19-15a所示。由于此时8 Ω电阻器被短路，2 Ω电阻器与4 Ω电阻器相互并联，所以：

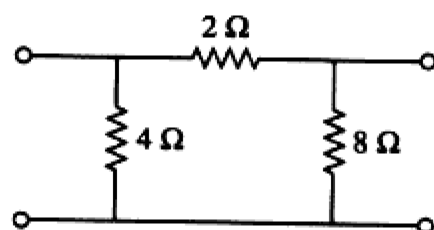


图 19-14 例题 19-3 的电路原理图

$$V_1=I_1(4\parallel 2)=\frac{4}{3}I_1, y_{11}=\frac{I_1}{V_1}=\frac{I_1}{\frac{4}{3}I_1}=0.75\text{S}$$

根据分流原理可以得到：

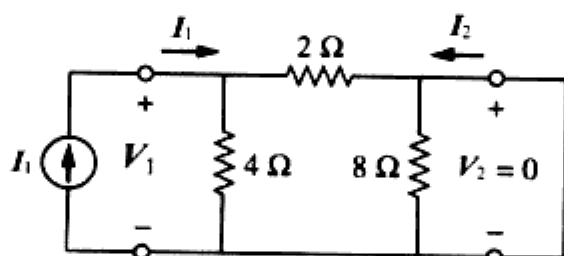
$$-I_2=\frac{4}{4+2}I_1=\frac{2}{3}I_1,\quad y_{21}=\frac{I_2}{V_1}=\frac{-\frac{2}{3}I_1}{\frac{4}{3}I_1}=-0.5\text{S}$$

为了确定y_{12}与y_{22}，需将输入端口短路，并在输出端口处连接一个电流源I_2，如图19-15b所示。此时4 Ω电阻器被短路，2 Ω电阻器与8 Ω电阻器相互并联，于是：

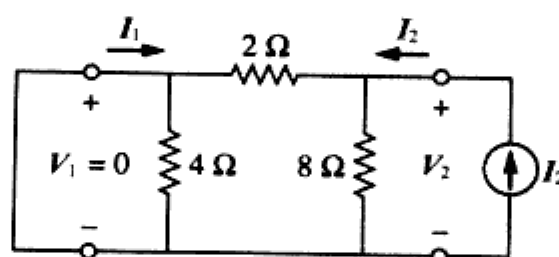
$$V_2=I_2(8\parallel 2)=\frac{8}{5}I_2,\quad y_{22}=\frac{I_2}{V_2}=\frac{I_2}{\frac{8}{5}I_2}=\frac{5}{8}=0.625\text{S}$$

根据分流原理可以得到：

$$-I_1=\frac{8}{8+2}I_2=\frac{4}{5}I_2,\quad y_{12}=\frac{I_1}{V_2}=\frac{-\frac{4}{5}I_2}{\frac{8}{5}I_2}=-0.5\text{S}$$



（a）求解y_{11}与y_{21}



（b）求解y_{12}与y_{22}

图 19-15 例题 19-3 的电路原理图

方法2：比较图19-14与图19-13a可以得到：

$$y_{12} = -\frac{1}{2}\text{S} = y_{21}$$

$$y_{11} + y_{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow y_{11} = \frac{1}{4} - y_{12} = 0.75\text{S}$$

$$y_{22} + y_{12} = \frac{1}{8} \Rightarrow y_{22} = \frac{1}{8} - y_{12} = 0.625\text{S}$$

与方法1的结果相同。

练习题19-3 试确定如图19-16所示T形网络的y参数。

答 $y_{11} = 0.2273$ S、$y_{12} = y_{21} = -0.090\,9$ S、$y_{22} = 0.136\,4$ S。

例题19-4 试确定如图19-17所示双口网络的y参数。

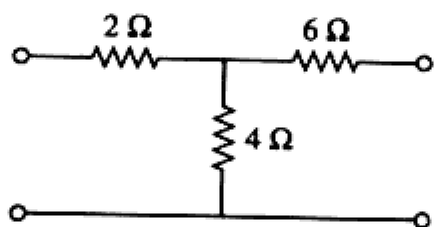


图 19-16 练习题 19-3 的电路原理图

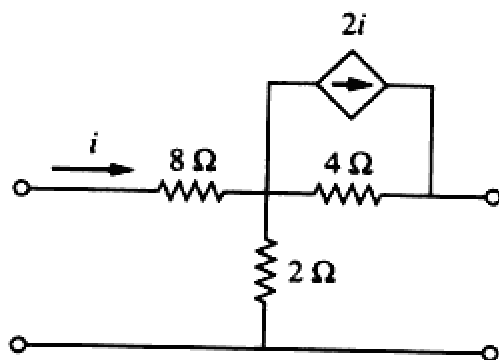


图 19-17 例题 19-4 的电路原理图

解 本例的求解过程与前一例题方法1的求解过程相同。为了确定y_{11}与y_{21}，需利用如图19-18a所示电路，即端口2被短路，在端口1处施加一个电流源。于是，在节点1处有：

$$\frac{V_1 - V_o}{8} = 2I_1 + \frac{V_o}{2} + \frac{V_o - 0}{4}$$

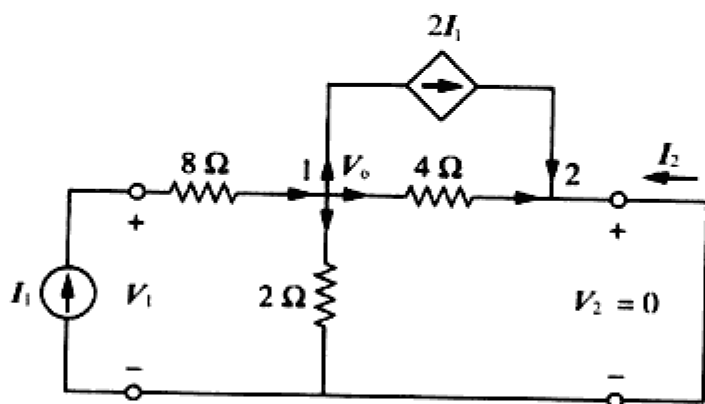
但是，$I_1 = \dfrac{V_1 - V_o}{8}$，所以

$$0 = \frac{V_1 - V_o}{8} + \frac{3V_o}{4}$$

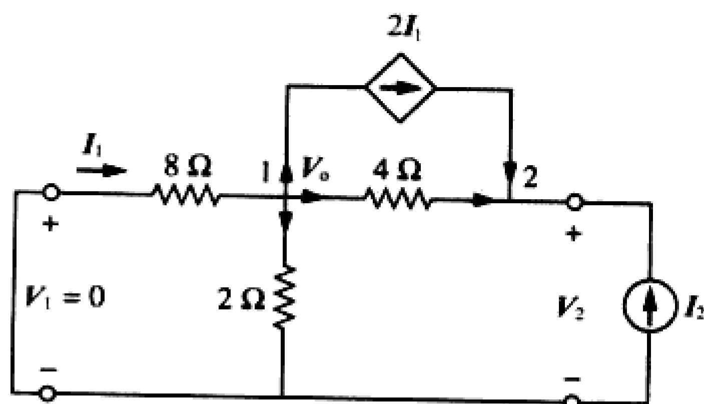
$$0 = V_1 - V_o + 6V_o \Rightarrow V_1 = -5V_o$$

因此，

$$I_1 = \frac{-5V_o - V_o}{8} = -0.75V_o$$



(a) 求解y_{11}与y_{21}



(b) 求解y_{12}与y_{22}

图 19-18 例题 19-4 的求解

并且，

$$y_{11}=\frac{I_1}{V_1}=\frac{-0.75V_o}{-5V_o}=0.15\text{S}$$

在节点2处，有：

$$\frac{V_o-0}{4}+2I_1+I_2=0$$

即：

$$-I_2=0.25\ V_o\ -1.5\ V_o=-1.25\ V_o$$

因此，

$$y_{21}=\frac{I_2}{V_1}=\frac{1.25V_o}{-5V_o}=-0.25\text{S}$$

同理，可以利用图19-19b求出y_{12}与y_{22}。在节点1处，有

$$\frac{0-V_o}{8}=2I_1+\frac{V_o}{2}+\frac{V_o-V_2}{4}$$

但是，$I_1=\frac{0-V_o}{8}$，所以：

$$0=-\frac{V_o}{8}+\frac{V_o}{2}+\frac{V_o-V_2}{4}$$

即：

$$0=-V_o+4\ V_o+2\ V_o-2\ V_2 \quad \Rightarrow \quad V_2=2.5\ V_o$$

因此，

$$y_{12}=\frac{I_1}{V_2}=\frac{-V_o/8}{2.5V_o}=-0.05\text{S}$$

在节点2处：

$$\frac{V_o-V_2}{4}+2I_1+I_2=0$$

即：

$$-I_2=0.25V_o-\frac{1}{4}(2.5V_o)-\frac{2V_o}{8}=-0.625V_o$$

于是，

$$y_{22}=\frac{I_2}{V_2}=\frac{0.625V_o}{2.5V_o}=0.25\text{S}$$

注意，本例中$y_{12}\neq y_{21}$，因为该网络不是互易网络。

练习题19-4　试确定如图19-19所示电路的y参数。

答　$y_{11}=0.625$ S，$y_{12}=-0.125$ S，$y_{21}=0.375$ S，$y_{22}=0.125$ S。

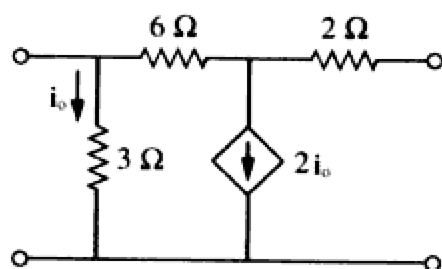


图19-19　练习题19-4的电路原理图

19.4　混合参数

双口网络的z参数与y参数并不总是存在的，所以有必要推出另外一组参数来描述双口网络。第三组参数是以V_1与I_2作为独立变量而得到的，即：

$$\boxed{\begin{aligned}V_1&=h_{11}I_1+h_{12}V_2\\ I_2&=h_{21}I_1+h_{22}V_2\end{aligned}} \tag{19-14}$$

其矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [h] \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{19-15}$$

其中，h项称为混合参数（hybrid parameter）（或简称为h参数），因为这组参数是由电压与电流之间的混合比构成的。h参数在描述诸如晶体管之类的电子器件时非常有用（参见19.9节），对于这类器件而言，采用实验方法测量h参数要比测量z参数或y参数容易得多。实际上，式(19-7)描述的如图19-6所示的理想变压器不存在z参数，但是由于式(19-7)与式(19-14)形式一致，所以可以用混合参数描述理想变压器。

h参数的值可以按下式确定：

$$h_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0}, \quad h_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0}$$
$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0}, \quad h_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0} \tag{19-16}$$

由式(19-16)显然可见，h_{11}、h_{12}、h_{21}与h_{22}分列表示阻抗、电压增益、电流增益与导纳，因而称之为混合参数。

$$\begin{aligned} h_{11} &= \text{短路输入阻抗} \\ h_{12} &= \text{开路反向电压增益} \\ h_{21} &= \text{短路前向电流增益} \\ h_{22} &= \text{开路输出导纳} \end{aligned} \tag{19-17}$$

计算h参数的过程与计算z参数或y参数的过程类似。根据所要计算的参数，在适当的端口处施加电压源或电流源，将另一个端口短路或开路，并进行电路分析即可。对于互易网络而言，$h_{12} = -h_{21}$，其证明方法与$z_{12} = z_{21}$的证明方法相同。图19-20给出了双口网络的混合模型。

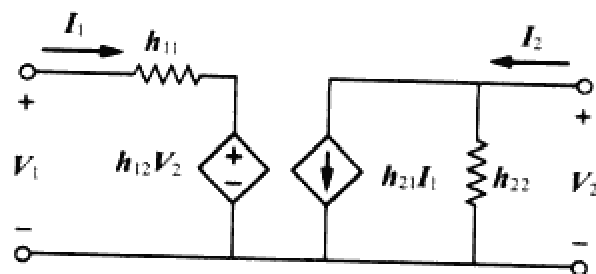


图 19-20 双口网络的 h 参数等效电路

与h参数密切相关的另一组参数为g参数或逆混合参数（inverse hybrid parameter），利用g参数描述的端子电流与端子电压方程为：

$$\begin{aligned} I_1 &= g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \\ V_2 &= g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \end{aligned} \tag{19-18}$$

即：

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [g] \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{19-19}$$

g参数的值可以确定如下：

$$g_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{I_2=0}, \quad g_{12} = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_1=0}$$
$$g_{21} = \left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{I_2=0}, \quad g_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{V_1=0} \tag{19-20}$$

于是，逆混合参数分别称为：

$$\begin{aligned} g_{11} &= \text{开路输入导纳} \\ g_{12} &= \text{短路反向电流增益} \\ g_{21} &= \text{开路前向电压增益} \\ g_{22} &= \text{短路输出阻抗} \end{aligned} \tag{19-21}$$

图19-21给出了双口网络的逆混合参数电路模型。g参数通常用于场效应晶体管的建模。

例题19-5 试求如图19-22所示的双口网络的混合参数。

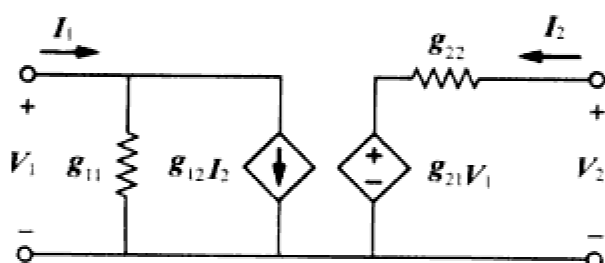


图 19-21 双口网络的 g 参数模型

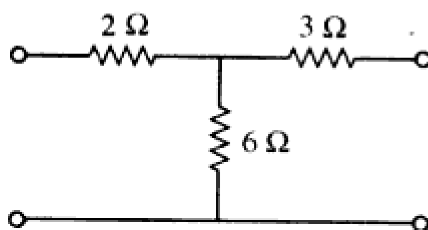


图 19-22 例题 19-5 的电路原理图

解 为了确定h_{11}与h_{21}，需将输出端口短路，并在输入端口处连接一个电流源I_1，如图19-23a所示，由图可知，

$$V_1 = I_1(2 + 3 \parallel 6) = 4\, I_1$$

因此，

$$h_{11} = \frac{V_1}{I_1} = 4\Omega$$

另外，对如图19-23a所示电路利用分流原理，可以得到：

$$-I_2 = \frac{6}{6+3}I_1 = \frac{2}{3}I_1$$

因此，

$$h_{21} = \frac{I_2}{I_1} = -\frac{2}{3}$$

为了确定h_{12}与h_{22}，需将输入端口开路，并在输出端口处连接一个电压源V_2，如图19-23b所示。根据分压原理可以得到：

$$V_1 = \frac{6}{6+3}V_2 = \frac{2}{3}V_2$$

因此，

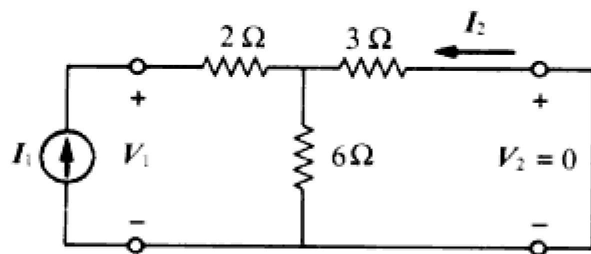
$$h_{12} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$$

另外，

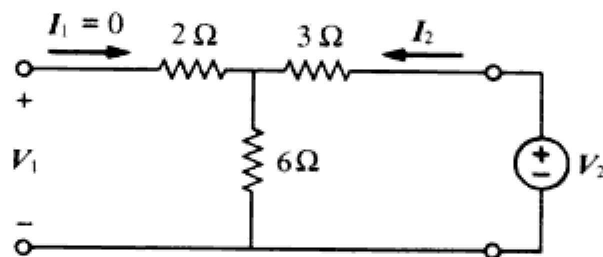
$$V_2 = (3+6)\, I_2 = 9\, I_2$$

于是，

$$h_{22} = \frac{I_2}{V_2} = \frac{1}{9}\text{S}$$



(a) 计算h_{11}与h_{21}



(b) 计算h_{12}与h_{22}

图 19-23 例题 19-5 的电路原理图

练习题19-5 试确定如图19-24所示电路的h参数。

答 $h_{11} = 1.2\,\Omega$，$h_{12} = 0.4$，$h_{21} = -0.4$，$h_{22} = 0.4\,\text{S}$。

例题19-6 试确定如图19-25所示电路从输出端口看进去的戴维南等效电路。

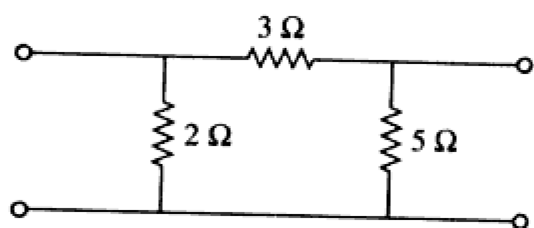


图 19-24 练习题 19-5 的电路原理图

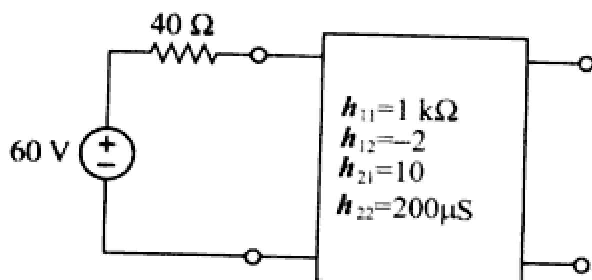
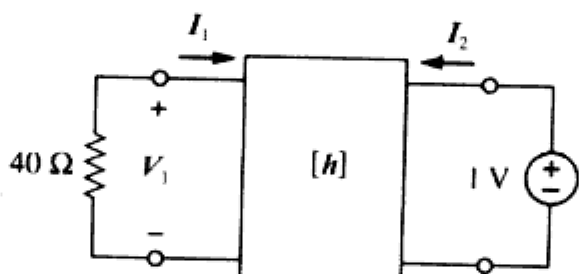


图 19-25 例题 19-6 的电路原理图

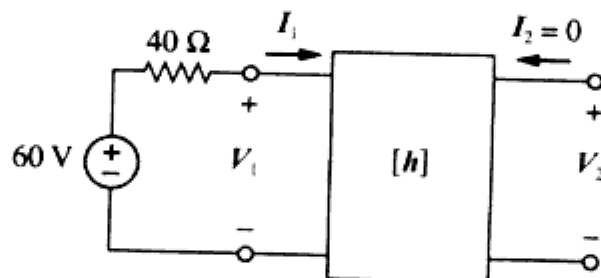
解 采用确定戴维南等效Z_{Th}与V_{Th}的通用过程求解本例，其间会用到h参数模型中描述输入端口与输出端口之间关系的公式。确定Z_{Th}时，须将输入端口处的60 V电压源短路，并在输出端口处施加一个1V电压源，如图19-26a所示。由式(19-14)可以得到：

$$V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \tag{19-6-1}$$

$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \tag{19-6-2}$$



(a) 求解Z_{Th}



(b) 求解V_{Th}

图 19-26 例题 19-6 的电路原理图

但是，$V_2=1$，$V_1=-40\,I_1$，将其代入式(19-6-1)与式(19-6-2)，可以得到：

$$-40I_1 = h_{11}I_1 + h_{12} \Rightarrow I_1 = -\frac{h_{12}}{40+h_{11}} \tag{19-6-3}$$

$$I_2 = h_{21}\,I_1 + h_{22} \tag{19-6-4}$$

将式(19-6-3)代入式(19-6-4)，得到：

$$I_2 = h_{22} - \frac{h_{21}h_{12}}{h_{11}+40} = \frac{h_{11}h_{22} - h_{21}h_{12} + h_{22}40}{h_{11}+40}$$

因此，

$$Z_{Th} = \frac{V_2}{I_2} = \frac{1}{I_2} = \frac{h_{11}+40}{h_{11}h_{22} - h_{21}h_{12} + h_{22}40}$$

将h参数的值代入，可以得到：

$$Z_{Th} = \frac{1000+40}{10^3\times 200\times 10^{-6} + 20 + 40\times 200\times 10^{-6}} = \frac{1040}{20.21} = 51.46\Omega$$

为了求出V_{Th}，需求出如图19-26b所示的开路电压V_2。在输入端口处，有：

$$-60+40\,I_1+V_1=0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = 60-40\,I_1 \tag{19-6-5}$$

在输出端口处，有：

$$I_2 = 0 \tag{19-6-6}$$

将式(19-6-5)与式(19-6-6)代入式(19-6-1)与式(19-6-2)，可以得到：

$$60-40\,I_1 = h_{11}\,I_1 + h_{12}\,V_2$$

即：

$$60=(h_{11}+40)I_1+h_{12}V_2 \tag{19-6-7}$$

并且，

$$0=h_{21}I_1+h_{22}V_2 \Rightarrow I_1=-\frac{h_{22}}{h_{21}}V_2 \tag{19-6-8}$$

将式(19-6-8)代入式(19-6-7)，得到：

$$60=\left[-(h_{11}+40)\frac{h_{22}}{h_{21}}+h_{12}\right]V_2$$

即：

$$V_{Th}=V_2=\frac{60}{-(h_{11}+40)h_{22}/h_{21}+h_{12}}=\frac{60h_{21}}{h_{12}h_{21}-h_{11}h_{22}-40h_{22}}$$

将h参数的值代入后得到：

$$V_{Th}=\frac{60\times 10}{-20.21}=-29.69\text{V}$$

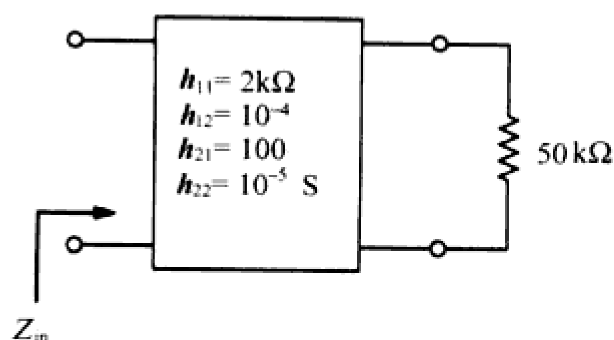


图 19-27　练习题 19-6 的电路原理图

练习题19-6　试求如图19-27所示电路中输入端口的阻抗。

答　1.666 7 kΩ。

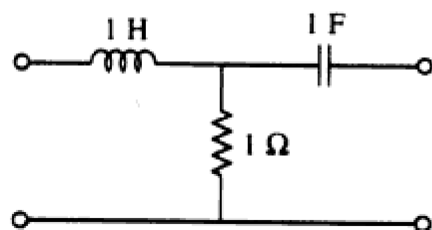


图 19-28　例题 19-7 的电路原理图

例题19-7　试求如图19-28所示电路以s为自变量的g参数。

解　在s域中，

$$1\text{H} \Rightarrow sL=s, 1\text{F} \Rightarrow \frac{1}{sC}=\frac{1}{s}$$

为了确定g_{11}与g_{21}，应将输出端口开路，并在输入端口处连接一个电压源V_1，如图19-29a所示。由图可见：

$$I_1=\frac{V_1}{s+1}$$

即：

$$g_{11}=\frac{I_1}{V_1}=\frac{1}{s+1}$$

根据分压原理可以得到：

$$V_2=\frac{1}{s+1}V_1$$

即：

$$g_{21}=\frac{V_2}{V_1}=\frac{1}{s+1}$$

为了确定g_{12}与g_{22}，需将输入端口短路，并在输出端口处连接一个电流源I_2，如图19-29b所示。根据分流原理可以得到：

$$I_1=-\frac{1}{s+1}I_2$$

即：

$$g_{12}=\frac{I_1}{I_2}=-\frac{1}{s+1}$$

另外，

$$V_2=I_2\left(\frac{1}{s}+s\parallel 1\right)$$

即：

$$g_{22}=\frac{V_2}{I_2}=\frac{1}{s}+\frac{s}{s+1}=\frac{s^2+s+1}{s(s+1)}$$

因此，

$$[g]=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & -\dfrac{1}{s+1}\\ \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{s^2+s+1}{s(s+1)}\end{bmatrix}$$

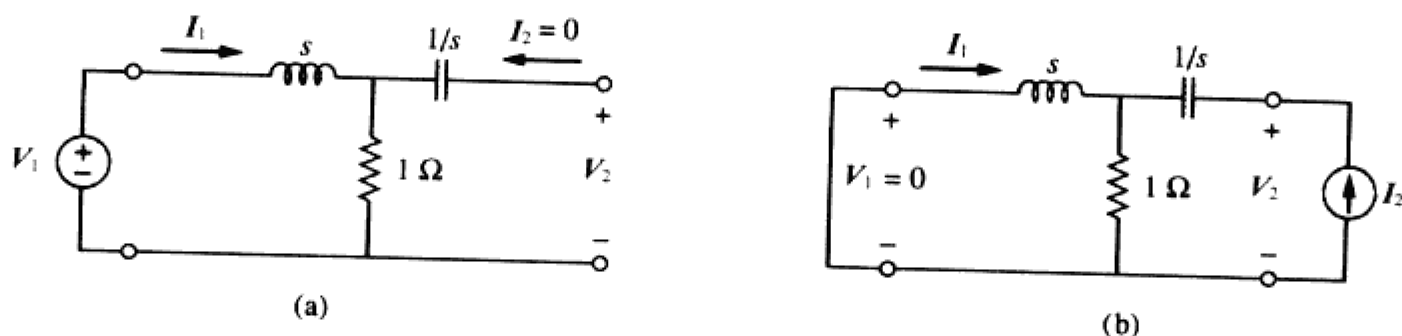


图 19-29 确定如图 19-28 所示电路的 s 域 g 参数

练习题19-7 对于如图19-30所示的阶梯网络，试确定其s域g参数。

答

$$[g]=\begin{bmatrix}\dfrac{s+2}{s^2+3s+1} & -\dfrac{1}{s^2+3s+1}\\ \dfrac{1}{s^2+3s+1} & \dfrac{s(s+2)}{s^2+3s+1}\end{bmatrix}。$$

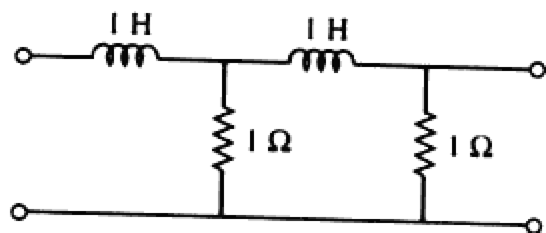


图 19-30 练习题 19-7 的电路原理图

19.5 传输参数

由于将端子电压与端子电流中哪个作为独立变量，哪个作为受控变量并不存在任何限制，所以，可以产生很多组不同的参数。其中一组参数表示了输入端口变量与输出端口变量之间关系，于是：

$$\boxed{\begin{aligned}V_1&=AV_2-BI_2\\ I_1&=CV_2-DI_2\end{aligned}} \tag{19-22}$$

即：

$$\begin{bmatrix}V_1\\ I_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_2\\ -I_2\end{bmatrix}=[T]\begin{bmatrix}V_2\\ -I_2\end{bmatrix} \tag{19-23}$$

式(19-22)与式(19-23)给出了输入变量（V_1和I_1）与输出变量（V_2和$-I_2$）之间的关系，注意，在计算传输参数时，所采用的是I_2，而不是$-I_2$，其原因在于，该电流I_2是流出网络的，如图19-31所示，与图19-1b所示的流入网络的电流方向相反。这种方向的规定是符合常理的，如果将两个双口网络级联（即输出与输入相连），认为I_2从双口网络中流出是符合逻辑的。同时在电力工业中，认为I_2从双口网

络流出也是合理的。

式(19-22)与式(19-23)中的双口参数提供了电路如何从电源向负载传输电压和电流的一种度量方法。因为这组参数表达的是发送端变量（V_1与I_1）与接收端变量（V_2与$-I_2$）之间的关系，所以它们在传输线（如电缆、光缆等）分析中是非常有用的，因此，通常将其称为**传输参数**（transmission parameter）或者称为$\boldsymbol{ABCD}$参数。传输参数可以用在电话系统、微波网络以及雷达系统的设计中。

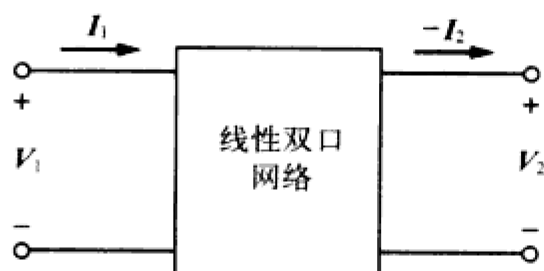


图 19-31 定义参数 $\boldsymbol{ABCD}$ 所采用的端子变量

传输参数可以通过下式确定：

$$\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{V}_1}{\boldsymbol{V}_2}\bigg|_{I_2=0},\quad \boldsymbol{B}=-\frac{\boldsymbol{V}_1}{\boldsymbol{I}_2}\bigg|_{V_2=0}$$
$$\boldsymbol{C}=\frac{\boldsymbol{I}_1}{\boldsymbol{V}_2}\bigg|_{I_2=0},\quad \boldsymbol{D}=-\frac{\boldsymbol{I}_1}{\boldsymbol{I}_2}\bigg|_{V_2=0} \tag{19-24}$$

于是，各传输参数分别为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\text{开路电压比}\\ \boldsymbol{B}&=\text{负的短路转移阻抗}\\ \boldsymbol{C}&=\text{开路转移导纳}\\ \boldsymbol{D}&=\text{负的短路电流比}\end{aligned} \tag{19-25}$$

参数$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{D}$是无量纲的，参数$\boldsymbol{B}$的单位为欧姆，参数$\boldsymbol{C}$的单位为西门子。由于传输参数给出了输入变量与输出变量之间的直接关系，因此在级联网络的分析中非常有用。

本节要介绍的双口网络的最后一组参数是将输入端口的变量作为自变量，将输出端口的变量作为因变量，其方程为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_2&=\boldsymbol{a}\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{b}\boldsymbol{I}_1\\ \boldsymbol{I}_2&=\boldsymbol{c}\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{d}\boldsymbol{I}_1\end{aligned} \tag{19-26}$$

即：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_2\\ \boldsymbol{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_1\\ -\boldsymbol{I}_1\end{bmatrix}=[\boldsymbol{t}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_1\\ -\boldsymbol{I}_1\end{bmatrix} \tag{19-27}$$

参数$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$称为**反向传输参数**（inverse transmission parameter），或者称为$\boldsymbol{t}$**参数**。其定义如下：

$$\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{V}_2}{\boldsymbol{V}_1}\bigg|_{I_1=0},\quad \boldsymbol{b}=-\frac{\boldsymbol{V}_2}{\boldsymbol{I}_1}\bigg|_{V_1=0}$$
$$\boldsymbol{c}=\frac{\boldsymbol{I}_2}{\boldsymbol{V}_1}\bigg|_{I_1=0},\quad \boldsymbol{d}=-\frac{\boldsymbol{I}_2}{\boldsymbol{I}_1}\bigg|_{V_1=0} \tag{19-28}$$

由式(19-28)可知，这组参数分别为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\text{开路电压增益}\\ \boldsymbol{b}&=\text{负的短路转移阻抗}\\ \boldsymbol{c}&=\text{开路转移导纳}\\ \boldsymbol{d}&=\text{负的短路电流增益}\end{aligned} \tag{19-29}$$

虽然参数$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{d}$是无量纲的，但参数$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$的单位分别为欧姆和西门子。

如果双口网络的传输参数或反向传输参数满足：

$$\boxed{AD - BC = 1, \quad ad - bc = 1} \tag{19-30}$$

则该网络为互易网络。这组关系式的证明方法与z参数中转移阻抗的证明方法相同。另外，稍后还可以利用表19-1，从互易网络$z_{12} = z_{21}$的事实来推导式(19-30)。

图 19-32 例题 19-8 的电路原理图

例题19-8 试求如图19-32所示双口网络的传输参数。

解 为了确定参数$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{C}$，需将输出端口开路，如图19-33a所示，即$\boldsymbol{I}_2 = 0$，并在输入端口处施加一个电压源$\boldsymbol{V}_1$，则有：

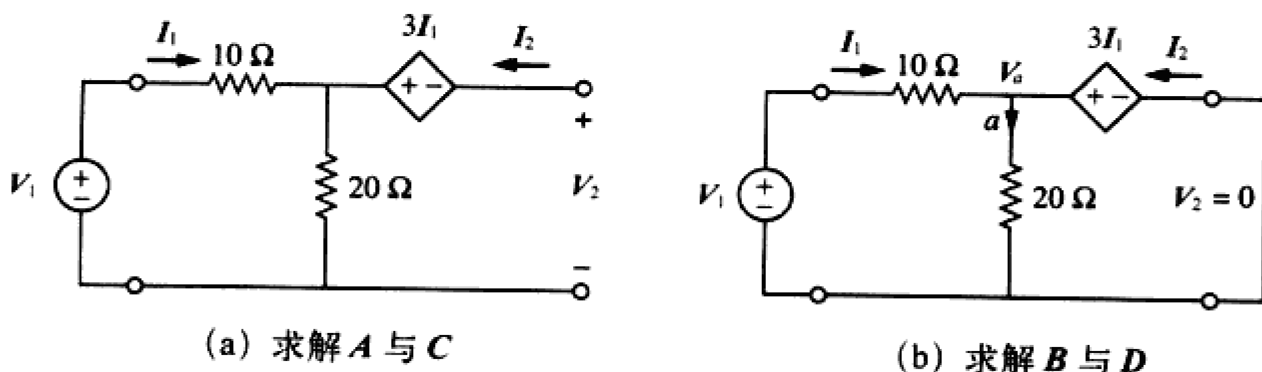
$$\boldsymbol{V}_1 = (10+20)\,\boldsymbol{I}_1 = 30\,\boldsymbol{I}_1 \quad 且 \quad \boldsymbol{V}_2 = 20\,\boldsymbol{I}_1 - 3\,\boldsymbol{I}_1 = 17\,\boldsymbol{I}_1$$

因此，

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{V}_1}{\boldsymbol{V}_2} = \frac{30\boldsymbol{I}_1}{17\boldsymbol{I}_1} = 1.765, \quad \boldsymbol{C} = \frac{\boldsymbol{I}_1}{\boldsymbol{V}_2} = \frac{\boldsymbol{I}_1}{17\boldsymbol{I}_1} = 0.058\,8\text{S}$$

为了确定参数$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{D}$，需将输出端口短路，使得$\boldsymbol{V}_2 = 0$，如图19-33b所示，并且在输入端口处施加一个电压源$\boldsymbol{V}_1$。在如图19-33b所示电路的节点a处，由KCL可以得到：

$$\frac{\boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_a}{10} - \frac{\boldsymbol{V}_a}{20} + \boldsymbol{I}_2 = 0 \tag{19-8-1}$$



(a) 求解 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$　　(b) 求解 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{D}$

图 19-33 例题 19-8 的电路原理图

但是，$\boldsymbol{V}_a = 3\,\boldsymbol{I}_1$，$\boldsymbol{I}_1 = (\boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_a)/10$，由此可得：

$$\boldsymbol{V}_a = 3\boldsymbol{I}_1 \quad \boldsymbol{V}_1 = 13\,\boldsymbol{I}_1 \tag{19-8-2}$$

将$\boldsymbol{V}_1 = 13\,\boldsymbol{I}_1$代入式(19-8-1)，并利用$\boldsymbol{I}_1$取代其中第一项，得到：

$$\boldsymbol{I}_1 - \frac{3\boldsymbol{I}_1}{20} + \boldsymbol{I}_2 = 0 \quad \Rightarrow \frac{17}{20}\boldsymbol{I}_1 = -\boldsymbol{I}_2$$

因此，

$$\boldsymbol{D} = -\frac{\boldsymbol{I}_1}{\boldsymbol{I}_2} = \frac{20}{17} = 1.176, \quad \boldsymbol{B} = -\frac{\boldsymbol{V}_1}{\boldsymbol{I}_2} = \frac{-13\boldsymbol{I}_1}{(-17/20)\boldsymbol{I}_1} = 15.29\Omega$$

练习题19-8 试求如图19-16所示电路（参见练习题19-3）的传输参数。

答 $\boldsymbol{A} = 1.5$，$\boldsymbol{B} = 11\ \Omega$，$\boldsymbol{C} = 0.25\ \text{S}$，$\boldsymbol{D} = 2.5$。

例题19-9 如图19-34所示双口网络的$\boldsymbol{ABCD}$参数为：

$$\begin{bmatrix} 4 & 20\Omega \\ 0.1\text{S} & 2 \end{bmatrix}$$

为了实现最大功率传输，将一可变负载与输出端口相连接。试求R_L以及传输的最大功率。

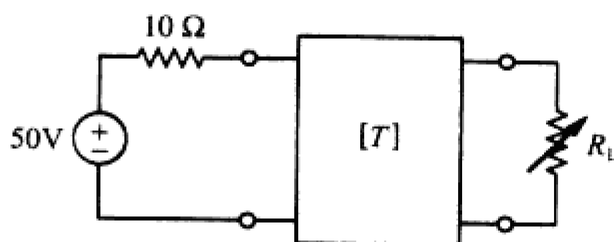


图 19-34 例题 19-9 的双口网络

解 本题需要求出负载端即输出端口处的戴维南等效参数

(即Z_{Th}与V_{Th})。下面利用如图19-35a所示电路求解Z_{Th}，目的是得到$Z_{Th}=V_2/I_2$。将已知的$ABCD$参数代入式(19-22)，可以得到：

$$V_1 = 4V_2 - 20I_2 \tag{19-9-1}$$

$$I_1 = 0.1V_2 - 2I_2 \tag{19-9-2}$$

在输入端口处，$V_1=-10I_1$，将其代入式(19-9-1)可以得到：

$$-10I_1 = 4V_2 - 20I_2$$

即：

$$I_1 = -0.4V_2 + 2I_2 \tag{19-9-3}$$

令式(19-9-2)与式(19-9-3)两式的右边相等，可以得到：

$$0.1V_2 - 2I_2 = -0.4V_2 + 2I_2 \quad \Rightarrow \quad 0.5V_2 = 4I_2$$

因此，

$$Z_{Th} = \frac{V_2}{I_2} = \frac{4}{0.5} = 8\Omega$$

下面利用如图19-35b所示电路求解V_{Th}。在输出端口处，$I_2=0$，而在输入端口处，$V_1=50-10I_1$，将其代入式(19-9-1)与式(19-9-2)，可以得到：

$$50 - 10I_1 = 4V_2 \tag{19-9-4}$$

$$I_1 = 0.1V_2 \tag{19-9-5}$$

将式(19-9-5)代入式(19-9-4)，有：

$$50 - V_2 = 4V_2 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 10$$

因此，

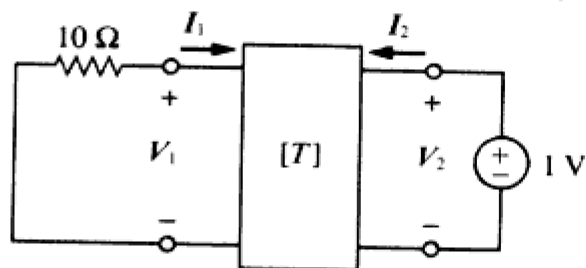
$$V_{Th} = V_2 = 10\text{ V}$$

于是，戴维南等效电路如图19-35c所示，实现最大功率传输时，有：

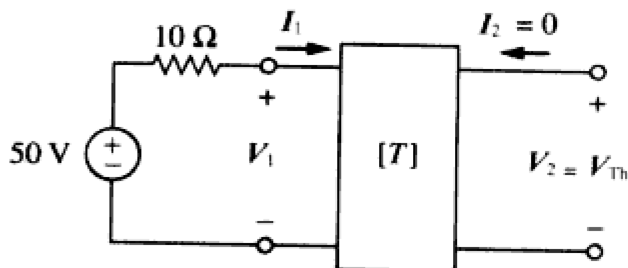
$$R_L = Z_{Th} = 8\Omega$$

由式(4-24)可知，传输的最大功率为：

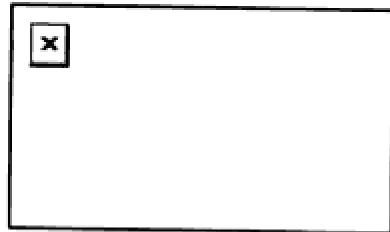
$$P = I^2R_L = \left(\frac{V_{Th}}{2R_L}\right)^2 R_L = \frac{V_{Th}^2}{4R_L} = \frac{100}{4\times 8} = 3.125\text{W}$$



(a) 求Z_{Th}



(b) 求V_{Th}



(c) 求实现最大功率传输时的R_L

图 19-35　例题 19-9 的求解

练习题19-9　如果如图19-36所示双口网络的传输参数为：

$$\begin{bmatrix} 5 & 10\Omega \\ 0.4\text{S} & 1 \end{bmatrix}$$

试求I_1与I_2。

答　1 A，−0.2 A。

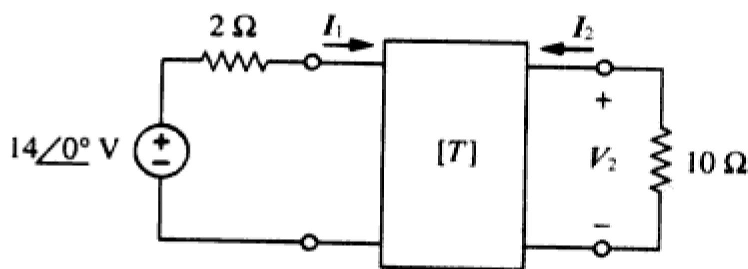


图 19-36　练习题 19-9 的电路原理图

19.6　†几组参数之间的关系

由于前几节介绍的六组参数描述的是同一双口网络的相同输入端与输出端变量之间的关系，所以它们彼此之间是可以相互换算的。如果有两组参数存在，则可以建立这两组参数之间的关系。下面通过两个例子说明这一过程。

已知z参数，要确定y参数。由式(19-2)可以得到：

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [z] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{19-31}$$

即：

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [z]^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{19-32}$$

另外，由式(19-9)可以得到：

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [y] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{19-33}$$

比较式(19-32)与式(19-33)，可知：

$$[y] = [z]^{-1} \tag{19-34}$$

矩阵[z]的伴随矩阵为：

$$\begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}$$

其行列式为：

$$\Delta_z = z_{11}\, z_{22} - z_{12} \cdot z_{21}$$

代入式(19-34)可以得到：

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}}{\Delta_z} \tag{19-35}$$

由对应项相等，可以得到：

$$y_{11} = \frac{z_{22}}{\Delta_z},\quad y_{12} = -\frac{z_{12}}{\Delta_z},\quad y_{21} = -\frac{z_{21}}{\Delta_z},\quad y_{22} = \frac{z_{11}}{\Delta_z} \tag{19-36}$$

第二个例子是已知z参数，要确定h参数。由式(19-1)可得：

$$V_1 = z_{11}\, I_1 + z_{12}\, I_2 \tag{19-37a}$$

$$V_2 = z_{21}\, I_1 + z_{22}\, I_2 \tag{19-37b}$$

由式(19-37b)可以得到I_2为：

$$I_2 = -\frac{z_{21}}{z_{22}} I_1 + \frac{1}{z_{22}} V_2 \tag{19-38}$$

将其代入式(19-37a)得到：

$$V_1 = \frac{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}}{z_{22}} I_1 + \frac{z_{12}}{z_{22}} V_2 \tag{19-39}$$

将式(19-38)与式(19-39)表示为矩阵形式，即：

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\Delta_z}{z_{22}} & \dfrac{z_{12}}{z_{22}} \\ -\dfrac{z_{21}}{z_{22}} & \dfrac{1}{z_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{19-40}$$

由式(19-15)可知：

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

将其与式(19-40)进行比较，可以得到：

$$h_{11}=\frac{\Delta_z}{z_{22}},\quad h_{12}=\frac{z_{12}}{z_{22}},\quad h_{21}=-\frac{z_{21}}{z_{22}},\quad h_{22}=\frac{1}{z_{22}} \tag{19-41}$$

表19-1给出了双口网络的六组参数之间的转换公式。已知其中一组参数，就可以利用表19-1求出其他参数。例如，已知T参数，可以通过该表的第三行，第五列求出其相应的h参数。

表 19-1　双口网络参数之间的转换

	z		y		h		g		T		t	
z	z_{11}	z_{12}	$\frac{y_{22}}{\Delta_y}$	$-\frac{y_{12}}{\Delta_y}$	$\frac{\Delta_h}{h_{22}}$	$\frac{h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{1}{g_{11}}$	$-\frac{g_{12}}{g_{11}}$	$\frac{A}{C}$	$\frac{\Delta_T}{C}$	$\frac{d}{c}$	$\frac{1}{c}$
	z_{21}	z_{22}	$-\frac{y_{21}}{\Delta_y}$	$\frac{y_{11}}{\Delta_y}$	$-\frac{h_{21}}{h_{22}}$	$\frac{1}{h_{22}}$	$\frac{g_{21}}{g_{11}}$	$\frac{\Delta_g}{g_{11}}$	$\frac{1}{C}$	$\frac{D}{C}$	$\frac{\Delta_t}{c}$	$\frac{a}{c}$
y	$\frac{z_{22}}{\Delta_z}$	$-\frac{z_{12}}{\Delta_z}$	y_{11}	y_{12}	$\frac{1}{h_{11}}$	$-\frac{h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta_g}{g_{22}}$	$\frac{g_{12}}{g_{22}}$	$\frac{D}{B}$	$-\frac{\Delta_T}{B}$	$\frac{a}{b}$	$-\frac{1}{b}$
	$-\frac{z_{21}}{\Delta_z}$	$\frac{z_{11}}{\Delta_z}$	y_{21}	y_{22}	$\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta_h}{h_{11}}$	$-\frac{g_{21}}{g_{22}}$	$\frac{1}{g_{22}}$	$-\frac{1}{B}$	$\frac{A}{B}$	$-\frac{\Delta_t}{b}$	$\frac{d}{b}$
h	$\frac{\Delta_z}{z_{22}}$	$\frac{z_{12}}{z_{22}}$	$\frac{1}{y_{11}}$	$-\frac{y_{12}}{y_{11}}$	h_{11}	h_{12}	$\frac{g_{22}}{\Delta_g}$	$-\frac{g_{12}}{\Delta_g}$	$\frac{B}{D}$	$\frac{\Delta_T}{D}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{1}{a}$
	$-\frac{z_{21}}{z_{22}}$	$\frac{1}{z_{22}}$	$\frac{y_{21}}{y_{11}}$	$\frac{\Delta_y}{y_{11}}$	h_{21}	h_{22}	$-\frac{g_{21}}{\Delta_g}$	$\frac{g_{11}}{\Delta_g}$	$-\frac{1}{D}$	$\frac{C}{D}$	$\frac{\Delta_t}{a}$	$\frac{c}{a}$
g	$\frac{1}{z_{11}}$	$-\frac{z_{12}}{z_{11}}$	$\frac{\Delta_y}{y_{22}}$	$\frac{y_{12}}{y_{22}}$	$\frac{h_{22}}{\Delta_h}$	$-\frac{h_{12}}{\Delta_h}$	g_{11}	g_{12}	$\frac{C}{A}$	$-\frac{\Delta_T}{A}$	$\frac{c}{d}$	$-\frac{1}{d}$
	$\frac{z_{21}}{z_{11}}$	$\frac{\Delta_z}{z_{11}}$	$-\frac{y_{21}}{y_{22}}$	$\frac{1}{y_{22}}$	$-\frac{h_{21}}{\Delta_h}$	$\frac{h_{11}}{\Delta_h}$	g_{21}	g_{22}	$\frac{1}{A}$	$\frac{B}{A}$	$\frac{\Delta_t}{d}$	$-\frac{b}{d}$
T	$\frac{z_{11}}{z_{21}}$	$\frac{\Delta_z}{z_{21}}$	$-\frac{y_{22}}{y_{21}}$	$-\frac{1}{y_{21}}$	$-\frac{\Delta_h}{h_{21}}$	$-\frac{h_{11}}{h_{21}}$	$\frac{1}{g_{21}}$	$\frac{g_{22}}{g_{21}}$	A	B	$\frac{d}{\Delta_t}$	$\frac{b}{\Delta_t}$
	$\frac{1}{z_{21}}$	$\frac{z_{22}}{z_{21}}$	$-\frac{\Delta_y}{y_{21}}$	$-\frac{y_{11}}{y_{21}}$	$-\frac{h_{22}}{h_{21}}$	$-\frac{1}{h_{21}}$	$\frac{g_{11}}{g_{21}}$	$\frac{\Delta_g}{g_{21}}$	C	D	$\frac{c}{\Delta_t}$	$\frac{a}{\Delta_t}$
t	$\frac{z_{22}}{z_{12}}$	$\frac{\Delta_z}{z_{12}}$	$-\frac{y_{11}}{y_{12}}$	$-\frac{1}{y_{12}}$	$\frac{1}{h_{12}}$	$\frac{h_{11}}{h_{12}}$	$-\frac{\Delta_g}{g_{12}}$	$-\frac{g_{22}}{g_{12}}$	$\frac{D}{\Delta_T}$	$\frac{B}{\Delta_T}$	a	b
	$\frac{1}{z_{12}}$	$\frac{z_{11}}{z_{12}}$	$-\frac{\Delta_y}{y_{12}}$	$-\frac{y_{22}}{y_{12}}$	$\frac{h_{22}}{h_{12}}$	$\frac{\Delta_h}{h_{12}}$	$-\frac{g_{11}}{g_{12}}$	$-\frac{1}{g_{12}}$	$\frac{C}{\Delta_T}$	$\frac{A}{\Delta_T}$	c	d

$\Delta_z=z_{11}z_{22}-z_{12}z_{21}$，　$\Delta_h=h_{11}h_{22}-h_{12}h_{21}$，　$\Delta_T=AD-BC$

$\Delta_y=y_{11}y_{22}-y_{12}y_{21}$，　$\Delta_g=g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21}$，　$\Delta_t=ad-bc$

另外，已知对于互易网络而言，有$z_{21}=z_{12}$，则同样可以借助该表确定由其他参数表示的互易网络条件。另外，还可以证明：

$$[g]=[h]^{-1} \tag{19-42}$$

但是，

$$[t]\neq[T]^{-1} \tag{19-43}$$

例题19-10　如果

$$[T]=\begin{bmatrix}10 & 1.5\Omega\\ 2\text{S} & 4\end{bmatrix}$$

试求该双口网络的$[z]$与$[g]$。

解　如果$A=10$，$B=1.5$，$C=2$，$D=4$，则矩阵行列式的值为：

$$\Delta_T = AD - BC = 40 - 3 = 37$$

由表19-1可得：

$$z_{11} = \frac{A}{C} = \frac{10}{2} = 5, \quad z_{12} = \frac{\Delta_T}{C} = \frac{37}{2} = 18.5$$

$$z_{21} = \frac{1}{C} = \frac{1}{2} = 0.5, \quad z_{22} = \frac{D}{C} = \frac{4}{2} = 2$$

$$g_{11} = \frac{C}{A} = \frac{2}{10} = 0.2, \quad g_{12} = -\frac{\Delta_T}{A} = -\frac{37}{10} = -3.7$$

$$g_{21} = \frac{1}{A} = \frac{1}{10} = 0.1, \quad g_{22} = \frac{B}{A} = \frac{1.5}{10} = 0.15$$

于是，

$$[z] = \begin{bmatrix} 5 & 18.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}\Omega, \quad [g] = \begin{bmatrix} 0.2\text{S} & -3.7 \\ 0.1 & 0.15\Omega \end{bmatrix}$$

练习题19-10 已知某双口网络的z参数为：

$$[z] = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\Omega$$

试求该网络的[y]与[T]。

答

$$[y] = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.2 \\ -0.2 & 0.3 \end{bmatrix}\text{S}, \quad [T] = \begin{bmatrix} 1.5 & 5\Omega \\ 0.25\text{S} & 1.5 \end{bmatrix}。$$

例题19-11 试确定如图19-37所示运算放大器电路的y参数，并证明该电路不存在z参数。

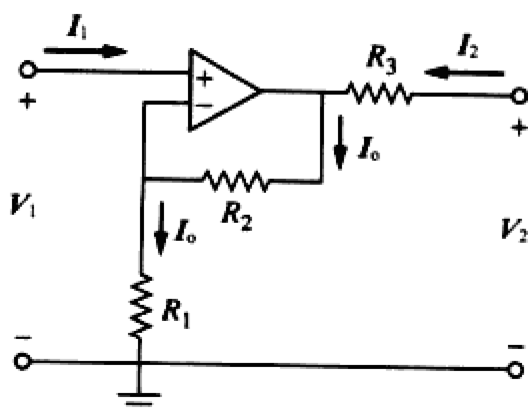


图 19-37 例题 19-11 的电路原理图

解 因为运算放大器的输入端没有电流流入，则$I_1 = 0$，利用V_1与V_2可以表示为：

$$I_1 = 0 \ V_1 + 0 \ V_2 \qquad (19\text{-}11\text{-}1)$$

将上式与式(19-8) 进行比较，可以得到：

$$y_{11} = 0 = y_{12}$$

另外，

$$V_2 = R_3 I_2 + I_o (R_1 + R_2)$$

其中，I_o为流过R_1与R_2的电流。但是，$I_o = V_1/R_1$，因此：

$$V_2 = R_3 I_2 + \frac{V_1(R_1 + R_2)}{R_1}$$

也可以写为：

$$I_2 = -\frac{(R_1 + R_2)}{R_1 R_3} V_1 + \frac{V_2}{R_3}$$

将上式与式(19-8) 进行比较，可以得到：

$$y_{21} = -\frac{(R_1 + R_2)}{R_1 R_3}, \quad y_{22} = \frac{1}{R_3}$$

矩阵[y]的行列式为：

$$\Delta_y = y_{11} y_{22} - y_{12} y_{21} = 0$$

因为$\Delta_y = 0$，所以矩阵[y]不存在逆矩阵。于是，由式(19-34) 可知，矩阵[z]不存在。由于运算放

大器是有源器件，因而该电路不是互易的。

练习题19-11　试求如图19-38所示运算放大器电路的z参数，并证明该电路的y参数不存在。

答　$[z]=\begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ -R_2 & 0 \end{bmatrix}$，因为$[z]^{-1}$不存在，所以$[y]$不存在。

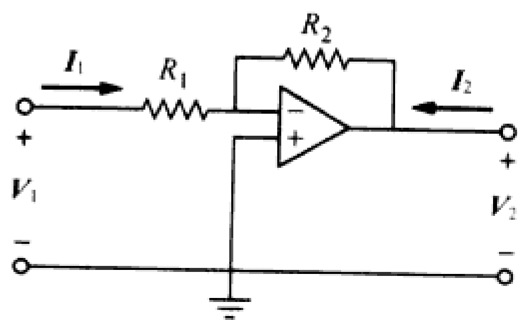


图 19-38　练习题 19-11 的电路原理图

19.7　双口网络的互连

为了便于分析和设计，大型的复杂网络通常可以划分为若干个子网络，并可以将这些子网络建模为双口网络，相互连接后构成原来的网络。因此，双口网络可以看作是组成复杂网络的基本模块。双口网络的相互连接可以是串联、并联或级联，虽然相互连接的双口网络可以利用上述六组参数中的任何一组描述，但是，其中某一组参数可能具有明显的优势。例如，当网络相互串联时，各个网络的z参数相加即可得到较大网络的z参数。当网络相互并联时，各个网络的y参数相加即可得到并联网络的y参数。当网络级联时，各传输参数相乘即可得到了级联网络的传输参数。

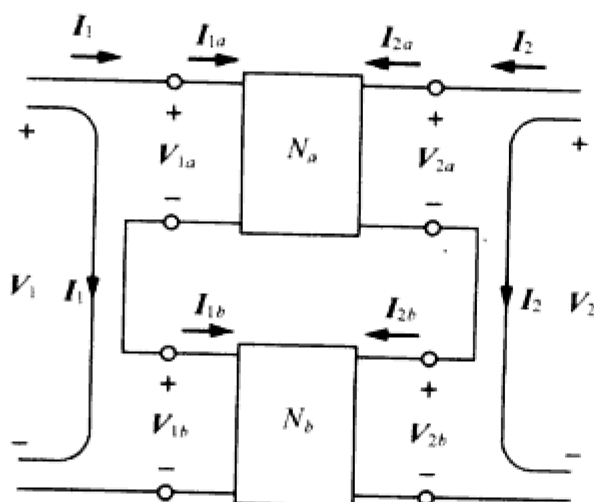


图 19-39　两个双口网络的串联连接

相互串联的双口网络如图19-39所示，之所以认为这两个网络是串联的，其原因是这两个网络的输入电流相同，端口电压相加。另外，各个网络都具有一个公共参考点，对于串联电路而言，电路的两个公共参考点是连接在一起的。对于网络N_a，有：

$$\begin{aligned} V_{1a} &= z_{11a} I_{1a} + z_{12a} I_{2a} \\ V_{2a} &= z_{21a} I_{1a} + z_{22a} I_{2a} \end{aligned} \tag{19-44}$$

对于网络N_b，有：

$$\begin{aligned} V_{1b} &= z_{11b} I_{1b} + z_{12b} I_{2b} \\ V_{2b} &= z_{21b} I_{1b} + z_{22b} I_{2b} \end{aligned} \tag{19-45}$$

由图19-39可以注意到，

$$I_1 = I_{1a} = I_{1b}, \qquad I_2 = I_{2a} = I_{2b} \tag{19-46}$$

并且，

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{1a} + V_{1b} = (z_{11a} + z_{11b}) I_1 + (z_{12a} + z_{12b}) I_2 \\ V_2 &= V_{2a} + V_{2b} = (z_{21a} + z_{21b}) I_1 + (z_{22a} + z_{22b}) I_2 \end{aligned} \tag{19-47}$$

因此，整个网络的z参数为：

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11a} + z_{11b} & z_{12a} + z_{12b} \\ z_{21a} + z_{21b} & z_{22a} + z_{22b} \end{bmatrix} \tag{19-48}$$

即：

$$\boxed{[z] = [z_a] + [z_b]} \tag{19-49}$$

上式表明，整个网络的z参数为单个网络z参数之和，该结论也可以推广到n个网络的串联。如果采用$[\boldsymbol{h}]$模型描述的两个双口网络相互串联，则可以利用表19-1将$\boldsymbol{h}$参数转换为z参数，之后利用式(19-49)得到串联网络的z参数，最后再利用表19-1将结果转换为$\boldsymbol{h}$参数。

当两个双口网络的端口电压相等，并且较大网络的端口电流为各双口网络的端口电流之和时，这两个双口网络就是并联的。另外，各电路必须具有一个公共参考点，当两个网络相互连接起来时，必须将各自的公共参考点连接在一起。两个双口网络的并联连接如图19-40所示。对于这两个网络而言，有：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I}_{1a} &= \boldsymbol{y}_{11a}\boldsymbol{V}_{1a} + \boldsymbol{y}_{12a}\boldsymbol{V}_{2a} \\ \boldsymbol{I}_{2a} &= \boldsymbol{y}_{21a}\boldsymbol{V}_{1a} + \boldsymbol{y}_{22a}\boldsymbol{V}_{2a} \end{aligned} \tag{19-50}$$

并且，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I}_{1b} &= \boldsymbol{y}_{11b}\boldsymbol{V}_{1b} + \boldsymbol{y}_{12b}\boldsymbol{V}_{2b} \\ \boldsymbol{I}_{2a} &= \boldsymbol{y}_{21b}\boldsymbol{V}_{1b} + \boldsymbol{y}_{22b}\boldsymbol{V}_{2b} \end{aligned} \tag{19-51}$$

但由图19-40可知：

图 19-40 两个双口网络的并联连接

$$\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{V}_{1a} = \boldsymbol{V}_{1b}, \quad \boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{V}_{2a} = \boldsymbol{V}_{2b} \tag{19-52a}$$

$$\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{I}_{1a} + \boldsymbol{I}_{1b}, \quad \boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{I}_{2a} + \boldsymbol{I}_{2b} \tag{19-52b}$$

将式(19-50)与式(19-51)代入式(19-52b)，可以得到：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I}_1 &= (\boldsymbol{y}_{11a} + \boldsymbol{y}_{11b})\boldsymbol{V}_1 + (\boldsymbol{y}_{12a} + \boldsymbol{y}_{12b})\boldsymbol{V}_2 \\ \boldsymbol{I}_2 &= (\boldsymbol{y}_{21a} + \boldsymbol{y}_{21b})\boldsymbol{V}_1 + (\boldsymbol{y}_{22a} + \boldsymbol{y}_{22b})\boldsymbol{V}_2 \end{aligned} \tag{19-53}$$

因此，整个网络的y参数为：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_{11} & \boldsymbol{y}_{12} \\ \boldsymbol{y}_{21} & \boldsymbol{y}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_{11a} + \boldsymbol{y}_{11b} & \boldsymbol{y}_{12a} + \boldsymbol{y}_{12b} \\ \boldsymbol{y}_{21a} + \boldsymbol{y}_{21b} & \boldsymbol{y}_{22a} + \boldsymbol{y}_{22b} \end{bmatrix} \tag{19-54}$$

即：

$$\boxed{[\boldsymbol{y}] = [\boldsymbol{y}_a] + [\boldsymbol{y}_b]} \tag{19-55}$$

上式表明，整个网络的y参数等于各单个网络y参数之和，该结论可以扩展到n个双口网络的并联。

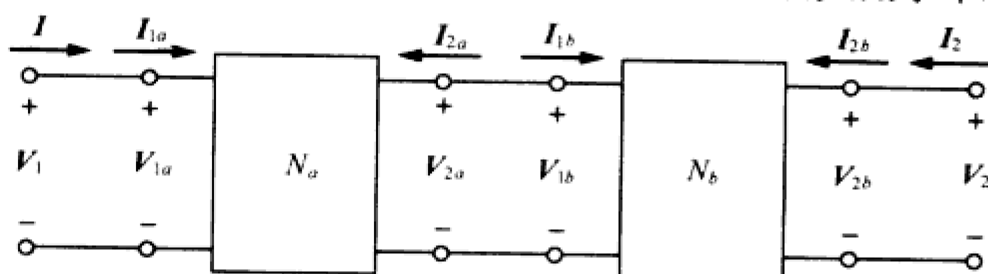


图 19-41 两个双口网络的级联连接

当一个网络的输出为另一个网络的输入时，则称这两个双口网络是级联的（cascaded）。相互级联的两个双口网络如图19-41所示。对于这两个网络而言，有：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_{1a} \\ \boldsymbol{I}_{1a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_a & \boldsymbol{B}_a \\ \boldsymbol{C}_a & \boldsymbol{D}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_{2a} \\ -\boldsymbol{I}_{2a} \end{bmatrix} \tag{19-56}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_{1b} \\ \boldsymbol{I}_{1b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_b & \boldsymbol{B}_b \\ \boldsymbol{C}_b & \boldsymbol{D}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_{2b} \\ -\boldsymbol{I}_{2b} \end{bmatrix} \tag{19-57}$$

由图19-41可得：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1 \\ \boldsymbol{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_{1a} \\ \boldsymbol{I}_{1a} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_{2a} \\ -\boldsymbol{I}_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_{1b} \\ \boldsymbol{I}_{1b} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_{2b} \\ -\boldsymbol{I}_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_2 \\ -\boldsymbol{I}_2 \end{bmatrix} \tag{19-58}$$

将以上各式代入式(19-56)与式(19-57)，得到：

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \tag{19-59}$$

因此，整个网络的传输参数等于各个网络传输参数的乘积：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \tag{19-60}$$

即：

$$\boxed{[T] = [T_a][T_b]} \tag{19-61}$$

正是因为这个性质，使网络的传输参数非常有用。应该注意，矩阵的相乘必须同双口网络N_a与N_b的级联与次序相一致。

例题19-12 试计算如图19-42所示电路的V_2/V_s。

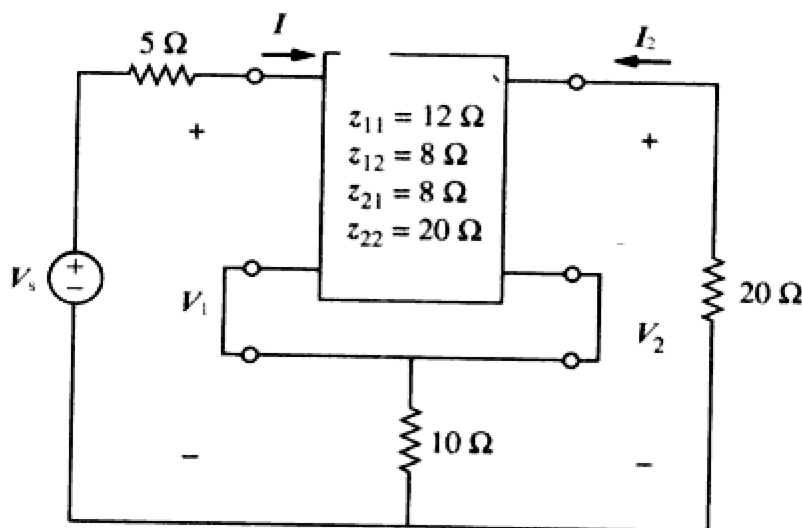


图 19-42 例题 19-12 的电路原理图

解 本例电路可以看作是两个双口的串联。对于网络N_b而言，其z参数为：

$$z_{12b} = z_{21b} = 10 = z_{11b} = z_{22b}$$

于是，

$$[z] = [z_a] + [z_b] = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 18 \\ 18 & 30 \end{bmatrix}$$

但是，

$$V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 = 22 I_1 + 18 I_2 \tag{19-12-1}$$

$$V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 = 18 I_1 + 30 I_2 \tag{19-12-2}$$

另外，在输入端口处有：

$$V_1 = V_s - 5 I_1 \tag{19-12-3}$$

在输出端口处有：

$$V_2 = -20 I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = -\frac{V_2}{20} \tag{19-12-4}$$

将式(19-12-3)与式(19-12-4)代入式(19-12-1)，可以得到：

$$V_s - 5I_1 = 22I_1 - \frac{18}{20}V_2 \quad \Rightarrow \quad V_s = 27I_1 - 0.9V_2 \tag{19-12-5}$$

将式(19-12-4)代入式(19-12-2)，可以得到：

$$V_2 = 18I_1 - \frac{30}{20}V_2 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{2.5}{18}V_2 \tag{19-12-6}$$

将式(19-12-6)代入式(19-12-5)，可以得到：

$$V_s = 27 \times \frac{2.5}{18} V_2 - 0.9V_2 = 2.85V_2$$

因此，

$$\frac{V_2}{V_s} = \frac{1}{2.85} = 0.3509$$

练习题19-12 试求如图19-43所示电路的V_2/V_s。

答 $0.6799\angle -29.05°$。

例题19-13 试求如图19-44所示双口网络的y参数。

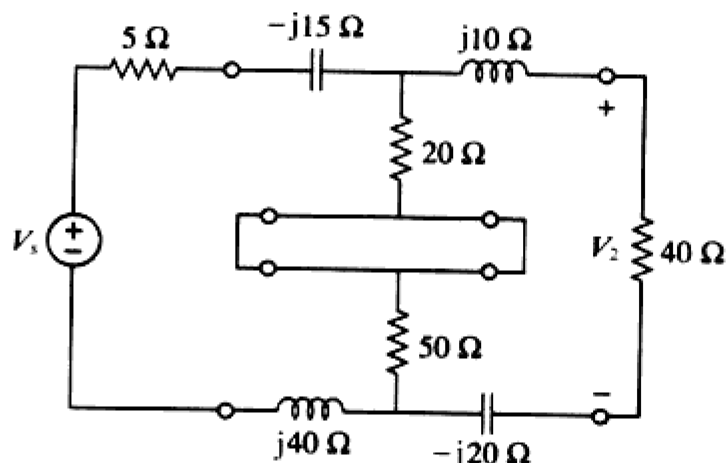


图 19-43 练习题 19-12 的电路原理图

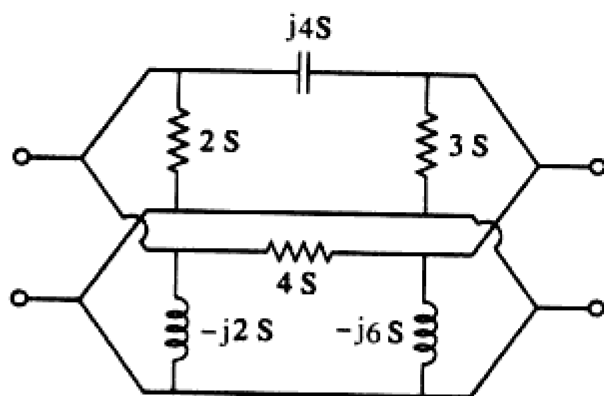


图 19-44 例题 19-13 的电路原理图

解 将图19-44中上面的网络称为N_a，下面的网络称为N_b，则这两个网络是并联连接的。将N_a和N_b与如图19-13a所示电路进行比较，可以得到：

$$y_{12a} = -j4 = y_{21a}, \quad y_{11a} = 2 + j4, \quad y_{22a} = 3 + j4$$

即：

$$[y_a] = \begin{bmatrix} 2+j4 & -j4 \\ -j4 & 3+j4 \end{bmatrix} S$$

并且，

$$y_{12b} = -4 = y_{21b}, \quad y_{11b} = 4 - j2, \quad y_{22b} = 4 - j6$$

即：

$$[y_b] = \begin{bmatrix} 4-j2 & -4 \\ -4 & 4-j6 \end{bmatrix} S$$

于是，整个网络的y参数为：

$$[y] = [y_a] + [y_b] = \begin{bmatrix} 6+j2 & -4-j4 \\ -4-j4 & 7-j2 \end{bmatrix} S$$

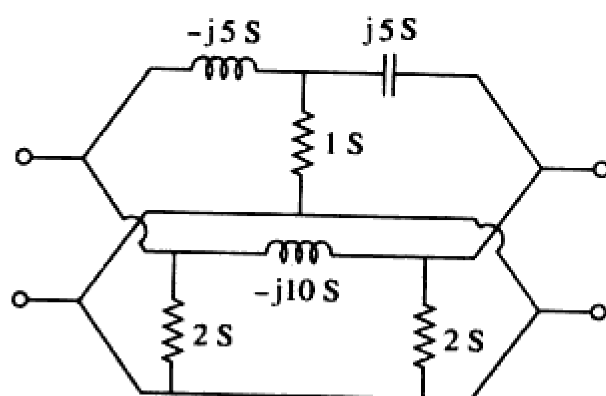


图 19-45 练习题 19-13 的电路原理图

练习题19-13 试确定如图19-45所示网络的y参数。

答

$$\begin{bmatrix} 27-j15 & -25+j10 \\ -25+j10 & 27-j5 \end{bmatrix} S。$$

例题19-14 试求如图19-46所示电路的传输参数。

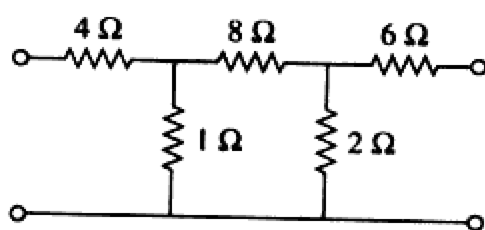


图 19-46 例题 19-14 的电路原理图

解 可以将如图19-46所示的已知电路看作是两个T形网络的级联连接，如图19-47a所示，可以证明如图19-47b所示的

T形网络的传输参数为（参见习题19-42b）：

$$A=1+\frac{R_1}{R_2},\quad B=R_3+\frac{R_1(R_2+R_3)}{R_2}$$

$$C=\frac{1}{R_2},\qquad D=1+\frac{R_3}{R_2}$$

将其应用于如图19-47a所示的级联网络N_a与N_b，得到：

$$A_a=1+4=5,\qquad B_a=8+4\times9=44\,\Omega$$
$$C_a=1\,\text{S},\qquad D_a=1+8=9$$

或者写为矩阵形式：

$$[T_a]=\begin{bmatrix}5 & 44\Omega\\ 1\text{S} & 9\end{bmatrix}$$

同理，

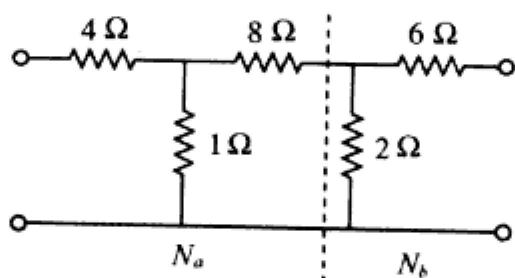
$$A_b=1,\quad B_b=6\,\Omega,\quad C_b=0.5\,\text{S},\quad D_b=1+\frac{6}{2}=4$$

即：

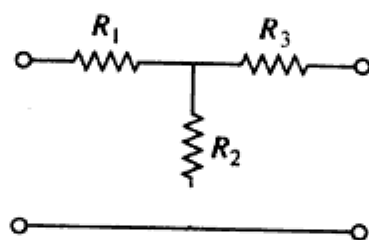
$$[T_b]=\begin{bmatrix}1 & 6\Omega\\ 0.5\text{S} & 4\end{bmatrix}$$

因此，对于如图19-46所示的整个网络，T参数为：

$$[T]=[T_a][T_b]=\begin{bmatrix}5 & 44\\ 1 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 6\\ 0.5 & 4\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}5\times1+44\times0.5 & 5\times6+44\times4\\ 1\times1+9\times0.5 & 1\times6+9\times4\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}27 & 206\Omega\\ 5.5\text{S} & 42\end{bmatrix}$$



（a）将如图19-46所示电路分割为两个双口网络



（b）一般的T形双口网络

图 19-47 例题 19-14 的电路原理图

注意，

$$\Delta_{T_a}=\Delta_{T_b}=\Delta_T=1$$

表明该网络是互易的。

练习题19-14 试确定如图19-48所示电路的$ABCD$参数表示。

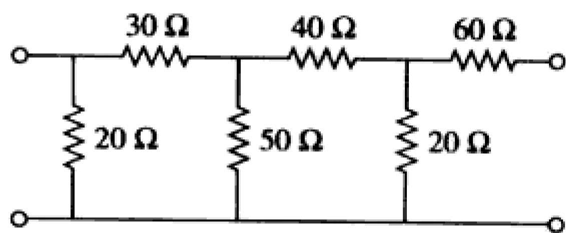


图 19-48 练习题 19-14 的电路原理图

答 $[T]=\begin{bmatrix}29.25 & 2200\Omega\\ 0.425\text{S} & 32\end{bmatrix}$。

19.8 利用 PSpice 计算双口网络参数

当双口网络比较复杂时，手工计算双口网络的参数就会变得较为困难。在这种情况下，可以利用PSpice完成计算。如果电路是纯电阻的，则可以利用PSpice的直流分析进行计算；否则，须在指定频率处利用PSpice的交流分析进行计算。利用PSpice计算双口网络某个特定参数的关键是：牢记参数的定义，将适当的端口变量设置为1 A或1 V的电源，同时将其他必要的端口设置为开路或短路。下面通过两个例题说明上述过程。

图 19-49 例题 19-15 的电路原理图

例题19-15 试求如图19-49所示网络的h参数。

解 由式(19-16) 可知：

$$h_{11}=\frac{V_1}{I_1}\bigg|_{V_2=0},\quad h_{21}=\frac{I_2}{I_1}\bigg|_{V_2=0}$$

由此可见，令$V_2=0$即可求出h_{11}与h_{21}。另外，令$I_1=1$ A，则h_{11}变为$V_1/1$，而h_{21}变为$I_2/1$。据此可以画出如图19-50a所示的电路原理图，图中插入1 A直流电流源IDC作为$I_1=1$ A，插入伪元件VIEWPOINT与伪元件IPROBE分别用于显示V_1与I_2。保存电路原理图之后，选择Analysis/Simulate运行PSpice程序，并观测伪元件的显示值，得到：

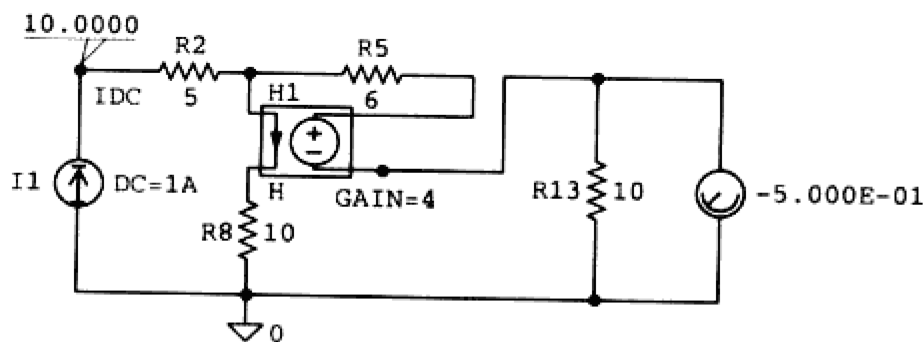
$$h_{11}=\frac{V_1}{1}=10\Omega,\quad h_{21}=\frac{I_2}{1}=-0.5$$

同理，由式(19-16)可知：

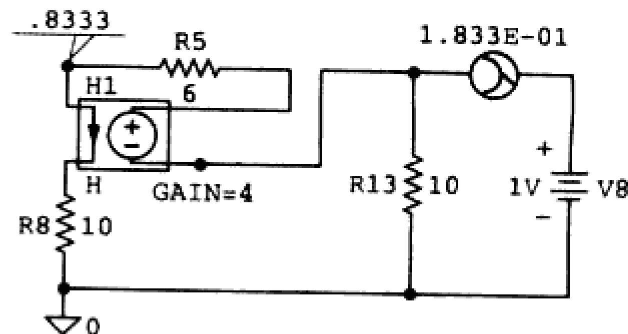
$$h_{12}=\frac{V_1}{V_2}\bigg|_{I_1=0},\quad h_{22}=\frac{I_2}{V_2}\bigg|_{I_1=0}$$

由此可见，将输入端口开路（即$I_1=0$），可以确定h_{12}与h_{22}。令$V_2=1$ V，则h_{12}为$V_1/1$和h_{22}为$I_2/1$。因此，可以利用如图19-50b所示的电路原理图，图中在输出端口处插入1 V直流电压源VDC作为$V_2=1$ V。插入两个伪元件VIEWPOINT与IPROBE分别用于显示V_1与I_2的值（注意，在如图19-50b所示电路中，由于输入端口是开路的，而这是PSpice所不允许的，因此可将5 Ω电阻器忽略。如果用一个非常大的电阻器，例如10 MΩ电阻器取代开路，则可以包括该5 Ω电阻器）。对该电路原理图进行模拟后，即可得到如图19-50b所示伪元件显示的值。因此，

$$h_{12}=\frac{V_1}{1}=0.833\,3,\quad h_{22}=\frac{I_2}{1}=0.183\,3\text{S}$$



(a) 计算h_{11}与h_{21}



(b) 计算h_{12}与h_{22}

图 19-50 例题 19-15 的 PSpice 原理图

练习题19-15 试利用PSpice确定如图19-51所示网络的h参数。

答 $h_{11}=4.238\ \Omega$，$h_{21}=-0.619\ 0$，$h_{12}=-0.714\ 3$，$h_{22}=-0.142\ 9\ \mathrm{S}$。

例题19-16 试求如图19-52所示电路在$\omega=10^6$ rad/s时的z参数。

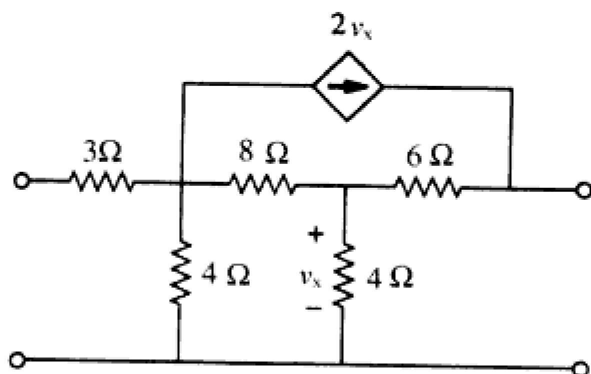


图 19-51 练习题 19-15 的电路原理图

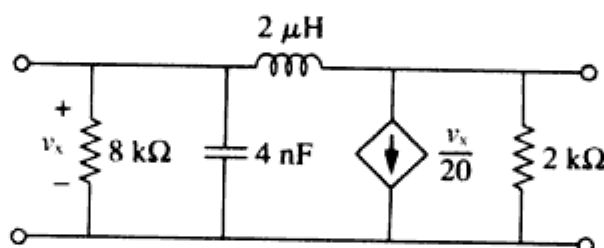


图 19-52 例题 19-16 的电路原理图

解 因为如图19-49所示电路为纯电阻电路，所以在例题19-15中采用的是直流分析。本例中因为L和C与频率有关，所以须采用频率为$f=\omega/2\pi=0.159\ 15$ MHz的交流分析。

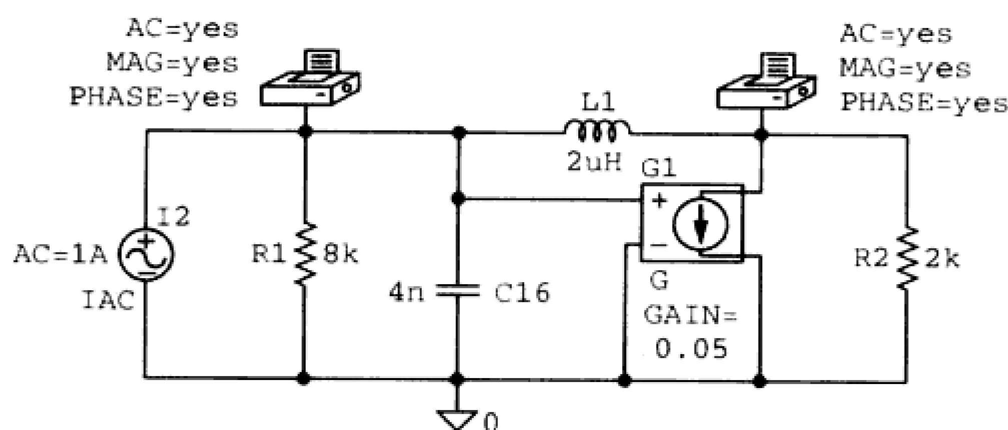
在式(19-3)中，定义z参数为：

$$z_{11}=\left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0},\quad z_{21}=\left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}$$

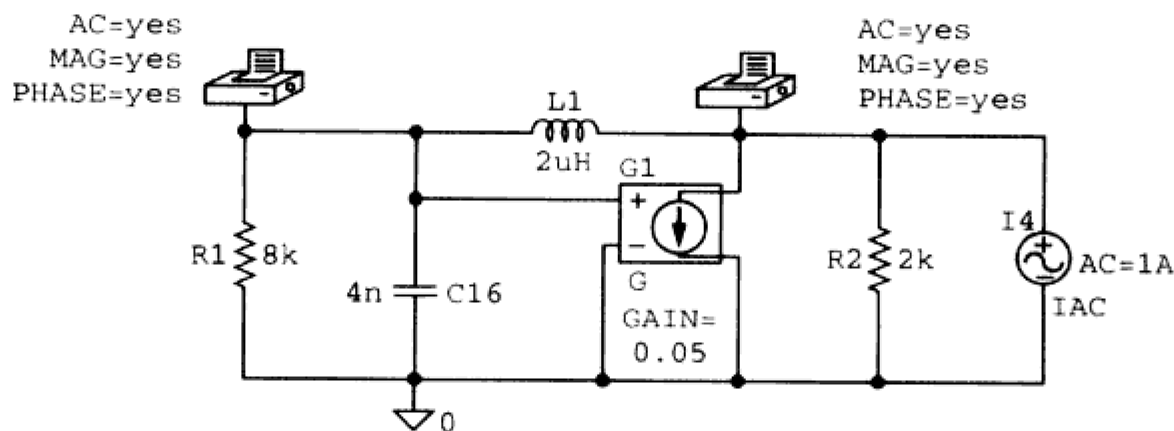
这表明，令$I_1=1$ A并将输出端口开路，即$I_2=0$，则可得到：

$$z_{11}=\frac{V_1}{1},\ 且z_{21}=\frac{V_2}{1}$$

由如图 19-53a 所示的电路原理图即可确定上述参数。在该电路的输入端口处插入 1 A 交流电流源 IAC，



(a) 确定z_{11}与z_{21}的电路



(b) 确定z_{12}与z_{22}的电路

图 19-53 例题 19-16 的电路原理图

同时插入两个伪元件VPRINT1确定$\mathbf{V}_1$与$\mathbf{V}_2$，各VPRINT1的属性均设置为AC = yes，MAG = yes，PHASE = yes，以便打印电压的振幅与相位。运行Analysis/Setup/AC Sweep程序，并在AC Sweep and Noise Analysis对话框中键入"Total Pts = 1，Start Freq = 0.1591 MEG，Final Freq = 0.1591 MEG"。保存电路原理图后，选择Analysis/Simulate程序对电路进行模拟，由输出文件即可确定$\mathbf{V}_1$与$\mathbf{V}_2$。因此，

$$z_{11} = \frac{\mathbf{V}_1}{1} = 19.70\underline{/175.7°}\Omega, \quad z_{21} = \frac{\mathbf{V}_2}{1} = 19.79\underline{/170.2°}\Omega$$

类似地，由式(19-3)可以得到：

$$z_{12} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_2}\bigg|_{I_1=0}, \quad z_{22} = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2}\bigg|_{I_1=0}$$

表明如果令$\mathbf{I}_2 = 1$ A，并使输入端口开路，则有：

$$z_{12} = \frac{\mathbf{V}_1}{1} \quad 和 \quad z_{22} = \frac{\mathbf{V}_2}{1}$$

从而得到如图19-53b所示的电路原理图，该原理图与图19-53a所示原理图的唯一区别在于现在的1 A交流电流源IAC插入电路的输出端。对如图19-53b所示电路进行模拟，即可由输出文件确定$\mathbf{V}_1$与$\mathbf{V}_2$。于是，

$$z_{12} = \frac{\mathbf{V}_1}{1} = 19.70\underline{/175.7°}\Omega, \quad z_{22} = \frac{\mathbf{V}_2}{1} = 19.56\underline{/175.7°}\Omega$$

练习题19-16 试确定如图19-54所示电路的在$f = 60$ Hz时的z参数。

答 $z_{11} = 3.987\underline{/175.5°}\Omega$，$z_{21} = 0.0175\underline{/-2.65°}\Omega$，
$z_{12} = 0$，$z_{22} = 0.2651\underline{/91.9°}\ \Omega$。

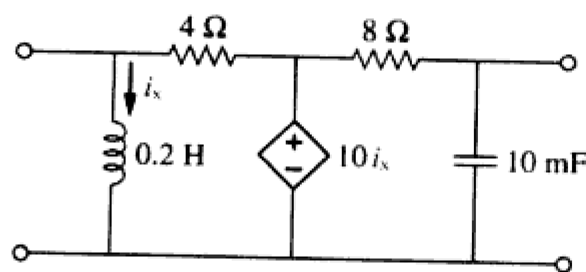


图 19-54 练习题 19-16 的电路原理图

19.9 †应用

前面已经学习了如何利用六组网络参数来描述各类双口网络的特性，根据大型网络中双口网络的不同连接方式，某一组特定的参数要比其他组参数具有明显的优势，正如19.7节所述。本节讨论双口网络参数的两个重要应用领域，晶体管电路分析与阶梯网络的综合。

19.9.1 晶体管电路分析

通常可以采用双口网络将负载与电路的激励源相互隔离。例如，如图19-55所示的双口网络可以表示一个放大器、滤波器或其他电路网络。如果该双口网络表示的是一个放大器，则容易推导出其电压增益A_v、电流增益A_i、输入阻抗Z_{in}以及输出阻抗Z_{out}的表达式，分别定义如下：

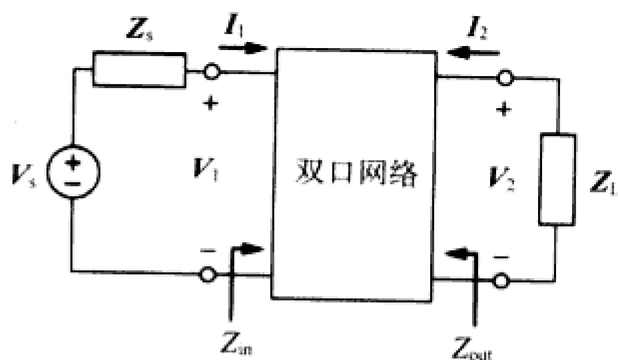


图 19-55 隔离电源与负载的双口网络

$$A_v = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} \tag{19-62}$$

$$A_i = \frac{I_2(s)}{I_1(s)} \tag{19-63}$$

$$Z_{in} = \frac{V_1(s)}{I_1(s)} \tag{19-64}$$

$$Z_{out} = \frac{V_2(s)}{I_2(s)}\bigg|_{V_s=0} \tag{19-65}$$

六组双口网络参数中的任何一组都可以用于推导式(19-62)~式(19-65)的表达式。但是，混合参数（h参数）对于晶体管是最为有用的，这些参数容易测量，通常可以由制造商的数据手册或说明书中获得。h参数提供了晶体管电路性能的一种快速估计，可以用于确定晶体管的准确电压增益、输入阻抗以及输出阻抗。

晶体管h参数的下标表示具有特定的含义，第一个下标与一般h参数之间的关系如下：

$$h_i = h_{11},\ h_r = h_{12},\ h_f = h_{21},\ h_o = h_{22} \tag{19-66}$$

下标i、r、f、o分别表示输入、反向、前向和输出之意。晶体管h参数的第二个下标字母表示晶体管的连接方式：e表示共射极连接（CE），c表示共集电极连接（CC），而b则表示共基极连接（CB）。本节主要讨论共射极连接，于是，共射极晶体管放大器的四个h参数分别为

$$\begin{aligned} h_{ie} &= \text{基极输入阻抗} \\ h_{re} &= \text{反向电压反馈比} \\ h_{fe} &= \text{基极}-\text{集电极电流增益} \\ h_{oe} &= \text{输出导纳} \end{aligned} \tag{19-67}$$

上述参数的计算或测量方法与一般h参数的计算或测量方法相同，其典型值为：$h_{ie}=6\text{k}\Omega$，$h_{re}=1.5\times10^{-4}$，$h_{fe}=200$，$h_{oe}=8\ \mu\text{S}$。必须记住，这些参数值是在特定条件下测量的表示晶体管交流特性的值。

图19-56给出了共射极放大器的电路原理图及其等效的混合参数模型。由图可见：

$$\boldsymbol{V}_b = h_{ie}\boldsymbol{I}_b + h_{re}\boldsymbol{V}_c \tag{19-68a}$$

$$\boldsymbol{I}_c = h_{fe}\boldsymbol{I}_b + h_{oe}\boldsymbol{V}_c \tag{19-68b}$$

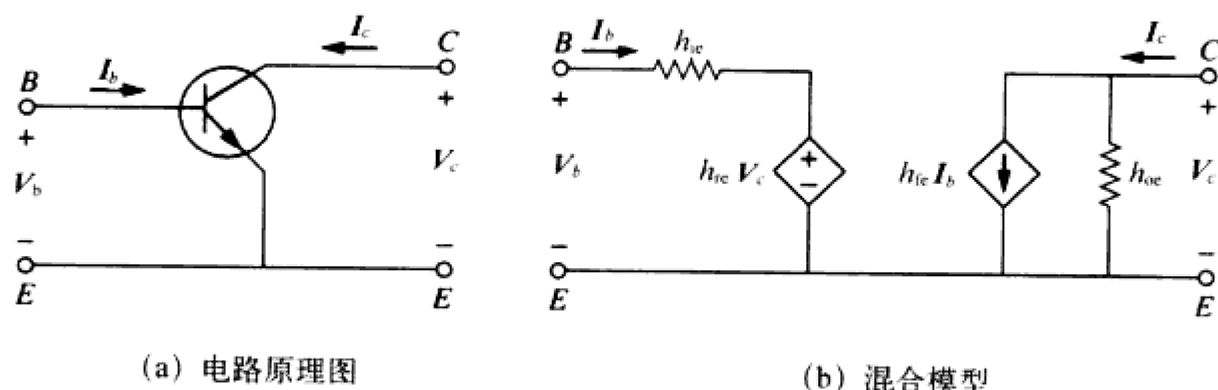


图 19-56 共射极放大器

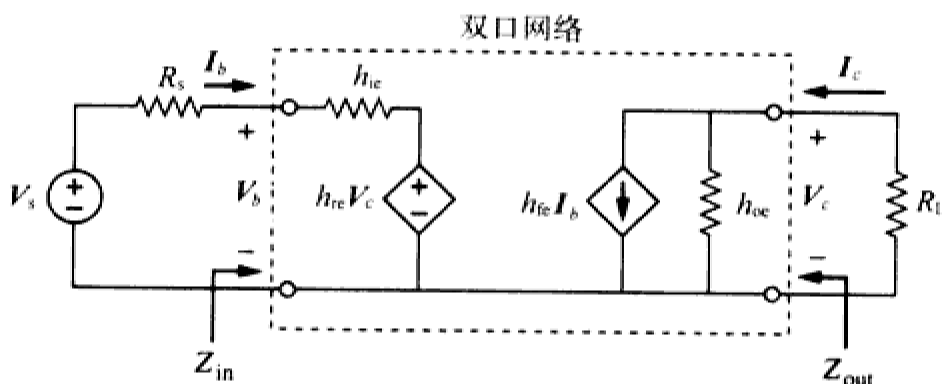


图 19-57 包含激励电源与负载电阻的晶体管放大器

考虑如图19-57所示的与交流电源和负载相连接的晶体管放大器，这是大型网络中嵌入双口网络的一个实例。利用式(19-68)即可分析该混合等效电路（参见例题19-6），由图19-57可知，$\boldsymbol{V}_c = -R_L\boldsymbol{I}_c$，将其代入式(19-68b)可得：

$$\boldsymbol{I}_c = h_{fe}\boldsymbol{I}_b - h_{oe}R_L\boldsymbol{I}_c$$

即：

$$(1 + h_{oe}R_L)\boldsymbol{I}_c = h_{fe}\boldsymbol{I}_b \tag{19-69}$$

由此可以确定放大器的电流增益为：

$$A_i = \frac{\boldsymbol{I}_c}{\boldsymbol{I}_b} = \frac{h_{fe}}{1 + h_{oe}R_L} \tag{19-70}$$

由式(19-68b)与式(19-70)可以得到用$\boldsymbol{V}_c$表示的$\boldsymbol{I}_b$：

$$\boldsymbol{I}_c = \frac{h_{fe}}{1 + h_{oe}R_L}\boldsymbol{I}_b = h_{fe}\boldsymbol{I}_b + h_{oe}\boldsymbol{V}_c$$

即：

$$\boldsymbol{I}_b = \frac{h_{oe}\boldsymbol{V}_c}{\dfrac{h_{fe}}{1 + h_{oe}R_L} - h_{fe}} \tag{19-71}$$

将式(19-71)代入式(19-68a)，并除以$\boldsymbol{V}_c$，得到：

$$\begin{aligned}\frac{\boldsymbol{V}_b}{\boldsymbol{V}_c} &= \frac{h_{oe}h_{ie}}{\dfrac{h_{fe}}{1 + h_{oe}R_L} - h_{fe}} + h_{re} \\ &= \frac{h_{ie} + h_{ie}h_{oe}R_L - h_{re}h_{fe}R_L}{-h_{fe}R_L}\end{aligned} \tag{19-72}$$

于是，放大器的电压增益为：

$$A_v = \frac{\boldsymbol{V}_c}{\boldsymbol{V}_b} = \frac{-h_{fe}R_L}{h_{ie} + (h_{ie}h_{oe} - h_{re}h_{fe})R_L} \tag{19-73}$$

将$\boldsymbol{V}_c = -R_L\boldsymbol{I}_c$代入式(19-68a)，可以得到：

$$\boldsymbol{V}_b = h_{ie}\boldsymbol{I}_b - h_{re}R_L\boldsymbol{I}_c$$

即：

$$\frac{\boldsymbol{V}_b}{\boldsymbol{I}_b} = h_{ie} - h_{re}R_L\frac{\boldsymbol{I}_c}{\boldsymbol{I}_b} \tag{19-74}$$

利用式(19-70)所示的电流增益取代$\boldsymbol{I}_c/\boldsymbol{I}_b$，即可得到放大器的输入阻抗为：

$$Z_{in} = \frac{\boldsymbol{V}_b}{\boldsymbol{I}_b} = h_{ie} - \frac{h_{re}h_{fe}R_L}{1 + h_{oe}R_L} \tag{19-75}$$

放大器的输出阻抗Z_{out}就是输出端的戴维南等效电阻，按照常规方法，将电压源短路，并在输出端设置一个1 V电压源，得到如图19-58所示的电路，于是输出阻抗$Z_{out} = 1/\boldsymbol{I}_c$。由于$\boldsymbol{V}_c$ =1 V，所以对于输入回路有：

$$h_{re}(1) = -\boldsymbol{I}_b(R_s + h_{ie}) \Rightarrow \boldsymbol{I}_b = -\frac{h_{re}}{R_s + h_{ie}} \tag{19-76}$$

对于输出回路，有：

$$\boldsymbol{I}_c = h_{oe}(1) + h_{fe}\boldsymbol{I}_b \tag{19-77}$$

将式(19-76)代入式(19-77)，可以得到：

$$\boldsymbol{I}_c = \frac{(R_s + h_{ie})h_{oe} - h_{re}h_{fe}}{R_s + h_{ie}} \tag{19-78}$$

由此即可确定输出阻抗Z_{out}为$1/\boldsymbol{I}_c$，即：

$$Z_{out} = \frac{R_s + h_{ie}}{(R_s + h_{ie})h_{oe} - h_{re}h_{fe}} \tag{19-79}$$



图 19-58　确定如图 19-57 所示放大器电路的输出阻抗

例题19-17　对于如图19-59所示的共射极放大器，试利用如下h参数：

$h_{ie} = 1\text{k}\Omega$，$h_{re} = 2.5\times10^{-4}$，$h_{fe} = 50$，$h_{oe} = 20\ \mu\text{S}$，

确定电压增益、电流增益、输入阻抗以及输出阻抗；并求出输出电压V_o。

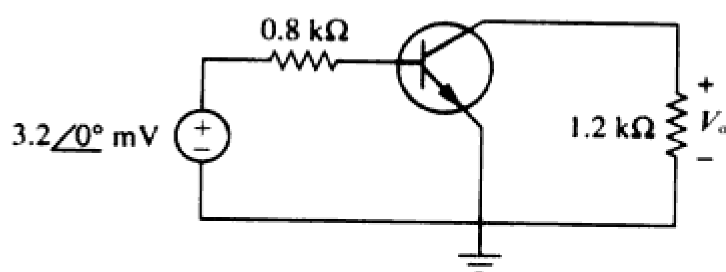


图 19-59　例题 19-17 的电路原理图

解　(1) **明确**问题。初看该问题，表面上已经阐述清楚，然而，所要求确定的输入阻抗与电压增益，并未指出是晶体管的还是整个电路的。就电流增益与输出阻抗而言，两种情况下的这两个参数是相同的。

必须明确上述问题，所要求计算的输入阻抗、输出阻抗以及电压增益是指电路的参数，而不是晶体管的参数。有趣的是，重新叙述该问题即可将其变为一个设计问题：已知h参数，试设计一个增益为－60的基本放大器。

(2) **表述**对问题的理解。给定基本晶体管电路，其输入电压为3.2 mV，已知其h参数，要求计算输出电压。

(3) 确定**可选**解。求解本例的方法有很多，其中最简单方法是利用如图19-57所示的等效电路。一旦得到等效电路，就可以利用电路分析的方法确定要求的答案。求得答案后，可将其代入电路方程中，验证答案的正确性。另一种方法是将等效电路的右侧进行简化，并进行倒推，看是否可以得到近似相等的解，下面就采用这种方法进行求解。

(4) **尝试**问题的解。由图可见$R_s = 8\ \text{k}\Omega$，$R_L = 1.2\ \Omega$。将如图19-59所示的晶体管处理为双口网络，并由式(19-70)～式(19-79)可以得到：

$$\begin{aligned} h_{ie}h_{oe} - h_{re}h_{fe} &= 10^3\times20\times10^{-6} - 2.5\times10^{-4}\times50 \\ &= 7.5\times10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_v &= \frac{-h_{fe}R_L}{h_{ie} + (h_{ie}h_{oe} - h_{re}h_{fe})R_L} = \frac{-50\times1200}{1000 + 7.5\times10^{-3}\times1200} \\ &= -59.46 \end{aligned}$$

$A_v = V_o / V_b$为放大器的电压增益。为了计算该电路的增益，需求出V_o / V_s。利用左侧电路的网孔方程以及式(19-71)～式(19-73)可以得到：

$$-V_s + R_sI_b + V_b = 0$$

即：

$$\begin{aligned} V_s &= 800\frac{20\times10^{-6}}{\dfrac{50}{1 + 20\times10^{-6}\times1.2\times10^3} - 50} - \frac{1}{59.46}V_o \\ &= -0.03047V_o \end{aligned}$$

因此，电路增益为−32.82。下面计算输出电压：

$$V_o = \text{gain} \times V_s = -\mathbf{105.09\angle 0^\circ mV}$$

$$A_i = \frac{h_{fe}}{1 + h_{oe}R_L} = \frac{50}{1 + 20 \times 10^{-6} \times 1\,200} = 48.83$$

$$Z_{in} = h_{ie} - \frac{h_{re}h_{fe}R_L}{1 + h_{oe}R_L}$$

$$= 1\,000 - \frac{2.5 \times 10^{-4} \times 50 \times 1\,200}{1 + 20 \times 10^{-6} \times 1\,200}$$

$$= 985.4\Omega$$

改变Z_{in}即可包括800 Ω电阻器，于是，

电阻输入阻抗＝800＋985.4＝1785.4 Ω

$$(R_s + h_{ie})h_{oe} - h_{re}h_{fe}$$

$$= (800 + 1\,000) \times 20 \times 10^{-6} - 2.5 \times 10^{-4} \times 50 = 23.5 \times 10^{-3}$$

$$Z_{out} = \frac{R_s + h_{ie}}{(R_s + h_{ie})h_{oe} - h_{re}h_{fe}} = \frac{800 + 1\,000}{23.5 \times 10^{-3}} = 76.6\text{k}\Omega$$

(5) **评价**得到的结果。在等效电路中，h_{oe}表示50 000 Ω电阻器，与阻值为12 kΩ的负载电阻器相并联。负载电阻器的阻值较h_{oe}电阻器小得多，因而h_{oe}可以忽略。于是得到：

$$I_c = h_{fe}I_b = 50I_b, V_c = -1200I_c$$

以及左边电路的回路方程为：

$$-0.003\,2 + (800 + 1\,000)I_b + (0.000\,25)(-1\,200)(50)I_b = 0$$

$$I_b = 0.003\,2/(1\,785) = 1.792\,7\mu\text{A}$$

$$I_c = 50 \times 1.792\,7 = 89.64\mu\text{A} \text{和} V_c = -1\,200 \times 89.64 \times 10^{-6}$$

$$= -107.57\text{mV}$$

这是−105.09 mV的良好近似。

电压增益＝−107.57/3.2＝−33.62

同样，也是对33.82的良好近似。

电路的输入阻抗＝0.032/(1.792 7 × 10^{-6})＝**1 785** Ω

显然，与前面确定的1 785.4 Ω是一致的。

上述计算均假定$Z_{out} = \infty$ Ω。计算结果为72.6 kΩ，计算该电阻与负载电阻的等效电阻即可验证上述假设。

72 600 × 1 200/(72 600 + 1 200) = 1 180.5 Ω = 1.180 5 kΩ

同样得到较好的近似。

(6) 对结果是否**满意**？上述问题的求解以及结果的验证是满意的，可以将所得到的结果作为本题的答案。

练习题19-17 对于如图19-60所示的晶体管放大器，试求电压增益、电流增益、输入阻抗以及输出阻抗，假定：

$h_{ie} = 6$ kΩ，$h_{re} = 1.5 \times 10^{-4}$，$h_{fe} = 200$，$h_{oe} = 8$ μS

答 −123.61（晶体管），−4.753（电路），194.17，6 kΩ（晶体管），156 kΩ（电路），128.08 kΩ。

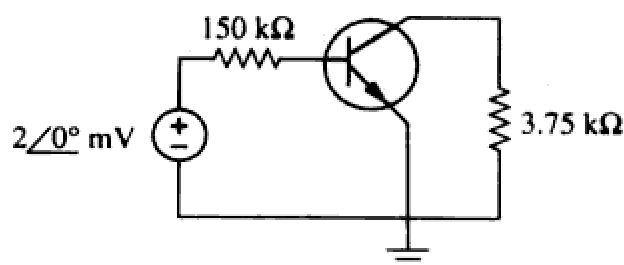


图 19-60 练习题 19-17 的电路原理图

19.9.2 阶梯网络综合

双口网络参数的另一个应用是阶梯网络的综合（或构建），阶梯网络在实际电路中经常出现，特别是在无源低通滤波器的设计中更为有用。根据第8章中关于二阶电路的讨论可知，滤波的阶数是指描述该滤波器的特征方程的阶数，并且由不能合并的电抗元件的数目决定（即不能通过串联、并联合并的元件）。图19-61a给出了一个包含奇数个元件的LC阶梯网络（即奇次滤波器），而图19-61给出的则是一个包含偶数个元件的LC阶梯网络（即偶次滤波器）。无论哪种网络，如果其终端负载阻抗为Z_L，源阻抗为Z_S，即可得到如图19-62所示的网络结构。为了使设计不至于复杂，假定$Z_S=0$，目的是综合出LC阶梯网络的传递函数。首先利用导纳参数来刻画阶梯网络的特征，即：

$$\boldsymbol{I}_1=y_{11}\boldsymbol{V}_1+y_{12}\boldsymbol{V}_2 \tag{19-80a}$$

$$\boldsymbol{I}_2=y_{21}\boldsymbol{V}_1+y_{22}\boldsymbol{V}_2 \tag{19-80b}$$

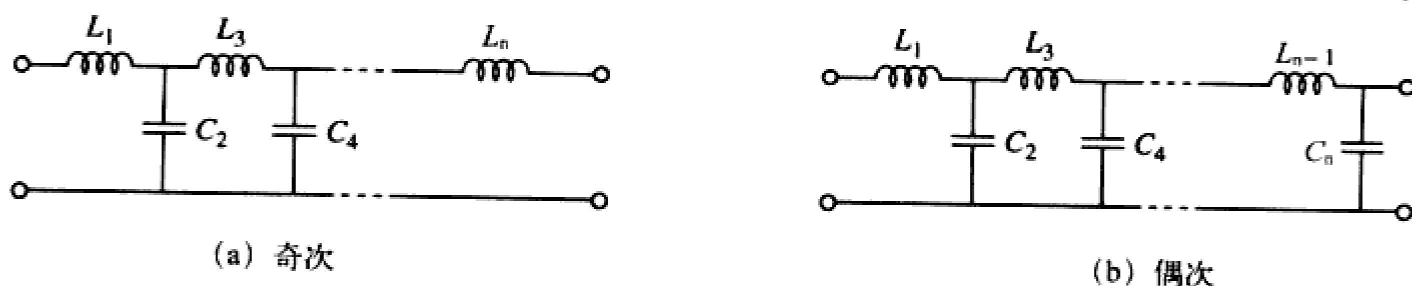


图 19-61 构成低通滤波器的 LC 阶梯网络

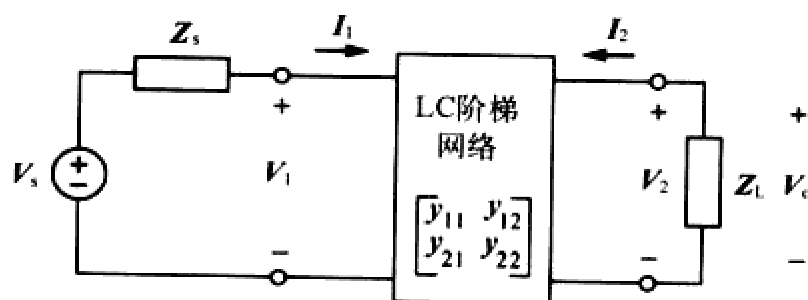


图 19-62 具有终端阻抗的 LC 阶梯网络

（当然，也可以利用阻抗参数取代导纳参数）。在输入端口处，因为$\boldsymbol{Z}_s=0$，所以$\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{V}_s$。在输出端口处，$\boldsymbol{V}_2=\boldsymbol{V}_o$，并且$\boldsymbol{I}_2=-\boldsymbol{V}_2/\boldsymbol{Z}_L=-\boldsymbol{V}_o\boldsymbol{Y}_L$。于是，式(19-80b) 变为：

$$-\boldsymbol{V}_o\boldsymbol{Y}_L=y_{21}\boldsymbol{V}_s+y_{22}\boldsymbol{V}_o$$

即：

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{\boldsymbol{V}_o}{\boldsymbol{V}_s}=\frac{-y_{21}}{\boldsymbol{Y}_L+y_{22}} \tag{19-81}$$

也可将其写为：

$$\boxed{\boldsymbol{H}(s)=-\frac{y_{21}/\boldsymbol{Y}_L}{1+y_{22}/\boldsymbol{Y}_L}} \tag{19-82}$$

由于滤波器通常利用传递函数的模值表示，所以式(19-82) 中的负号可以忽略不计。滤波器设计的主要任务是选定电容器与电感器，从而综合出参数y_{21}与y_{22}，由此实现所期望的传递函数。为了实现上述目标，需利用LC阶梯网络的一项重要性质：阶梯网络的所有z参数和y参数均为仅包含s的偶次幂或者s的奇次幂的多项式之比，也就是说，z参数与y参数可以表示为Od(s)/Ev(s)或者Ev(s)/Od(s)，其中Od与Ev分别为奇函数与偶函数。令

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{\boldsymbol{N}(s)}{\boldsymbol{D}(s)}=\frac{\boldsymbol{N}_o+\boldsymbol{N}_e}{\boldsymbol{D}_o+\boldsymbol{D}_e} \tag{19-83}$$

其中，$\boldsymbol{N}(s)$与$\boldsymbol{D}(s)$分别为传递函数$\boldsymbol{H}(s)$的分子与分母。$\boldsymbol{N}_o$与$\boldsymbol{N}_e$分别为$\boldsymbol{N}$的奇次部分与偶次部分；$\boldsymbol{D}_o$与$\boldsymbol{D}_e$分别为$\boldsymbol{D}$的奇次部分与偶次部分。因为$\boldsymbol{N}(s)$或者为奇函数，或者为偶函数，所以式(19-83）可以写为：

$$\boldsymbol{H}(s)=\begin{cases}\dfrac{\boldsymbol{N}_o}{\boldsymbol{D}_o+\boldsymbol{D}_e}, & (\boldsymbol{N}_e=0)\\[2ex] \dfrac{\boldsymbol{N}_e}{\boldsymbol{D}_o+\boldsymbol{D}_e}, & (\boldsymbol{N}_o=0)\end{cases} \tag{19-84}$$

或者将其重新写为：

$$\boldsymbol{H}(s)=\begin{cases}\dfrac{\boldsymbol{N}_o/\boldsymbol{D}_e}{1+\boldsymbol{D}_o/\boldsymbol{D}_e}, & (\boldsymbol{N}_e=0)\\[2ex] \dfrac{\boldsymbol{N}_e/\boldsymbol{D}_o}{1+\boldsymbol{D}_e/\boldsymbol{D}_o}, & (\boldsymbol{N}_o=0)\end{cases} \tag{19-85}$$

将上式与式(19-82)进行比较，可以确定网络的y参数为：

$$\frac{\boldsymbol{y}_{21}}{\boldsymbol{Y}_L}=\begin{cases}\dfrac{\boldsymbol{N}_o}{\boldsymbol{D}_e}, & (\boldsymbol{N}_e=0)\\[2ex] \dfrac{\boldsymbol{N}_e}{\boldsymbol{D}_o}, & (\boldsymbol{N}_o=0)\end{cases} \tag{19-86}$$

以及

$$\frac{\boldsymbol{y}_{22}}{\boldsymbol{Y}_L}=\begin{cases}\dfrac{\boldsymbol{D}_o}{\boldsymbol{D}_e}, & (\boldsymbol{N}_e=0)\\[2ex] \dfrac{\boldsymbol{D}_e}{\boldsymbol{D}_o}, & (\boldsymbol{N}_o=0)\end{cases} \tag{19-87}$$

下面通过例题说明上述过程。

例题19-18 试设计一个终端为1 Ω电阻器的阶梯网络，其归一化的传递函数为：

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

（这是巴特沃思低通滤波器的传递函数。）

解 传递函数的分母表明这是一个三阶网络，因此其LC阶梯网络如图19-63a所示，包括两个电感器与一个电容器。目的是确定电感器与电容器的值。为此，将分母中的各项划分为奇次项与偶次项两部分：

$$\boldsymbol{D}(s)=(s^3+2s)+(2s^2+1)$$

于是，

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{1}{(s^3+2s)+(2s^2+1)}$$

将分子、分母同时除以分母的奇次项，得到：

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{\dfrac{1}{s^3+2s}}{1+\dfrac{2s^2+1}{s^3+2s}} \tag{19-18-1}$$

由式(19-82)可知，当$\boldsymbol{Y}_L=1$时，

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{-y_{21}}{1+y_{22}} \tag{19-18-2}$$

比较式(19-18-1)与式(19-18-2)可以得到：

$$y_{21}=-\frac{1}{s^3+2s},\quad y_{22}=\frac{2s^2+1}{s^3+2s}$$

由于y_{22}为输出端策动点导纳，即输入端口短路时，网络的输出导纳，所以，实现了y_{22}就会自动实现y_{21}。于是，确定出如图19-63a所示网络中的L与C的值，即可得到y_{22}。由于y_{22}为短路输出导纳，所以应将输入端口短路，如图19-63b所示。首先确定L_3，令：

$$Z_A=\frac{1}{y_{22}}=\frac{s^3+2s}{2s^2+1}=sL_3+Z_B \tag{19-18-3}$$

而由长除法，可以得到：

$$Z_A=0.5s+\frac{1.5s}{2s^2+1} \tag{19-18-4}$$

比较式(19-18-3)与式(19-18-4)，可得：

$$L_3=0.5\text{H},\quad Z_B=\frac{1.5s}{2s^2+1}$$

下面确定如图19-63c所示网络中的C_2，令：

$$Y_B=\frac{1}{Z_B}=\frac{2s^2+1}{1.5s}=1.333s+\frac{1}{1.5s}=sC_2+Y_C$$

由此可得$C_2=1.33$ F，并且，

$$Y_C=\frac{1}{1.5s}=\frac{1}{sL_1}\Rightarrow L_1=1.5\text{H}$$

这样，就综合出如图19-63a所示的$L_1=1.5$ H、$C_2=1.333$ F、$L_3=0.5$ H的LC阶梯网络，从而得到给定的传递函数$\boldsymbol{H}(s)$。求出图19-63a中的$\boldsymbol{H}(s)=\boldsymbol{V}_2/\boldsymbol{V}_1$，或者求出$y_{21}$的值，即可验证上述结果的正确性。

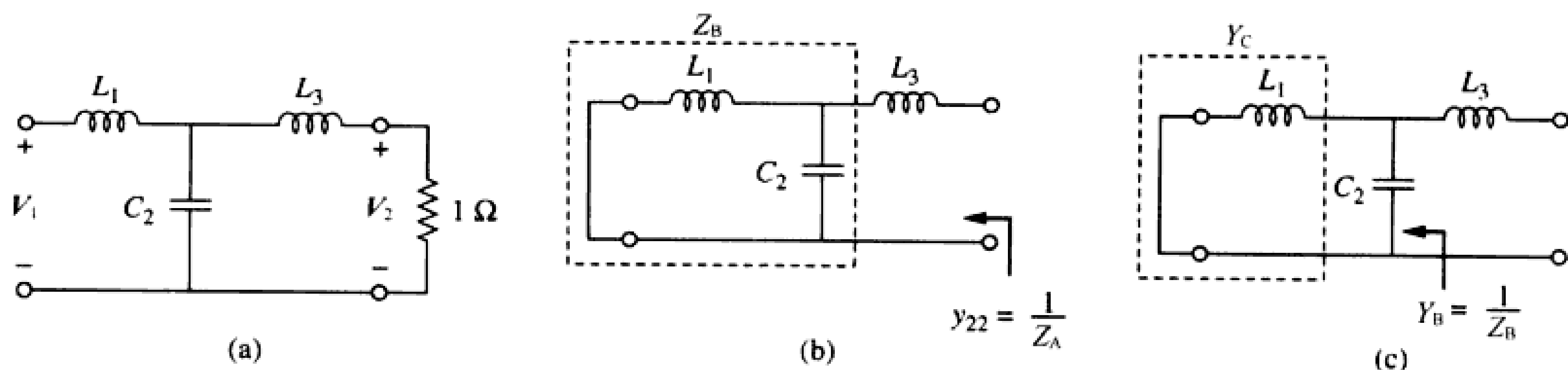


图 19-63 例题 19-18 的电路原理图

练习题19-18 试利用终端连接1 Ω电阻器的LC阶梯网络，实现如下传递函数：

$$H(s)=\frac{2}{s^3+s^2+4s+2}$$

答 阶梯网络如图19-63a所示，$L_1=L_3=1.0$ H，$C_2=0.5$ F。

19.10 本章小结

(1) 双口网络是指具有两个端口（或者两对接入通道）——输入端口与输出端口的网络。

(2) 用于建立双口网络模型的六组参数包括阻抗参数[$\boldsymbol{z}$]、导纳参数[$\boldsymbol{y}$]、混合参数[$\boldsymbol{h}$]、逆混合参数[$\boldsymbol{g}$]、传输参数[$\boldsymbol{T}$]以及反向传输参数[$\boldsymbol{t}$]。

(3) 描述输入端口变量与输出端口变量之间关系的参数为：

$$\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix}=[z]\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix}=[y]\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}V_1\\I_2\end{bmatrix}=[h]\begin{bmatrix}I_1\\V_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}I_1\\V_2\end{bmatrix}=[g]\begin{bmatrix}V_1\\I_2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}V_1\\I_1\end{bmatrix}=[T]\begin{bmatrix}V_2\\-I_2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}V_2\\I_2\end{bmatrix}=[t]\begin{bmatrix}V_1\\-I_1\end{bmatrix}$$

(4) 将适当的输入端口或输出端口短路或开路即可计算出或测量出网络的参数。

(5) 如果$z_{12}=z_{21}$，$y_{12}=y_{21}$，$h_{12}=-h_{21}$，$g_{12}=-g_{21}$，$\Delta_T=1$或$\Delta_t=1$，则称双口网络是互易网络。包含受控源的网络不是互易网络。

(6) 表19-1给出了六组参数之间的换算关系，其中三个重要关系为：

$$[y]=[z]^{-1},\qquad [g]=[h]^{-1},\qquad [t]\neq[T]^{-1}$$

(7) 双口网络的连接方式包括串联、并联与级联。在串联连接时，z参数是相加的；在并联连接时，y参数是相加的；而在级联连接时，传输参数是依次相乘的。

(8) 利用PSpice软件将适当的端口变量设定为1 A或1 V电压源，并将其他端口开路或短路，即可计算出双口网络的参数。

(9) 在晶体管电路的分析以及LC阶梯网络的综合中，都会用到网络参数。因为晶体管电路很容易建模为一个双口网络，所以网络参数在晶体管电路分析中尤为重要。无源低通滤波器设计的重要模块——LC阶梯网络，与级联T形网络非产相似，所以可以看作双口网络进行彻底分析。

复习题

19-1 在如图19-64a所示的单元件双口网络中，z_{11}为：

(a) 0 (b) 5 (c) 10
(d) 20 (e) 不存在

19-2 在如图19-64b所示的单元件双口网络中，z_{11}为：

(a) 0 (b) 5 (c) 10
(d) 20 (e) 不存在

19-3 在如图19-64a所示的单元件双口网络中，y_{11}为：

(a) 0 (b) 5 (c) 10
(d) 20 (e) 不存在

19-4 在如图19-64b所示的单元件双口网络中，h_{21}为：

(a) −0.1 (b) −1 (c) 0
(d) 10 (e) 不存在

19-5 在如图19-64a所示的单元件双口网络中，B为：

(a) 0 (b) 5 (c) 10
(d) 20 (e) 不存在

19-6 在如图19-64b所示的单元件双口网络中，B为：

(a) 0 (b) 5 (c) 10
(d) 20 (e) 不存在

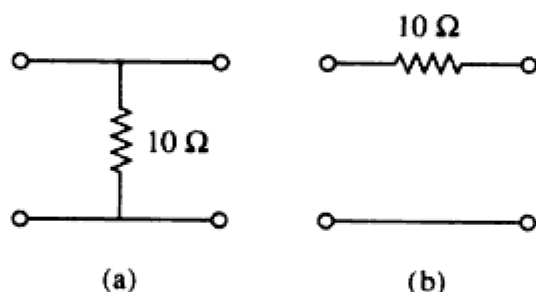


图 19-64 复习题的电路原理图

19-7 当某双口电路的端口1短路时，$I_1=4I_2$，$V_2=0.25\,I_2$，下述哪个结论是正确的？

(a) $y_{11}=4$ (b) $y_{12}=16$
(c) $y_{21}=16$ (d) $y_{22}=0.25$

19-8 某双口网络可以用如下方程描述：

$$V_1=50\,I_1+10\,I_2$$
$$V_2=30\,I_1+20\,I_2$$

以下哪个结论是不正确的？

(a) $z_{12}=10$ (b) $y_{12}=-0.0143$
(c) $h_{12}=0.5$ (d) $A=50$

19-9 对于互易双口网络而言，以下哪个结论是不正确的？

(a) $z_{21}=z_{12}$ (b) $y_{21}=y_{12}$
(c) $h_{21}=h_{12}$ (d) $AD=BC+1$

19-10 如果将如图19-64所示的两个单元件双口网络级联，则D为：

(a) 0　(b) 0.1　(c) 2
(d) 10　(e) 不存在

答案　19-1 c；19-2 e；19-3 e；19-4 b；19-5 a；19-6 c；19-7 b；19-8 d；19-9 c；19-10 c。

习题

19.2 节

19-1　试确定如图19-65所示网络的z参数。

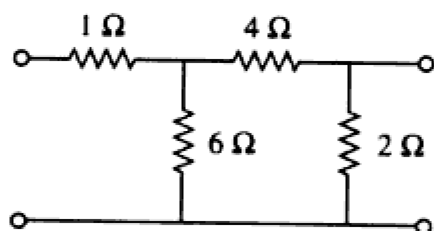


图 19-65　习题 19-1 与习题 19-28 的电路原理图

*19-2　试求如图19-66所示网络的等效阻抗参数。

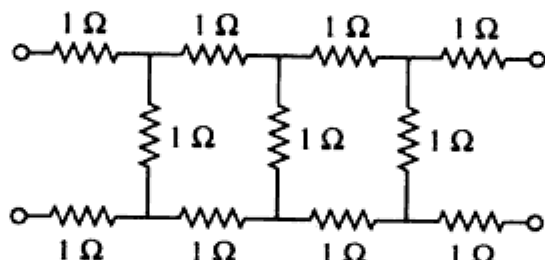


图 19-66　习题 19-2 的电路原理图

19-3　试求如图19-67所示电路的z参数。

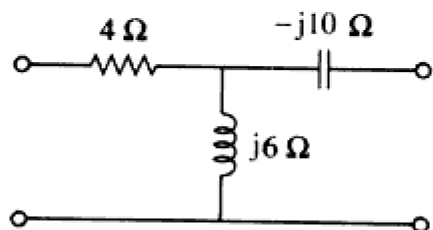


图 19-67　习题 19-3 的电路原理图

19-4　试计算如图19-68所示电路的z参数。

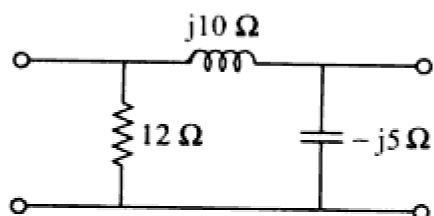


图 19-68　习题 19-4 的电路原理图

19-5　试确定如图19-69所示网络的s域z参数。

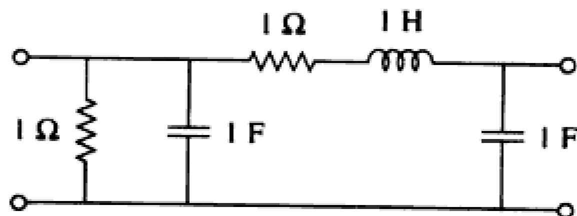


图 19-69　习题 19-5 的电路原理图

19-6　试计算如图19-70所示电路的z参数。

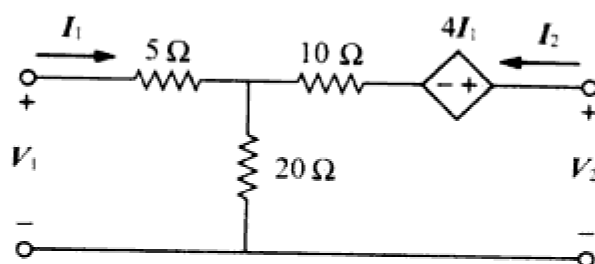


图 19-70　习题 19-6 与习题 19-73 的电路原理图

19-7　试计算如图19-71所示电路的等效阻抗参数。

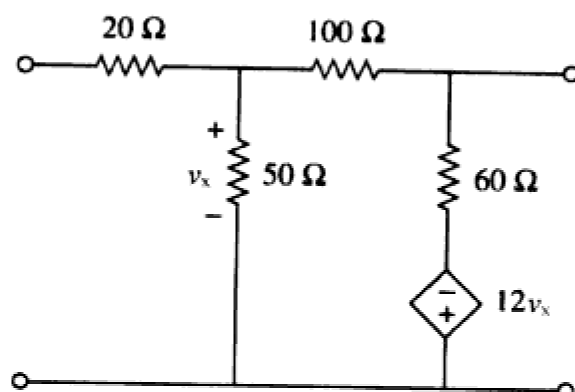


图 19-71　习题 19-7 与习题 19-80 的电路原理图

19-8　试求如图19-72所示双口网络的z参数。

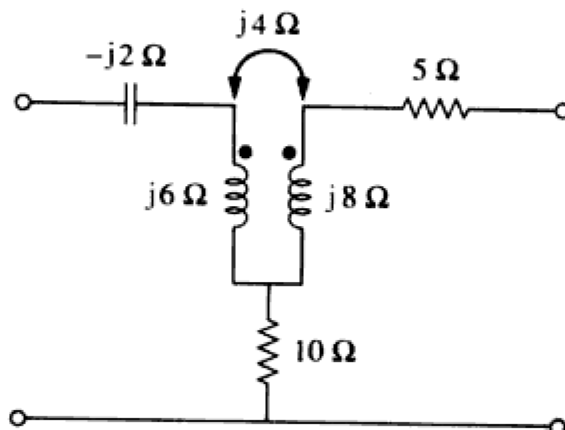


图 19-72　习题 19-8 的电路原理图

19-9　某网络的y参数为：

$$[y]=\begin{bmatrix}0.5 & -0.2\\ -0.2 & 0.4\end{bmatrix}$$

试确定该网络的z参数。

19-10　试构建实现如下各z参数的双口网络。

(a) $[z]=\begin{bmatrix}25 & 20\\ 5 & 10\end{bmatrix}\Omega$

(b) $[z]=\begin{bmatrix}1+\frac{3}{s} & \frac{1}{s}\\ \frac{1}{s} & 2s+\frac{1}{s}\end{bmatrix}\Omega$

19-11 试确定可以用如下z参数表示的双口网络。

$$[z]=\begin{bmatrix}6+j3 & 5-j2\\ 5-j2 & 8-j\end{bmatrix}\Omega$$

19-12 对于如图19-73所示电路，令：

$$[z]=\begin{bmatrix}10 & -6\\ -4 & 12\end{bmatrix}\Omega$$

试求I_1、I_2、V_1与V_2。

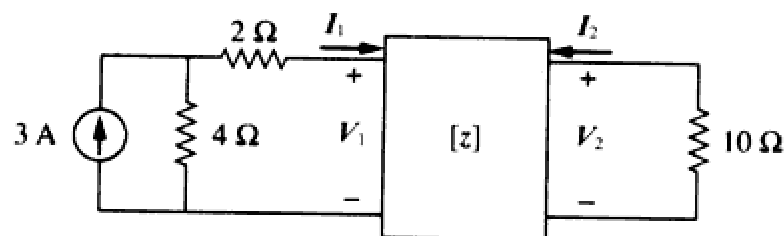


图 19-73 习题 19-12 的电路原理图

19-13 试确定传递给如图19-74所示网络中$Z_L=5+j4$的平均功率。注意：电压为均方根电压。

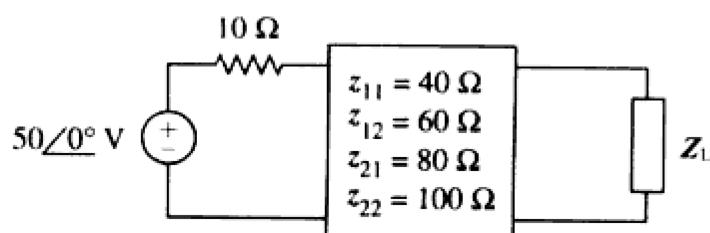


图 19-74 习题 19-13 的电路原理图

19-14 对于如图19-75所示的双口网络，试证明在输出端：

$$\boldsymbol{Z}_{\text{Th}}=z_{22}-\frac{z_{12}z_{21}}{z_{11}+\boldsymbol{Z}_s}$$

并且，

$$\boldsymbol{V}_{\text{Th}}=\frac{z_{21}}{z_{11}+\boldsymbol{Z}_s}\boldsymbol{V}_s$$

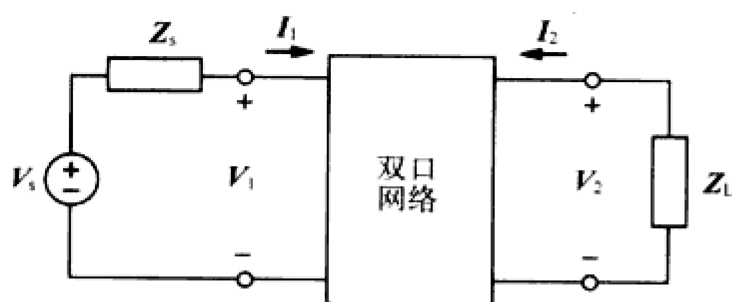


图 19-75 习题 19-14 与习题 19-41 的电路原理图

19-15 对于如图19-76所示网络，

$$[z]=\begin{bmatrix}40 & 60\\ 80 & 120\end{bmatrix}\Omega$$

(a) 试求实现负载最大功率传输时的$\boldsymbol{Z}_L$；

(b) 试计算传递给负载的最大功率。

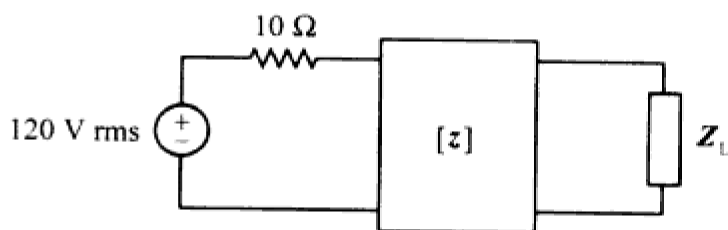


图 19-76 习题 19-15 的电路原理图

19-16 对于如图19-77所示电路，当$\omega=2$ rad/s时，$z_{11}=10\ \Omega$，$z_{12}=z_{21}=j6\ \Omega$，$z_{22}=4\ \Omega$，试确定在端口$a-b$处的戴维南等效电路，并计算v_o。

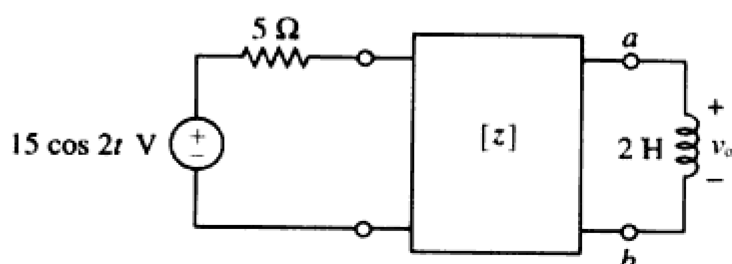


图 19-77 习题 19-16 的电路原理图

19.3 节

*19-17 试确定如图19-78所示电路的z参数与y参数。

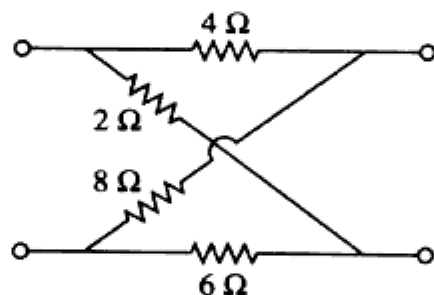


图 19-78 习题 19-17 的电路原理图

19-18 试计算如图19-79所示双口网络的y参数。

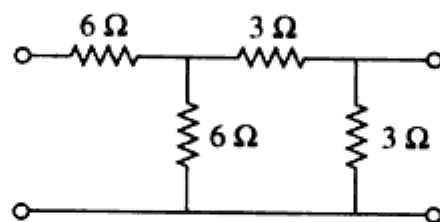


图 19-79 习题 19-18 与习题 19-37 的电路原理图

19-19 试求如图19-80所示双口网络的s域y参数。

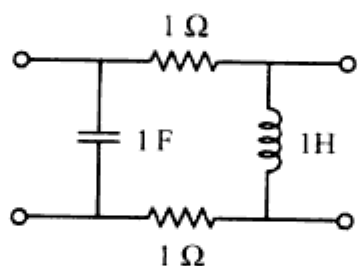


图 19-80 习题 19-19 的电路原理图

19-20 试求如图19-81所示电路的y参数。

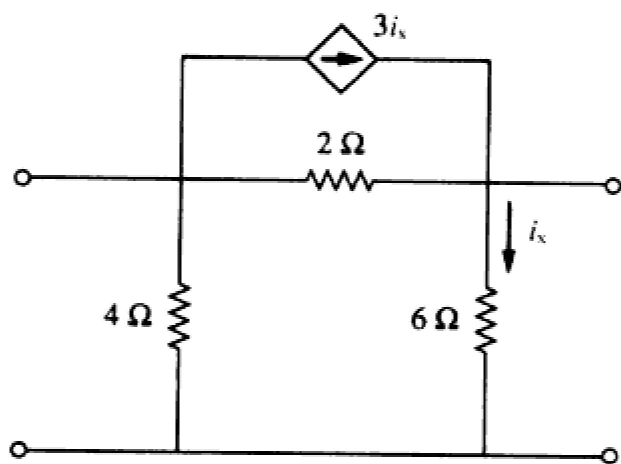


图 19-81 习题 19-20 的电路原理图

19-21 试确定如图19-82所示双口网络的等效导纳参数。

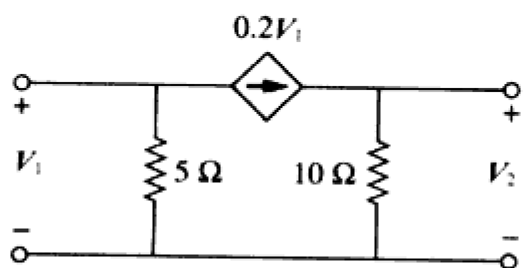


图 19-82 习题 19-21 的电路原理图

19-22 试确定如图19-83所示双口网络的y参数。

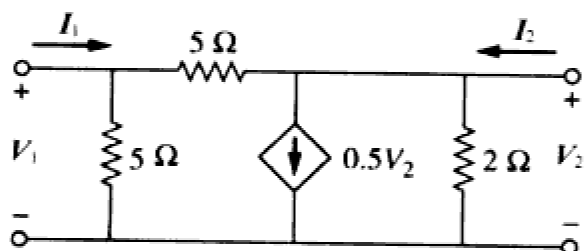


图 19-83 习题 19-22 的电路原理图

19-23 (a) 试求如图19-84所示双口网络的y参数；

(b) 试确定$v_s(t) = 2\,u(t)$时的$V_2(s)$。

19-24 试求表示如下y参数的电阻电路：

$$[y] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

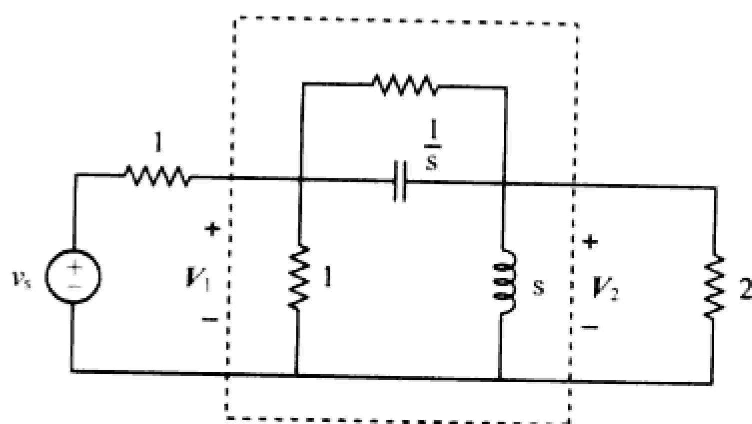


图 19-84 习题 19-23 的电路原理图

19-25 试画出具有如下y参数的双口网络：

$$[y] = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \text{S}$$

19-26 试计算如图19-85所示双口网络的$[y]$。

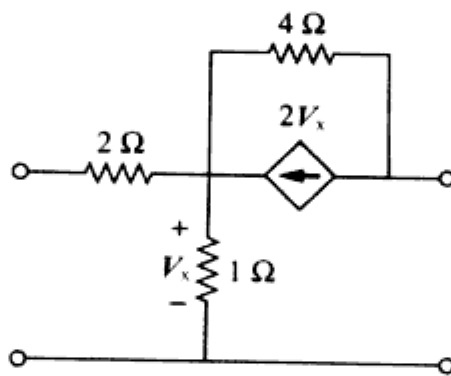


图 19-85 习题 19-26 的电路原理图

19-27 试求如图19-86所示电路的y参数。

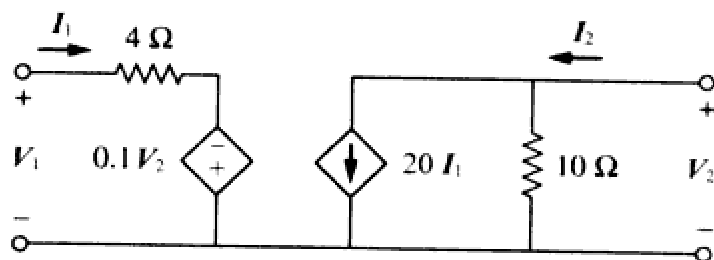


图 19-86 习题 19-27 的电路原理图

19-28 在如图19-65所示电路中，如果输入端口连接一个1 A直流电流源，试利用y参数计算2Ω电阻器所消耗的功率，并通过直接电路分析验证计算结果。

19-29 在如图19-87所示的桥式电路中，$I_1 = 10$ A，$I_2 = -4$ A。

(a) 试利用y参数确定V_1与V_2；

(b) 试通过直接电路分析验证 (a) 中的结果。

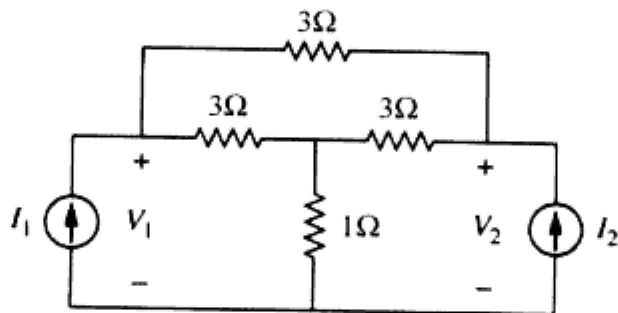


图 19-87 习题 19-29 的电路原理图

19.4 节

19-30 试求如图19-88所示网络的h参数。

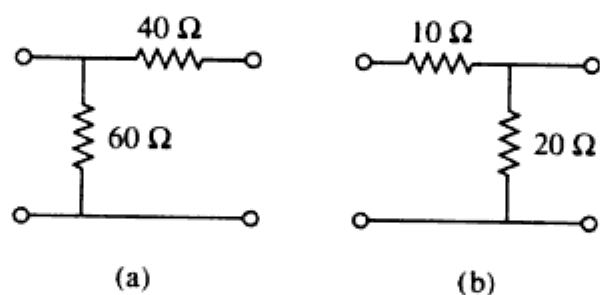


图 19-88 习题 19-30 的电路原理图

19-31 试确定如图19-89所示网络的混合参数。

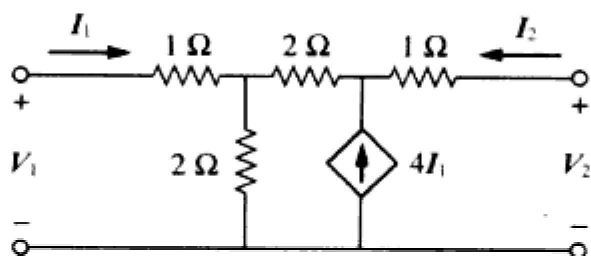


图 19-89 习题 19-31 的电路原理图

19-32 试求如图19-90所示双口网络的s域h参数与g参数。

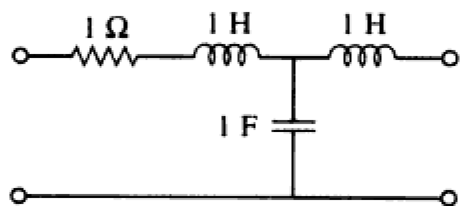


图 19-90 习题 19-32 的电路原理图

19-33 试确定如图19-91所示双口网络的h参数。

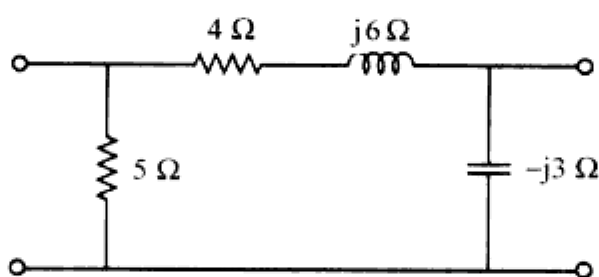


图 19-91 习题 19-33 的电路原理图

19-34 试确定如图19-92所示双口网络的h参数与g参数。

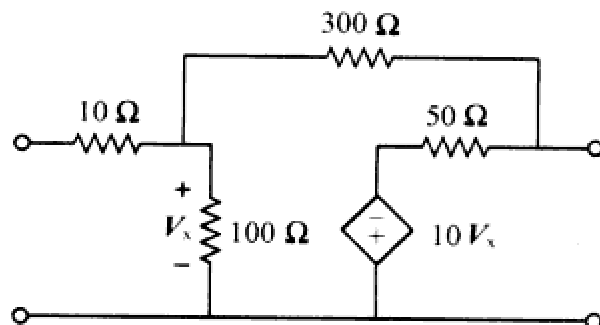


图 19-92 习题 19-34 的电路原理图

19-35 试确定如图19-93所示网络的h参数。

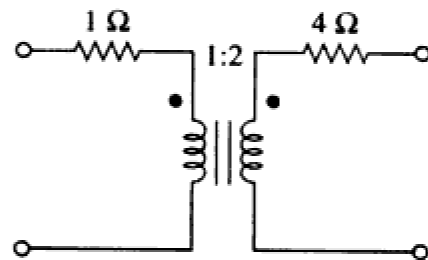


图 19-93 习题 19-35 的电路原理图

19-36 对于如图19-94所示的双口网络，

$$[h]=\begin{bmatrix}16\Omega & 3\\ -2 & 0.01\text{S}\end{bmatrix}$$

试求：(a) V_2/V_1；(b) I_2/I_1；(c) I_1/V_1；(d) V_2/I_1。

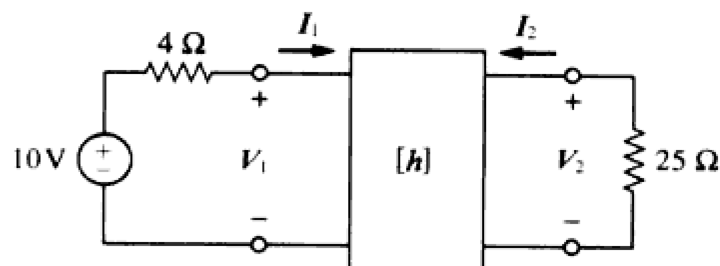


图 19-94 习题 19-36 的电路原理图

19-37 如图19-79所示电路的输入端口与一个10 V直流电压源相连接，输出端口与一5 Ω电阻器相连接，试利用该电路的h参数求5 Ω电阻器两端的电压，并通过直接电路分析验证计算结果。

19-38 如图19-95所示双口网络的h参数为：

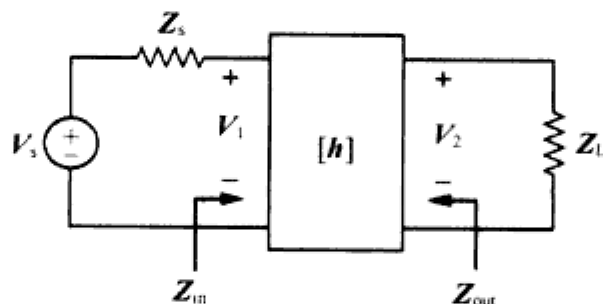


图 19-95 习题 19-38 的电路原理图

$$[h]=\begin{bmatrix}600\Omega & 0.04\\ 30 & 2\text{mS}\end{bmatrix}$$

如果$Z_s = 2\ \text{k}\Omega$，$Z_L = 400\ \Omega$，试求Z_{in}与Z_{out}。

19-39　试确定如图19-96所示Y型电路的g参数。

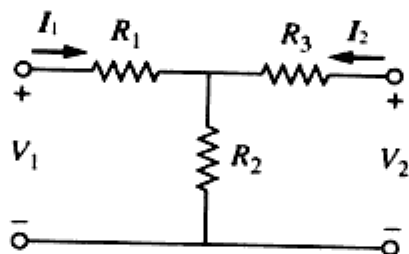


图 19-96　习题 19-39 的电路原理图

19-40　试求如图19-97所示电路g参数。

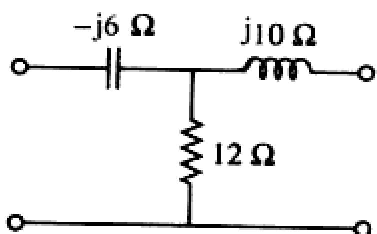


图 19-97　习题 19-40 的电路原理图

19-41　对于如图19-75所示的双口网络，试证明：

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{-g_{21}}{g_{11}Z_L+\Delta_g}$$

$$\frac{V_2}{V_s}=\frac{g_{21}Z_L}{(1+g_{11}Z_s)(g_{22}+Z_L)-g_{21}g_{12}Z_s}$$

其中，Δ_g为矩阵[g]的行列式。

19-42　某双口器件的h参数如下：

$h_{11}=600\ \ \Omega$，$h_{12}=10^{-3}$，$h_{21}=120$，$h_{22}=2\times10^{-6}\ \text{S}$

试画出包括各元件值在内的器件电路模型。

19.5 节

19-43　试求如图19-98所示单元件双口网络的传输参数。

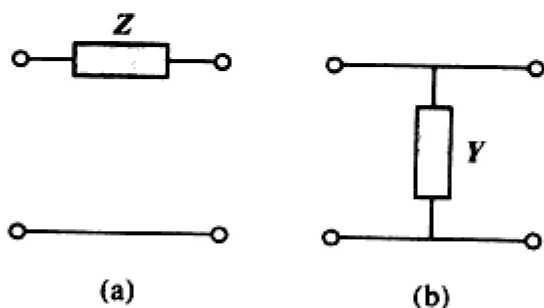


图 19-98　习题 19-43 的电路原理图

19-44　试确定如图19-99所示电路的传输参数。

19-45　试求如图19-100所示电路的$ABCD$参数。

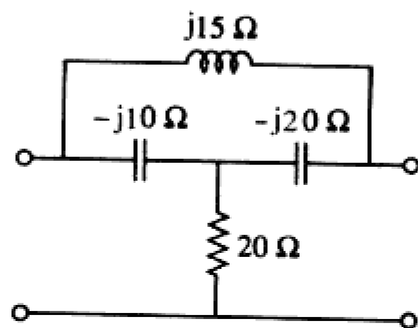


图 19-99　习题 19-44 的电路原理图

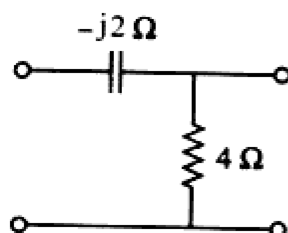


图 19-100　习题 19-45 的电路原理图

19-46　试求如图19-101所示电路的传输参数。

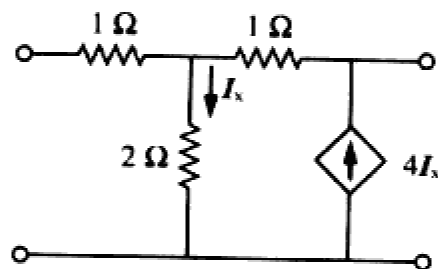


图 19-101　习题 19-46 的电路原理图

19-47　试确定如图19-102所示网络的$ABCD$参数。

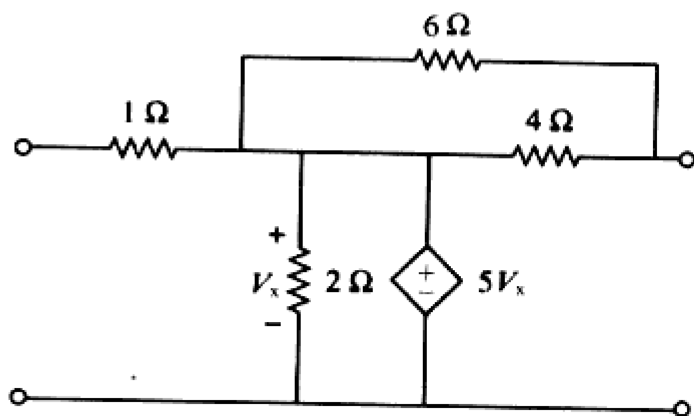


图 19-102　习题 19-47 的电路原理图

19-48　对于某双口网络，令$A=4$，$B=30\ \Omega$，$C=0.1\ \text{S}$，$D=1.5$。试计算下列几种情况下的输入阻抗$Z_{in}=V_1/I_1$。

(a) 输出端短路；

(b) 输出端口开路；

(c) 输出端口连接一个10 Ω负载。

19-49　试利用s域阻抗，确定如图19-103所示电路的传输参数。

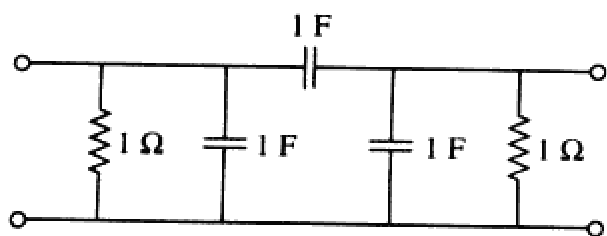


图 19-103 习题 19-49 的电路原理图

19-50 试推导如图19-104所示电路t参数的s域表达式。

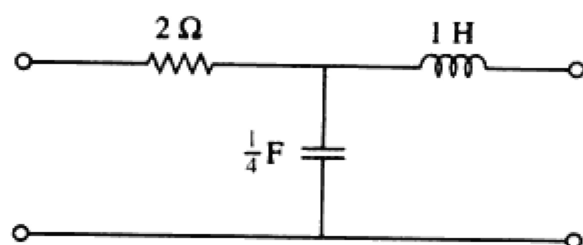


图 19-104 习题 19-50 的电路原理图

19-51 试确定如图19-105所示网络的t参数。

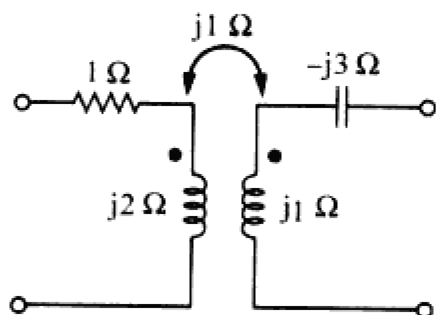


图 19-105 习题 19-51 的电路原理图

19.6 节

19-52 (a) 对于如图19-106所示的T型网络，试证明其h参数为：

$$\boldsymbol{h}_{11}=R_1+\frac{R_2R_3}{R_1+R_3},\quad \boldsymbol{h}_{12}=\frac{R_2}{R_2+R_3}$$

$$\boldsymbol{h}_{21}=-\frac{R_2}{R_2+R_3},\quad \boldsymbol{h}_{22}=\frac{1}{R_2+R_3},$$

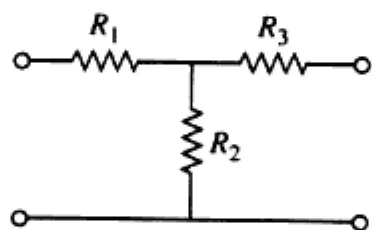


图 19-106 习题 19-52 的电路原理图

(b) 对于同一网络，试证明其传输参数为：

$$\boldsymbol{A}=1+\frac{R_1}{R_2},\quad \boldsymbol{B}=R_3+\frac{R_1}{R_2}(R_2+R_3)$$

$$\boldsymbol{C}=\frac{1}{R_2},\quad \boldsymbol{D}=1+\frac{R_3}{R_2}$$

19-53 试推导出利用***ABCD***参数表示的z参数表达式。

19-54 试证明由y参数确定的双口网络的传输参数为

$$\boldsymbol{A}=-\frac{y_{22}}{y_{21}},\quad \boldsymbol{B}=-\frac{1}{y_{21}}$$

$$\boldsymbol{C}=-\frac{\Delta_y}{y_{21}},\quad \boldsymbol{D}=-\frac{y_{11}}{y_{21}}$$

19-55 试证明由z参数确定的g参数可以表达为

$$g_{11}=\frac{1}{z_{11}},\quad g_{12}=-\frac{z_{12}}{z_{11}}$$

$$g_{21}=\frac{z_{21}}{z_{11}},\quad g_{22}=\frac{\Delta_z}{z_{11}}$$

19-56 对于如图19-107所示网络，试确定V_o/V_s。

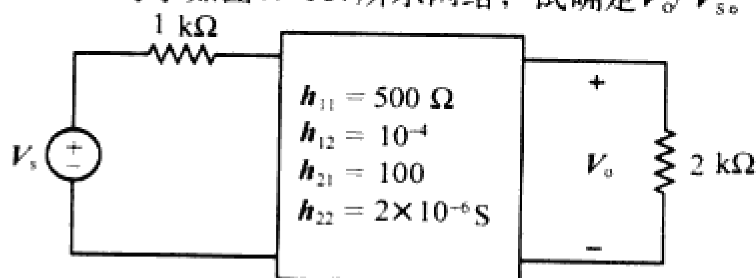


图 19-107 习题 19-56 的电路原理图

19-57 已知传输参数为

$$[\boldsymbol{T}]=\begin{bmatrix}3 & 20\\ 1 & 7\end{bmatrix}$$

试确定其他五组双口网络参数。

19-58 描述某双口网络的方程为：

$\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{I}_1+2\boldsymbol{V}_2,\quad \boldsymbol{I}_2=-2\boldsymbol{I}_1+0.4\boldsymbol{V}_2$

试求：(a) y参数；(b) 传输参数。

19-59 已知

$$[\boldsymbol{g}]=\begin{bmatrix}0.06\text{S} & -0.4\\ 0.2 & 2\Omega\end{bmatrix}$$

试确定：(a) $[z]$；(b) $[y]$；(c) $[h]$；(d) $[T]$。

19-60 试设计一个在$\omega=10^6$ rad/s时实现如下z参数的T型网络。

$$[z]=\begin{bmatrix}4+\text{j}3 & 2\\ 2 & 5-\text{j}\end{bmatrix}\text{k}\Omega$$

19-61 对于如图19-108所示的桥式电路，试确定：

(a) z参数；

(b) h参数；

(c) 传输参数。

19-62 试求如图19-109所示运算放大器电路的z参数，并确定其传输参数。

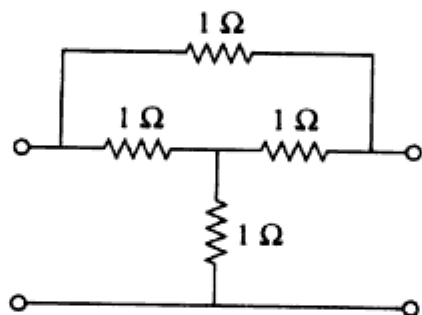


图 19-108 习题 19-61 的电路原理图

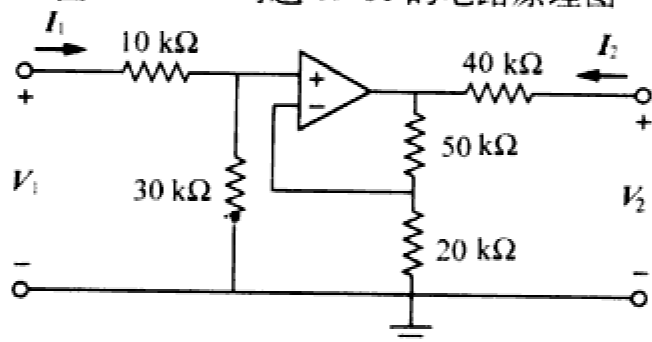


图 19-109 习题 19-62 的电路原理图

19-63 试确定如图19-110所示双口网络的z参数。

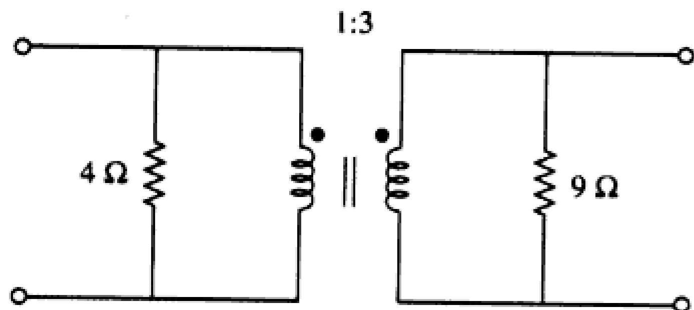


图 19-110 习题 19-63 的电路原理图

19-64 试确定如图19-111所示运算放大器电路在$\omega=1000$ rad/s时的y参数，并求出相应的h参数。

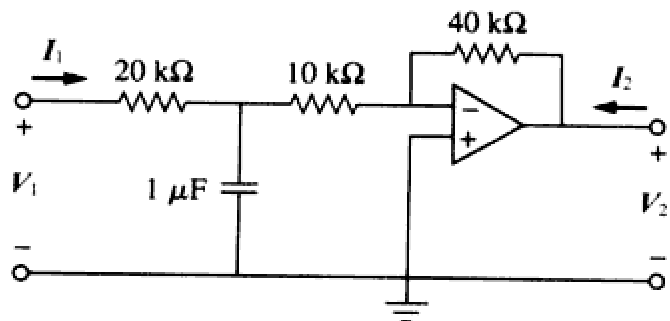


图 19-111 习题 19-64 的电路原理图

19.7 节

19-65 如图19-112所示电路的y参数表示是什么？

19-66 在如图19-113所示的双口网络中，令$y_{12}=y_{21}=0$，$y_{11}=2$ mS，$y_{22}=10$ mS，试求V_o/V_s。

19-67 如果将三个如图19-114所示电路相互并联，试求整个电路的传输参数。

19-68 试确定如图19-115所示网络的h参数。

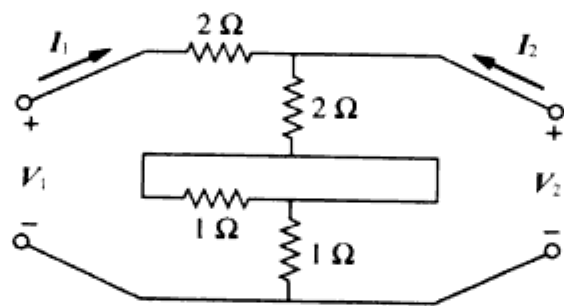


图 19-112 习题 19-65 的电路原理图

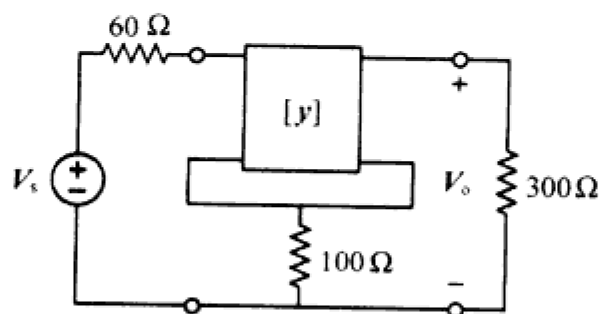


图 19-113 习题 19-66 的电路原理图

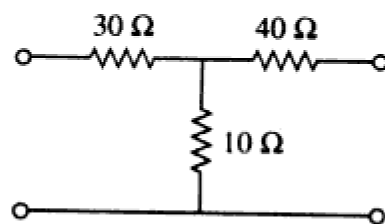


图 19-114 习题 19-67 的电路原理图

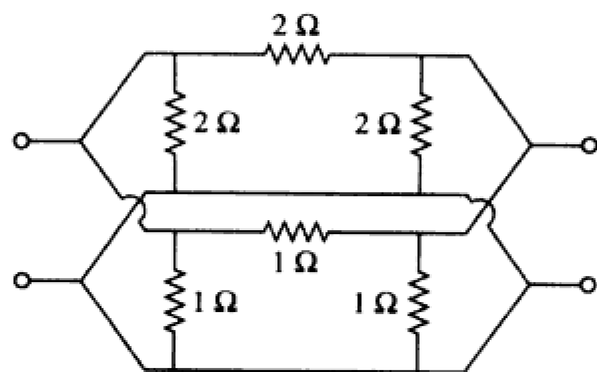


图 19-115 习题 19-68 的电路原理图

*19-69 如图19-116所示电路可以看作是两个双口网络的并联，试确定s域的y参数。

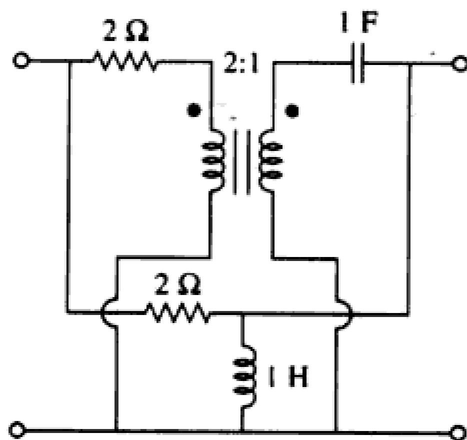


图19-116 习题19-69的电路原理图

*19-70 对于如图19-117所示的两个双口网络的串一并联连接，试求其g参数。

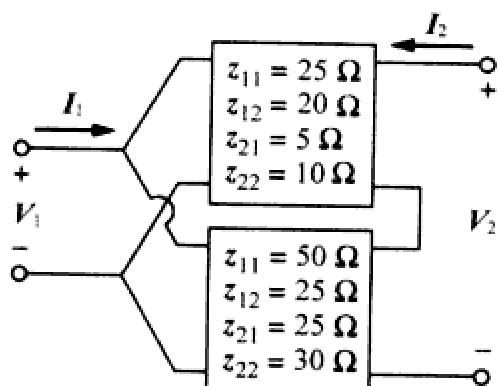


图 19-117 习题 19-70 的电路原理图

*19-71 试确定如图19-118所示网络的z参数。

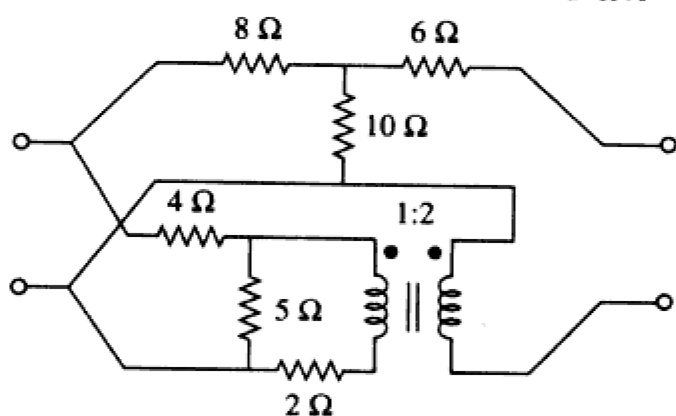


图 19-118 习题 19-71 的电路原理图

*19-72 两个双口网络的并一串联连接如图19-119所示，试确定该网络的z参数。

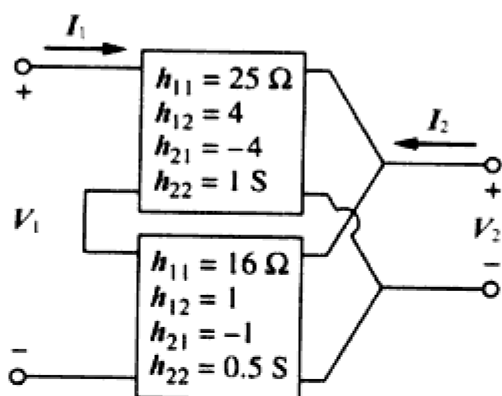


图 19-119 习题 19-72 的电路原理图

19-73 如果将三个如图19-70所示电路相互级联，试确定整个电路的z参数。

*19-74 试确定如图19-120所示电路的s域$ABCD$参数（提示：可以将该电路分割为若干子电路，并利用习题19-43的结果将其级联起来）。

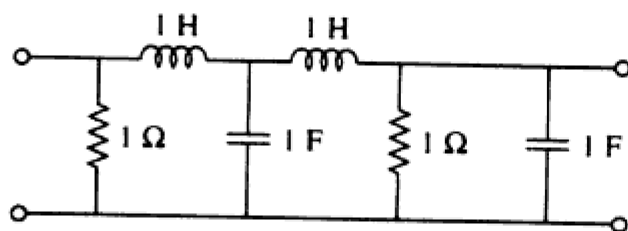


图 19-120 习题 19-74 的电路原理图

*19-75 对于如图19-121所示的各双口网络，

$$[z_a]=\begin{bmatrix}8 & 6\\ 4 & 5\end{bmatrix}\Omega \quad [y_b]=\begin{bmatrix}8 & -4\\ 2 & 10\end{bmatrix}S$$

（a）试确定整个双口网络的y参数；

（b）试求$Z_L=2\ \Omega$时的电压比V_o/V_i。

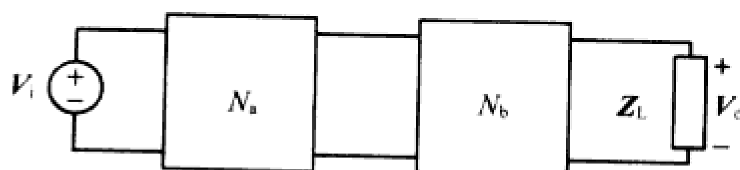


图 19-121 习题 19-75 的电路原理图

19.8 节

19-76 试利用PSpice确定如图19-122所示网络的z参数。

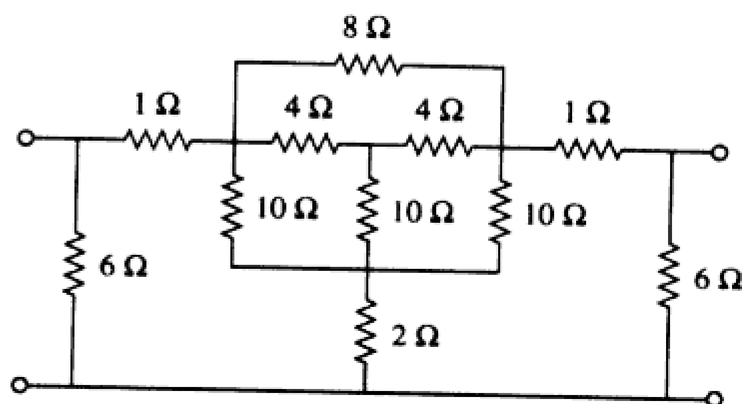


图 19-122 习题 19-76 的电路原理图

19-77 试利用PSpice确定如图19-123所示网络的h参数，取$\omega=1$ rad/s。

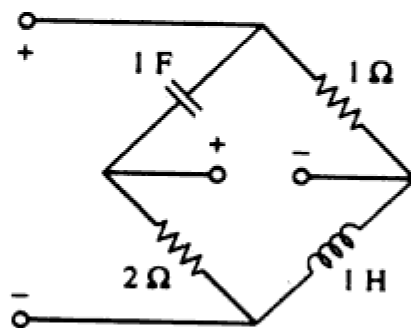


图 19-123 习题 19-77 的电路原理图

19-78　试利用PSpice确定如图19-124所示电路在$\omega = 4$ rad/s时的h参数。

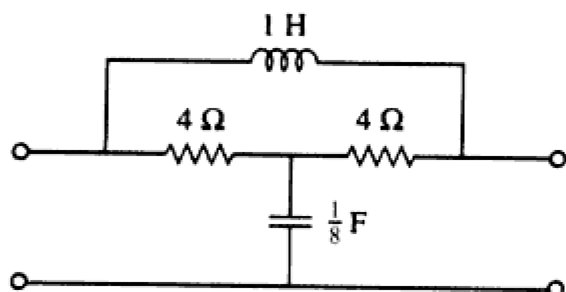


图 19-124　习题 19-78 的电路原理图

19-79　试利用PSpice确定如图19-125所示网络的z参数，取$\omega = 2$ rad/s。

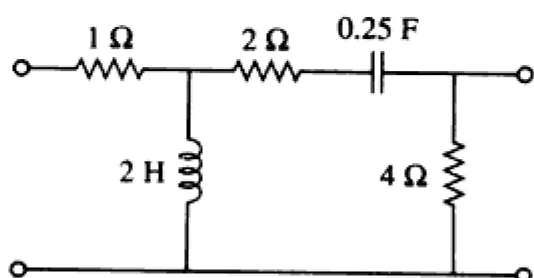


图 19-125　习题 19-79 的电路原理图

19-80　试利用PSpice确定如图19-71所示网络的z参数。

19-81　试利用PSpice重做习题19-26。

19-82　试利用PSpice重做习题19-31。

19-83　试利用PSpice重做习题19-47。

19-84　试利用PSpice确定如图19-126所示网络的传输参数。

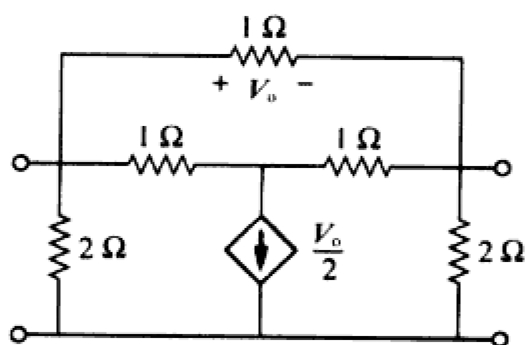


图 19-126　习题 19-84 的电路原理图

19-85　试利用PSpice确定如图19-127所示网络在$\omega = 1$ rad/s时的传输参数。

19-86　试利用PSpice确定如图19-128所示网络的g参数。

19-87　对于如图19-129所示电路，试利用PSpice确定其t参数，假定$\omega = 1$ rad/s。

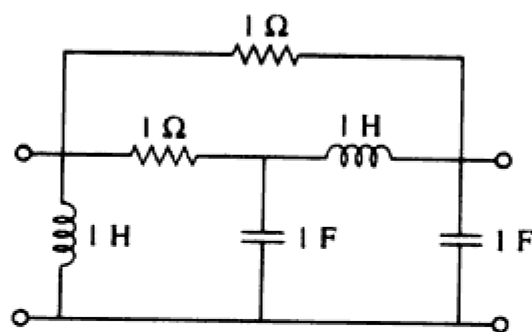


图 19-127　习题 19-85 的电路原理图

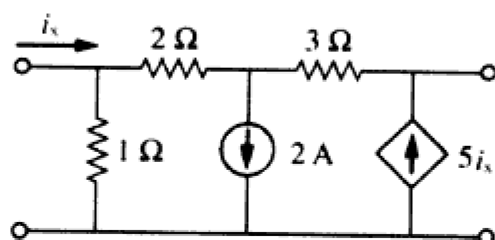


图 19-128　习题 19-86 的电路原理图

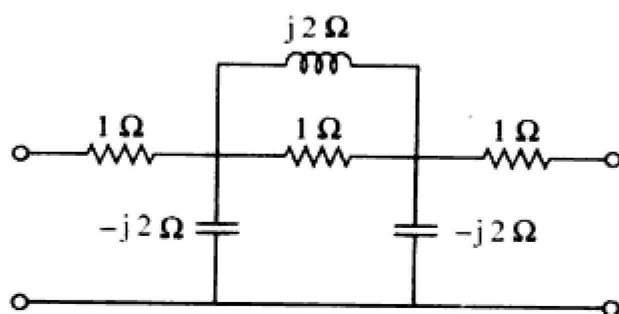


图 19-129　习题 19-87 的电路原理图

19.9 节

19-88　试利用y参数推导共射极晶体管电路的Z_{in}、Z_{out}、A_i与A_v公式。

19-89　某共射极电路的晶体管参数如下：

$h_{ie} = 2\,640\ \Omega$，　$h_{re} = 2.6 \times 10^{-4}$，

$h_{fe} = 72$，　$h_{oe} = 16\ \mu S$，　$R_L = 100\ k\Omega$

试问该晶体管的电压放大倍数为多少？该放大倍数用分贝表示的增益为多少？

19-90　某晶体管具有如下参数：

e2d

$h_{fe} = 120$，$h_{ie} = 2\ k\Omega$，

$h_{re} = 10^{-4}$，$h_{oe} = 20\ \mu S$

将其用在共射极放大器中，提供1.5 kΩ的输入电阻。

(a) 试确定负载电阻R_L；

(b) 如果该放大器由内阻为600 Ω的4 mV电压源驱动，试计算A_v、A_i与Z_{out}；

(c) 试求负载两端的电压。

19-91　对于如图19-130所示的晶体管网络，

$h_{fe}=80$，$h_{ie}=1.2\ k\Omega$，$h_{re}=1.5\times10^{-4}$，$h_{oe}=20\ \mu S$，试确定：

(a) 电压增益$A_v=V_o/V_s$；

(b) 电流增益$A_i=I_o/I_i$；

(c) 输入阻抗Z_{in}；

(d) 输出阻抗Z_{out}。

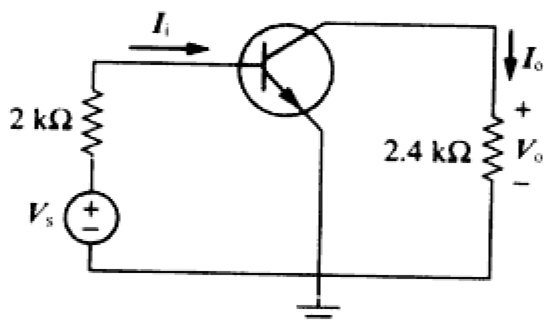


图 19-130 习题 19-91 的电路原理图

*19-92 试确定如图19-131所示运算放大器的A_v、A_i、Z_{in}与Z_{out}。假定：

$h_{ie}=4\ k\Omega$, $h_{re}=10^{-4}$, $h_{fe}=100$, $h_{oe}=30\ \mu S$。

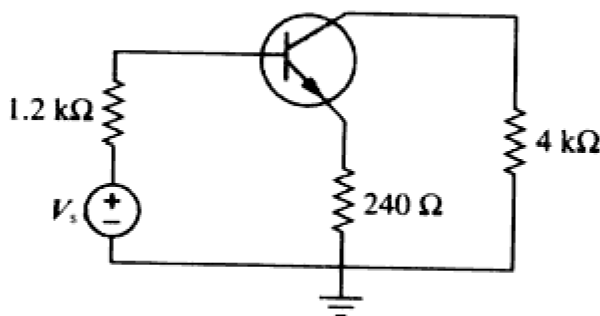


图 19-131 习题 19-92 的电路原理图

*19-93 试计算如图19-132所示晶体管网络的A_v、A_i、Z_{in}与Z_{out}。假定：

$h_{ie}=2\ k\Omega$，$h_{re}=2.5\times10^{-4}$，

$h_{fe}=150$，$h_{oe}=10\ \mu S$。

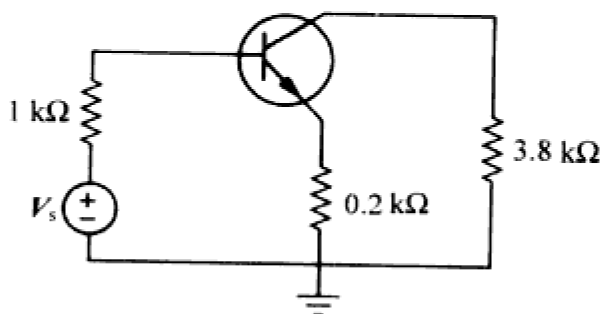


图 19-132 习题 19-93 的电路原理图

19-94 某共射极电路中的晶体管参数为：

e2d

$$[h]=\begin{bmatrix}200\Omega & 0\\ 100 & 10^{-6}S\end{bmatrix}$$

将这样两个完全相同的晶体管级联构成一个两级音频放大器，如果该放大器终端连接一个4 kΩ电阻器，试计算其总的A_v与Z_{in}。

19-95 试设计一个LC阶梯网络，使得：

$$y_{22}=\frac{s^3+5s}{s^4+10s^2+8}$$

19-96 试设计一个LC阶梯网络具有如下实现传递函数的低通滤波器：

e2d

$$H(s)=\frac{1}{s^4+2.613s^2+3.414s^2+2.613s+1}$$

19-97 试利用如图19-133所示的LC阶梯网络综合如下传递函数：

e2d

$$H(s)=\frac{V_o}{V_s}=\frac{s^3}{s^3+6s+12s+24}$$

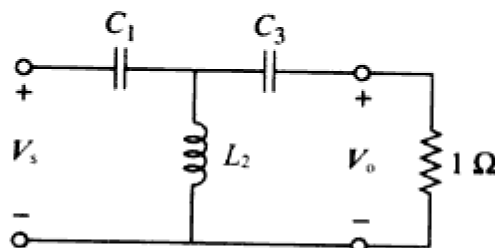


图 19-133 习题 19-97 的电路原理图

19-98 如图19-134所示的两级放大器有完全相同的两级构成，各级的h参数为：

$$[h]=\begin{bmatrix}2k\Omega & 0.004\\ 200 & 500\mu S\end{bmatrix}$$

如果$Z_L=20\ k\Omega$，试求输出为$V_o=16$ V时所需的V_s。

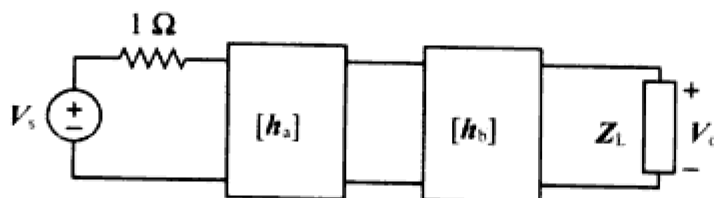


图 19-134 习题 19-98 的电路原理图

综合题

19-99 假定如图19-135所示的两个电路是等效的，那么这两个电路的参数必须是相等的，试利用这一事实和z参数，推导式(9-67) 与式(9-68)。

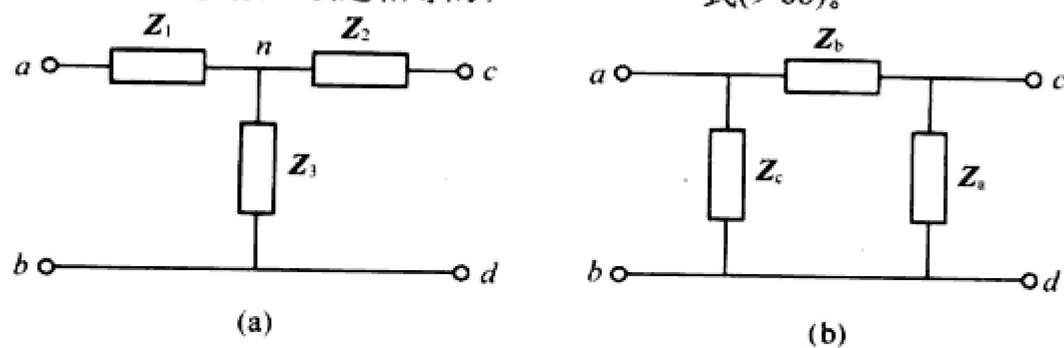


图 19-135 综合题 19-99 的电路原理图

附录　奇数编号习题的答案

第 1 章

1-1　(a) −0.1038C, (b) −0.19865C
　　(c) −3.941C, (d) −26.08C

1-3　(a) $3t+1$C, (b) t^2+5tmC,
　　(c) $2\sin(10t+\pi/6)+1\mu$C,
　　(d) $-e^{-30t}[0.16\cos 40t+0.12\sin 40t]$C

1-5　25C

1-7　该电流波形曲线如图G-1所示

$$i=\begin{cases}25\text{A}, & 0<t<2\\ -25\text{A}, & 2<t<6\\ 25\text{A}, & 6<t<8\end{cases}$$

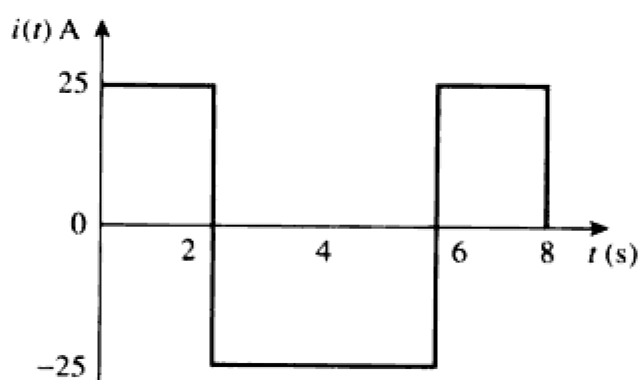


图 G-1　习题 1-7 波形图

1-9　(a) 10C, (b) 22.5 C, (c) 30C

1-11　3.672kC,4.406kJ

1-13　164.5mW,78.34mJ

1-15　(a) 1.297C, (b) $-90e^{-4t}$W, (c) −22.5J

1-17　70W

1-19　3A

1-21　2.696×10^{23}个电子， 43 200C

1-23　$1.35

1-25　21.6美分

1-27　(a) 43.2kC, (b) 475.2kJ, (c)1.188美分

1-29　39.6美分

1-31　$42.05

1-33　6C

1-35　2.333MWh

1-37　1.728MJ

1-39　24美分

第 2 章

2-1　3. 2mA

2-3　184.3mm

2-5　n=9,b=15,l=7

2-7　6条支路，4个节点

2-9　14A, −2A,10A

2-11　6V, 3V

2-13　12A, −10A, 5A, −2A

2-15　10V, −2A

2-17　2V, −22V,10V

2-19　− 2A,12W, −24W,20W,16W

2-21　4.167W

2-23　2V,1.92W

2-25　0.1A,2kV,0.2kW

2-27　6.4V

2-29　1.625 Ω

2-31　11.2A,1.6A,9.6A,6.4A,3.2A

2-33　3V,6A

2-35　8V,0.2A

2-37　2.5 Ω

2-39　(a) 727.3 Ω , (b) 3k Ω

2-41　16 Ω

2-43　(a) 12 Ω , (b) 16 Ω

2-45　(a) 59.8 Ω , (b) 32.5 Ω

2-47　24 Ω

2-49　(a)4Ω,(b)　$R_1=18\Omega, R_2=6\Omega, R_3=3\Omega$

2-51　(a) 9.231Ω, (b) 36.25Ω

2-53　(a) 142.32 Ω (b) 33.33 Ω

2-55　997.4mA

2-57　12.21 Ω , 1.64A

2-59　1.2A

2-61　采用灯泡R_1与R_3

2-63　0.4Ω , ≅1W

2-65　4k Ω

2-67　(a) 4V, (b) 2.857V, (c) 28.57%, (d) 6.25%

2-69　(a) 1.278 V（包含电压表），1.29 V（不包含电压表）
　　(b) 9.30 V（包含电压表），10 V（不包含

电压表）

(c) 25 V（包含电压表），30.77 V（不包含电压表）

2-71　10Ω

2-73　45Ω

2-75　(a) 19.9kΩ ,(b)20kΩ

2-77　(a) 4个20 Ω电阻器并联

(b) 一个300 Ω电阻器、一个1.8 Ω电阻器、两个20 Ω电阻器的并联组合相互串联

(c) 两个24 kΩ电阻器的并联组合与两个56 kΩ电阻器的并联组合相互串联

(d) 一个20 Ω电阻器，300 Ω电阻器，24 kΩ电阻器，与两个56 kΩ电阻器的并联组合相互串联

2-79　75Ω

2-81　38kΩ ,3.333kΩ

2-83　3kΩ， ∞Ω （最优解）

第 3 章

3-1　3mA

3-3　4A,2A,1.3333A,0.667A,40V

3-5　20V

3-7　5.714V

3-9　79.34mA

3-11　293.9W,177.79W,238W

3-13　8V,8V

3-15　29.45A,144.6W,129.6W,12W

3-17　1.73A

3-19　10V,4.933V,12.267V

3-21　1V,3V

3-23　22.34V

3-25　25.52V,22.05V,14.842V,15.055V

3-27　625mV,375mV,1.625V

3-29　– 0.7708V,1.209V,2.309V,0.7076V

3-31　4.97V,4.85V, – 0.12V

3-33　(a)与(b)均为平面电路，可以重画为如图G-2所示电路

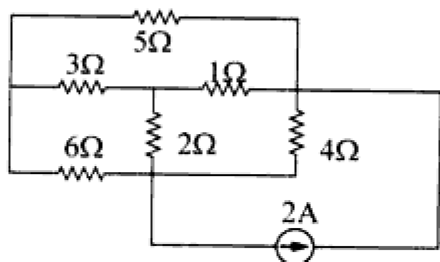


图 G-2　习题 3-33 电路图

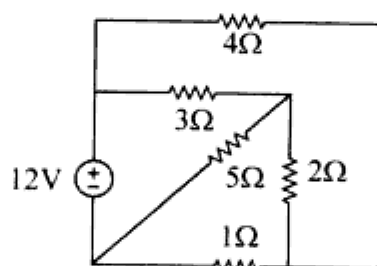


图 G-2　（续）

3-35　20V

3-37　1.1111V

3-39　0.8A, – 0.9A

3-41　1.188A

3-43　1.7778A,53.33V

3-45　8.561A

3-47　10V,4.933V,12.267V

3-49　33.78V,10.67A

3-51　20V

3-53　1.6196mA, −1.0202mA, −2.461mA, 3mA, −2.423mA

3-55　−1A,0A,2A

3-57　3.23 kΩ ,28V,72V

3-59　−1.344kV, – 5.6A

3-61　−0.3

3-63　−4V,2.105A

3-65　2.17A,1.9912A,1.8119A,2.094A,2.249A

3-67　−12V

3-69

$$\begin{bmatrix} 1.75 & -0.25 & -1 \\ -0.25 & 1 & -0.25 \\ -1 & -0.25 & 1.25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

3-71　2.085A,653.3mA,1.2312A

3-73

$$\begin{bmatrix} 9 & -3 & -4 & 0 \\ -3 & 8 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

3-75　−3A,0A,3A

3-77　3.111V,1.4444V

3-79　−5.278V,10.28V,694.4mV, – 26.88V

3-81　26.67V,6.667V,173.33V, – 46.67V

3-83　参见图G-3

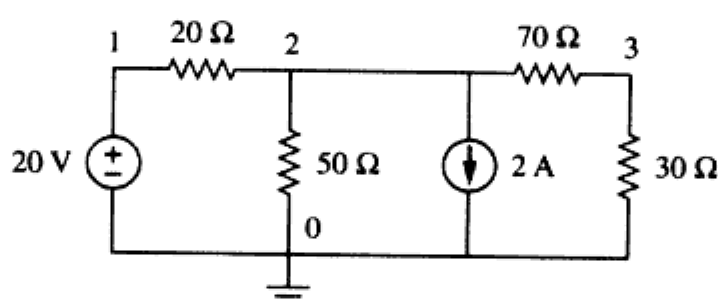


图 G-3 习题 3-83 电路图

3-85 9Ω

3-87 −8

3-89 30μA,12V

3-91 0.61μA,8.641V,49mV

第 4 章

4-1 0.1A,1A

4-3 (a) 0.5V, 0.5A, (b) 5V, 5A, (c) 5V, 500mA

4-5 4.5V

4-7 888.9mV

4-9 7V

4-11 17.99V,1.799A

4-13 8.696V

4-15 1.875A,10.55W

4-17 −8.571V

4-19 −26.67V

4-21 8V,666.7mA

4-23 1A,8W

4-25 −6.6V

4-27 −48V

4-29 3V

4-31 3.652V

4-33 (a)8Ω,16V,(b)20Ω,50V

4-35 −125mV

4-37 10Ω,666.7mA

4-39 20Ω,−49.2V

4-41 4Ω,−8V,−2A

4-43 10Ω,0V

4-45 3Ω, 2A

4-47 476.2mΩ,1.19V,2.5A

4-49 28Ω,3.286A

4-51 (a)2Ω,7A,(b)1.5Ω,12.667A

4-53 3Ω,1A

4-55 100kΩ,−20mA

4-57 10Ω,166.67V,16.667A

4-59 22.5Ω,40V,1.7778A

4-61 1.2Ω,9.6V,8A

4-63 −3.333Ω,0A

4-65 $V_0 = 24 - 5I_0$

4-67 25Ω,7.84W

4-69 ∞ (理论值)

4-71 8kΩ,1.152W

4-73 20.77W

4-75 1kΩ

4-77 (a)3.8Ω,4V,(b)3.2Ω,15V

4-79 10Ω,167V

4-81 3.3Ω,10V (注意,结果由图解法得到)

4-83 8Ω,12V

4-85 (a)24V,30kΩ,(b)9.6V

4-87 (a)10mA,8kΩ,(b)9.926mA

4-89 (a)99.99μA,(b)99.99μA

4-91 (a)100Ω,20Ω,(b)100Ω,200Ω

4-93 $\dfrac{V_s}{R_s + (1+\beta)R_o}$

4-95 5.333V,66.67kΩ

4-97 2.4kΩ,4.8V

第 5 章

5-1 (a)1.5MΩ,(b)60Ω,(c)98.06dB

5-3 10V

5-5 0.999 999 0

5-7 −100nV, − 10mV

5-9 (a)2V,(b)2V

5-11 −2V, −1mA

5-13 2.7V,288μA

5-15 (a) $-\left(R_1 + R_3 + \dfrac{R_1R_3}{R_2}\right)$,(b) − 92kΩ

5-17 (a) − 2.4,(b) − 16,(c) − 400

5-19 −0.375mA

5-21 −4V

5-23 $-\dfrac{R_f}{R_1}$

5-25 1.25V

5-27 1.8V

5-29 $\dfrac{R_2}{R_1}$

5-31 727.2μA

5-33 −2mA,12mW

5-35 如果$R_1 = 10\text{k}\Omega$,那么$R_f = 90\text{k}\Omega$。

5-37 −3V

5-39 3V

5-41 参见图G-4

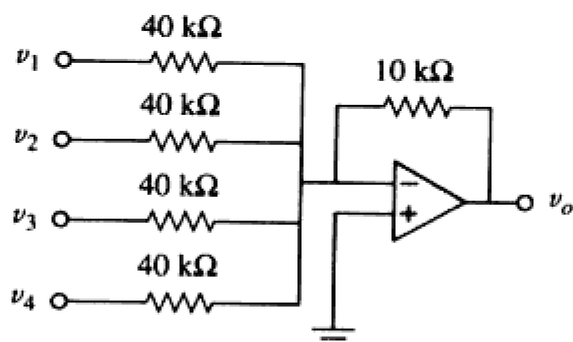


图 G-4 习题 5-41 电路图

5-43 3kΩ

5-45 参见图G-5，其中RG100 kΩ。

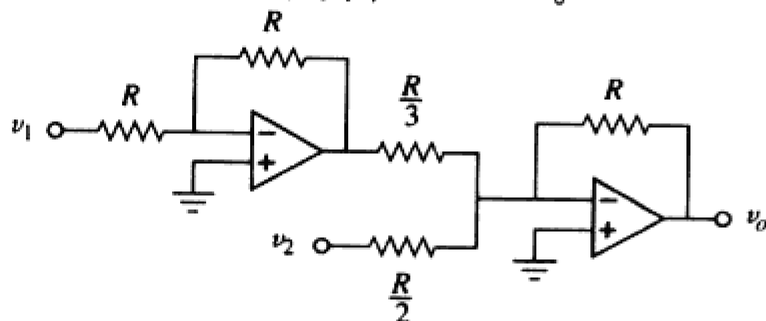


图 G-5 习题 5-45 电路图

5-47 14.09V

5-49 $R_1 = R_3 = 10\text{k}\Omega, R_2 = R_4 = 20\text{k}\Omega$

5-51 参见图G-6

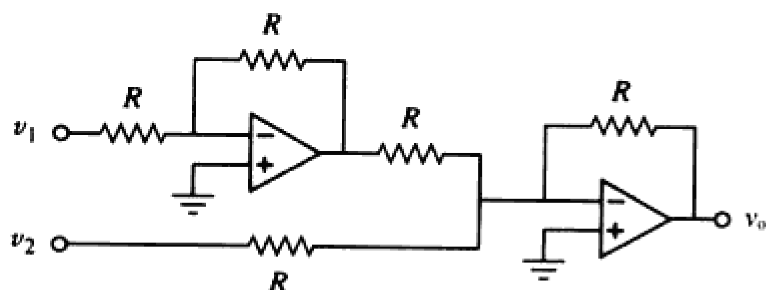


图 G-6 习题 5-51 电路图

5-53 证明

5-55 7.956,7.956,1.989

5-57 $6v_{s1} - 6v_{s2}$

5-59 −12

5-61 2.4 V

5-63 $\dfrac{R_2R_4/R_1R_5 - R_4/R_6}{1 - R_2R_4/R_3R_5}$

5-65 −21.6 mV

5-67 2.4 V

5-69 −17.143mV

5-71 10V

5-73 10.8V

5-75 −2 200 μA

5-77 −3.343mV

5-79 −14.61V

5-81 343.4mV, 24.51 μA

5-83 结果取决于设计方案。因此，设 $R_G = 10\text{ k}\Omega$, $R_1 = 10\text{ k}\Omega$, $R_2 = 20\text{ k}\Omega$, $R_3 = 40\text{ k}\Omega$, $R_4 = 80\text{ k}\Omega$, $R_5 = 160\text{ k}\Omega$, $R_6 = 320\text{ k}\Omega$, 则有：

$$-v_o = (R_f/R_1)\ v_1 + \cdots + (R_f/R_6)\ v_6$$
$$= v_1 + 0.5v_2 + 0.25v_3 + 0.125v_4 + 0.0625v_5 + 0.03125v_6$$

(a) $|v_o| = 1.1875 = 1 + 0.125 + 0.0625 = 1 + (1/8) + (1/16)$,意味着 $[v_1v_2v_3v_4v_5v_6] = [\mathbf{100110}]$

(b) $|v_o| = 0 + (1/2) + (1/4) + 0 + (1/16) + (1/32) = (27/32) = \mathbf{843.75mV}$

(c) 对应于$[111111]|v_o| = 1 + (1/2) + (1/4) + (1/8) + (1/16) + (1/32) = 63/62 = \mathbf{1.968\ 75V}$

5-85 160 kΩ

5-87 $\left(1 + \dfrac{R_4}{R_3}\right)v_2 - \left[\dfrac{R_4}{R_3} + \left(\dfrac{R_2R_4}{R_1R_3}\right)\right]v_1$

设 $R_4 = R_1$，$R_3 = R_2$，则有 $v_0 = \left(1 + \dfrac{R_4}{R_3}\right)(v_2 - v_1)$

即减法器的增益为$\left(1 + \dfrac{R_4}{R_3}\right)$。

5-89 加法器输出$v_o = -v_1 - (5/3)\ v_2$，其中$v_2 = 6$ V电池，反相放大器$v_1 = -12v_2$ 。

5-91 9

5-93

$$A = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{R_1}{R_3}\right)R_L - R_1\left(\dfrac{R_2 + R_L}{R_2R_3}\right)\left(R_4 + \dfrac{R_2R_L}{R_2 + R_L}\right)}$$

第 6 章

6-1 $10(1-3t)e^{-3t}\text{A}, 20t(1-3t)e^{-6t}\text{W}$

6-3 480mA

6-5 $v = \begin{cases} 20\text{mA}, & 0 < t < 2\text{ms} \\ -20\text{mA}, & 2 < t < 6\text{ms} \\ 20\text{mA}, & 6 < t < 8\text{ms} \end{cases}$

6-7 $0.04t^2 + 10\text{V}$

6-9 13.624V,70.66W

6-11 $v(t)=\begin{cases}10+3.75t\text{V}, & 0<t<2s\\ 22.5-2.5t\text{V}, & 2<t<4s\\ 12.5\text{V}, & 4<t<6s\\ 2.5t-2.5\text{V}, & 6<t<8s\end{cases}$

6-13 30V,40V

6-15 (a)100mJ,150mJ,(b)36mJ,24mJ

6-17 (a)3F,(b)8F，(c)1F

6-19 10 μF

6-21 2.5 μF

6-23 (a)$v_{4\mu F}=60\text{ V}, v_{2\mu F}=60\text{ V}, v_{6\mu F}=20\text{ V}$, $v_{3\mu F}=40\text{ V}$,(b)$\omega_{4\mu F}=7.2\text{ mJ}, \omega_{2\mu F}=3.6\text{ mJ}$, $\omega_{6\mu F}=1.2\text{ mJ}, \omega_{3\mu F}=2.4\text{ mJ}$

6-25 (a) 对于串联电容器，

$$Q_1=Q_2\rightarrow C_1v_1=C_2v_2\rightarrow\frac{v_1}{v_2}=\frac{C_2}{C_1}$$

$$v_s=v_1+v_2=\frac{C_2}{C_1}v_2+v_2=\frac{C_1+C_2}{C_1}v_2$$

$$\rightarrow v_2=\frac{C_1}{C_1+C_2}v_s$$

类似地，$v_1=\frac{C_2}{C_1+C_2}v_s$

(b) 对于并联电容器，

$$v_1=v_2=\frac{Q_1}{C_1}=\frac{Q_2}{C_2}$$

$$Q_s=Q_1+Q_2=\frac{C_1}{C_2}Q_2+Q_2=\frac{C_1+C_2}{C_2}Q_2$$

即

$$Q_2=\frac{C_2}{C_1+C_2}$$

$$Q_1=\frac{C_1}{C_1+C_2}Q_s$$

$$i=\frac{dQ}{dt}\rightarrow i_1=\frac{C_1}{C_1+C_2}i_s,$$

$$i_2=\frac{C_2}{C_1+C_2}i_s$$

6-27 1 μF，16 μF

6-29 (a) 1.6 C,(b) 1 C

6-31 $v(t)=\begin{cases}t^2\text{kV}, & 0<t<1\text{s}\\ 2t-1\text{kV}, & 1<t<3\text{s}\\ 0.5t^2-5t+15.5\text{kV}, & 3<t<5\text{s}\end{cases}$

$i_1(t)=\begin{cases}12t\text{ mA}, & 0<t<1\text{s}\\ 12\text{ mA}, & 1<t<3\text{s}\\ 6t-30\text{mA}, & 3<t<5\text{s}\end{cases}$

$i_2(t)=\begin{cases}8t\text{ mA}, & 0<t<1\text{s}\\ 8\text{ mA}, & 1<t<3\text{s}\\ 4t-20\text{mA}, & 3<t<5\text{s}\end{cases}$

6-33 10 F，7.5 V

6-35 6.4 mH

6-37 4.8 cos 100t V，96 mJ

6-39 $(5t^3+5t^2+20t+1)$ A

6-41 5.977 A，35.72 J

6-43 144 μJ

6-45 $i(t)=\begin{cases}0.25t^2\text{kA}, & 0<t<1\text{s}\\ 1-t+0.25t^2\text{kA}, & 1<t<2\text{s}\end{cases}$

6-47 5 Ω

6-49 3.75 mH

6-51 7.778 mH

6-53 20 mH

6-55 (a)1.4 L，(b)0.5 L

6-57 6.625 H

6-59 证明。

6-61 (a)6.667 mH，e^{-t} mA，$2e^{-t}$ mA，(b)$-20e^{-t}$ μV, (c) 1.3534 nJ

6-63 参见图G-7

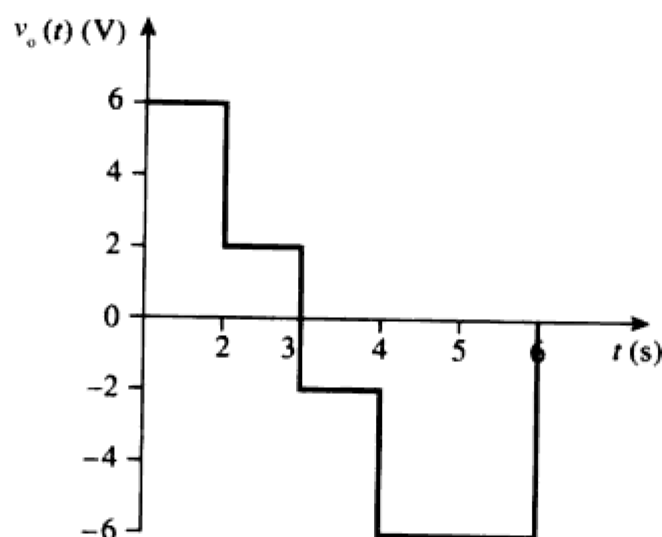


图 G-7 习题 6-63 波形图

6-65 (a) 40 J，40 J，(b) 80 J，(c) $5\times10^{-5}(e^{-200t}-1)+4$A，$1.25\times10^{-5}(e^{-200t}-1)-2$A，
(d) $6.25\times10^{-5}(e^{-200t}-1)+2$A

6-67 100 cos 50t mV

6-69 参见图G-8

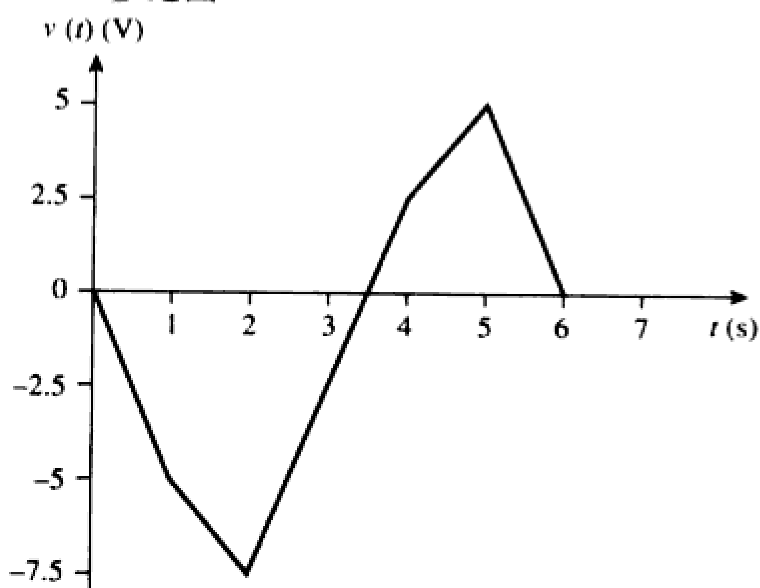


图 G-8 习题 6-69 波形图

6-71 将加法器与积分器合并，得到如图G-9所示电路

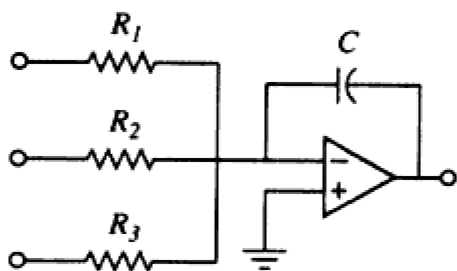


图 G-9 习题 6-71 电路图

$$v_o = -\frac{1}{R_1C}\int v_1\,dt - \frac{1}{R_2C}\int v_2\,dt - \frac{1}{R_2C}\int v_2\,dt$$

对于本题，$C = 2\ \mu F : R_1 = 500\ k\Omega$，$R_2 = 125k\Omega$，$R_3 = 50k\Omega$。

6-73 考虑如图G-10所示的运算放大器

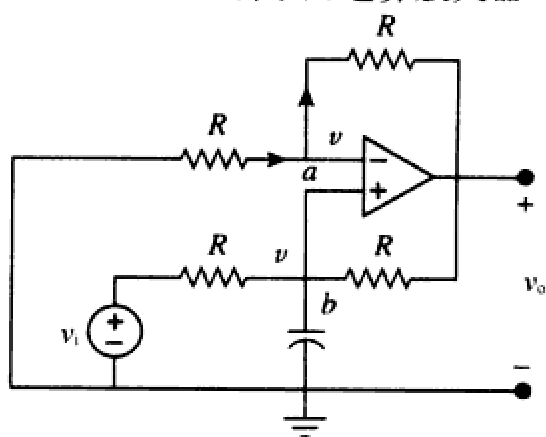


图 G-10 习题 6-73 电路图

设$v_a = v_b = v$，则对于节点a，有：

$$\frac{0-v}{R} = \frac{v-v_0}{R} \rightarrow 2v - v_0 = 0 \qquad (1)$$

对于节点b，有：

$$\frac{v_i - v}{R} = \frac{v - v_0}{R} + C\frac{dv}{dt}$$

$$v_i = 2v - v_o + RC\frac{dv}{dt} \qquad (2)$$

将式（1）与式（2）合并，得到：

$$v_i = v_o - v_o + \frac{RC}{2}\frac{dv_o}{dt}$$

或 $$v_o = \frac{2}{RC}\int v_i dt$$

表明该电路为同相积分器。

6-75 −30 mV

6-77 参见图G-11

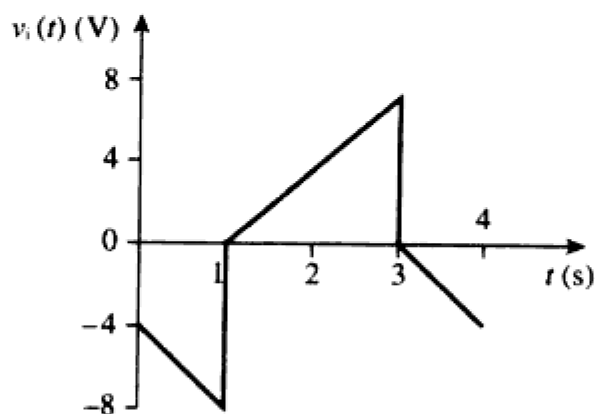


图 G-11 习题 6-77 波形图

6-79 参见图G-12

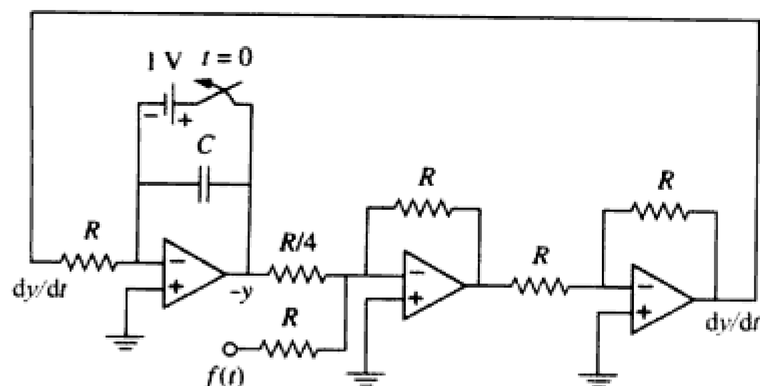


图 G-12 习题 6-79 电路图

6-81 参见图G-13

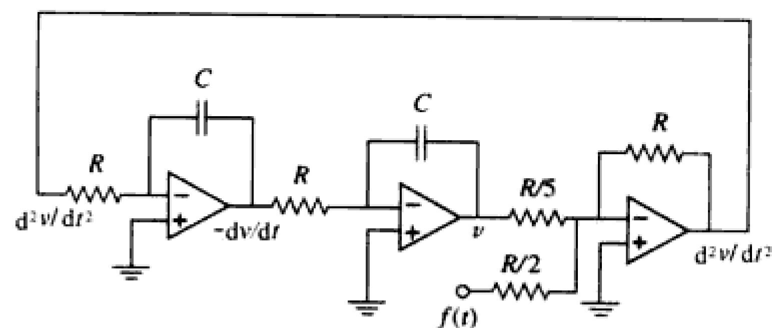


图 G-13 习题 6-81 电路图

6-83 八组相互并联，其中每组由两个相互串联

的电容器组成。

6-85　1.25 mH电感

第 7 章

7-1　(a)0.7143 μF,(b)5 ms,(c)3.466 ms

7-3　3.222 μs

7-5　$1.778e^{-t/3}$ A

7-7　$7.2+0.8e^{-t/24}$ V

7-9　$4e^{-t/12}$ V

7-11　$1.4118e^{-3t}$ A

7-13　(a)5 kΩ,5 H,1 ms,(b)25.28 μJ

7-15　(a)0.25 s,(b)0.5 ms

7-17　$-2e^{-16t}u(t)$ V

7-19　$2e^{-5t}u(t)$A

7-21　13.333 Ω

7-23　$2e^{-4t}$ V,$t>0$,$0.5e^{-4t}$ V,$t>0$

7-25　参见图G-14a与b

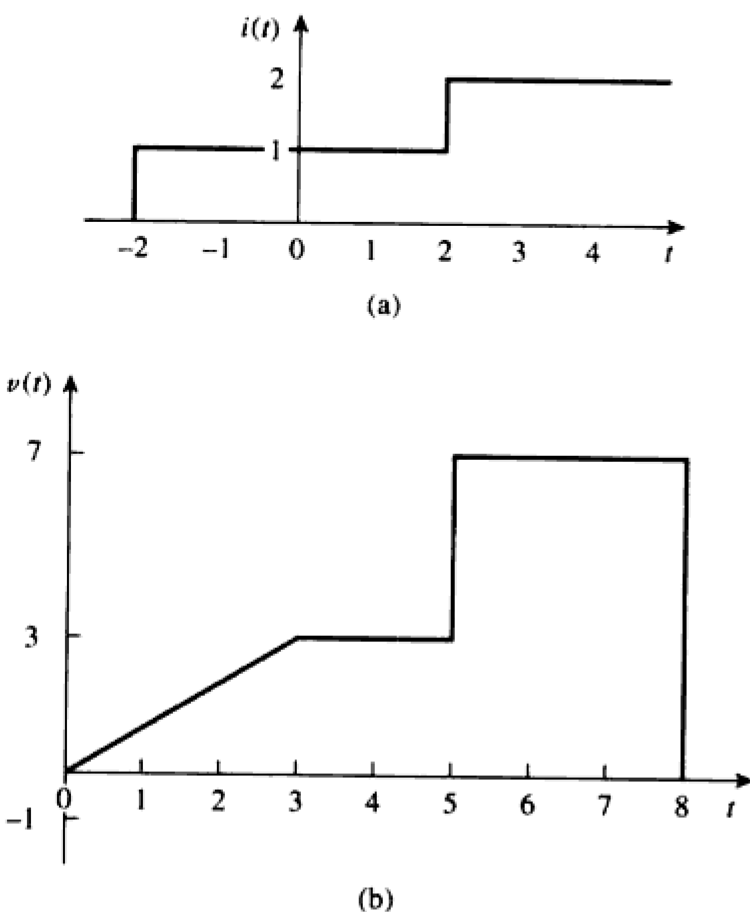


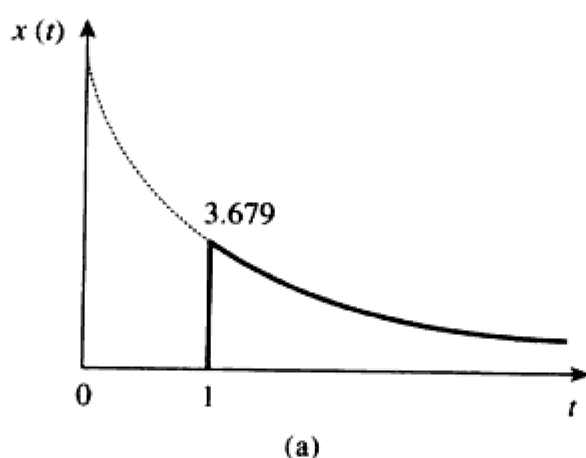
图 G-14　习题 7-25 波形图

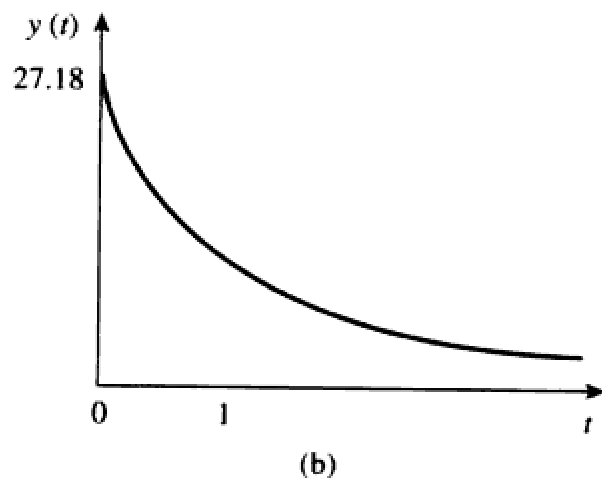
7-27　$5u(t+1)+10u(t)-25u(t-1)+15u(t-2)$V

7-29　(a) 参见图G-15a；(b) 参见图G-15b

(c) $z(t)=\cos 4t\delta(t-1)=\cos 4\delta(t-1)$

$=-0.6536\delta(t-1)$，如图G-15c所示。





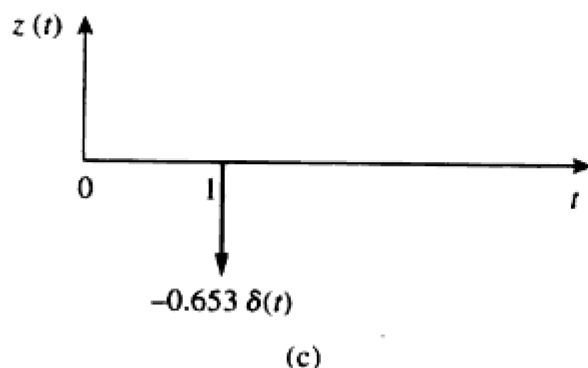


图 G-15　习题 7-29 波形图

7-31　(a)112×10^{-9},(b)7

7-33　$2u(t-2)$ A

7-35　(a)$-e^{-2t}u(t)$V,(b)$2e^{1.5t}u(t)$ A

7-37　(a)4 s,(b)10 V,(c)$(10-8e^{-t/4})u(t)$ V

7-39　(a)4V,$t<0$,$20-16e^{-t/8}$,$t>0$,

(b)4V,$t<0$,$12-8e^{-t/6}$ V,$t>0$。

7-41　$10(1-e^{-0.2t})u(t)$ V

7-43　0.8A,$0.8e^{-t/480}u(t)$ A

7-45　$(4-3e^{-14.286t})u(t)$ V

7-47　$\begin{cases}24(1-e^{-t})\text{V}, & 0<t<1\\ 30-14.83e^{-(t-1)}\text{V}, & t>1\end{cases}$

7-49　$\begin{cases}8(1-e^{-t/5})\text{V}, & 0<t<1\\ 1.45e^{-(t-1)/5}\text{V}, & t>1\end{cases}$

7-51
$$V_S = Ri + L\frac{di}{dt}$$

或
$$L\frac{di}{dt} = -R\left(i - \frac{V_S}{R}\right)$$
$$\frac{di}{i - V_S/R} = \frac{-R}{L}dt$$

两边积分可以得到：

$$\ln\left(i - \frac{V_S}{R}\right)\Bigg|_{I_0}^{i(t)} = \frac{-R}{L}t$$

或
$$\ln\left(\frac{i - V_S/R}{I_0 - V_S/R}\right) = \frac{-t}{\tau}$$
$$\frac{i - V_S/R}{I_0 - V_S/R} = e^{-t/\tau}$$
$$i(t) = \frac{V_S}{R} + \left(I_0 - \frac{V_S}{R}\right)e^{-t/\tau}$$

与式（7-60）相同。

7-53　(a)5 A, $5e^{-t/2}u(t)$ A, (b)6 A, $6e^{-2t/3}u(t)$ A

7-55　96V, $96e^{-4t}u(t)$ V

7-57　$2.4e^{-2t}u(t)$A, $0.6e^{-5t}u(t)$ A

7-59　$6e^{-4t}u(t)$ V

7-61　$20e^{-8t}u(t)$V, $(10-5e^{-8t})u(t)$ A

7-63　$-8e^{-8t}u(t)$ V, $2e^{-8t}u(t)$ A

7-65　$\begin{cases} 2(1-e^{-2t})\ \text{A} & 0<t<1 \\ 1.729e^{-2(t-1)}\ \text{A} & t>1 \end{cases}$

7-67　$5e^{-100t/3}u(t)$ A

7-69　$48(e^{-t/3000}-1)u(t)$ V

7-71　$6(1-e^{-5t})u(t)$ V

7-73　$-6e^{-5t}u(t)$ A

7-75　$(6-3e^{-50t})u(t)$ V, -0.2 mA

7-77　参见图G-16

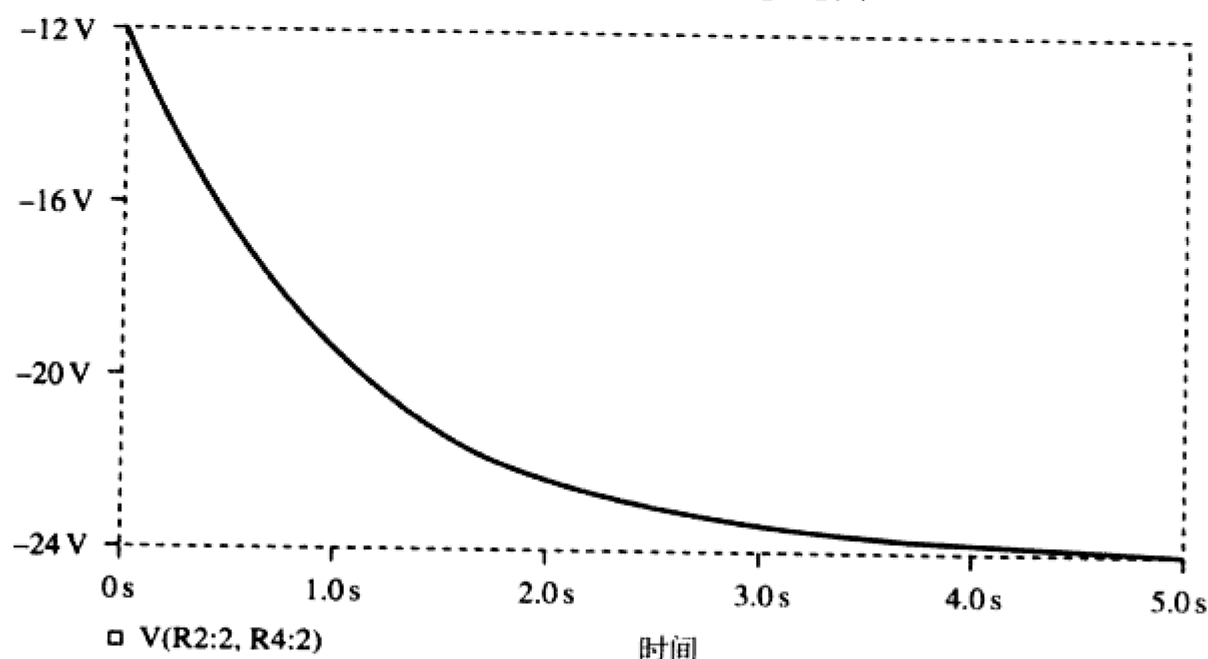


图 G-16　习题 7-77 波形图

7-79　$(-0.5+4.5e^{-80t/3})u(t)$A

7-81　参见图G-17

7-83　6.278m/s

7-85　(a)659.7 μs, (b)16.636 s

7-87　441 mA

7-89　L<200 mH

7-91　1.271 Ω

第 8 章

8-1　(a)2 A, 12 V, (b)−4 A/s, −5 V/s, (c)0 A, 0 V

8-3　(a)0 A, −10 V, 0 V, (b)0 A/s, 8 V/s, 8 V/s, (c)400 mA, 6 V, 16 V

8-5　(a)0 A, 0 V, (b)4 A/s, 0 V/s, (c)2.4 A, 9.6 V

8-7　过阻尼

8-9　$(10+50t)e^{-5t}$ A

8-11　$10(1+t)e^{-t}$ V

8-13　120 Ω

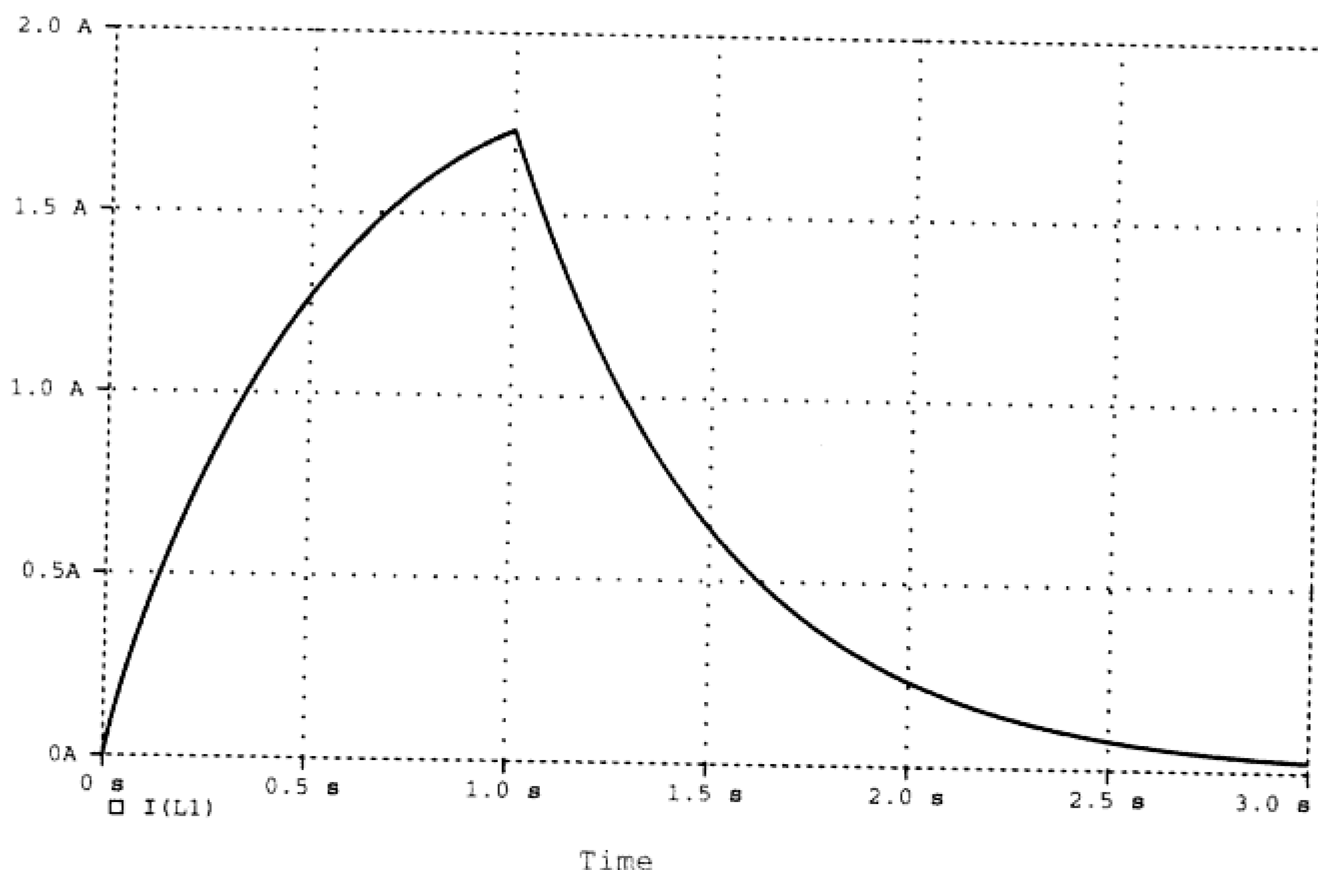
8-15　750 Ω, 200 μF, 25 H

8-17　$(64.65e^{-2.679t}-4.641e^{-37.32t})$ V

8-19　$24\sin 0.5t$ V

8-21　$18e^{-t}-2e^{-9t}$ V

8-23　40 mF



图G-17 习题7-81波形图

8-25 $(24\cos 1.984t + 3.024\sin 1.984t)e^{-t/4}$ V
$[0.000131\cos 1.9843t - 12.095\sin 1.9843t]e^{-t/4}$ A

8-27 $3-3(\cos 2t+\sin 2t)e^{-2t}$ V

8-29 (a) $3-3\cos 2t+\sin 2t$ V,
(b) $2-4e^{-t}+e^{-4t}$ A,
(c) $3+(2+3t)e^{-t}$ V,
(d) $2+2\cos 2te^{-t}$ A

8-31 80 V, 40 V

8-33 $[20+0.001125e^{-4.95t}-10.001e^{-0.05t}]$ V

8-35 $[12-(4\cos 2t+2\sin 2t)e^{-t}]$ V

8-37 $5e^{-4t}$ A

8-39 $[30+(0.021e^{-47.33t}-6.021e^{-0.167t})]$ V

8-41 $[0.7275\sin(4.583t)e^{-2t}]$ A

8-43 8 Ω, 2.392 mF

8-45 $[4-[3\cos(1.3229t)$
$+1.1339\sin(1.3229t)]e^{-t/2}]$ A,
$[4.536\sin(1.3229t)e^{-t/2}]$ V

8-47 $(200te^{-10t})$ V

8-49 $[3+(3+6t)e^{-2t}]$ A

8-51 $\left[-\frac{i_0}{\omega_0 C}\sin(\omega_0 t)\right]$ V，其中 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

8-53 $(d^2i/dt^2)+0.125(di/dt)+400i=600$

8-55 $7.448-3.448e^{-7.25t}$ V, $t>0$

8-57 (a) $s^2+20s+36=0$,
(b) $-\frac{3}{4}e^{-2t}-\frac{5}{4}e^{-18t}$ A, $6e^{-2t}+10e^{-18t}$ V

8-59 $-32te^{-t}$ V

8-61 $2.4-2.667e^{-2t}+0.2667e^{-5t}$ A,
$9.6-16e^{-2t}+6.4e^{-5t}$ V

8-63 $\frac{d^2 i(t)}{dt^2} = -\frac{v_s}{RCL}$

8-65 $\frac{d^2 v_o}{dt^2} - \frac{v_o}{R^2C^2} = 0, e^{10t}-e^{-10t}$ V，注意，该电路是不稳定的。

8-67 $-te^{-t}u(t)$ V

8-69 参见图G-18

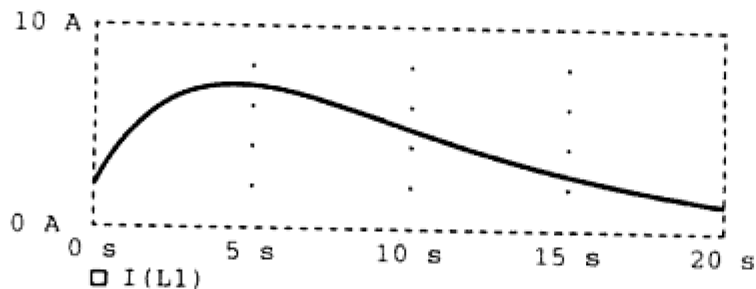


图 G-18 习题 8-69 波形图

8-71　参见图G-19

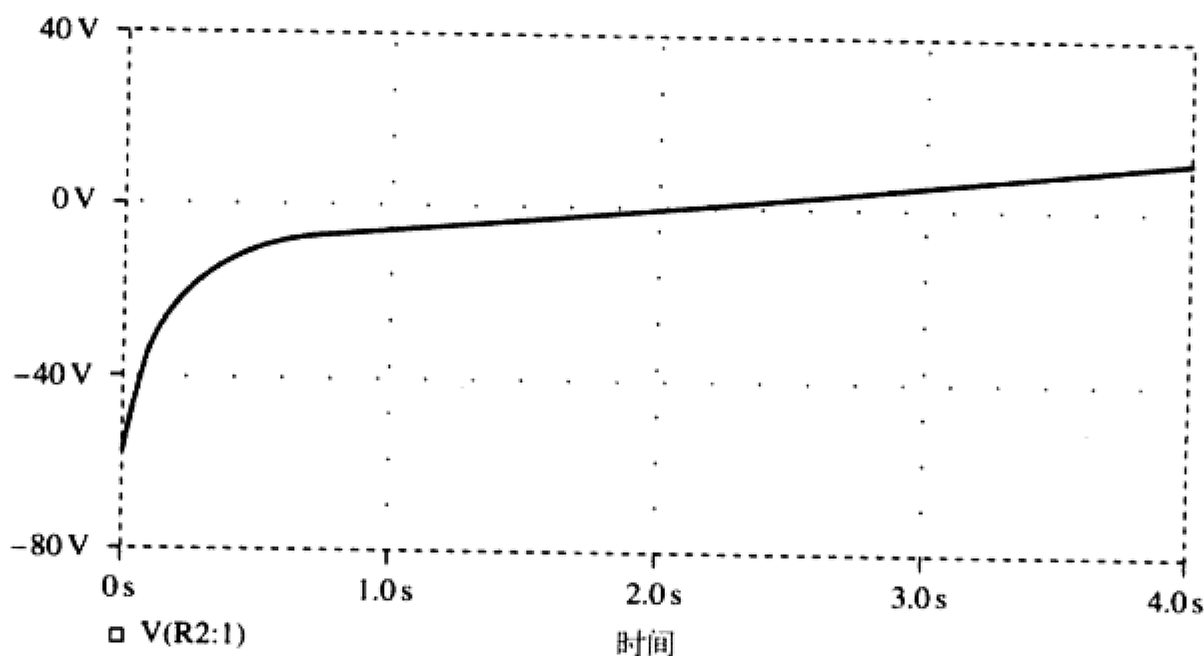


图 G-19　习题 8-71 波形图

8-73　参见图G-20

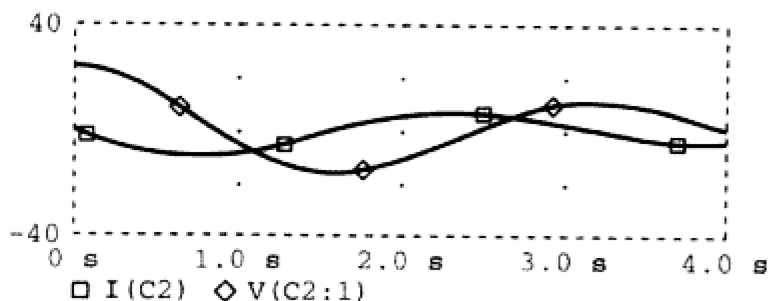


图 G-20　习题 8-73 波形图

8-75　参见图G-21

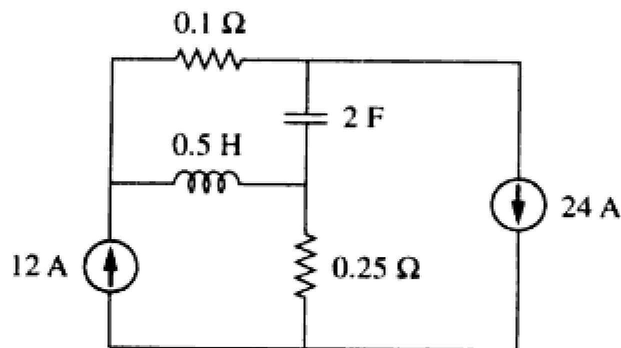


图 G-21　习题 8-75 电路图

8-77　参见图G-22

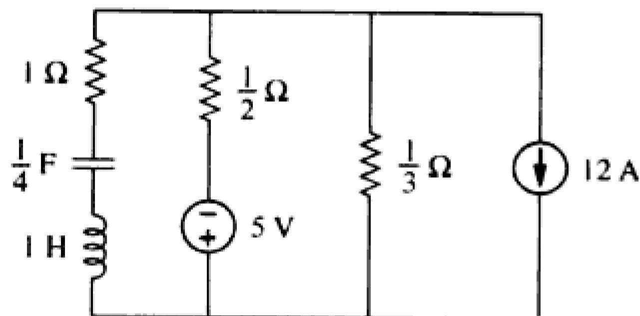


图 G-22　习题 8-77 电路图

8-79　434 μF

8-81　2.533 μH,625 μF

8-83　$\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dv}{dt}+\frac{R}{LC}i_D+\frac{1}{C}\frac{di_D}{dt}=\frac{v_s}{LC}$

第 9 章

9-1　(a)50 V,(b)209.4 ms,(c)4.775 Hz,
(d)44.48 V,0.3 rad

9-3　(a)$4\cos(\omega t-120°)$,(b)$2\cos(6t+90°)$，
(c)$10\cos(\omega t+110°)$

9-5　20°，v_1滞后v_2。

9-7　证明

9-9　(a)$50.88\angle{-15.52°}$,(b)$60.02\angle{-110.96°}$

9-11　(a)$21\angle{-15°}$ V,(b)$8\angle{160°}$ mA，
(c)$120\angle{-140°}$ V,(d)$60\angle{190°}$ mA

9-13　(a)$-1.2749+j0.1520$,(b)-2.083，
(c)$35+j14$

9-15　(a)$-6-j11$,(b)$120.99+j4.415$,(c)-1

9-17　$15.62\cos(50t-9.8°)$ V

9-19　(a)$3.32\cos(20t+114.49°)$,
(b)$64.78\cos(50t-70.89°)$,
(c)$9.44\cos(400t-44.7°)$

9-21　(a)$f(t)=8.324\cos(30t+34.86°)$,
(b)$g(t)=5.565\cos(t-62.49°)$,
(c)$h(t)=1.2748\cos(40t-168.69°)$

9-23　(a)$43.49\cos(\omega t-6.59°)$ V
(b)$18.028\cos(\omega t+78.69°)$ A

9-25　(a)$0.8\cos(2t-98.13°)$,

(b)$0.745\cos(5t-4.56°)$
9-27 $0.289\cos(377t-92.45°)$ V
9-29 $2\sin(10^6t-65°)$
9-31 $78.3\cos(2t+51.21°)$ mA
9-33 69.82 V
9-35 $4.789\cos(200t-16.7°)$ A
9-37 $250-\text{j}25$ mS
9-39 $9.135+\text{j}27.47\ \Omega$,
$414.5\cos(10t-71.6°)$ mA
9-41 $6.325\cos(t-18.43°)$ V
9-43 $499.7\underline{/-28.85°}$ mA
9-45 −5 A
9-47 $460.7\cos(2\,000t+52.63°)$ mA
9-49 $1.4142\sin(200t-45°)$ V
9-51 $25\cos(2t-53.13°)$ A
9-53 $8.873\underline{/-21.67°}$ A
9-55 $2.798-\text{j}16.403\ \Omega$
9-57 $0.3171-\text{j}0.1463$ S
9-59 $2.707+\text{j}2.509$
9-61 $1+\text{j}0.5\ \Omega$
9-63 $34.69-\text{j}6.93\ \Omega$
9-65 $17.35\underline{/0.9°}$ A,$6.83+\text{j}1.094\ \Omega$
9-67 (a)$14.8\underline{/-20.22°}$ mS,(b)$19.7\underline{/74.57°}$ mS
9-69 $1.661+\text{j}0.6647$ S
9-71 $1.058-\text{j}2.235\ \Omega$
9-73 $0.3796+\text{j}1.46\ \Omega$
9-75 可以由如图G-23所示的RL电路实现。

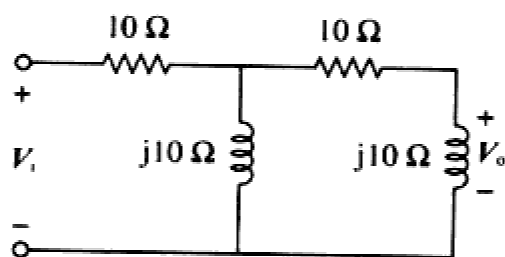


图 G-23 习题 9-75 电路图

9-77 (a)51.49°滞后, (b)1.5915 MHz
9-79 (a)140.2°, (b)超前,(c)18.43 V
9-81 1.8 kΩ,0.1 μF
9-83 104.17 mH
9-85 证明
9-87 $38.21\underline{/-8.97°}\ \Omega$
9-89 2.203 mH
9-91 235 pF
9-93 $3.592\underline{/-38.66°}$ A

第 10 章

10-1 $1.9704\cos(10t+5.65°)$ A
10-3 $3.835\cos(4t-35.02°)$ V
10-5 $12.398\cos(4\times10^3t+4.06°)$ mA
10-7 $124.08\underline{/-154°}$ V
10-9 $6.154\cos(10^3t+70.26°)$ V
10-11 $199.5\underline{/86.89°}$ mA
10-13 $29.36\underline{/62.88°}$ V
10-15 $7.906\underline{/43.49°}$ A
10-17 $9.25\underline{/-162.12°}$ A
10-19 $7.682\underline{/50.19°}$ V
10-21 (a) $1,0,-\dfrac{\text{j}}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$, (b) $0,1,\dfrac{\text{j}}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$
10-23 $\dfrac{(1-\omega^2LC)V_s}{1-\omega^2LC+\text{j}\omega RC(2-\omega^2LC)}$
10-25 $1.4142\cos(2t+45°)$ A
10-27 $4.698\underline{/95.24°}$ A,$0.9928\underline{/37.71°}$ A
10-29 $4.67\underline{/-20.17°}$ A,$1.79\underline{/37.35°}$ A
10-31 $2.179\underline{/61.44°}$ A
10-33 $7.906\underline{/43.49°}$ A
10-35 $1.971\underline{/-2.1°}$ A
10-37 $2.38\underline{/-96.37°}$ A,$2.38\underline{/143.63°}$ A,
$2.38\underline{/23.63°}$ A
10-39 $0.3814\underline{/109.6°}$ A,$0.3443\underline{/124.4°}$ A,
$0.1455\underline{/-60.42°}$ A,$0.1005\underline{/48.5°}$ A
10-41 $4.243\cos(2t+45°)$
$+3.578\sin(4t+25.56°)$ V
10-43 $9.902\cos(2t-129.17°)$ A
10-45 $791.1\cos(10t+21.47°)$
$+299.5\sin(4t+176.6°)$ mA
10-47 $[4+0.504\sin(t+19.1°)$
$+0.3352\cos(3t-76.43°)]$ A
10-49 $4.472\sin(200t+56.56°)$ A
10-51 $109.3\underline{/30°}$ mA
10-53 $(3.529-\text{j}5.883)$ V
10-55 (a) $\boldsymbol{Z}_N=\boldsymbol{Z}_{Th}=22.63\underline{/-63.43°}\ \Omega$,
$\boldsymbol{V}_{Th}=-50\underline{/30°}$ V, $\boldsymbol{I}_N=2.236\underline{/273.4°}$ A
(b) $\boldsymbol{Z}_N=\boldsymbol{Z}_{Th}=10\underline{/26°}\ \Omega$
$\boldsymbol{V}_{Th}=33.92\underline{/58°}$ V,
$\boldsymbol{I}_N=3.392\underline{/32°}$ A

10-57 $\mathbf{Z}_N = \mathbf{Z}_{Th} = 21.63\underline{/-33.7°}\ \Omega$,
$\mathbf{V}_{Th} = 107.3\underline{/146.56°}$ V,
$\mathbf{I}_N = 4.961\underline{/-179.7°}$ A

10-59 $-6 + j38\,\Omega$

10-61 $-24 + j12$ V, $-8 + j6\,\Omega$

10-63 1 kΩ, $5.657\cos(200t+75°)$ A

10-65 $542\cos(2t - 77.47°)$ mA

10-67 $4.945\underline{/-69.76°}$ V, $0.4378\underline{/-75.24°}$ A,
$11.243+j1.079\,\Omega$

10-69 $-j\omega RC, -V_m\cos\omega t$

10-71 $48\cos(2t + 29.53°)$ V

10-73 $21.21\underline{/-45°}$ kΩ

10-75 $0.12499\underline{/180°}$

10-77 $\dfrac{R_2 + R_3 + j\omega C_2R_2R_3}{(1 + j\omega R_1C_1)(R_3 + j\omega C_2R_2R_3)}$

10-79 $37.78\cos(1\,000t + 26.56°)$ V

10-81 $11.27\underline{/128.1°}$ V

10-83 $6.611\cos(1\,000t - 159.2°)$ V

10-85 $447.1\underline{/14.37°}$ mV

10-87 $15.91\underline{/169.6°}$ V,
$5.172\underline{/-138.6°}$ V,
$2.27\underline{/-152.4°}$ V

10-89 证明

10-91 (a) 180 kHz ,
(b) 40 kΩ

10-93 证明

10-95 证明

第11章

11-1 $800+1\,600\cos(100t + 60°)$ W, 800 W

11-3 13.333 W

11-5 $P_{1\Omega} = 1.4159$W, $P_{2\Omega} = 5.097$W ,
$P_{3H} = P_{0.25F} = 0$

11-7 160 W

11-9 44.85 mW

11-11 12.751 mW

11-13 (a)$120 - j60\,\Omega$, (b)12.605 W

11-15 $0.5 - j0.5\Omega$, 90 W

11-17 20 Ω, 31.25 W

11-19 2.576 Ω, 3.798 W

11-21 19.58 Ω

11-23 5.774 V

11-25 3.266

11-27 2.887 A

11-29 5.773 A, 400 W

11-31 2.944 V

11-33 3.332

11-35 21.6 V

11-37 9.487 A

11-39 (a) 0.7592, 6.643 kW, 5.695 kVAR,
(b) 312 μF

11-41 (a) 0.5547（超前），(b) 0.9304（滞后）

11-43 5.477 V, 3 W

11-45 (a) 46.9V, 1.061A, (b) 20 W

11-47 (a) $S = 112 + j194$ VA
平均功率 = 112 W
无功功率 = 194 VAR
(b) $S = 226.3 - j226.3$ VA
平均功率 = 226.3 W
无功功率 = −226.3 VAR
(c) $S = 110.85 + j64$VA,
平均功率 = 110.85W
无功功率 = 64 VAR
(d) $S = 7.071 + j7.071$kVA,
平均功率 = 7.071 kW
无功功率=7.071 kVAR

11-49 (a) $4 + j2.373$kVA
(b) $1.6 - j1.2$kVA
(c) $0.4624+j1.2705$kVA
(d) $110.77+j166.16$VA

11-51 (a) 0.9956 （滞后）
(b) 15.56 W,
(c) 1.466 VAR,
(d) 15.63 VA,
(e) $15.56+j1.466$VA

11-53 (a) $93.97\underline{/29.8°}$ A, (b) 1.0 （滞后）

11-55 对于40 V电压源：−140+j20 VA；对于电容器：−j250VA；对于电阻器：290 VA；对于电感器：j130 VA；对于j50 V电压源：−150+j100 VA

11-57 $25.23 - j16.82$ VA

11-59 j169.65 VAR, − j707,3 VAR

11-61 $132.4\underline{/92.4°}$A, $6.62\underline{/-2.4°}$kVA

11-63 $443.3\underline{/-28.13°}$A

11-65 80 μW

11-67 $18\angle 36.86°$ mVA, 2.904 mW

11-69 (a)0.6402 （滞后），
(b)295.1 W,
(c)130.4 μF

11-71 (a)50.14 + j1.7509 mΩ ，
(b)0.9994滞后，
(c)$2.392\angle -2°$ kA

11-73 (a)12.21 kVA, (b)$50.86\angle -35°$ A ,
(c)4.083kVAP,188.03μF,
(d)$43.4\angle -16.26°$ A

11-75 (a)1 835.9 − j114.68 VA ，(b)0.998 （超前），(c)无需校正

11-77 157.69 W

11-79 50 mW

11-81 $5.435\angle -23.07°$ A

11-83 (a)688.1 W,(b)840 VA,
(c)481.8 VAR,(d)0.8191 （滞后）

11-85 (a)20 A, $17.85\angle 163.26°$A,
$5.907\angle -119.5°$ A ，
(b)4 451 + j617 VA,(c)0.9904 （滞后）

11-87 0.5333

11-89 (a)12 kVA,9.36+j7.51 kVA,
(b)2.866+j2.3 Ω

11-91 0.9775,104 μF

11-93 (a)7.328 kW,1.196 kVAR,(b)0.987

11-95 (a)2.814 kHz
(b)431.8 mW

11-97 547.3 W

第12章

12-1 (a)$231\angle -30°$, $231\angle -150°$, $231\angle 90°$ V
(b)$231\angle 30°$, $231\angle 150°$, $231\angle -90°$ V

12-3 *abc*顺序，$208\angle 250°$ V

12-5 $260\cos(\omega t + 62°)$ V, $260\cos(\omega t - 58°)$ V,
$260\cos(\omega t + 182°)$ V

12-7 $44\angle 53.13°$ A, $44\angle -66.87°$ A, $44\angle 173.13°$ A

12-9 $4.8\angle -36.87°$ A, $4.8\angle -156.87°$A
$4.8\angle 83.13°$ A

12-11 207.8 V,99.85 A

12-13 20.43 A,3744 W

12-15 13.66 A

12-17 $5.773\angle 5°$ A, $5.773\angle -115°$ A ,
$5.773\angle 125°$ A

12-19 $5.47\angle -18.43°$ A, $5.47\angle -138.43°$ A,
$5.47\angle 101.57°$ A, $9.474\angle -48.43°$A,
$9.474\angle -168.43°$A, $9.474\angle 71.57°$ A

12-21 $17.96\angle -98.66°$A rms,
$31.1\angle 171.34°$ A rms

12-23 (a)13.995 A ，
(b)2.448 kW

12-25 $17.74\angle 4.78°$, $17.74\angle -115.22°$,
$17.74\angle 124.78°$ A

12-27 91.79 V

12-29 1.3 + j1.1465 kVA

12-31 (a)6.144 + j4.608 Ω,
(b)18.04 A,(c)207.2 μF

12-33 7.69 A,360.3 V

12-35 (a)14.61 − j5.953 A
(b)3.361+j1.368 kVA
(c)0.9261

12-37 55.51 A,1.298 − j1.731 Ω

12-39 431.1 W

12-41 9.021 A

12-43 4.373 − j1.145 kVA

12-45 $2.109\angle 24.83°$ kV

12-47 39.19 A（rms），0.9982（滞后）

12-49 (a)5.808 kW,(b)1.9356 kW

12-51 (a) 19.2 − j14.4 A, −42.76 +j27.09 A,
−12 − j20.78A,
(b) 31.2+j6.38 A , −61.96 + j41.48 A,
30.76 − j47.86 A

12-53 (a) $2.69\angle 4.71°$ A, $3.454\angle -116.33°$ A,
$3.096\angle 111.78°$ A,
(b) 2.205 kW

12-55 $9.6\angle -90°$ A, $6\angle 120°$ A, $8\angle -150°$ A,
3.103+j3.264 kVA

12-57 $I_a = 1.9585\angle -18.1°$ A,
$I_b = 1.4656\angle -130.55°$ A,
$I_c = 1.947\angle 117.8°$ A

12-59 $220.6\angle -34.56^\circ$,
$214.1\angle -81.49^\circ$, 假定N为地节点。
$49.91\angle -50.59^\circ$ V,

12-61 $11.15\angle 37^\circ$ A, $230.8\angle -133.4^\circ$ V，假定N为地节点。

12-63 $18.67\angle 158.9^\circ$ A, $12.38\angle 144.1^\circ$ A

12-65 $11.02\angle 12^\circ$ A, $11.02\angle -108^\circ$ A,
$11.02\angle 132^\circ$ A

12-67 (a)97.67 kW,88.67 kW,82.67 kW，
(b)108.97 A

12-69 $I_a = 94.32\angle -62.05^\circ$ A,
$I_b = 94.32\angle 177.95^\circ$ A,
$I_c = 94.32\angle 57.95^\circ$ A, 28.8 + j18.03kVA

12-71 (a)2 590 W,4 808 W,(b)8 335VA

12-73 2 360 W,−632.8 W

12-75 (a)20 mA,
(b) 200 mA

12-77 320 W

12-79 $17.15\angle -19.65^\circ$, $17.15\angle -139.65^\circ$,
$17.15\angle 100.35^\circ$ A, $223\angle 2.97^\circ$,
$223\angle -117.03^\circ$,
$223\angle 122.97^\circ$ V

12-81 516 V

12-83 183.42 A

12-85 $Z_Y = 2.133\,\Omega$

12-87 $1.448\angle -176.6^\circ$ A, 1 252+j711.6 VA,
1085+j721.2 VA

第13章

13-1 10 H

13-3 150 mH,50 mH,25 mH,0.2887

13-5 (a)123.7 mH, (b)24.31mH

13-7 $540.5\angle 144.16^\circ$ mV

13-9 $2.074\angle 21.12^\circ$ V

13-11 $461.9\cos(600t - 80.26^\circ)$ mA

13-13 4.308+j6.538 Ω

13-15 1+j19.5 Ω, $1.404\angle 9.44^\circ$ A

13-17 13.073 + j25.86 Ω

13-19 参见图G-24。

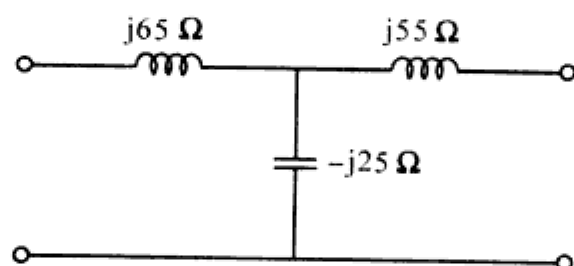


图 G-24 习题 13-19 电路图

13-21 $4.254\angle -8.51^\circ$ A, $1.5637\angle 27.52^\circ$ A, 4.89W

13-23 $5.068\cos(10t + 52.54^\circ)$ A,
$2.719\cos(10t - 100.89^\circ)$ A, 15.02J

13-25 $2.2\sin(2t - 4.88^\circ)$ A, $1.5085\angle 17.9^\circ$ Ω

13-27 174.05 mW

13-29 0.984,130.5 mJ

13-31 (a)$L_a = 10\text{H}, L_b = 15\text{H}, L_c = 5$ H,
(b)$L_A = 18.33\text{H}, L_B = 27.5\text{H}, L_C = 55$ H,

13-33 12.769 + j7.154 Ω

13-35 $1.4754\angle -21.4^\circ$ A, $0.0775\angle -134.85^\circ$A,
$0.077\angle -110.41^\circ$ A

13-37 (a)5,(b)104.17 A,(c)20.83 A

13-39 $15.7\angle 20.31^\circ$ A, $78.5\angle 20.31^\circ$ A

13-41 0.5 A, −1.5 A

13-43 4.186 V,16.744 V

13-45 36.71 mW

13-47 $3.934\cos(3t + 59.93^\circ)$ V

13-49 $0.937\cos(2t + 51.34^\circ)$ A

13-51 8 − j1.5 Ω, $2.95\angle 10.62^\circ$ A

13-53 (a)5,(b)8 W

13-55 1.666 9 Ω

13-57 (a)$25.9\angle 69.96^\circ$, $12.95\angle 69.96^\circ$ A(rms),
(b)$21.06\angle 147.4^\circ$, $42.12\angle 147.4^\circ$,
$42.12\angle 147.4^\circ$ V(rms),
(c)$1\,554\angle 20.04^\circ$ VA

13-59 $P_{10\Omega} = 24.69$ W, $P_{12\Omega} = 16.661$ W,
$P_{20\Omega} = 3.087$ W

13-61 6 A,0.36 A, − 60 V

13-63 $3.795\angle 18.43^\circ$ A, $1.897\,5\angle 18.43^\circ$A,
$0.632\,5\angle 161.6^\circ$ A

13-65 11.05 W

13-67 (a)160 V,(b)31.25 A,(c)12.5 A

13-69 (1.2 − j2) kΩ, 5.333 W

13-71 $[1+(N_1/N_2)]^2 Z_L$

13-73　(a)三相Δ－Y变压器
(b)$8.66\angle 156.87°$ A, $5\angle -83.13°$ A，
(c)1.8 kW

13-75　(a)0.115 47,(b)76.98 A,15.395 A

13-77　(a)单相变压器，$1:n, n=1/110$,
(b)7.576 mA

13-79　$1.306\angle -68.01°$ A, $406.8\angle -77.86°$ mA,
$1.336\angle -54.92°$ A

13-81　$104.5\angle 13.96°$ mA, $29.54\angle -143.8°$ mA,
$208.8\angle 24.4°$ mA

13-83　$1.08\angle 33.91°$ A, $15.14\angle -34.21°$ V

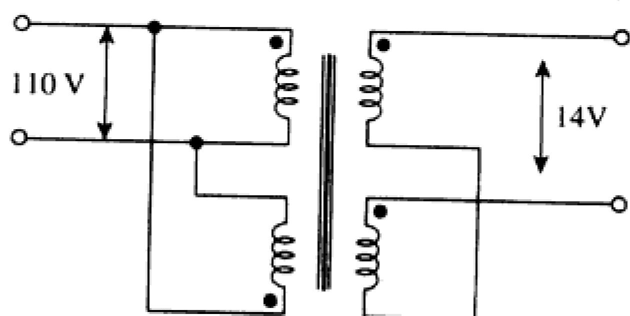
13-85　100匝

13-87　0.5

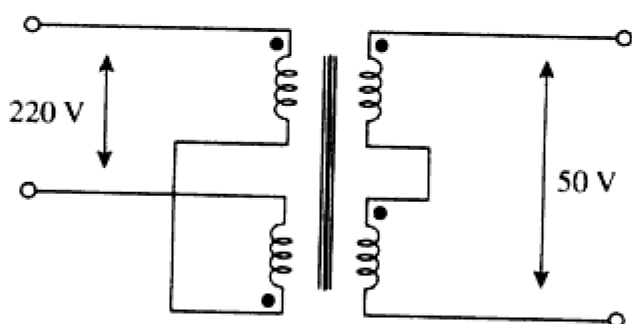
13-89　0.5,41.67 A,83.33 A

13-91　(a)1 875kVA，(b)7812A

13-93　(a)参见图G-25(a)；(b)参见图G-25（b）。



(a)



(b)

图 G-25　习题 13-93 电路图

13-95　(a)1/60,(b)139 mA

第14章

14-1　$\dfrac{j\omega/\omega_0}{1+j\omega/\omega_0}, \omega_0=\dfrac{1}{RC}$

14-3　$\dfrac{5s}{s^2+8s+5}$

14-5　(a)$\dfrac{sRL}{(R+R_s)Ls+RR_s}$

(b)$\dfrac{R}{LRCs^2+Ls+R}$

14-7　(a)1.005 773，(b)0.4898，(c)1.718×10^5

14-9　参见图G-26。

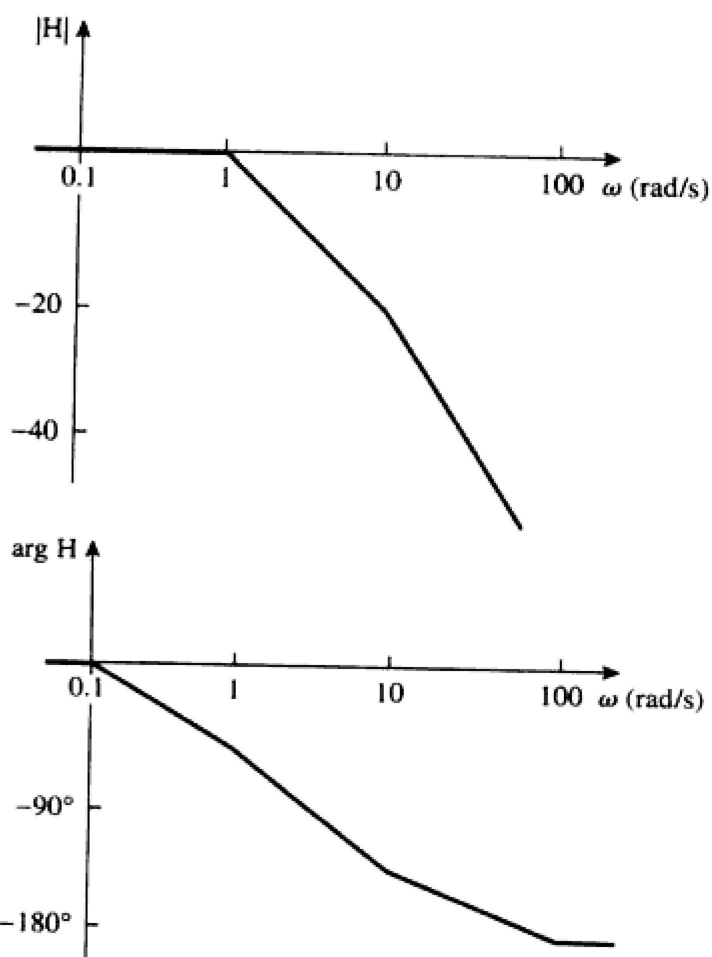
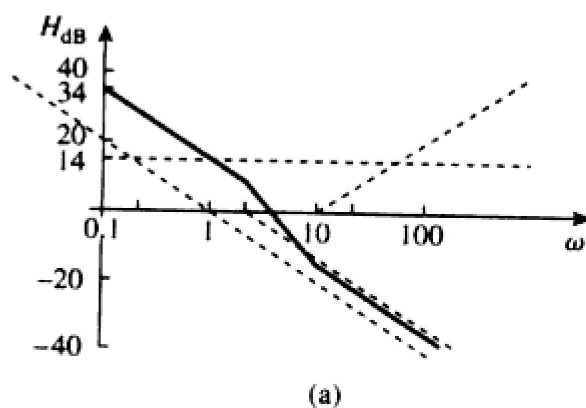
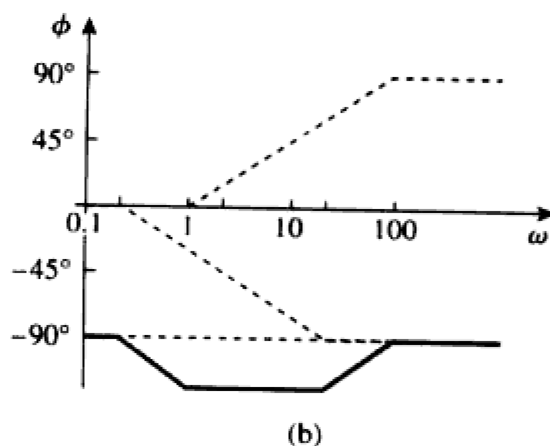


图 G-26　习题 14-9 波形图

14-11　参见图G-27。



(a)



(b)

图 G-27　习题 14-11 波形图

14-13 参见图G-28。

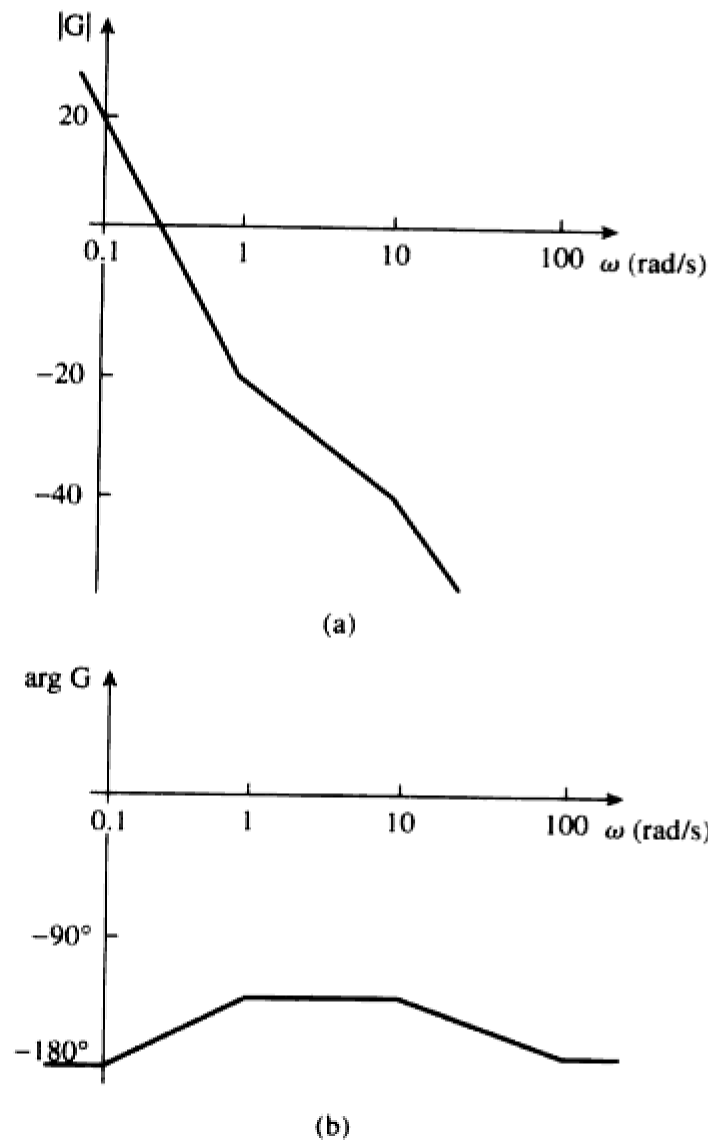
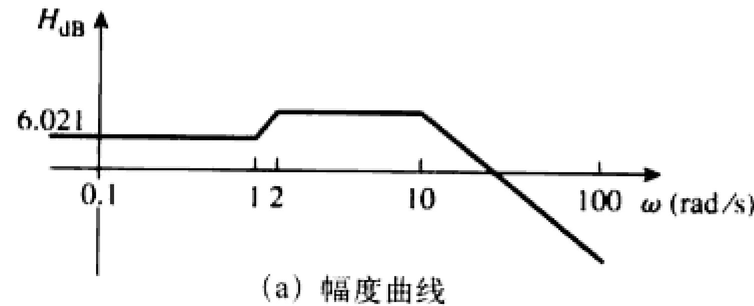
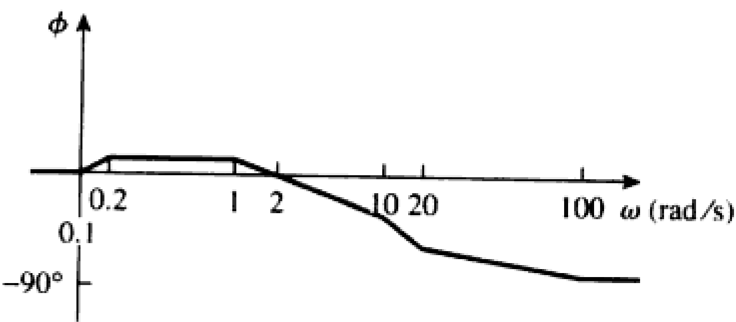


图 G-28 习题 14-13 波形图

14-15 参见图G-29。



（a）幅度曲线



（b）相位曲线

图 G-29 习题 14-15 波形图

图 G-29 （续）

14-17 参见图G-30。

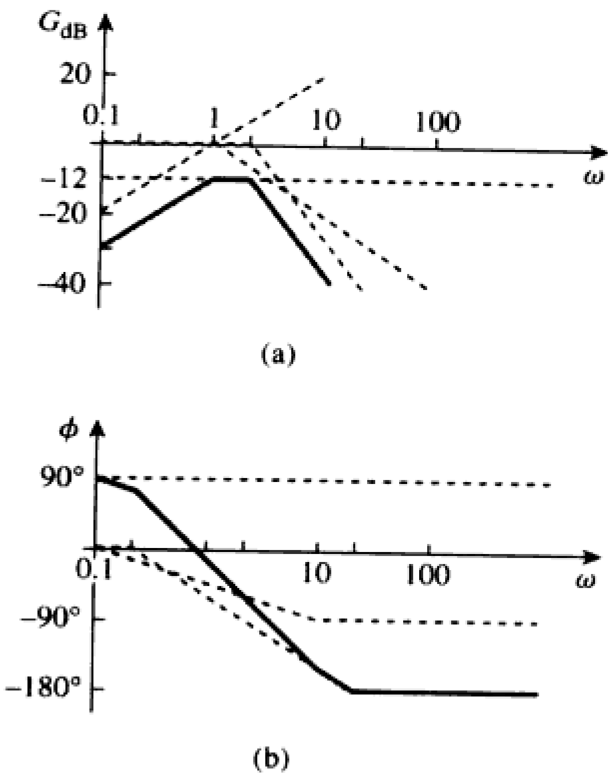


图 G-30 习题 14-17 波形图

14-19 参见图G-31。

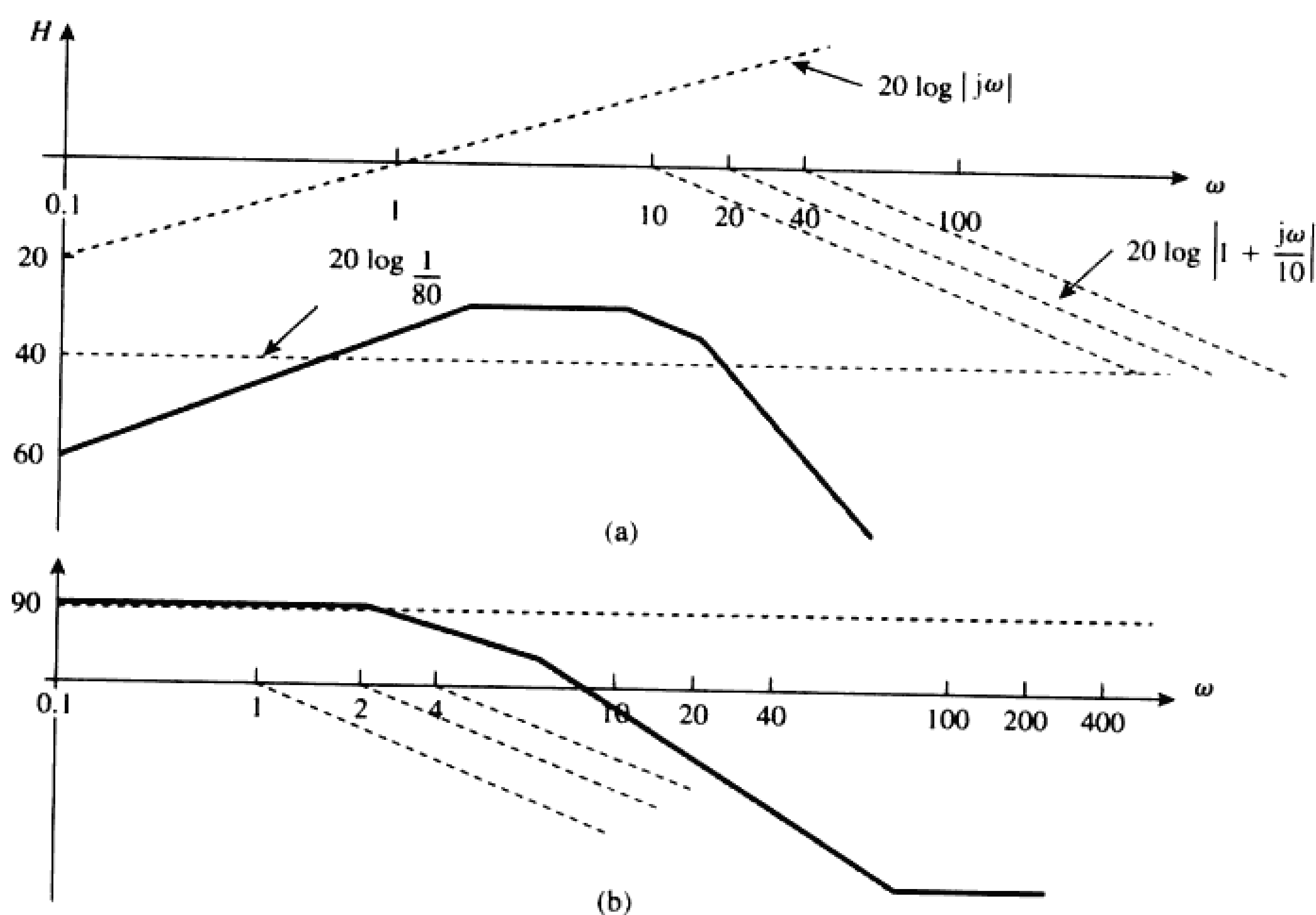


图 G-31 习题 14-19 波形图

14-21 参见图 G-32。

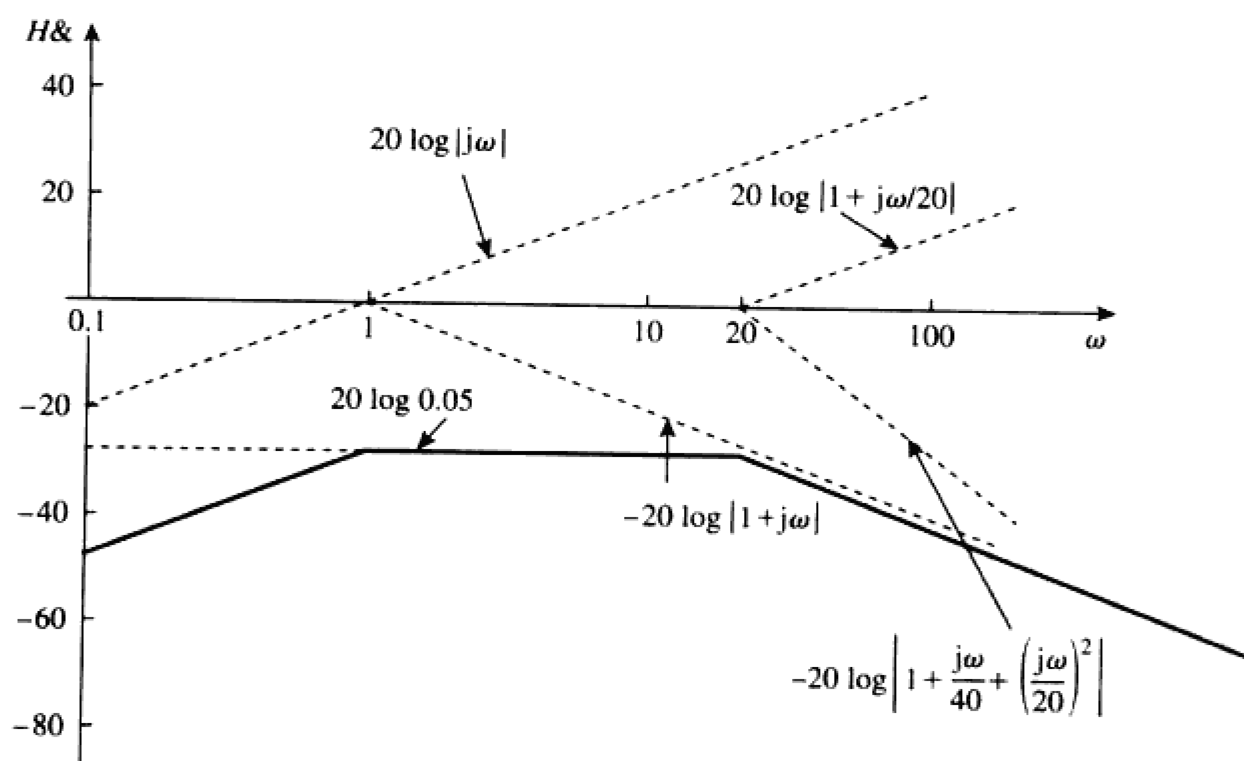


图 G-32 习题 14-21 波形图

14-23 $\dfrac{100\,j\omega}{(1+j\omega)(10+j\omega)^2}$

14-25 2 kΩ, 2 − j0.75 kΩ,
2 − j0.3 kΩ, 2 + j0.3 kΩ,
2 + j0.75kΩ

14-27　$R=1\,\Omega, L=0.1\text{H}, C=25\text{ mF}$

14-29　4.082 krad/s, 38.67, 105.55 rad/s

14-31　8.796×10^{6} rad/s ,

14-33　14.21 μH, 56.84 pF

14-35　40 Ω, 2.5 μH, 10 μF,
2.5 krad/s, 198.75 krad/s,
202.25 krad/s

14-37　$\dfrac{1}{\sqrt{LC-R^2C^2}}$

14-39
(a) 19.89 nF, (b) 164.45 μH,
(c) 552.9 krad/s,
(d) 25.13 krad/s, (e) 22

14-41　(a) 1.5811 rad/s, 0.1976, 8 rad/s,
(b) 5 krad/s, 20, 250 rad/s

14-43　(a) 2.357 krad/s,　(b) 1 Ω

14-45　(a) $\dfrac{j\omega}{2(1+j\omega)^2}$,　(b) 0.25

14-47　796 kHz

14-49　0.2 rad/s, −14.023, −84.3°

14-51　1.256 kΩ

14-53　18.045 kΩ, 2.872 H, 10.5

14-55　$1.56\text{ kHz} < f < 1.62\text{ kHz}$, 25

14-57　(a) 1 rad/s, 3 rad/s;　(b) 1 rad/s, 3 rad/s

14-59　2.408 krad/s, 15.811 krad/s

14-61　(a) $\dfrac{1}{1+j\omega RC}$,
(b) $\dfrac{j\omega RC}{1+j\omega RC}$

14-63　10 MΩ, 100 kΩ

14-65　证明

14-67　如果 $R_f=20\text{ k}\Omega$，则 $R_i=80\text{ k}\Omega$ 和
$C=15.915$ nF

14-69　令 $R=10\text{ k}\Omega$，则 $R_f=25\text{ k}\Omega$,
$C=7.96$ nF.

14-71　$K_f=2\times10^{-4}, K_m=5\times10^{-3}$

14-73　9.6 MΩ, 32 μH, 0.375 pF

14-75　200 Ω, 400 μH, 1 μF

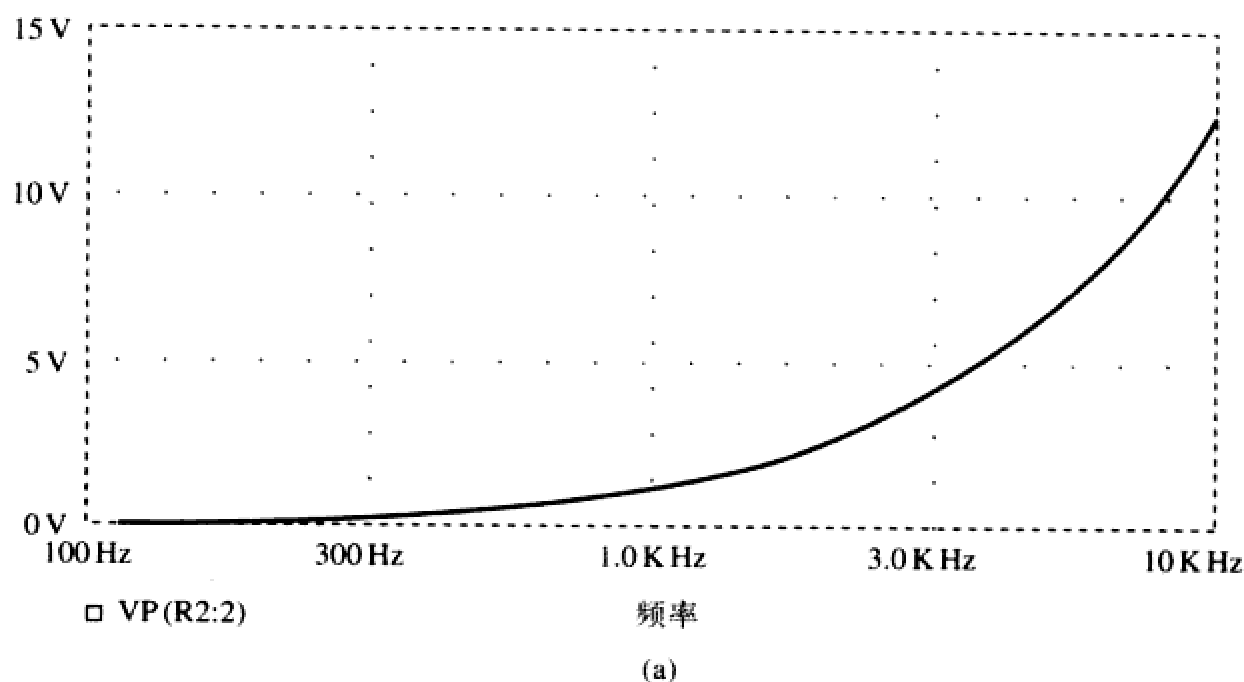
14-77　(a) 1 200 H, 0.5208 μF, (b) 2 mH, 312.5 nF,
(c) 8 mH, 7.81 pF

14-79　(a) $8s+5+\dfrac{10}{s}$,
(b) $0.8s+50+\dfrac{10^4}{s}$, 111.8 rad/s

14-81　(a) 0.4 Ω, 0.4 H, 1 mF, 1 mS,
(b) 0.4 Ω, 0.4 mH, 1 μF, 1 mS

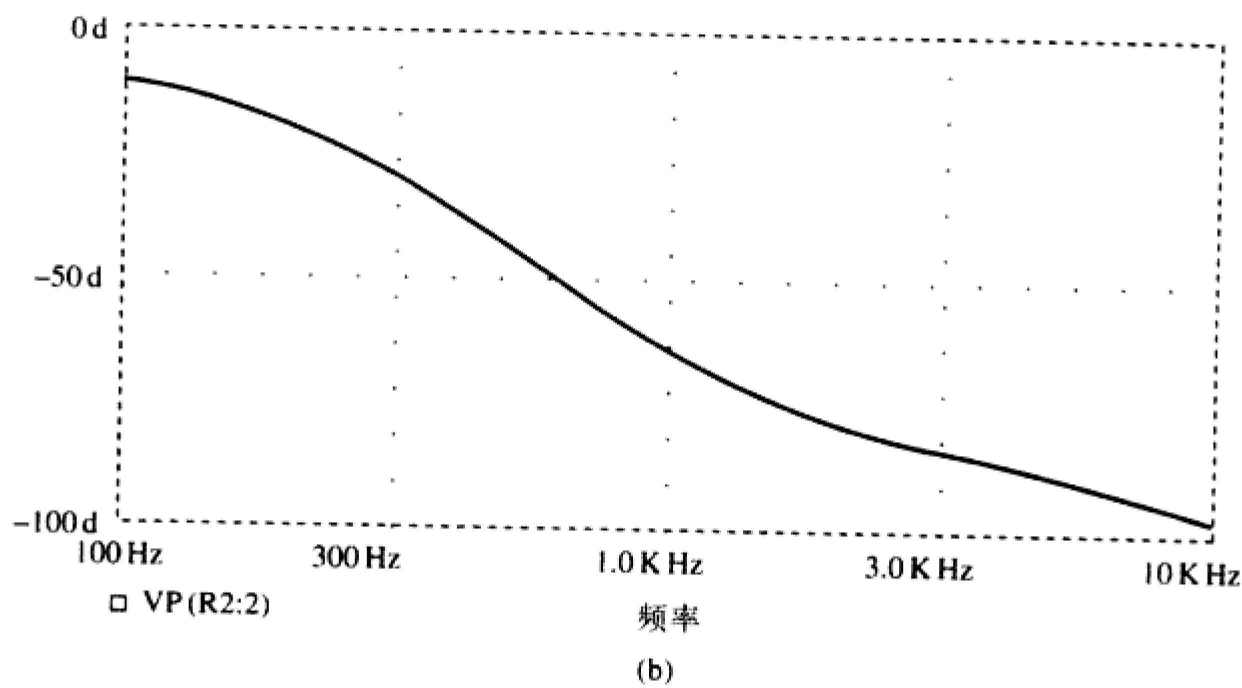
14-83　0.1 pF, 0.5 pF, 1 MΩ, 2 MΩ

14-85　参见图G-33。



(a)

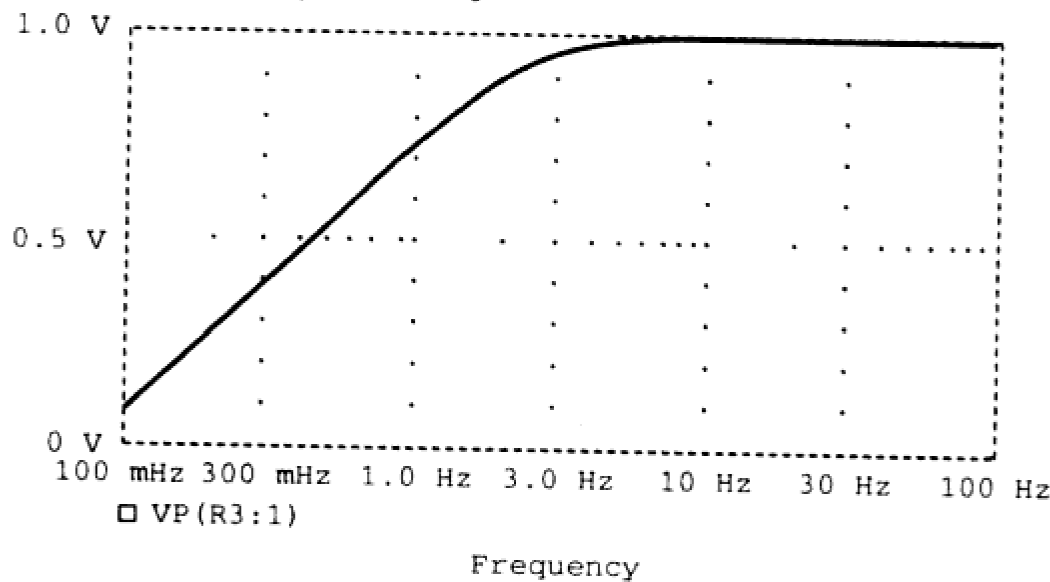
图 G-33　习题 14-85 波形图



(b)

图 G-33　（续）

14-87　参见图G-34；高通滤波器，$f_0 = 1.2$ Hz。



图G-34　习题14-87波形图

14-89　参见图G-35。

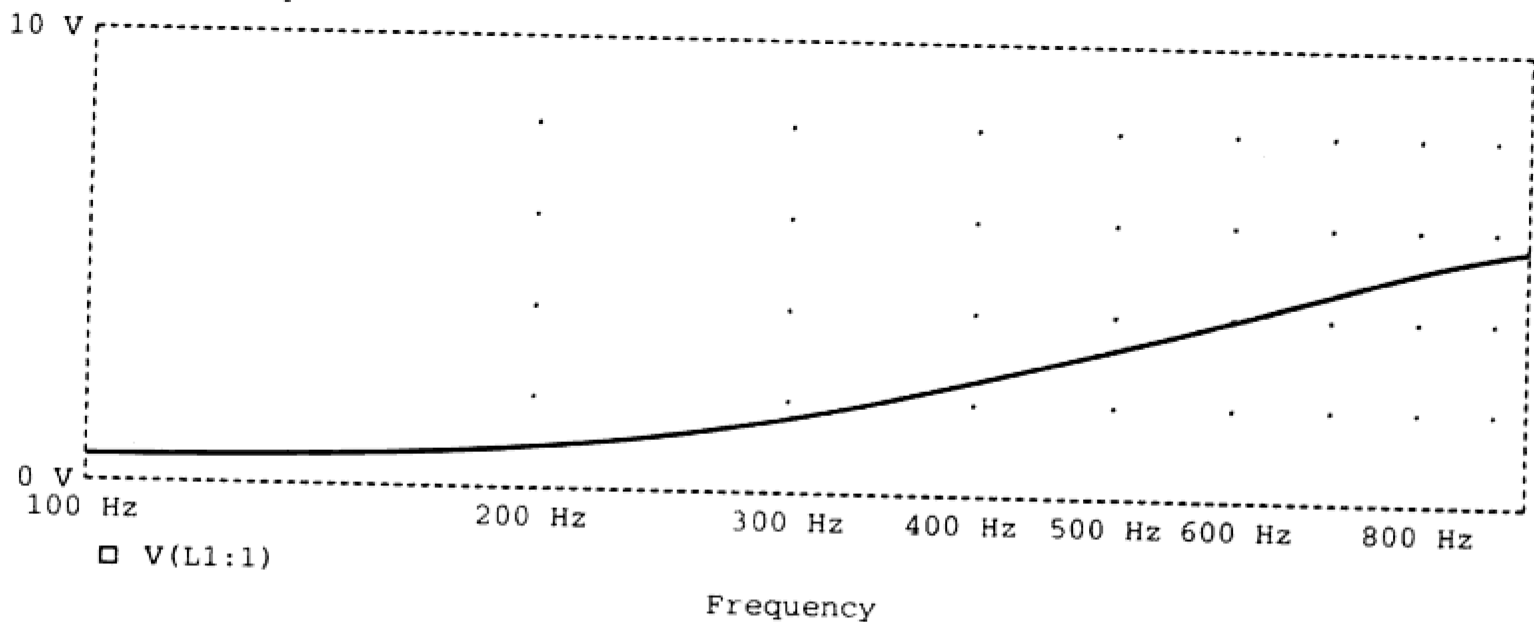
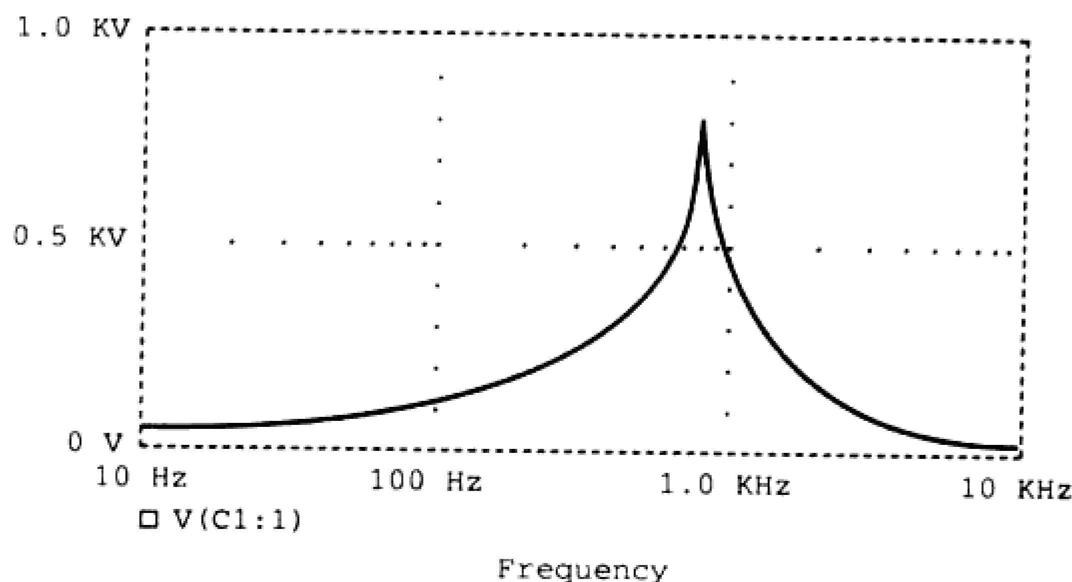


图 G-35　习题 14-89 波形图

14-91 参见图G-36，$f_o = 800$ Hz。



图G-36 习题14-91波形图

14-93 $\dfrac{-RCs+1}{RCs+1}$

14-95 (a) $0.541\text{MHz} < f_o < 1.624\text{MHz}$,

(b) 67.98, 204.1

14-97

$$\frac{s^3 LR_L C_1 C_2}{(sR_i C_1+1)(s^2 LC_2 + sR_L C_2 + 1) + s^2 LC_1(sR_L C_2 + 1)}$$

14-99 8.165 MHz, 4.188×10^6 rad/s

14-101 1.061kΩ

14-103 $\dfrac{R_2(1+sCR_1)}{R_1+R_2+sCR_1R_2}$

第15章

15-1 (a) $\dfrac{s}{s^2-a^2}$,

(b) $\dfrac{a}{s^2-a^2}$

15-3 (a) $\dfrac{s+2}{(s+2)^2+9}$, (b) $\dfrac{4}{(s+2)^2+16}$,

(c) $\dfrac{s+3}{(s+3)^2-4}$, (d) $\dfrac{1}{(s+4)^2-1}$,

(e) $\dfrac{4(s+1)}{[(s+1)^2+4]^2}$

15-5 (a) $\dfrac{8-12\sqrt{3}s-6s^2+\sqrt{3}s^3}{(s^2+4)^3}$,

(b) $\dfrac{72}{(s+2)^5}$, (c) $\dfrac{2}{s^2}-4s$,

(d) $\dfrac{2e}{s+1}$, (e) $\dfrac{5}{s}$, (f) $\dfrac{18}{3s+1}$, (g) s^n

15-7 (a) $\dfrac{2}{s^2}+\dfrac{4}{s}$, (b) $\dfrac{4}{s}+\dfrac{3}{s+2}$,

(c) $\dfrac{8s+18}{s^2+9}$, (d) $\dfrac{s+2}{s^2+4s-12}$

15-9 (a) $\dfrac{e^{-2s}}{s^2}-\dfrac{2e^{-2s}}{s^2}$, (b) $\dfrac{2e^{-s}}{e^4(s+4)}$,

(c) $\dfrac{2.702s}{s^2+4}+\dfrac{8.415}{s^2+4}$,

(d) $\dfrac{6}{s}e^{-2s}-\dfrac{6}{s}e^{-4s}$

15-11 (a) $\dfrac{6(s+1)}{s^2+2s-3}$,

(b) $\dfrac{24(s+2)}{(s^2+4s-12)^2}$,

(c) $\dfrac{e^{-(2s+6)}[(4e^2+4e^{-2})s+(16e^2+8e^{-2})]}{s^2+6s+8}$

15-13 (a) $\dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$,

(b) $\dfrac{2(s+1)}{(s^2+2s+2)^2}$,

(c) $\tan^{-1}\left(\dfrac{\beta}{s}\right)$

15-15 $5\dfrac{1-e^{-s}-se^{-s}}{s^2(1-e^{-3s})}$

15-17 $\dfrac{1}{s}[2-e^{-s}+e^{-2s}]$

15-19 $\dfrac{1}{1-e^{-2s}}$

15-21 $\dfrac{(2\pi s-1+e^{-2\pi s})}{2\pi s^2(1-e^{-2\pi s})}$

15-23 (a) $\dfrac{(1-e^{-s})^2}{s(1-e^{-2s})}$,

(b) $\dfrac{2(1-e^{-2s})-4se^{-2s}(s+s^2)}{s^3(1-e^{-2s})}$

15-25 (a) 5和0，(b) 5和0

15-27 (a) $u(t)+2e^{-t}u(t)$,(b)$3\delta(t)-11e^{-4t}u(t)$,

(c) $(2e^{-t}-2e^{-3t})u(t)$,

(d) $(3e^{-4t}-3e^{-2t}+6te^{-2t})u(t)$

15-29 $\left(2-2e^{-2t}\cos 3t-\dfrac{2}{3}e^{-2t}\sin 3t\right)u(t), t\geqslant 0$

15-31 (a) $(-5e^{-t}+20e^{-2t}-15e^{-3t})u(t)$,

(b) $\left(-e^{-t}+\left(1+3t-\dfrac{t^2}{2}\right)e^{-2t}\right)u(t)$,

(c) $(-0.2e^{-2t}+0.2e^{-t}\cos(2t)$

$+0.4e^{-t}\sin(2t))u(t)$

15-33 (a) $(3e^{-t}-3\cos(t)+3\sin(t))u(t)$,

(b) $\cos(t-\pi)u(t-\pi)$,

(c) $8u(t)[1-e^{-t}-te^{-t}-0.5t^2e^{-t}]$

15-35 (a) $[2e^{-(t-6)}-e^{-2(t-6)}]u(t-6)$,

(b) $\dfrac{4}{3}u(t)[e^{-t}-e^{-4t}]-\dfrac{1}{3}u(t-2)$

$[e^{-(t-2)}-e^{-4(t-2)}]$,

(c) $\dfrac{1}{13}u(t-1)[-3e^{-3(t-1)}$

$+3\cos 2(t-1)+2\sin 2(t-1)]$

15-37 (a) $(2-e^{-2t})u(t)$,

(b) $[0.4e^{-3t}+0.6e^{-t}\cos t$

$+0.8e^{-t}\sin t]u(t)$,

(c) $e^{-2(t-4)}u(t-4)$,

(d) $\left(\dfrac{10}{3}\cos t-\dfrac{10}{3}\cos 2t\right)u(t)$

15-39 (a) $-1.6e^{-t}\cos 4t-4.05e^{-t}\sin 4t+3.6e^{-2t}$

$\cos 4t+(3.45e^{-2t}\sin 4t)u(t)$,

(b) $[0.08333\cos 3t+0.02778\sin 3t$

$+0.0944e^{-0.551t}-0.1778e^{-5.449t}]u(t)$

15-41 $z(t)=\begin{cases}8t, & 0<t<2\\ 16-8t, & 2<t<6\\ -16, & 6<t<8\\ 8t-80, & 8<t<12\\ 112-8t, & 12<t<14\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

15-43 (a) $y(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}t^2, & 0<t<1\\ -\dfrac{1}{2}t^2+2t-1, & 1<t<2\\ 1, & t>2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(b) $y(t)=2(1-e^{-t}), t>0$,

(c) $y(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}t^2+t+\dfrac{1}{2}, & -1<t<0\\ -\dfrac{1}{2}t^2+t+\dfrac{1}{2}, & 0<t<2\\ \dfrac{1}{2}t^2-3t+\dfrac{9}{2}, & 2<t<3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

15-45 $(4e^{-2t}-8te^{-2t})u(t)$

15-47 (a)$(-e^{-t}+2e^{-2t})u(t)$,(b)$(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$

15-49 (a) $\left(\dfrac{t}{a}(e^{at}-1)-\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{e^{at}}{a^2}(at-1)\right)u(t)$,

(b)$[0.5\cos(t)(t+0.5\sin(2t))$

$-0.5\sin(t)(\cos(t)-1)]u(t)$

15-51 $(5e^{-t}-3e^{-3t})u(t)$

15-53 $\cos(t)+\sin(t)$ 或 $1.4142\cos(t-45^\circ)$

15-55 $\left(\dfrac{1}{40}+\dfrac{1}{20}e^{-2t}-\dfrac{3}{104}e^{-4t}-\dfrac{3}{65}e^{-t}\cos(2t)\right.$

$\left.-\dfrac{2}{65}e^{-t}\sin(2t)\right)u(t)$

15-57 $(-0.4\sin 2t+\cos 3t+0.6\sin 3t)u(t)$

15-59 $[-2.5e^{-t}+12e^{-2t}-10.5e^{-3t}]u(t)$

第16章

16-1 $1.155e^{-0.5t}\sin(0.866t)u(t)$ A

16-3 $\left[\dfrac{8}{3}+\dfrac{52}{3}e^{-15t}\right]u(t)$ A

16-5 $\left(e^{-2t}-\dfrac{2}{\sqrt{7}}\sin\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right)u(t)$ A

16-7 $\left(\begin{array}{l}1-e^{-3t/4}\cos\dfrac{\sqrt{7}}{4}t+\\ 4.9135e^{-3t/4}\sin\dfrac{\sqrt{7}}{4}t\end{array}\right)u(t)$ V

16-9 (a) $\dfrac{2(s^2+1)}{s^2+2s+1}$,
(b) $\dfrac{s(5s+6)}{3s^2+7s+6}$

16-11 $\dfrac{50s+160}{s(s^2+9s+16)}$

16-13 $(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$ A

16-15 $-\dfrac{5s(s^2+20)}{s(s+2)(s^2+0.5s+40)}$

16-17 $[4-e^{-t}+1.5811e^{-jt+161.57°}$
$+1.5811e^{jt-161.57°}]u(t)$ A

16-19 $(3.333e^{-t/2}-1.3333e^{-2t})u(t)$ V

16-21 $v_o(t)=\dfrac{20}{3}[1-e^{-t}\cos 0.7071t$
$-1.414e^{-t}\sin 0.7071t]u(t)$ V

16-23 $(5e^{-4t}\cos 2t+230e^{-4t}\sin 2t)u(t)$ V,
$(6-6e^{-4t}\cos 2t-11.37e^{-4t}\sin 2t)u(t)$ A

16-25 $[2.202e^{-3t}+3.84te^{-3t}-0.202\cos(4t)$
$+0.6915\sin(4t)]u(t)$ V

16-27 $\dfrac{20(s+1)}{(s+3)(3s^2+4s+1)},\dfrac{10(s+1)}{(s+3)(3s^2+4s+1)}$

16-29 $10[2e^{-1.5t}-e^{-t}]u(t)$ A

16-31 $\dfrac{10s^2}{s^2+4}$

16-33 $4+\dfrac{s}{2(s+3)}-\dfrac{2s(s+2)}{s^2+4s+20}-\dfrac{12s}{s^2+4s+20}$

16-35 $\dfrac{9s}{3s^2+9s+2}$

16-37 (a) $\dfrac{s^2-3}{3s^2+2s-9}$, (b) $\dfrac{-3}{2s}$

16-39 $sRC+1$

16-41 $\left(2+\dfrac{8}{3}e^{-t}-\dfrac{14}{3}e^{-4t}\right)u(t)$ A

16-43 $\begin{bmatrix}v'_C\\ i'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_C\\ i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$;

$i(t)=[0\quad 1]\begin{bmatrix}v_C\\ i\end{bmatrix}+[0]u(t)$

16-45 $\begin{bmatrix}i'_L\\ v'_C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_L\\ v_C\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1(t)\\ v_2(t)\end{bmatrix}$;

$v_o(t)=[0\quad -1]\begin{bmatrix}i_L\\ v_C\end{bmatrix}+[1\quad 0]\begin{bmatrix}v_1(t)\\ v_2(t)\end{bmatrix}$

16-47 $\begin{bmatrix}i'_L\\ v'_C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_L\\ v_C\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1(t)\\ v_2(t)\end{bmatrix}$;

$\begin{bmatrix}i_1(t)\\ i_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -0.5\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_L\\ v_C\end{bmatrix}+[0.5\quad 0]\begin{bmatrix}v_1(t)\\ v_2(t)\end{bmatrix}$

16-49 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\ -3\end{bmatrix}$, $[1\quad 0],[0]$

16-51 $[1-e^{-2t}(\cos 2t+\sin 2t)]u(t)$

16-53 $s_{1,2}=\dfrac{-1}{2RC}\pm\sqrt{\dfrac{1}{(2RC)^2}-\dfrac{1}{LC}}$，注意，由于$R$、$L$、$C$均为正值，所以两个根均位于左半平面，因此该电路是稳定的。

16-55 该电路是不稳定的。

16-57 100 Ω, 12.8 Ω, 20 μF

16-59 三个未知数，四个方程，因此存在一族解，其中一个解为：
$R_2=1\,\text{k}\Omega, C_1=50\,\text{nF}, C_2=20\,\mu\text{F}$

16-61 参见图G-37。

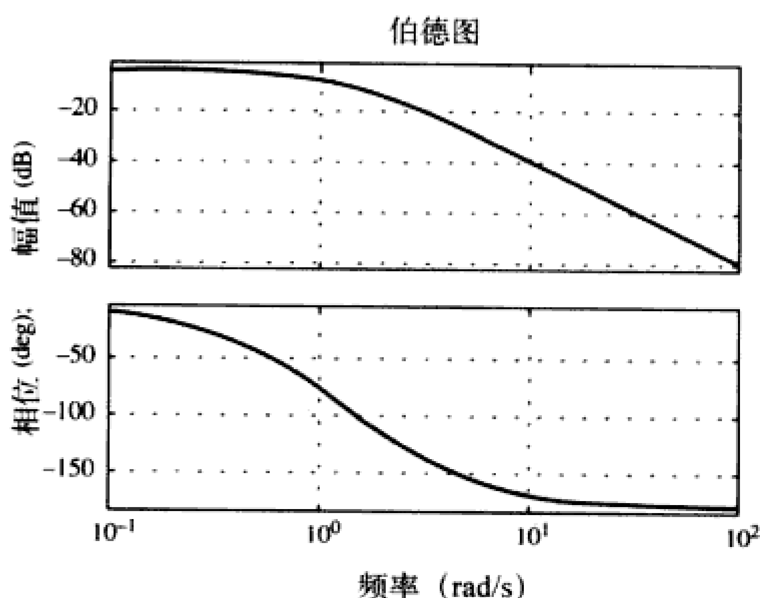


图 G-37 习题 16-61 波形图

16-63　参见图G-38。

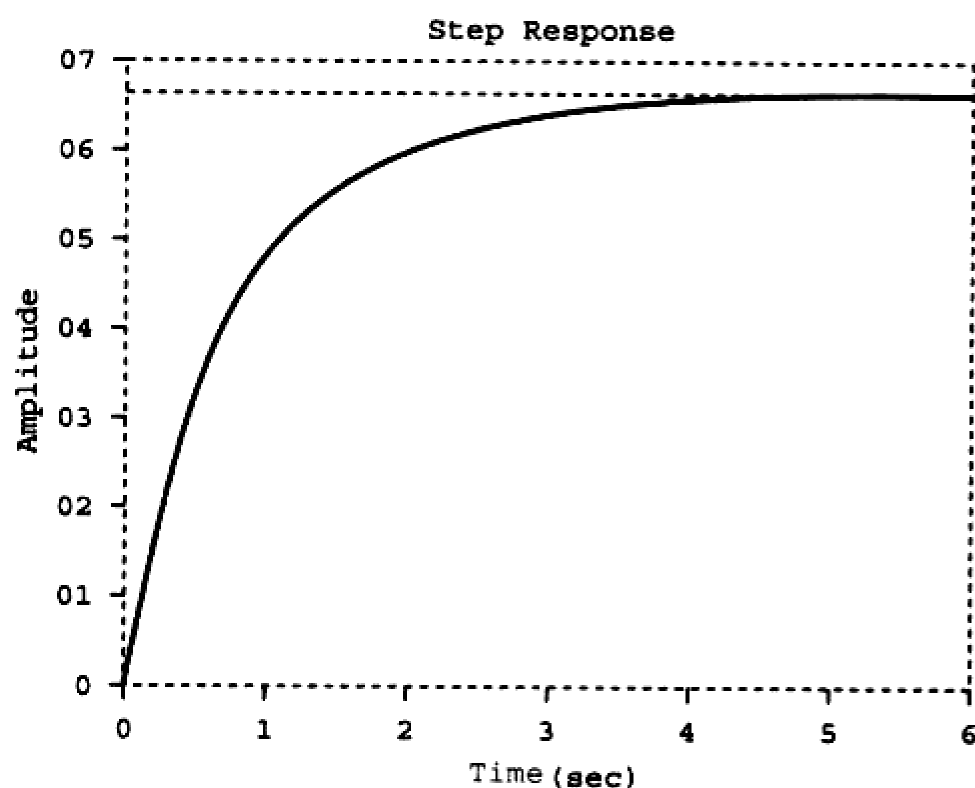


图 G-38　习题 16-63 阶跃响应曲线

16-65　参见图G-39。

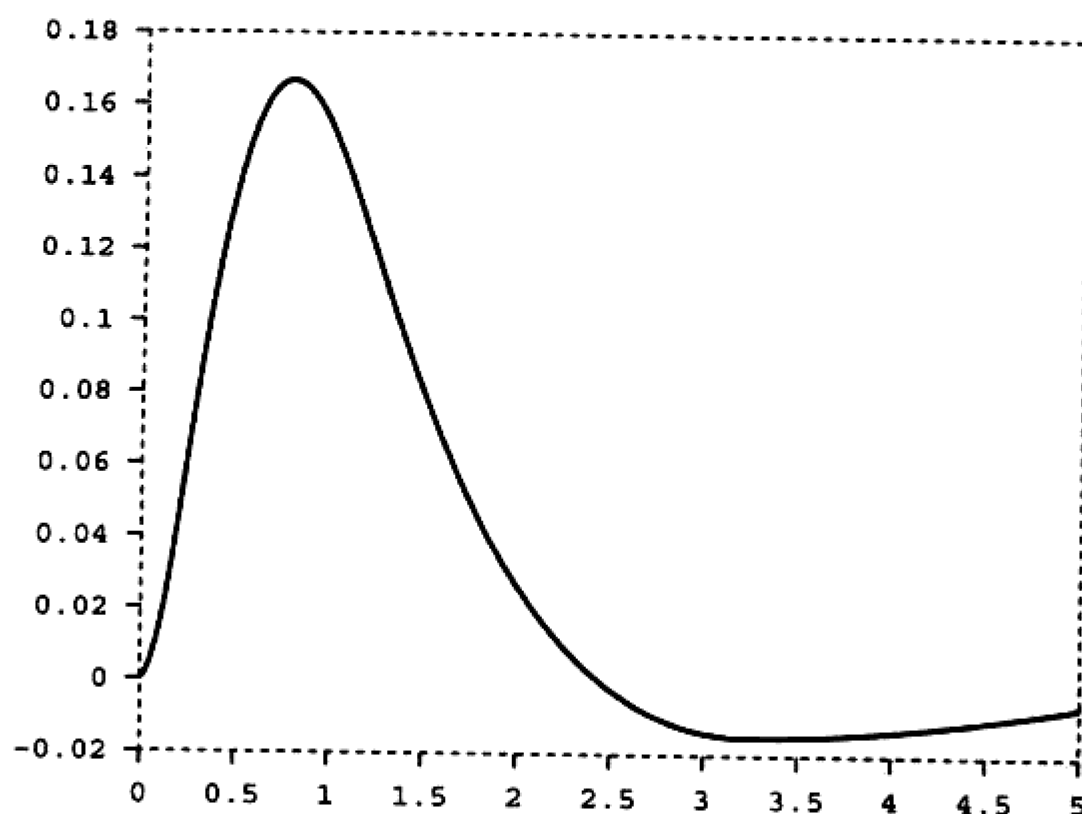


图 G-39　习题 16-65 波形图

16-67　$a=-100, b=400, c=20\,000$

16-69　证明

第17章

17-1　(a) 周期的，2；(b) 非周期的；(c) 周期的，2π；(d) 周期的，π；(e) 周期的，10；(f) 非周期的；(g) 非周期的

17-3　$a_0=3.75$

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{5}{n\pi}(-1)^{(n+1)/2}, & n=\text{奇数}\\ & n=\text{偶数}\end{cases}$$

$$b_n=\frac{5}{n\pi}\left[3-2\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2}\right]$$

17-5 $-0.5+\sum_{\substack{n=1\\n=\text{奇数}}}^{\infty}\frac{6}{n\pi}\sin nt$

17-7 $1+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3}{n\pi}\sin\frac{4n\pi}{3}\cos\frac{2n\pi t}{3}+\frac{3}{n\pi}\left(1-\cos\frac{4n\pi}{3}\right)\sin\frac{2n\pi t}{3}\right]$

17-9 $a_0=3.183, a_1=10, a_2=6.362, a_3=0,$
$b_1=0=b_2=b_3$

17-11

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}[1+\mathrm{j}(\mathrm{j}n\pi/2-1)\sin n\pi/2+n\pi\sin n\pi/2]\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\pi t/2}$$

17-13 $\frac{30}{\pi}-\frac{60}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kt)}{(4k^2-1)}$

17-15 (a) $10+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{16}{(n^2+1)^2}+\frac{1}{n^6}}\cos\left(10nt-\tan^{-1}\frac{n^2+1}{4\pi^3}\right),$

(b) $10+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{16}{(n^2+1)}+\frac{1}{n^6}}\sin\left(10nt+\tan^{-1}\frac{4n^3}{n^2+1}\right)$

17-17 (a) 非奇非偶；(b) 偶；(c) 奇；
(d) 偶；(e) 非奇非偶

17-19 $\frac{5}{n^2\omega_o^2}\sin n\pi/2-\frac{10}{n\omega_o}(\cos\pi n-\cos n\pi/2)-\frac{5}{n^2\omega_o^2}(\sin\pi n-\sin n\pi/2)-\frac{2}{n\omega_o}\cos n\pi-\frac{\cos\pi n/2}{n\omega_o}$

17-21 $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2\pi^2}\left[1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$

17-23 $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi t)$

17-25

$$\sum_{\substack{n=1\\n=\text{奇数}}}^{\infty}\left\{\left[\frac{3}{\pi^2n^2}\left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)-1\right)+\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right]\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\left[\frac{3}{\pi^2n^2}\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)-\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right]\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right\}$$

17-27 (a)奇数，(b) -0.045，(c)0.3829

17-29 $2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n^2\pi}\cos(nt)-\frac{1}{n}\sin(nt)\right], n=2k-1$

17-31 $\omega_o'=\frac{2\pi}{T'}=\frac{2\pi}{T/\alpha}=\alpha\omega_o$

$a_n'=\frac{2}{T'}\int_0^{T'}f(\alpha t)\cos n\omega_o' t\,\mathrm{d}t$

令 $\alpha t=\lambda, \mathrm{d}t=\mathrm{d}\lambda/\alpha, \alpha T'=T$.则

$a_n'=\frac{2\alpha}{T}\int_0^{T}f(\lambda)\cos n\omega_o\lambda\,\mathrm{d}\lambda/\alpha=a_n$

同理，$b_n'=b_n$

17-33 $v_o(t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\pi t-\theta_n)$ V,

$A_n=\frac{8(4-2n^2\pi^2)}{\sqrt{(20-10n^2\pi^2)^2-64n^2\pi^2}},$

$\theta_n=90°-\tan^{-1}\left(\frac{8n\pi}{20\text{-}10n^2\pi^2}\right)$

17-35 $\frac{3}{8}+\sum_{n=\text{奇数}}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{2\pi n}{3}+\theta_n\right)$,其中

$A_n=\frac{\frac{6}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{9\pi^2n^2+(2\pi^2n^2/3-3)^2}},$

$\theta_n=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{2n\pi}{9}-\frac{1}{n\pi}\right)$

17-37 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-\cos\pi n)}{\sqrt{1+n^2\pi^2}}\cos(n\pi t-\tan^{-1}n\pi)$ V

17-39 $\frac{1}{20}+\frac{200}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}I_n\sin(n\pi t-\theta_n), n=2k-1,$

$\theta_n=90°+\tan^{-1}\frac{2n^2\pi^2-1200}{802n\pi},$

$I_n=\frac{1}{n\sqrt{(804n\pi)^2+(2n^2\pi^2-1200)^2}}$

17-41 $\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(2nt+\theta_n),$

$A_n=\frac{20}{\pi(4n^2-1)\sqrt{16n^2-40n+29}},$

$\theta_n=90°-\tan^{-1}(2n-2.5)$

17-43 (a)33.91 V,
(b)6.782 A,
(c)203.1 W

17-45 4.263 A,181.7 W

17-47 10%

17-49　(a)1.5326,
(b)1.7086,
(c)3.061%

17-51　$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}(1+jn\pi)e^{jn\pi t}$

17-53　$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{0.6321e^{j2n\pi t}}{1+j2n\pi}$

17-55　$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1+e^{-jn\pi}}{2\pi(1-n^2)}e^{jnt}$

17-57　$-3+\sum_{n=\infty,n\neq0}^{\infty}\frac{3}{n^3-2}e^{j50nt}$

17-59　$-\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{\infty}\frac{j4e^{-j(2n+1)\pi t}}{(2n+1)\pi}$

17-61　(a)$6+2.571\cos t-3.83\sin t+1.638\cos 2t-1.147\sin 2t+0.906\cos 3t-0.423\sin 3t+0.47\cos 4t-0.171\sin 4t$，(b)6.828

17-63　参见图G-40。

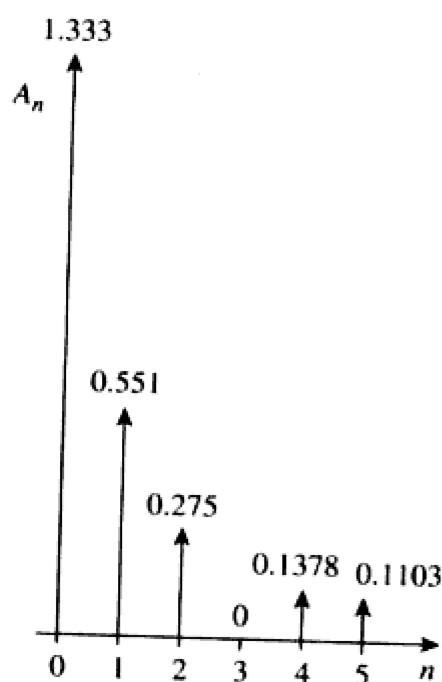


图 G-40　习题 17-63 波形图

17-65　参见图G-41。

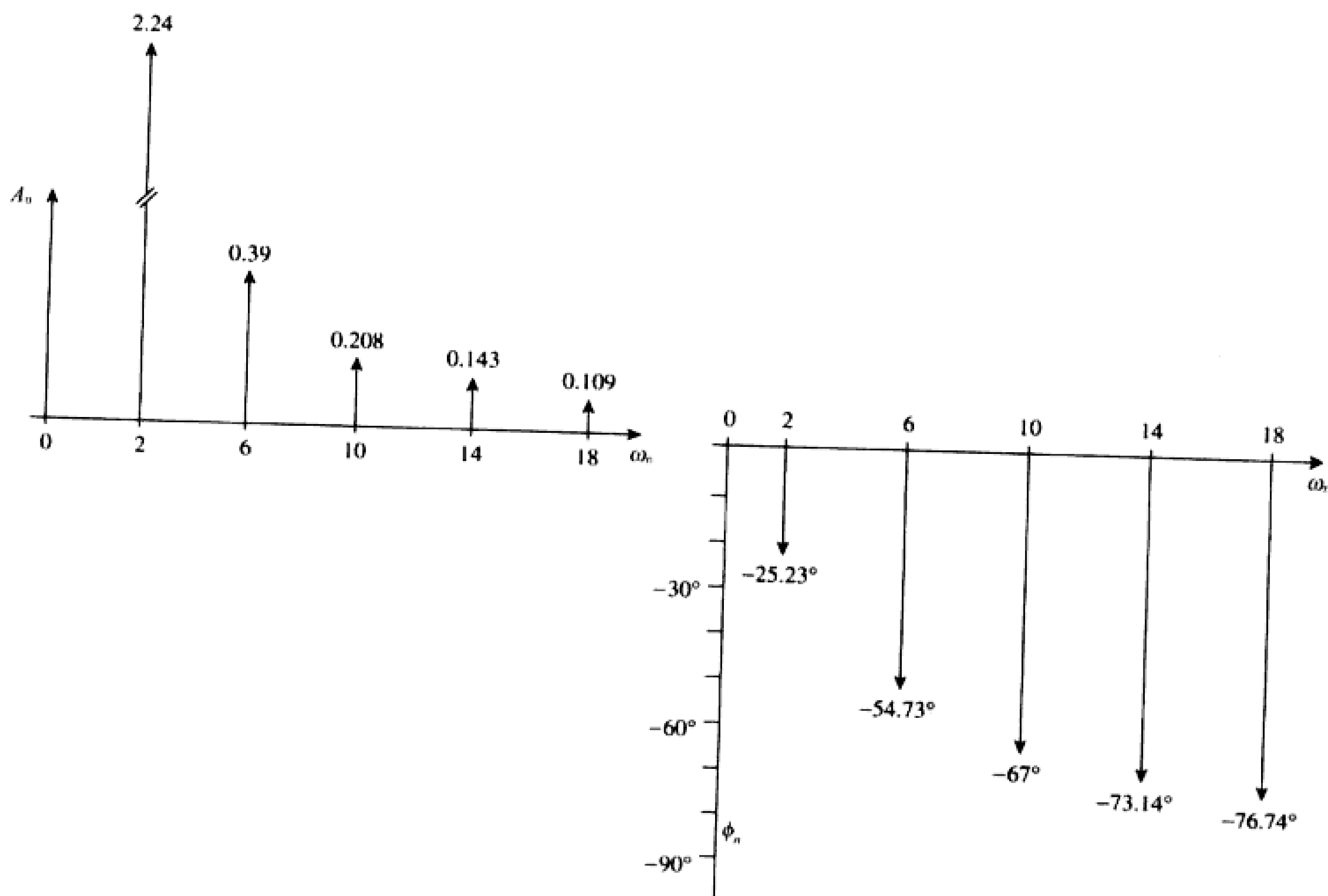


图 G-41　习题 17-65 波形图

17-67　DC COMPONENT = 4.950000E-0.1

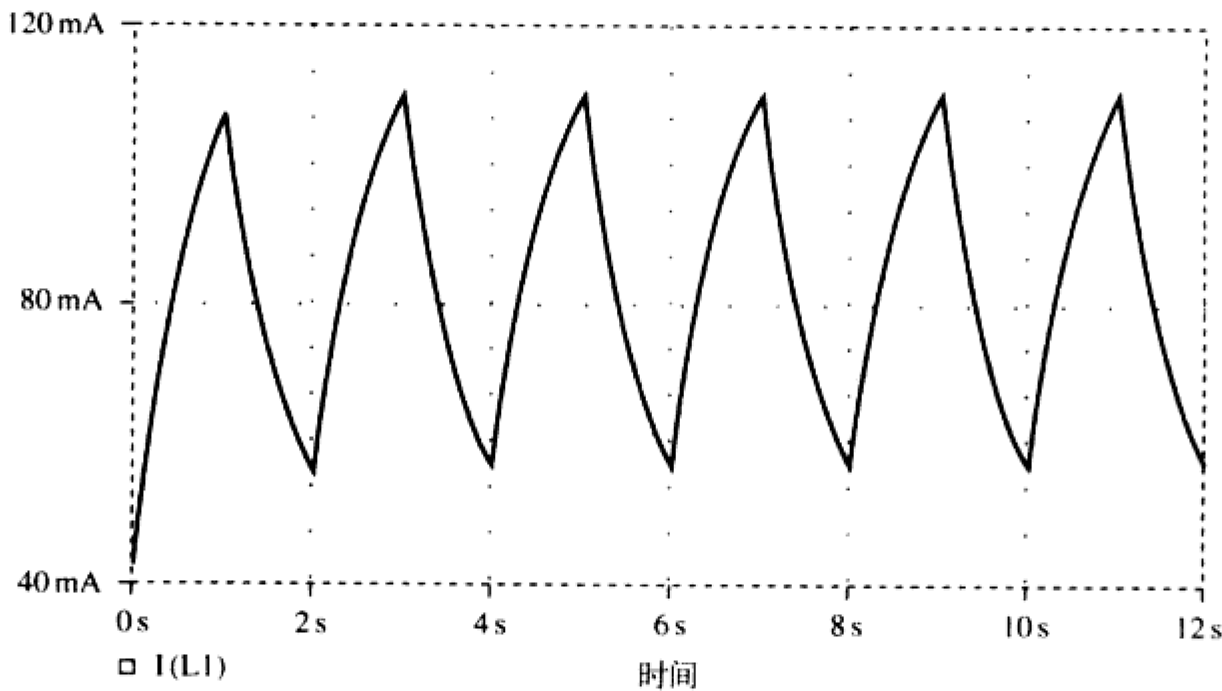
HARMONIC NO	FREQUENCY (HZ)	FOURIER COMPONENT	NORMALIZED COMPONENT	PHASE (DEG)	NORMALIZED PHASE (DEG)
1	1.667E-01	2.432E+00	1.000E+00	-8.996E+01	0.000E+00
2	3.334E-01	6.576E-04	2.705E-04	-8.932E+01	6.467E-01
3	5.001E-01	5.403E-01	2.222E-01	9.011E+01	1.801E+02
4	6.668E+00	3.343E-04	1.375E-04	9.134E+01	1.813E+02
5	8.335E-01	9.716E-02	3.996E-02	-8.982E+01	1.433E-01
6	1.000E+00	7.481E-06	3.076E-06	-9.000E+01	-3.581E-02
7	1.167E+00	4.968E-02	2.043E-01	-8.975E+01	2.173E-01
8	1.334E+00	1.613E-04	6.634E-05	-8.722E+01	2.748E+00
9	1.500E+00	6.002E-02	2.468E-02	-9.032E+01	1.803E+02

17-69

HARMONIC NO	FREQUENCY (HZ)	FOURIER COMPONENT	NORMALIZED COMPONENT	PHASE (DEG)	NORMALIZED PHASE (DEG)
1	5.000E-01	4.056E-01	1.000E+00	-9.090E+01	0.000E+00
2	1.000E+00	2.977E-04	7.341E-04	-8.707E+01	3.833E+00
3	1.500E+00	4.531E-02	1.117E-01	-9.266E+01	-1.761E+00
4	2.000E+00	2.969E-04	7.320E-04	-8.414E+01	6.757E+00
5	2.500E+00	1.648E-02	4.064E-02	-9.432E+01	-3.417E+00
6	3.000E+00	2.955E-04	7.285E-04	-8.124E+01	9.659E+00
7	3.500E+00	8.535E-03	2.104E-02	-9.581E+01	-4.911E+00
8	4.000E+00	2.935E-04	7.238E-04	-7.836E+01	1.254E+01
9	4.500E+00	5.258E-03	1.296E-02	-9.710E+01	-6.197E+00

TOTAL HARMONIC DISTORTION = 1.214285+01 PERCENT

17-71 参见图G-42。



图G-42 习题17-71波形图

17-73 300 mW

17-75 24.59 mF

17-77 (a) π, (b) -2 V, (c) 11.02 V

17-79 MATLAB程序及其运行结果如下所示：

```
%for problem 17.79
a=10;
c=4.*a/pi
for n=1:10
 b(n)=c/(2*n-1);
end
diary
n,b
diary off
```

n	b_n
1	12.7307
2	4.2430
3	2.5461
4	1.8187
5	1.414
6	1.1573
7	0.9793
8	0.8487
9	0.7488
10	0.6700

17-81 (a) $\frac{A^2}{2}$, (b) $|c_1| = 2A/(3\pi)$, $|c_2| = 2A/(15\pi)$, $|c_3| = 2A/(35\pi)$, $|c_4| = 2A/(63\pi)$

(c) 81.1%, (d) 0.72%

第18章

18-1 $\frac{2(\cos 2\omega - \cos\omega)}{j\omega}$

18-3 $\frac{j}{\omega^2}(2\omega\cos 2\omega - \sin 2\omega)$

18-5 $\frac{2j}{\omega} - \frac{2j}{\omega^2}\sin\omega$

18-7

(a) $\frac{2 - e^{-j\omega} - e^{-j2\omega}}{j\omega}$, (b) $\frac{5e^{-j2\omega}}{\omega^2}(1 + j\omega 2) - \frac{5}{\omega^2}$

18-9 (a) $\frac{2}{\omega}\sin 2\omega + \frac{4}{\omega}\sin\omega$,

(b) $\frac{2}{\omega^2} - \frac{2e^{-j\omega}}{\omega^2}(1 + j\omega)$

18-11 $\frac{\pi}{\omega^2 - \pi^2}(e^{-j\omega 2} - 1)$

18-13 (a) $\pi e^{-j\pi/3}\delta(\omega - a) + \pi e^{j\pi/3}\delta(\omega + a)$,

(b) $\frac{e^{j\omega}}{\omega^2 - 1}$,

(c) $\pi[\delta(\omega + b) + \delta(\omega - b)] + \frac{j\pi A}{2}$

$[\delta(\omega + a + b) - \delta(\omega - a + b) + \delta(\omega + a - b) - \delta(\omega - a - b)]$,

(d) $\frac{1}{\omega^2} - \frac{e^{-j4\omega}}{j\omega} - \frac{e^{-j4\omega}}{\omega^2}(j4\omega + 1)$

18-15 (a) $2j\sin 3\omega$, (b) $\frac{2e^{-j\omega}}{j\omega}$, (c) $\frac{1}{3} - \frac{j\omega}{2}$

18-17 (a) $\frac{\pi}{2}[\delta(\omega + 2) + \delta(\omega - 2)] - \frac{j\omega}{\omega^2 - 4}$,

(b) $\frac{j\pi}{2}[\delta(\omega + 10) - \delta(\omega - 10)] - \frac{10}{\omega^2 - 100}$

18-19 $\frac{j\omega}{\omega^2 - 4\pi^2}(e^{-j\omega} - 1)$

18-21 证明

18-23 (a) $\frac{30}{(6 - j\omega)(15 - j\omega)}$,

(b) $\frac{20e^{-j\omega/2}}{(4 + j\omega)(10 + j\omega)}$,

(c) $\frac{5}{[2 + j(\omega + 2)][5 + j(\omega + 2)]} + \frac{5}{[2 + j(\omega - 2)][5 + j(\omega - 2)]}$,

(d) $\frac{j\omega 10}{(2 + j\omega)(5 + j\omega)}$,

(e) $\frac{10}{j\omega(2 + j\omega)(5 + j\omega)} + \pi\delta(\omega)$

18-25 (a) $\frac{5}{2}\mathrm{sgn}(t) - 5e^{-2t}u(t)$,

(b) $(-5e^{-t} + 6e^{-2t})u(t)$

18-27 (a) $5\mathrm{sgn}(t) - 10e^{-10t}u(t)$,

(b) $4e^{2t}u(-t) - 6e^{-3t}u(t)$,

(c) $2e^{-20t}\sin(30t)u(t)$, (d) $\frac{1}{4}\pi$

18-29 (a) $\frac{1}{2\pi}(1 + 8\cos 3t)$, (b) $\frac{4\sin 2t}{\pi t}$,

(c) $3\delta(t + 2) + 3\delta(t - 2)$

18-31 (a) $x(t) = e^{-at}u(t)$,

(b) $x(t) = u(t + 1) - u(t - 1)$,

(c) $x(t) = \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{a}{2}e^{-at}u(t)$

18-33 (a) $\frac{2j\sin t}{t^2 - \pi^2}$, (b) $u(t - 1) - u(t - 2)$

18-35 (a) $\frac{e^{-j\omega/3}}{6 + j\omega}$,

(b) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2+\mathrm{j}(\omega+5)}+\frac{1}{2+\mathrm{j}(\omega-5)}\right]$,

(c) $\frac{\mathrm{j}\omega}{2+\mathrm{j}\omega}$, (d) $\frac{1}{(2+\mathrm{j}\omega)^2}$,

(e) $\frac{1}{(2+\mathrm{j}\omega)^2}$

18-37 $\frac{\mathrm{j}\omega}{4+\mathrm{j}3\omega}$

18-39 $\frac{10^3}{10^6+\mathrm{j}\omega}\left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{\omega^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\right)$

18-41 $\frac{2\mathrm{j}\omega(4.5+\mathrm{j}2\omega)}{(2+\mathrm{j}\omega)(4-2\omega^2+\mathrm{j}\omega)}$

18-43 $1000(\mathrm{e}^{-1t}-\mathrm{e}^{-1.25t})u(t)$ V

18-45 $5(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})u(t)$ A

18-47 $16(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})u(t)$ V

18-49 $0.542\cos(t+13.64°)$ V

18-51 16.667 J

18-53 π

18-55 682.5 J

18-57 2 J,87.43%

18-59 $(16\mathrm{e}^{-t}-20\mathrm{e}^{-2t}+4\mathrm{e}^{-4t})u(t)$ V

18-61 $2X(\omega)+0.5X(\omega+\omega_0)+0.5X(\omega-\omega_0)$

18-63 106个广播站

18-65 6.8 kHz

18-67 200 Hz,5 ms

18-69 35.24%

第19章

19-1 $\begin{bmatrix}4 & 1\\1 & 1.667\end{bmatrix}\Omega$

19-3 $\begin{bmatrix}4+\mathrm{j}6 & \mathrm{j}6\\\mathrm{j}6 & -\mathrm{j}4\end{bmatrix}\Omega$

19-5 $\begin{bmatrix}\frac{s^2+s+1}{s^3+2s^2+3s+1} & \frac{1}{s^3+2s^2+3s+1}\\\frac{1}{s^3+2s^2+3s+1} & \frac{s^2+2s+2}{s^3+2s^2+3s+1}\end{bmatrix}\Omega$

19-7 $\begin{bmatrix}29.88 & 3.704\\-70.37 & 11.11\end{bmatrix}\Omega$

19-9 $\begin{bmatrix}2.5 & 1.25\\1.25 & 3.125\end{bmatrix}\Omega$

19-11 参见图G-43。

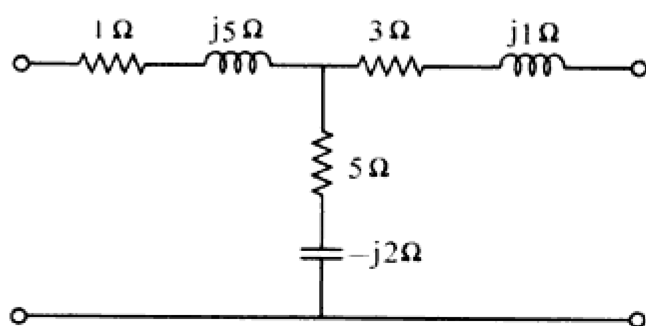


图 G-43 习题 19-11 电路图

19-13 329.9 W

19-15 24 Ω,384 W

19-17 $\begin{bmatrix}4.8 & -0.4\\-0.4 & 4.2\end{bmatrix}\Omega$, $\begin{bmatrix}0.21 & 0.02\\0.02 & 0.24\end{bmatrix}$S

19-19 $\begin{bmatrix}s+0.5 & -0.5\\-0.5 & 0.5+1/s\end{bmatrix}$S

19-21 参见图G-44。

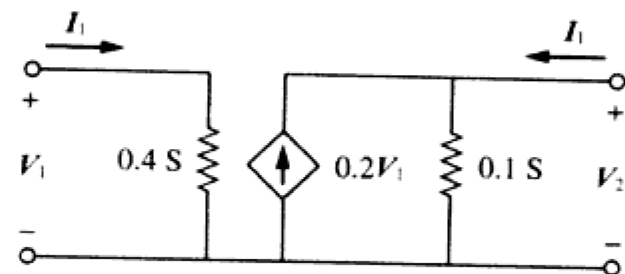


图 G-44 习题 19-21 电路图

19-23 (a) $\begin{bmatrix}s+2 & -(s+1)\\-(s+1) & \frac{s^2+s+1}{s}\end{bmatrix}$,

(b) $\frac{0.8(s+1)}{s^2+1.8s+1.2}$

19-25 参见图G-45。

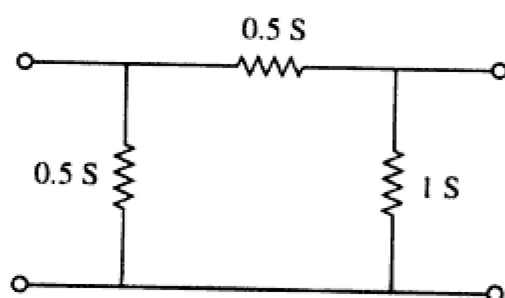


图 G-45 习题 19-25 电路图

19-27 $\begin{bmatrix}0.25 & 0.025\\5 & 0.6\end{bmatrix}$S

19-29 (a) 22 V,8 V, (b) 相同

19-31 $\begin{bmatrix}3.8\Omega & 0.4\\-3.6 & 0.2\mathrm{S}\end{bmatrix}$

19-33 $\begin{bmatrix}3.077+\mathrm{j}1.2821 & 0.3846-\mathrm{j}0.2564\\-0.3846+\mathrm{j}0.2564 & 0.0769+\mathrm{j}0.2821\end{bmatrix}$

19-35 $\begin{bmatrix} 2\,\Omega & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}$

19-37 1.1905 V

19-39 $g_{11} = \dfrac{1}{R_1 + R_2}, g_{12} = -\dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$

$g_{21} = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}, g_{22} = R_3 + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

19-41 证明

19-43 (a)$\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, (b)$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{Y} & 1 \end{bmatrix}$

19-45 $\begin{bmatrix} 1 - \mathrm{j}0.5 & -\mathrm{j}2\,\Omega \\ 0.25\,\mathrm{S} & 1 \end{bmatrix}$

19-47 $\begin{bmatrix} 0.3235 & 1.176 \\ 0.02941 & 0.4706 \end{bmatrix}$

19-49 $\begin{bmatrix} \dfrac{2s+1}{s} & \dfrac{1}{s}\Omega \\ \dfrac{(s+1)(3s+1)}{s}S & 2 + \dfrac{1}{s} \end{bmatrix}$

19-51 $\begin{bmatrix} 2 & 2 + \mathrm{j}5 \\ \mathrm{j} & -2 + \mathrm{j} \end{bmatrix}$

19-53 $z_{11} = \dfrac{A}{C}, z_{12} = \dfrac{AD - BC}{C}, z_{21} = \dfrac{1}{C}, Z_{22} = \dfrac{D}{C}$

19-55 证明

19-57 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}\Omega$, $\begin{bmatrix} \dfrac{7}{20} & \dfrac{-1}{20} \\ \dfrac{-1}{20} & \dfrac{3}{20} \end{bmatrix}\mathrm{S}$, $\begin{bmatrix} \dfrac{20}{7}\Omega & \dfrac{1}{7} \\ \dfrac{-1}{7} & \dfrac{1}{7}\mathrm{S} \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{3}\mathrm{S} & \dfrac{-1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{20}{3}\Omega \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 7 & 20\,\Omega \\ 1\,\mathrm{S} & 3 \end{bmatrix}$

19-59 $\begin{bmatrix} 16.667 & 6.667 \\ 3.333 & 3.333 \end{bmatrix}\Omega$, $\begin{bmatrix} 0.1 & -0.2 \\ -0.1 & 0.5 \end{bmatrix}\mathrm{S}$,

$\begin{bmatrix} 10\Omega & 2 \\ -1 & 0.3\,\mathrm{S} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 & 10\Omega \\ 0.3\,\mathrm{S} & 1 \end{bmatrix}$

19-61 $\begin{bmatrix} \dfrac{5}{3} & \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{4}{3} & \dfrac{5}{3} \end{bmatrix}\Omega$, $\begin{bmatrix} \dfrac{3}{5}\Omega & \dfrac{4}{5} \\ \dfrac{-4}{5} & \dfrac{3}{5}\mathrm{S} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \dfrac{5}{4} & \dfrac{3}{4}\Omega \\ \dfrac{3}{4}\mathrm{S} & \dfrac{5}{4} \end{bmatrix}$

19-63 $\begin{bmatrix} 0.8 & 2.4 \\ 2.4 & 7.2 \end{bmatrix}\Omega$

19-65 $\begin{bmatrix} \dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{bmatrix}\mathrm{S}$

19-67 $\begin{bmatrix} 4 & 63.29 \\ 0.1576 & 4.994 \end{bmatrix}$

19-69 $\begin{bmatrix} \dfrac{s+1}{s+2} & \dfrac{-(3s+2)}{2(s+2)} \\ \dfrac{-(3s+2)}{2(s+2)} & \dfrac{5s^2+4s+4}{2s(s+2)} \end{bmatrix}$

19-71 $\begin{bmatrix} 2 & -3.334 \\ 3.334 & 20.22 \end{bmatrix}\Omega$

19-73 $\begin{bmatrix} 14.628 & 3.141 \\ 5.432 & 19.625 \end{bmatrix}$

19-75 (a)$\begin{bmatrix} 0.3015 & -0.1765 \\ 0.0588 & 10.94 \end{bmatrix}$, (b) -0.0051

19-77 $\begin{bmatrix} 0.9488\angle -161.6^\circ & 0.3163\angle 18.42^\circ \\ 0.3163\angle -161.6^\circ & 0.9488\angle -161.6^\circ \end{bmatrix}$

19-79 $\begin{bmatrix} 4.669\angle -136.7^\circ & 2.53\angle -108.4^\circ \\ 2.53\angle -108.4^\circ & 1.789\angle -153.4^\circ \end{bmatrix}\Omega$

19-81 $\begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ 3.5 & 1.5 \end{bmatrix}\mathrm{S}$

19-83 $\begin{bmatrix} 0.3235 & 1.1765 \\ 0.02941 & 0.4706 \end{bmatrix}$

19-85 $\begin{bmatrix} 1.581\angle 71.59^\circ & -\mathrm{j} \\ \mathrm{j} & 5.661\times 10^{-4} \end{bmatrix}$

19-87 $\begin{bmatrix} -\mathrm{j}1.765 & -\mathrm{j}1.765 \\ \mathrm{j}888.2 & \mathrm{j}888.2 \end{bmatrix}$

19-89 −1613,64.15 dB

19-91 (a) 晶体管电压增益为−25.64，整个电路的电压增益为−9.615，
(b) 74.07，(c) 1.2 kΩ，(d) 51.28 kΩ

19-93 −17.74,144.5,31.17 Ω,−6.148 MΩ

19-95 参见图G-46。

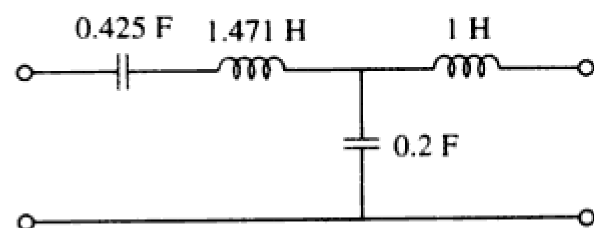


图 G-46　习题 19-95 电路图

19-97 0.25 F,0.3333 H,0.5 F

19-99 证明